Universidade Federal de Mato Grosso - CUA

Desenho Geométrico - uma sequência didática inicial

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins 2024

UFMT

Sumário

Autor

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins: Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2005), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2008) e Doutorado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2015). Atualmente é professor da Universidade Federal de Mato Grosso - Campus Universitário do Araguaia. Tem experiência na área de Matemática Pura e Ensino de Matemática, com ênfase em Otimização.

Carta ao leitor

O objetivo deste material é introduzir as técnicas do Desenho Geométrico. É uma primeira sequência didática de três aulas para este fim. Esta disciplina é parte do ensino da Geometria, estimula o aluno ao uso dos instrumentos geométricos e ao pensamento algorítmico. Ela faz uso da régua, compasso, esquadro e transferidor. Aqui são discutidas as formas de uso destes instrumentos, bem como algoritmos para a construção das formas geométricas mais básicas como: triângulos e seus pontos notáveis, quadriláteros notáveis, retas perpendiculares, paralelas, bissetriz e polígonos regulares.

Na Matemática do Ensino Fundamental, o ensino da Aritmética e depois da Álgebra são priorizados em relação à Geometria. Esta se resume a memorização de propriedades das figuras geométricas. O aluno muitas vezes não é instigado a reproduzir as figuras que são estudadas. Por exemplo, estudam-se as propriedades do quadrado, mas não o mecanismo de construí-lo. A mesma coisa acontece com o triângulo retângulo, onde decoramos o Teorema de Pitágoras mas não sabemos reproduzir fielmente a figura. Dessa forma o ensino da Geometria fica incompleto e perde-se a exatidão das formas geométricas. Não faz sentido então aprender equações e fórmulas se sempre fazemos desenhos aproximados. É o Desenho Geométrico que faz a conexão entre a Geometria Euclidiana abstrata, dos axiomas e teoremas dos livros, com a aplicação desta no mundo real. Ele oferece técnicas e algoritmos que nos possibilitam a reprodução das figuras geométricas e, consequentemente, o aproveitamento de suas propriedades no nosso dia a dia.

BNCC

Habilidades estabelecidas pela BNCC[1] que são abordadas nesta sequência didática.

- Unidade temática: Geometria
- Objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades:
  1. Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados:
     - EF06MA18: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
     - EF06MA19: Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos
     - EF06MA20: Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles
  2. Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares
     - EF06MA22: Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
  3. A circunferência como lugar geométrico:
     - EF07MA22: Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
  4. Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos
     - EF07MA26: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
  5. Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero
     - EF07MA27: Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
     - EF07MA28: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
  6. Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares
     - EF08MA15: Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
     - EF08MA16: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
  7. Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas
     - EF08MA17: Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
  8. Polígonos regulares
     - EF09MA15: Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

[1] http://basenacionalcomum.mec.gov.br

Capítulo 1

Aula 1: Instrumentos geométricos

1.1 Objetivos

Conteúdo

(i) Instrumentos geométricos: régua, compasso, esquadro e transferidor;

(ii) Teorema de Tales;

(iii) Soma dos ângulos internos;

(iv) Polígonos regulares;

(v) Construções com **régua e compasso**;

(vi) Transporte de segmento

Habilidades

EF06MA19, EF06MA20, EF06MA20, EF06MA22, EF07MA22 e EF07MA24.

1.2 Instrumentos geométricos

Em Desenho Geométrico, queremos fazer desenhos com a melhor precisão possível, então alguns cuidados devem ser tomados. O primeiro deles é a representação do ponto. Não vamos fazer uma "bolinha"com o lápis para representar um ponto. Um ponto que é interseção de dois segmentos não precisa de uma "bolinha"para reforçar a sua existência. O mesmo comentário serve para pontos que são interseção entre duas circunferências ou entre um segmento e uma circunferência. Um ponto isolado será sempre representado por uma pequena cruz (feita com a régua) e um segmento de reta isolado é representado com uma cruz em cada extremo. Isso é necessário para dar mais precisão ao fincar o compasso em um desses tipos de ponto.

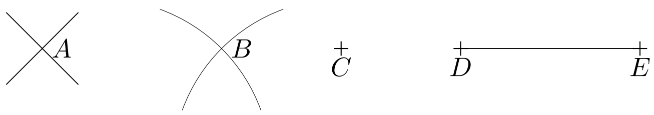

Figura 1.1: O ponto A é interseção de dois segmentos, B é a interseção de dois arcos de circunferência, C é um ponto isolado e $\overline{DE}$ é um segmento de reta.

Outros cuidados são:

1. Deve-se priorizar o uso de lapiseiras 0.3 ou 0.5 mm para traços mais finos.
2. O grafite deve ser duro (pode ser o HB (o mais comum)).
3. Os traços devem ser suaves, para evitar pequenos deslizes dos instrumentos geométricos.
4. O ideal é que se use uma mesa ou uma bancada firme para desenhar.
5. Use um bloco de folhas sobre a mesa para desenhar ao invés de uma única folha, dessa forma a ponta seca do compasso não desliza.

Compasso

O compasso é um instrumento de desenho bem conhecido que faz arcos de circunferência. Também serve para fazer o chamado *transporte de segmento*, que é simplesmente marcar um segmento numa reta com comprimento igual a outro segmento dado. O compasso possui a *ponta seca* em forma de agulha de metal para marcar o centro da circunferência e outra ponta de grafite. Em alguns compassos, a ponta de grafite pode ser substituída por um adaptador que segura lapiseira ou caneta.

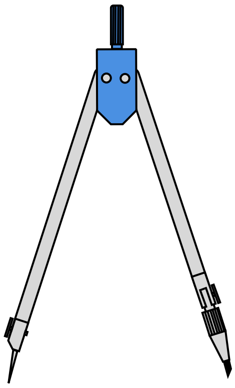

Figura 1.2: Compasso

Um bom compasso precisa de:

- A ponta metálica precisa ser bem afiada para penetrar no papel.
- O grafite precisa ser afiado em bisel. Para isso use uma lixa de unha.
- A engrenagem das pernas do compasso precisa estar bem rígida. Aperte os parafusos com chave de fenda ou *philips*.

O uso do compasso requer alguns cuidados e treino:

- Uma vez que foi estabelecido o tamanho da abertura do compasso, manipule o compasso apenas pelo pino ou pela perna da ponta seca. Jamais segure-o pelas duas pernas simultaneamente.
- Tente fincar a ponta seca com a melhor precisão possível. Neste momento, segure-o pela ponta seca como se estivesse segurando um lápis.
- Para fazer o giro, não posicione o compasso exatamente na vertical, incline-o um pouco para frente e gire-o arrastando o grafite suavemente.

Esquadro

O esquadro é o instrumento geométrico que constrói retas paralelas ou perpendiculares. Tem um formato de triângulo retângulo, geralmente o triângulo de $45°$, $45°$ e $90°$ ou o triângulo de $30°$, $60°$ e $90°$. O esquadro trabalha em conjunto com uma régua ou com outro esquadro.

Um problema básico em Desenho Geométrico é

> Problema: Como traçar uma reta perpendicular a um segmento de reta $\overline{AB}$ dado por um ponto C também dado? (veja a figura abaixo)

Você identifica esse problema na construção de altura de triângulos, triângulos retângulos, construção de quadrados e retângulos, reta tangente à uma circunferência e distância entre ponto e reta em geral.

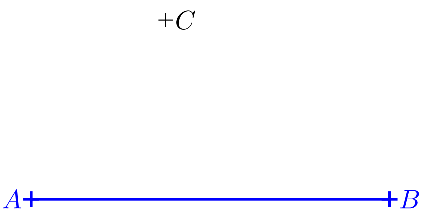

Figura 1.3: segmento de reta $\overline{AB}$ e ponto C dados

Para traçar a perpendicular usando o esquadro, faça:

1. Alinhe a régua ao segmento de reta $\overline{AB}$.
2. Segurando a régua com firmeza, encaixe o esquadro na régua (como na figura abaixo).
3. Deslize o esquadro sobre a régua para direita ou esquerda até que ele se alinhe ao ponto C.
4. Trace a perpendicular.

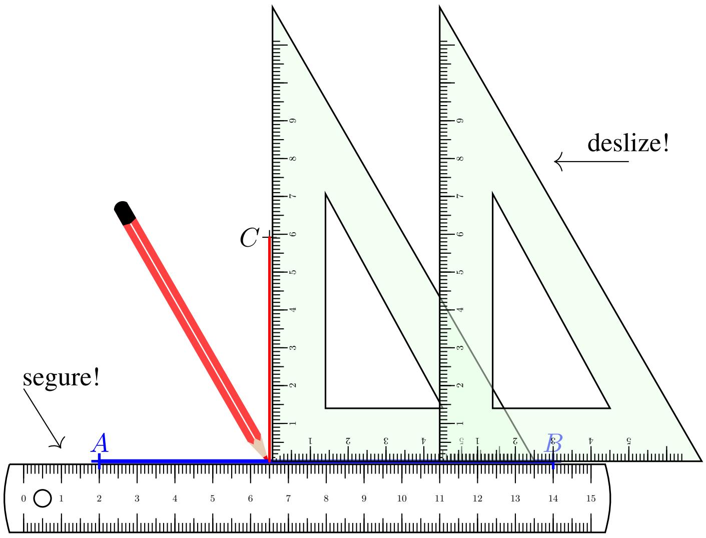

Figura 1.4: Manuseio do esquadro para construção da perpendicular

Existem outros possíveis encaixes entre os instrumentos de modo a produzir uma perpendicular.
Outro problema básico do desenho geométrico é

Problema: Como traçar uma reta paralela a um segmento de reta $\overline{AB}$ dado por um ponto C também dado? (veja a figura 1.3)

Para construir uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por C, faça:

1. Alinhe o esquadro ao segmento $\overline{AB}$.
2. Segurando o esquadro com firmeza, encaixe a régua no esquadro (como na figura abaixo).
3. Segurando a régua com firmeza, deslize o esquadro para cima até que se alinhe ao ponto C.
4. Trace a paralela.

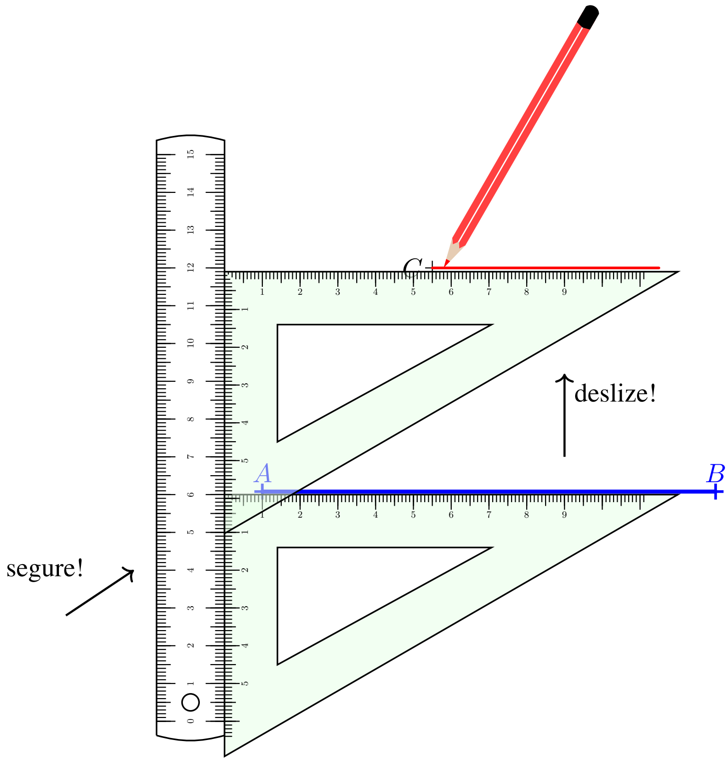

Figura 1.5: Manuseio do esquadro para construção da paralela

Transferidor

O transferidor é o instrumento geométrico que mede e constrói ângulos. Tem um formato de semicírculo ou de círculo com uma escala de medição graduada em graus. Na figura abaixo, por exemplo, o ângulo esquerdo da base do triângulo mede $54°$.

Este instrumento tem os seguintes elementos:

1. Linha de fé: reta que liga as graduações dos ângulos $0°$ e $180°$.

2. Centro do transferidor: ponto médio da linha de fé.

3. Limbo: borda do transferidor que contém a graduação dos ângulos.

Para medir um ângulo com o transferidor, coloque seu centro sobre o vértice do ângulo e a linha de fé sobre um dos lados do ângulo (o lado mais conveniente). Veja na figura abaixo. Caso o comprimento dos lados do ângulo seja pequeno em relação ao instrumento, é necessário que os prolongue. Depois é só fazer a leitura da medida. Observe que neste transferidor abaixo, existe uma graduação que aumenta no sentido anti-horário e outra no sentido horário. Você usa a mais conveniente.

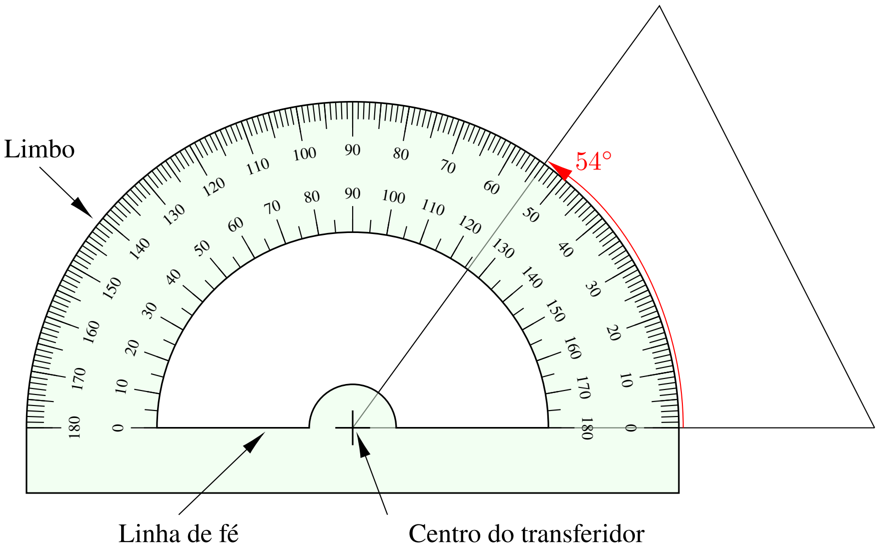

Figura 1.6: Manuseio do transferidor para medição de ângulo

Para construir um ângulo específico usando o transferidor também é fácil: trace um segmento de reta $\overline{AB}$ horizontal, por exemplo. Para construir um ângulo de 38° no ponto A, centralize o transferidor sobre A e a linha de fé alinhada ao segmento. Agora marque o ponto no limbo do transferidor na medida 38 (ponto C em vermelho). Retire o transferidor e ligue o ponto C ao ponto A. O ângulo $C\widehat{A}B$ medirá 38°.

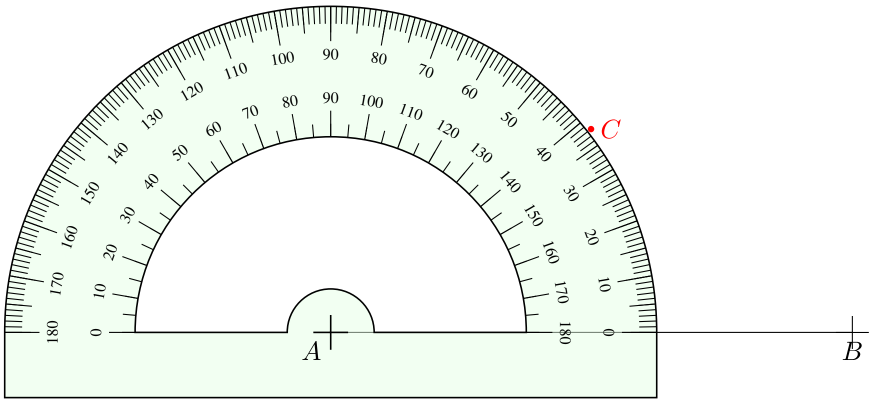

Figura 1.7: Manuseio do transferidor para construção de ângulo

Sugestões

1. Se possível, é importante que os alunos utilizem uma mesa firme e com maior espaço. O espaço de uma carteira de braço não é muito adequado.

2. Peça aos alunos para organizarem as folhas de papel em um bloco.

3. Primeiramente treine o uso do compasso. Desenhos de círculos muito pequenos tendem a ser mais difíceis de se manter a estabilidade do instrumento. É preciso adquirir suavidade no giro.

4. Treine o uso do esquadro combinado com a régua, pois a manipulação dos dois instrumentos simultaneamente tende a deslocá-los da posição correta. Também é preciso treinar segurá-los com uma só mão na posição final enquanto faz-se o traço.

1.3 Atividades

É importante frisar que atividades de Construção e medição inevitavelmente produzem erros. Os motivos são vários: espessura do grafite, mal posicionamento dos instrumentos, erros de aproximação nas medições com régua/transferidor, pequenas perturbações nos instrumentos, na mesa ou no papel e etc. São erros inerentes ao processo e não podem ser evitados, mas podem ser minimizados. Isso deve ser discutido em sala. O aluno deve ser incentivado a identificar suas principais falhas e corrigi-las.

Atividade 1. Usando a graduação da régua e o esquadro: construção de um quadrado com lado de $5\ cm$.

1. Construa uma reta e marque um ponto A próximo à extremidade (como na figura 1.1).
2. Meça $5\,cm$ com a régua a partir do ponto A e marque um ponto B.
3. Com esquadro e régua, construa uma reta perpendicular a partir do ponto A (como na figura 1.4).
4. Repita o passo anterior a partir do ponto B.
5. Meça $5\,cm$ na reta perpendicular a partir do ponto A e marque um ponto D.
6. Construa a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por D usando o mesmo procedimento da figura 1.5.

Questionário.
1. Trace as diagonais do quadrado e meça o ângulo entre elas.
2. Meça o comprimento da diagonal com a régua. Seu resultado é condizente com o teorema de Pitágoras? Faça o cálculo (se preciso, use uma calculadora).

Atividade 2. Usando a graduação da régua e o esquadro: O Teorema de Tales com uso da calculadora.

1. Construa um feixe de quatro retas paralelas usando o procedimento da figura 1.5 (as distâncias entres as retas podem variar).
2. Construa duas retas oblíquas com inclinações quaisquer. O resultado do desenho deve ficar parecido com a figura abaixo.
3. Nomeie os pontos de interseção como na figura abaixo.
4. Meça os segmentos indicados abaixo com a régua e anote.
5. Com a calculadora, compute as frações que validam o Teorema de Tales:

$$\frac{EF}{FG}=\frac{IJ}{JK}? \qquad \frac{EG}{GH}=\frac{IK}{KL}? \qquad \frac{EG}{FH}=\frac{IK}{JL}?$$

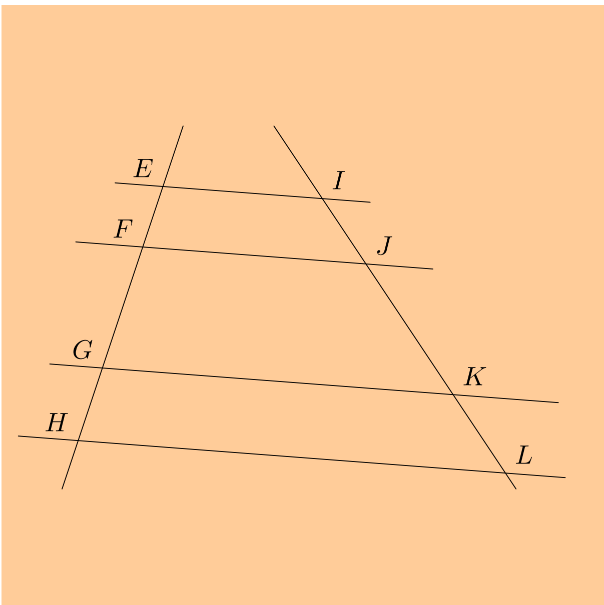

Figura 1.8: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais

Atividade 3. Usando a régua e o transferidor: Soma dos ângulos internos de um polígono.

1. Desenhe um triângulo, um quadrilátero e um pentágono de medidas aleatórias.
2. Meça os ângulos internos dos polígonos com o transferidor e anote.
3. Verifique que a soma dos ângulos é $180°$, $360°$ e $540°$ para o triângulo, o quadrilátero e o pentágono respectivamente.

Atividade 4. Usando a régua e o transferidor: Soma dos ângulos externos de um polígono.

1. Desenhe um triângulo, um quadrilátero e um pentágono de medidas aleatórias.
2. Meça os ângulos externos dos polígonos com o transferidor e anote.
3. Verifique que a soma dos ângulos é $360°$ em todos os polígonos.

Atividade 5. Construção do pentágono regular com régua, compasso e transferidor.

Antes de iniciarmos a construção, é importante que o aluno visualize o resultado esperado. Então rascunhe um pentágono regular e ligue seu centro aos cinco vértices. Cada ângulo central gerado mede $\frac{360}{5} = 72°$. Esse é caminho para nossa construção, que pode ser usada para construir qualquer polígono regular.

1. Construa uma circunferência de centro O e um raio $\overline{OA}$.
2. Com o transferidor centrado em O e alinhado a $\overline{OA}$, marque o ponto C' na medida de $72°$ (como na figura **??**).
3. Construa a semirreta $\overline{OC'}$, que interceptará a circunferência no ponto C.
4. Agora repita o procedimento: Com o transferidor centrado em O e alinhado a $\overline{OC}$, marque um ponto D sobre a circunferência de modo que $D\widehat{O}C = 72°$ e assim por diante.
5. Ligue os pontos gerados sobre a circunferência.

Capítulo 2

Aula 2: Transporte de segmento, mediatriz e ponto médio

2.1 Objetivos

Conteúdo

(i) Transporte de segmento;

(ii) Construção do triângulo equilátero;

(iii) Construção do hexágono regular;

(iv) Construção da mediatriz e do ponto médio;

(v) Construção do baricentro de um triângulo;

(vi) Construção da circunferência circunscrita a um triângulo.

Habilidades

EF06MA18, EF06MA19, EF06MA20, EF06MA22, EF07MA22, EF07MA24, EF07MA26, EF07MA28, EF08MA15, EF08MA17 e EF09MA15.

2.2 Construções com régua e compasso

Em Desenho Geométrico falamos muito no uso da régua **sem graduação** ou **sem escala**. Essas expressões querem dizer que podemos usar a régua para ligar dois pontos no desenho, porém não podemos medir o comprimento deste segmento usando a escala. Na prática, isso não é um fator muito limitante, já que podemos usar o compasso para copiar o comprimento de um segmento. Problemas da Geometria cujas soluções não necessitam do uso do esquadro, do transferidor e da graduação da régua são chamados de **construções com régua e compasso**. Esse tipo de construção remonta à antiga Grécia e tem grande importância na história da Matemática.

Veremos que o uso do esquadro ou do transferidor não é imprescindível. É possível, por exemplo, usarmos o compasso ao invés do esquadro para traçar retas perpendiculares ou paralelas. Também é possível usarmos apenas compasso e régua para construir a bissetriz de um **ângulo dado** (um ângulo qualquer no desenho) ou para replicá-lo na nossa construção.

Ao resolvermos exercícios de construção com régua e compasso, é comum encontrarmos algumas expressões do tipo "Dado um segmento (ou uma reta, ou triângulo, ou uma circunferência e etc), construa alguma coisa", "Construa alguma coisa num triângulo (ou num quadrado e etc)"e assim por diante. Nestes casos, ou o objeto está desenhado no exercício e você deve construir algo sobre ele ou então você está livre para desenhar o que quiser e do tamanho que quiser. Então, por exemplo, num exercício como "Construa o baricentro de um triângulo", você está livre para desenhar qualquer modelo de triângulo e fazer a construção do baricentro.

2.3 Construção do transporte de segmento

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ no plano, podemos replicá-lo (fazer cópias dele) em qualquer parte do plano e em qualquer posição. Este fato óbvio está na Geometria sob a forma de um axioma chamado de **transporte de segmento**. Seu enunciado é o seguinte: dado um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overline{CD}$, existe um único ponto X sobre a semirreta tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CX}$.

Para fazer o transporte de segmento com régua e compasso:

1. Com o compasso, meça o segmento $\overline{AB}$.

2. Com a ponta seca do compasso sobre C, marque X sobre a semirreta $\overrightarrow{CD}$.

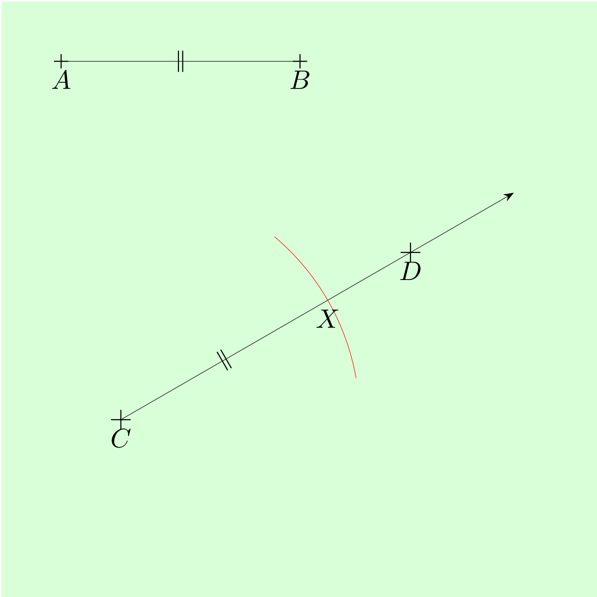

Figura 2.1: Transporte de segmento

Desse forma fizemos uma cópia $\overline{CX}$ do segmento $\overline{AB}$. É claro que a semirreta $\overrightarrow{CD}$ pode ser construída em qualquer lugar do plano.

Observação. *O passo 1 deve ser feito com cautela: a abertura do compasso deve ficar idêntica ao tamanho do segmento. O passo 2 deve ser treinado pelo aluno. Para marcar o ponto X, poderíamos traçar uma circunferência completa, mas isso é desnecessário e sobrecarrega o desenho. A parte da circunferência que nos interessa é apenas um pequeno arco que intercepta o segmento e determina o ponto X. Então a técnica é fazer o compasso girar produzindo apenas este arco.*

2.4 Atividades

Atividade 1. Construção do triângulo equilátero:

1. Trace um segmento de reta $\overline{AB}$ (como na figura 1.3).
2. Com a ponta seca do compasso sobre A e raio $\overline{AB}$, trace uma circunferência.
3. Com a ponta seca do compasso sobre B e mesmo raio (não segure o compasso pelas duas pernas para que o raio não se altere!), trace outra circunferência, que intercepta a primeira em dois pontos C e D.
4. Ligue os pontos A, B e C.

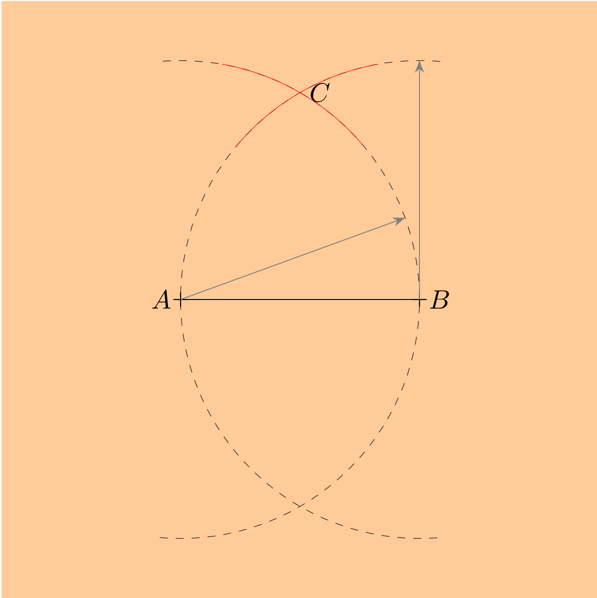

Figura 2.2: Construção do triângulo equilátero

Atividade 2. Construção do hexágono regular:

1. Trace uma circunferência qualquer (seu raio será do tamanho do lado do hexágono regular).
2. Com a ponta seca do compasso sobre um ponto qualquer da circunferência e mesmo raio, marque um segundo ponto na circunferência.
3. Com a ponta seca sobre esse segundo ponto e mesmo raio, marque um terceiro ponto.
4. Esse processo deve ser feito cinco vezes.
5. Ligue os pontos construídos.

Observação. *Possível contratempo: aqui o aluno pode se deparar com o problema de o sexto ponto construído não coincidir com o primeiro, ou seja, se deparar com o problema de o compasso não dividir a circunferência em seis partes exatamente iguais. Reveja as condições que um compasso deve ter para um bom desenho e como manipulá-lo corretamente.*

Atividade 3. Construção de um losango com **régua e compasso**:

1. Trace um ângulo qualquer $\widehat{A}$.
2. Com a ponta seca do compasso sobre o vértice A e raio qualquer, trace uma circunferência, que interceptará os lados do ângulo em dois pontos B e C.
3. Com centro em cada um destes dois pontos e mesmo raio, trace outras duas circunferências, que se interceptarão em um ponto D.
4. Ligue os pontos A, B, C e D.

Observação. *Depois que ficar claro o papel das três circunferências nesta construção, essa atividade pode ser repetida usando o compasso para produzir apenas pequenos arcos ao invés de circunferências completas.*

Questionário.

1. $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes? Justifique.
2. Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são congruentes? Justifique.
3. Verifique com o transferidor qual o ângulo entre as diagonais.
4. Como podemos utilizar os instrumentos geométricos para verificar se os lados opostos do losango são paralelos?
5. Verifique com transferidor que os ângulos opostos são congruentes.
6. Qual a soma entre dois ângulos consecutivos?
7. Use a régua para verificar que as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

Atividade 4. Construção de um triângulo cujos lados são dados.

Desenhe três segmentos aleatórios $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$. Eles servirão de lados para um triângulo. É claro que pela desigualdade triangular, um lado não pode ser maior que a soma dos outros dois. Caso contrário, o triângulo não fecha.

1. Faça uma cópia do segmento $\overline{AB}$ usando o compasso para medir (transporte de segmento).
2. Meça o segundo segmento $\overline{CD}$ com o compasso e, com a ponta seca do compasso sobre A, construa uma circunferência.
3. Meça o terceiro segmento $\overline{EF}$ com o compasso e, com a ponta seca do compasso sobre B, construa uma segunda circunferência.
4. As duas circunferências se interceptam em dois pontos P e Q.
5. Ligue os pontos A, B e P.

2.5 Construção da mediatriz e ponto médio de um segmento

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, sua mediatriz e seu ponto médio podem ser construídos em um mesmo procedimento. Esta construção é fundamental no Desenho Geométrico e está presente em várias outras construções mais elaboradas. Seguimos os seguintes passos:

1. Traçamos uma circunferência com centro em A e raio maior que a metade do comprimento AB.
2. Com este mesmo raio, traçamos uma circunferência com centro em B.
3. Sejam C e D os pontos de interseção das duas circunferências. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{CD}$.

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ e, portanto, o ponto M de interseção entre a reta e o segmento é o ponto médio de $\overline{AB}$.

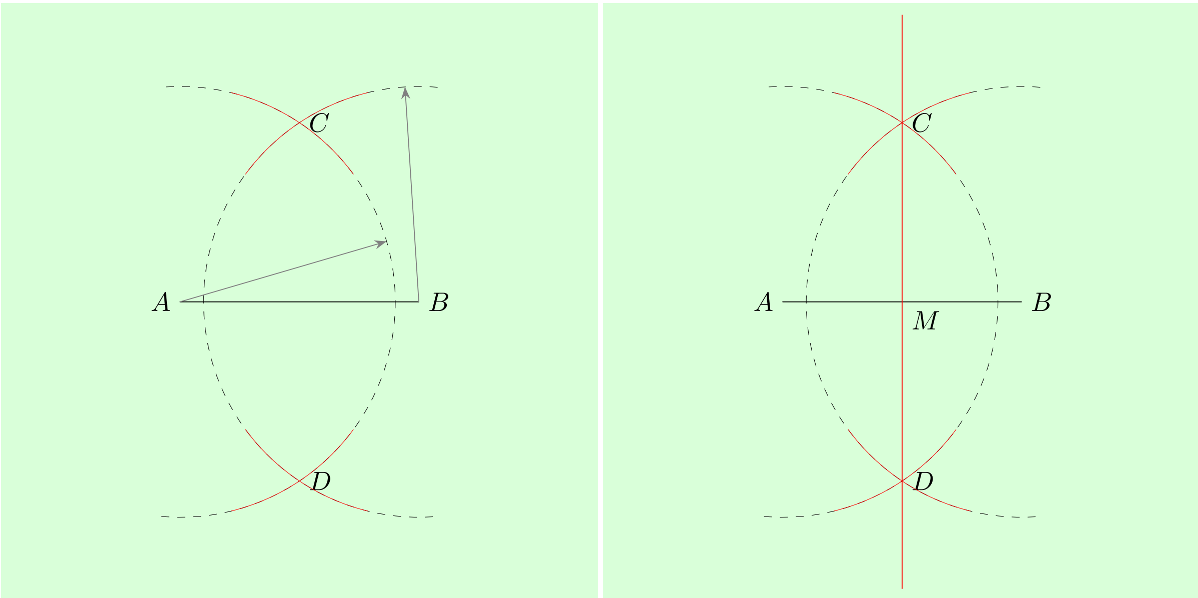

Figura 2.3: Evolução do traço

Na prática, não é necessário traçar as duas circunferências completamente. Como o intuito é encontrar apenas os pontos C e D, basta que façamos pequenos arcos de mesmo raio, como os destacados em vermelho.

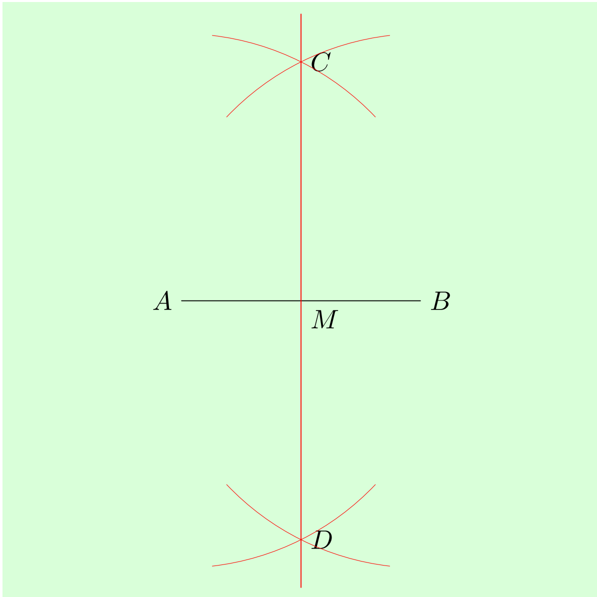

Figura 2.4: Mediatriz e ponto médio

Além disso, quanto mais afastados os pontos C e D estão um do outro, mais precisa fica a posição da mediatriz, isso justifica a escolha de um raio suficientemente grande, podendo exceder o próprio comprimento AB:

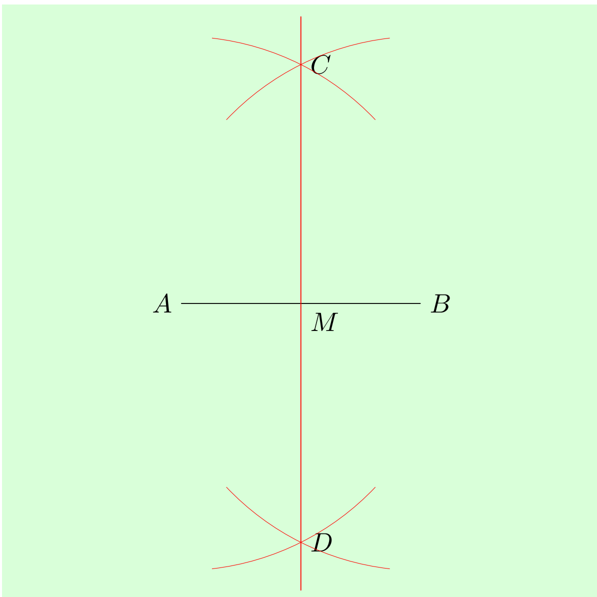

Figura 2.5: Mediatriz bem construída

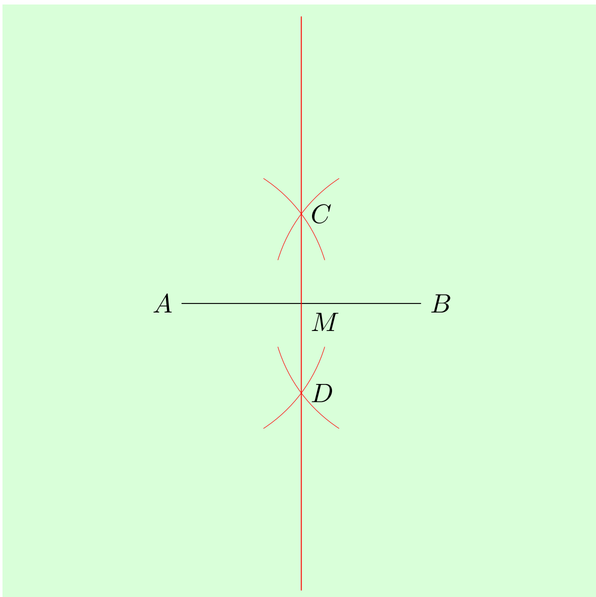

Figura 2.6: Mediatriz mal construída

Por que essa construção funciona? O quadrilátero $ACBD$ é um losango (basta ligar os pontos), já que tem todos os lados com o mesmo comprimento. Uma das propriedades do losango é que suas diagonais são perpendiculares entre si e se interceptam em seus respectivos pontos médios, por isso $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{CD}$ e M é ponto médio de $\overline{AB}$.

Propriedade 2.1

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si, se interceptam em seus respectivos pontos médios e são bissetrizes dos ângulos dos vértices.

2.6 Atividades

Atividade 1. Construção do baricentro de um triângulo com **régua e compasso**:

1. Construa um triângulo ABC qualquer.
2. Localize o ponto médio M do lado $\overline{BC}$ através da construção da mediatriz e do ponto médio como na figura 2.3.
3. Construa a mediana $\overline{AM}$.
4. Repita o processo localizando os pontos médios N e P dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente e construa as medianas $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$.
5. O baricentro é o ponto G da intercessão das três medianas.

Questionário.

1. Com o transferidor, certifique que as medianas não são necessariamente bissetrizes do triângulo.
2. Também com o transferidor, certifique que as medianas não são necessariamente perpendiculares aos lados do triângulo.
3. Verifique com o compasso que o baricentro divide cada mediana na proporção de 2:1 da seguinte forma: Meça $\overline{GM}$ com o compasso. Com essa abertura e centro em A, marque um ponto R sobre a mediana $\overline{AM}$. Com a ponta seca sobre R e mesma abertura, marque outro ponto sobre $\overline{AM}$. Esse último ponto deve coincidir com G. Conclua que $\overline{AG} = 2\overline{GM}$.
4. Verifique o mesmo fato medindo $\overline{AG}$ e $\overline{GM}$ com a régua.

Atividade 2. Construção do circuncentro e da circunferência circunscrita a um triângulo dado.

1. Construa um triângulo ABC qualquer.
2. Construa a mediatriz do lado $\overline{BC}$.
3. Repita o processo nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
4. As três mediatrizes devem se encontrar num único ponto O, o circuncentro.
5. Com a ponta seca do compasso sobre O, abra-o até A e construa a circunferência.

Capítulo 3

Aula 3: Perpendicular e bissetriz

3.1 Objetivos

Conteúdo

(i) Construção da reta perpendicular a um segmento dado;

(ii) Construção da paralela a um segmento dado;

(iii) Construção do quadrado e do retângulo;

(iv) Construção da altura de um triângulo;

(v) Construção dos ângulos de $15°$, $30°$, $45°$ e $60°$;

(vi) Construção do incentro e da circunferência inscrita a um triângulo.

Habilidades

EF06MA20, EF06MA22, EF07MA28, EF08MA15, EF08MA17 e EF09MA15.

3.2 Construção da perpendicular a um segmento dado por um ponto dado

Dados um segmento de reta $\overline{AB}$ e um ponto C fora, como na figura abaixo, gostaríamos de traçar a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa por C. Essa construção é a base para construirmos quadrados, retângulos, as alturas de um triângulo e etc. O procedimento é o seguinte:

1. Com a ponta seca do compasso em C e raio qualquer suficientemente grande, traçamos uma circunferência que intercepta $\overline{AB}$ em dois pontos, D e E.

2. Agora construímos a mediatriz de DE, ou seja, com a ponta seca do compasso em D e raio qualquer maior que a metade do comprimento DE, traçamos uma circunferência e, com esse mesmo raio, traçamos outra circunferência centrada em E.

3. Seja F uma das duas interseções entre as duas últimas circunferências. Ligamos $\overline{CF}$.

O segmento $\overline{CF}$ é a perpendicular procurada. É fácil perceber porque essa construção funciona. Desse vez, o quadrilátero $DCEF$ é um deltoide/pipa (ligue os pontos), que tem por propriedade a perpendicularidade entre suas diagonais $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$. Além disso, o ponto H de interseção entre as diagonais é ponto médio de $\overline{DE}$.

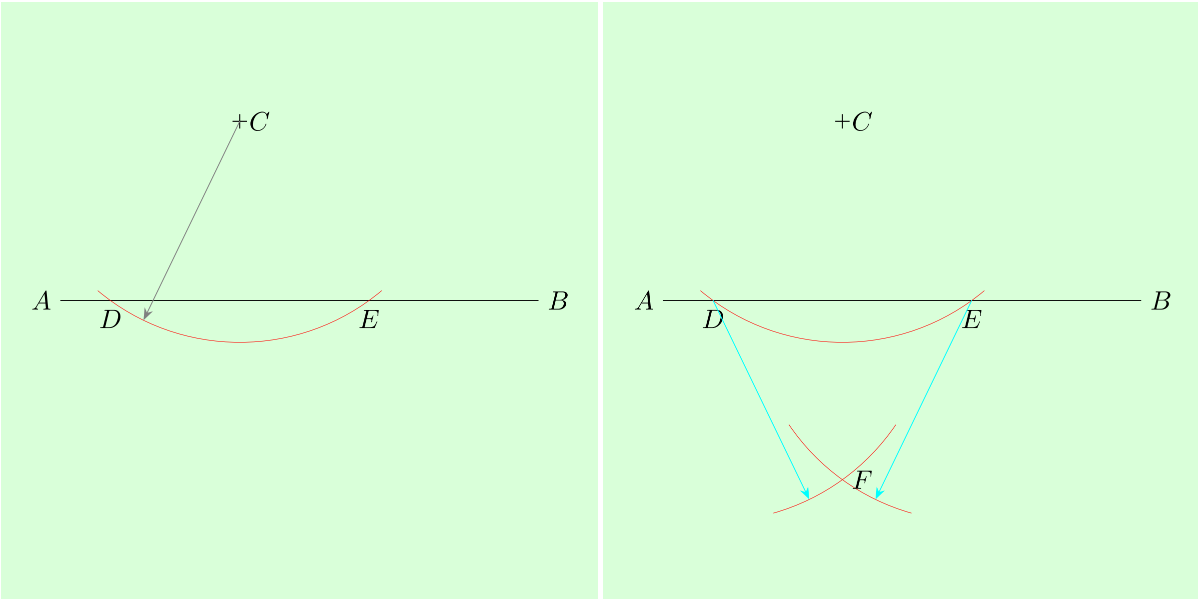

Figura 3.1: Evolução do traço da perpendicular por C

Vejamos que a etapa 2 é a construção da mediatriz $\overline{CF}$ e do ponto médio H do segmento de reta $\overline{DE}$.

3.3 Atividades

Atividade 1. Construção de um retângulo com **régua e compasso**: Dados dois segmentos a e b, construa um retângulo com essas medidas de lados:

1. Trace uma reta r e um ponto A sobre r.
2. Trace a reta perpendicular a r que passa por A. Para isso: com abertura qualquer e ponta seca sobre A, marque dois pontos P e Q sobre r. Construa a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$.
3. Com abertura a e ponta seca do compasso sobre A, marque um ponto B sobre r (transporte de segmento).
4. Com abertura b e ponta seca do compasso sobre A, marque um ponto D sobre a mediatriz (transporte de segmento).
5. Com abertura a e ponta seca sobre D, trace uma circunferência.
6. Trace uma segunda circunferência de raio b e centro B. Seja C a interseção entre as duas circunferências.
7. Ligue A, B, C e D.

Questionário.

1. Verifique com o compasso que as diagonais do retângulo são congruentes.
2. Com a régua, meça os lados do retângulo e a diagonal. As medidas condizem com o teorema de Pitágoras? Faça o cálculo.
3. Verifique com o transferidor se a diagonal do retângulo é uma bissetriz. Em que condições isso ocorreria?

Atividade 2. Construção de um quadrado com **régua e compasso**: Dado um segmento a, construa um quadrado com essa medida de lado:

1. Trace uma reta r e um ponto A sobre r.
2. Trace a reta perpendicular a r que passa por A. Para isso: com abertura a e ponta seca sobre A, marque dois pontos B e P sobre r. Construa a mediatriz do segmento $\overline{BP}$.
3. Com abertura a e ponta seca do compasso sobre A, marque um ponto C sobre a mediatriz (transporte de segmento).
4. Com abertura a e ponta seca sobre C, trace uma circunferência.
5. Trace uma segunda circunferência de raio a e centro B. Seja D a interseção entre as duas circunferências.
6. Ligue A, B, C e D.

Atividade 3. Construção das alturas de um triângulo acutângulo.

1. Construa um triângulo acutângulo ABC.
2. Trace a reta suporte do lado $\overline{BC}$.
3. Trace a perpendicular a esta reta suporte que passa por A e seja P a interseção entre a reta suporte e a perpendicular. O segmento $\overline{AP}$ é a altura relativa ao vértice A.
4. Repita todo o processo para os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Questionário.

1. Com a régua, meça o lado $\overline{BC}$ e a altura $\overline{AP}$, depois calcule a área do triângulo ABC.
2. Repita o exercício anterior com o lado $\overline{AC}$ e a altura relativa ao vértice B. O que acontece?
3. Conclua que para calcular a área de um triângulo, qualquer lado serve como base.

Atividade 4. Construção das alturas de um triângulo obtusângulo:

A construção é basicamente a mesma, só observe que duas alturas são externas ao triângulo.

Questionário.

1. Calcule a área do seu triângulo de três modos diferentes.

3.4 Bissetriz de um ângulo

1. Considere o ângulo $B\widehat{A}C$.
2. Trace uma circunferência com centro em A e raio qualquer. Sejam D e E a interseção desta circunferência com os lados do ângulo.
3. Trace uma circunferência com centro em D e raio qualquer.
4. Com o mesmo raio do passo anterior, trace uma circunferência com centro em E.
5. Seja F um ponto da interseção das duas últimas circunferências.

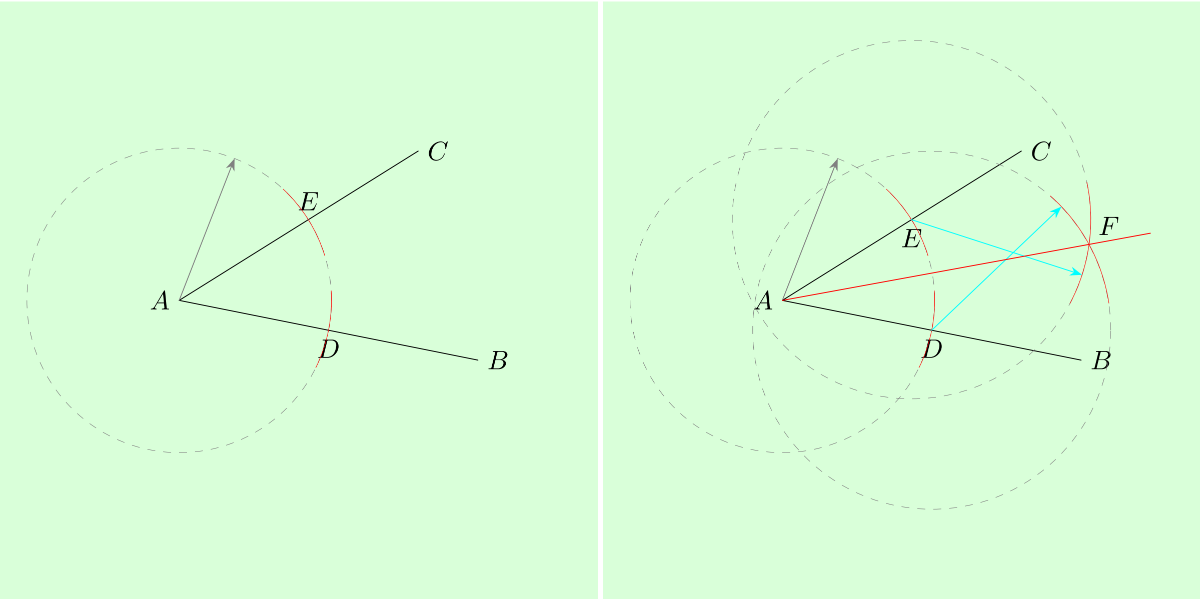

Figura 3.2: Evolução do traço

Na prática, ao invés das circunferências completas, traçamos dois pequenos arcos de mesmo raio, marcando os pontos D e E. Com uma segunda medida de raio (pode ser um raio diferente do primeiro) traçamos dois novos arcos, um de centro em D e o outro de centro em E, que se interceptam no ponto F. Agora basta construir a semirreta $\overrightarrow{AF}$.

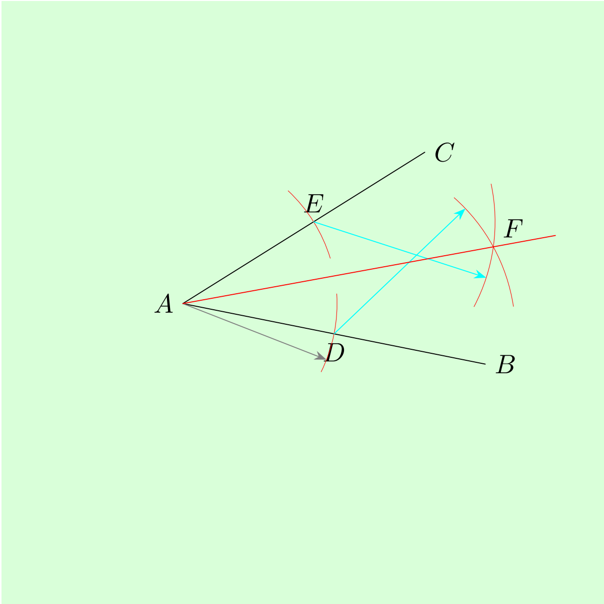

Figura 3.3: Bissetriz de um ângulo

3.5 Atividades

Atividade 1. Dado um segmento $\overline{AB}$, construa sobre uma de suas extremidades um ângulo no valor de:

(a) $15°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $60°$ (e) $75°$ (f) $120°$ (g) $135°$

1. Para construir o ângulo de $60°$, use o compasso com abertura qualquer e ponta seca sobre A. Construa a circunferência. Seja C a interseção entre ela e $\overline{AB}$. Com a ponta seca sobre C e mesmo raio, construa uma segunda circunferência. Seja D a interseção entre as duas. O ângulo $D\hat{A}C$ mede $60°$.
2. Para construir o ângulo de $30°$, construa o ângulo de $60°$ e trace sua bissetriz.
3. Para construir o ângulo de $15°$, construa o ângulo de $30°$ e trace sua bissetriz.
4. Para construir o ângulo de $45°$, construa a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa por A e trace a bissetriz do ângulo reto.
5. Para construir os demais, basta as construções anteriores.

Atividade 2. Construa o incentro e a circunferência inscrita a um triângulo dado.

1. Construa um triângulo ABC.
2. Construa as três bissetrizes internas do triângulo. Elas se interceptam no incentro I.
3. Trace a perpendicular ao lado BC que passa pelo ponto I. Seja P o ponto de interseção entre o lado e a perpendicular.
4. Construa a circunferência de centro I e raio $\overline{IP}$.