



## **Recurso Educacional:**

**Cálculo previdenciário, aposentadoria e funções: Uma trilha pedagógica para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando modelagem matemática**

**MAURÍCIO CELSO DE OLIVEIRA JÚNIOR**

**ORIENTADOR: OMAR JAVIER SOLANO ALBORNOZ**

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Figura da questão 1.2 . . . . .	13
Figura 2 – Contracheque de um trabalhador . . . . .	16
Figura 3 – Atividade em geogebra (a) . . . . .	21
Figura 4 – Atividade em geogebra (b) . . . . .	22
Figura 5 – Abrindo arquivo novo em planilhas de google . . . . .	23
Figura 6 – Criando páginas novas . . . . .	23
Figura 7 – Renomeando páginas . . . . .	23
Figura 8 – Criando uma tabela . . . . .	24
Figura 9 – O símbolo R\$ aos salários . . . . .	24
Figura 10 – Inserindo fórmula para criar a coluna A . . . . .	24
Figura 11 – Gerando a coluna A (a) . . . . .	25
Figura 12 – Gerando a coluna A (b) . . . . .	25
Figura 13 – Inserindo fórmula para criar a coluna B . . . . .	25
Figura 14 – Tabela da evolução salarial pronta . . . . .	26
Figura 15 – Inserindo fórmula para criar a coluna E . . . . .	26
Figura 16 – Página 1 com as 3 tabelas . . . . .	27
Figura 17 – Criando as 3 tabelas dos investimentos . . . . .	29
Figura 18 – Relacionando a coluna A das duas páginas . . . . .	29
Figura 19 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (a) . . . . .	30
Figura 20 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (b) . . . . .	30
Figura 21 – Rentabilidade do título Renda+ . . . . .	30
Figura 22 – Respostas de alunos na trilha, (a) . . . . .	32
Figura 23 – Respostas de alunos na trilha, (b) . . . . .	33

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Evolução salarial . . . . .	12
Tabela 2 – Comparação de salários de 2 trabalhadores . . . . .	12
Tabela 3 – Evolução salarial de uma trabalhadora . . . . .	17

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS E PROPOSTA DAS ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>SUGESTÕES, AVALIAÇÃO E MATERIAL USADO</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>3.1</b>	<b>Sugestões ao professor</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulário de avaliação</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>3.3</b>	<b>Tabelas usadas na trilha pedagógica</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>A TRILHA PEDAGÓGICA</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>4.1</b>	<b>1ª etapa: Preparação</b> . . . . .	<b>13</b>
4.1.1	AULA 1: Cálculo de porcentagem, médias e potenciação . . . . .	13
<b>4.2</b>	<b>2ª etapa: Apresentação do problema</b> . . . . .	<b>15</b>
4.2.1	AULA 2: Aplicação dos conceitos de porcentagem, médias e potenciação no contexto do mercado de trabalho. . . . .	15
4.2.2	AULA 3: Pesquisa sobre a realidade salarial da região e estudo dirigido a partir das informações obtidas na pesquisa. . . . .	17
<b>4.3</b>	<b>3ª etapa: Cálculo do aumento do salário</b> . . . . .	<b>18</b>
4.3.1	AULA 4: Atividades utilizando os conceitos aprendidos para determinar o aumento de salário de um trabalhador. . . . .	18
4.3.2	AULA 5: Propriedade $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$ e relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$ . . . . .	19
4.3.3	AULA 6: Uso do geogebra para relacionar evolução salarial e o gráfico da exponencial . . . . .	21
<b>4.4</b>	<b>4ª etapa: Cálculo dos descontos e benefícios</b> . . . . .	<b>22</b>
4.4.1	AULA 7: Cálculo do desconto previdenciário e determinação da aposentadoria de um trabalhador. . . . .	22
<b>4.5</b>	<b>5ª etapa: Comparação do benefício da aposentadoria com outros investimentos</b> . . . . .	<b>28</b>
4.5.1	AULA 8: Alternativas financeiras para além da aposentadoria. . . . .	28
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DESAFIOS.</b> . . . . .	<b>32</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>34</b>

# 1 Introdução

Este recurso educacional é um produto da dissertação de mestrado intitulada “*Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais*” (DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024) e como o seu nome deixa claro consiste em uma trilha pedagógica. Segundo o Centro de Educação Tecnológica do Amazonas (CETAM), entendeu-se a trilha pedagógica como “...uma abordagem estruturada e sequencial para o processo de ensino e aprendizagem. Ela busca organizar conteúdos, atividades e avaliações de maneira lógica e coerente, facilitando a aquisição de conhecimentos e habilidades pelos alunos. O objetivo principal é proporcionar um caminho claro e eficiente para o desenvolvimento das competências necessárias, respeitando o ritmo e o estilo de aprendizagem de cada indivíduo.” A trilha pedagógica tem como características importantes, a sequencialidade (pois as atividades são planejadas de forma gradual), a coerência (as atividades estão alinhadas com os objetivos de aprendizagem) e a diversidade (são usados recursos e estratégias necessários para as diferentes formas de aprender).

Afim de criar um modelo para o ensino das funções exponencial e logarítmica para alunos do ensino médio, as atividades foram elaboradas a partir dos cálculos previdenciários brasileiros. As atividades pertencentes à trilha abordaram o processo de evolução salarial de um trabalhador, desconto previdenciário, cálculo do benefício de aposentadoria, alternativas de investimentos, etc. A ideia de abordar a temática previdenciária surge da necessidade de relacionar o conteúdo aprendido em sala de aula com a realidade fora do ambiente escolar.

De acordo com a lei LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996 (Lei de diretrizes e bases da educação nacional - LDB) (BRASIL, 1996), que afirma o caráter abrangente da educação:

Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.

§ 2º A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social.”

E ainda,

“Art. 3º O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: X - valorização da experiência extra-escolar; XI - vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais.”

Acreditamos que a trilha elaborada atende os preceitos estabelecidos na LDB, trazendo pertinência ao estudo e preparando o discente para a vida profissional.

## 2 Objetivos e proposta das atividades

O nosso objetivo é introduzir conceitos matemáticos a través de situações problema que fazem parte da vida prática dos alunos. Diferentemente da abordagem feita nos livros, em geral, que estabelece relações entre as famílias de funções e uma grande variedade de problemas pequenos independentes e não relacionados, no trabalho apresentamos as funções exponenciais e logarítmicas usando um único assunto como fio condutor, a aposentadoria. Através de uma trilha pedagógica, que integra a modelagem matemática ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas, propomos atividades por meio das quais o aprendizado é contextualizado, estabelecendo uma conexão entre conceitos matemáticos e situações da vida real. Usando problemas relacionados ao mercado de trabalho, como contribuições para a previdência social, estimativas de salários e investimentos financeiros, esta sequência de atividades, além de levar os alunos a compreenderem alguns conceitos fundamentais das funções, também apresenta idéias financeiras de grande pertinência para a vida dos alunos após o ensino médio e ingresso no mercado de trabalho. Portanto, estamos desenvolvendo o conhecimento em duas frentes, o conhecimento matemático e o conhecimento do funcionamento do mercado de trabalho e sistema de aposentadoria brasileiro.

Em alguns pontos da trilha pedagógica, promovemos e explicamos o uso de ferramentas digitais para o desenvolvimento das atividades. Desta forma, o aluno vai ter contato com estas ferramentas, vai começar a entender como podem ser usadas, e ainda mais importante, vai compreender a importância e utilidade que estas ferramentas podem ter na resolução tanto das atividades sugeridas na trilha como de outros problemas que podem aparecer na sua vida.

A trilha pedagógica elaborada como produto educacional deste trabalho tem como proposta relacionar diversos tópicos do ensino de matemática, a fim de levar o aluno a acumular repertório e, assim, compreender as funções e como estas se apresentam em seu cotidiano.

As atividades foram dispostas em aulas, de pelo menos uma hora e quarenta minutos (2 tempos de 50 minutos), sendo realizadas em grupos. Destacamos que o público alvo das atividades propostas nesta trilha pedagógica são alunos do ensino médio. Este fato ocorre pois é no ensino médio onde o estudo de funções é formalizado e estes alunos já se encontram na iminência do ingresso no mercado de trabalho. Porém, qualquer aluno com familiaridade em porcentagem, médias e potenciação, pode realizar as atividades. A trilha pode ser usada para que o aluno tenha o primeiro contato com as funções exponenciais e logarítmicas.

Dividimos as atividades em cinco etapas: etapa preparatória, apresentação do problema, cálculo do aumento do salário, cálculo dos descontos e benefícios e comparação dos benefícios da aposentadoria com outros investimentos. No início temos uma revisão sobre o cálculo de porcentagem, médias e potências. Na sequência, os mesmos tópicos desenvolvidos na aula anterior são relacionados ao mundo do trabalho. Adiante, é proposta uma pesquisa sobre assuntos que serão pertinentes nas próximas aulas. Continuando, nas três aulas seguintes concentram-se em levar o aluno a definir a função exponencial, verificar sua propriedade fundamental, estabelecer sua relação com os logaritmos e, com uso do Geogebra, observar o comportamento do seu gráfico. Por fim, nas duas últimas aulas, com auxílio de programas de criação de planilhas, demonstraremos com maior profundidade o funcionamento do cálculo previdenciário brasileiro, determinaremos valores de aposentadorias para um trabalhador hipotético e verificaremos como o ato de investir com foco na aposentadoria pode fazer grande diferença na manutenção da qualidade de vida do trabalhador.

No capítulo 4 da dissertação de mestrado Profmat ([DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024](#)), tem mais informações, usadas na trilha, sobre aposentadoria e investimentos.

## 3 Sugestões, avaliação e material usado

### 3.1 Sugestões ao professor

Toda a sequência didática foi estruturada num formato progressivo, de maneira que o conhecimento seja adquirido de maneira cumulativa. Pensamos que a sequência deve ser seguida na ordem estabelecida, a fim de que, após cada atividade, o aluno adquira os conhecimentos necessários para atividades posteriores.

Todo o planejamento das atividades foi feito considerando que o aluno deve ser o protagonista principal. Consideramos que o sucesso das atividades depende de que seja o aluno quem faz as aproximações às respostas, os erros e as descobertas. Por isso, é importante que o professor permita que o aluno desenvolva as atividades, que motive ao aluno para que se torne mais autônomo no percurso das atividades. O professor precisa estar próximo dos alunos no decorrer das aulas, mas sem interferir ativamente no processo de desenvolvimento das atividades. É válido estabelecer grupos de trabalho durante todo o percurso da trilha, permitindo que os próprios alunos estabeleçam uma rotina de trabalho. É importante que o professor perceba se há algum “problema” que está impedindo o avanço das atividades e proponha possíveis caminhos para resolver o problema, sem dar respostas prontas, permitindo ao aluno dar continuidade ao desenvolvimento da atividade.

Para garantir melhor aproveitamento da realização das atividades, disponibilizamos o link das tabelas eletrônicas que serão desenvolvidas e utilizadas nas questões das aulas 7 e 8.

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1QRFFFbaUdBFn-YxpIZeHGYF5R62b-6tJtXbX7Yf4iEA/edit?usp=sharing>

No produto educacional, algumas das atividades propostas contam com sugestões ao professor, a fim de dar suporte a este durante sua prática docente. As atividades foram elaboradas pensando em guiar passo a passo ao aluno para adquirir o conhecimento pretendido. Em algumas atividades da trilha pedagógica, apresentamos orientações explícitas ao aluno, com o objetivo de guiar ele na realização de alguma etapa da atividade, que (achamos) poderia gerar mais confusão.

### 3.2 Formulário de avaliação

Para mensurar o nível de entendimento antes e depois da realização das atividades junto aos alunos, criamos um formulário abordando o nível de compreensão sobre funções, a importância da temática abordada nas atividades para o futuro, etc.

O formulário foi criado e submetido aos alunos através da plataforma google forms. Tendo em vista o fácil acesso a internet através dos celulares, esta via de distribuição do questionário se mostrou mais eficaz e satisfatória. No caso de maior dificuldade de utilização de meios eletrônicos, torna-se ideal a impressão deste formulário.

A seguir estão os links dos formulários que elaboramos e usamos junto com a trilha Link do formulário a ser aplicado antes da realização das atividades.

<https://forms.gle/22tR8L7hLcMY89kd9>

Link do formulário a ser aplicado depois da realização das atividades.

<https://forms.gle/CG5ahkfHQKwcinMX6>

### **Objetivo:**

Avaliar o nível de conhecimento e compreensão dos alunos das turmas 2002 e 2013 do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier sobre os temas de funções, especialmente as funções exponenciais, e sua relação com o planejamento financeiro e profissional. Além disso, busca-se analisar a evolução desse conhecimento ao longo das atividades propostas.

### **Público-alvo:**

A trilha pedagógica desenvolvida como produto educacional por este trabalho de conclusão de curso, tem como publico-alvo alunos do ensino médio. Pelo fato do estudo das funções ser formalizado no ensino médio, torna-se interessante o desenvolvimento das atividades propostas nesta etapa escolar. Vale resaltar que a trilha pode ser usada também com alunos do ensino fundamental, com o objetivo de introduzir as funções exponencial e logarítmica.

As atividades deste produto educacional foram aplicadas a alunos do 2º ano do ensino médio (turmas 2002 e 2013) do Colégio Estadual Dr. Adino Xavier.

### **Metodologia:**

O formulário será aplicado em duas etapas:

- Antes das atividades: Para identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre os temas abordados.
- Após as atividades: Para avaliar a evolução do aprendizado e a efetividade das atividades propostas.

O formulário é composto por 10 questões fechadas, com respostas em escala Likert de 5 pontos, variando de 1 (muito pouco ou ruim) a 5 (muito bom ou excelente).

Essa escala permite quantificar o nível de concordância dos alunos com cada afirmação, facilitando a análise dos dados. Acrescentamos mais duas questões ao formulário a ser preenchido após a realização das atividades.

### Conteúdo das Questões:

As questões abordam os seguintes temas:

- (a) Conhecimento sobre funções: Avalia o entendimento dos alunos sobre o conceito de função, sua representação gráfica e a identificação de diferentes tipos de funções.
- (b) Compreensão sobre funções exponenciais e logarítmica: Verifica o conhecimento dos alunos sobre o crescimento das funções e sua aplicação em situações reais.
- (c) Importância do planejamento financeiro: Avalia a percepção dos alunos sobre a importância de planejar o futuro financeiro e a relação entre o estudo de funções e a compreensão de conceitos como juros compostos.
- (d) Planejamento profissional: Verifica a consciência dos alunos sobre a importância de planejar a carreira e a relação entre o estudo de matemática e o desenvolvimento profissional.
- (e) Avaliação do ensino: Coleta a opinião dos alunos sobre a forma como o conteúdo de funções é ensinado e a necessidade de maior aplicação dos conceitos no dia a dia.

### Questões:

*Sobre o estudo de funções*

1. Qual o seu nível de conhecimento sobre o conceito de função em matemática?.
2. Você consegue identificar diferentes tipos de funções (linear, quadrática, exponencial, etc.) em gráficos e equações?
3. Como você avalia sua compreensão sobre o crescimento das funções exponencial e logarítmica e suas aplicações no mundo real?

*Sobre o Planejamento Financeiro e Profissional*

4. Qual a importância que você atribui ao planejamento financeiro para o seu futuro?
5. Você considera que o estudo de funções exponenciais pode te ajudar a entender melhor conceitos como juros compostos e crescimento populacional?

6. Acredita que o planejamento profissional é fundamental para alcançar seus objetivos de carreira?
7. Você já pensou em como será sua vida financeira após a aposentadoria?
8. Qual a importância de começar a planejar sua aposentadoria ainda jovem?

*Sobre o Ensino de Matemática*

9. Como você avalia a forma como o conteúdo de funções é ensinado em sua escola?
10. Você acha que o ensino de matemática deveria dar mais ênfase à aplicação dos conceitos no dia a dia?

E finalmente tem uma questão onde o aluno pode escrever livremente sobre a sua experiência na aprendizagem do assunto tratado.

11. A partir dos seus conhecimentos iniciais acerca de funções, funções exponenciais e logarítmica, planejamento financeiro e profissional, faça um breve relato das suas experiências antes da realização das atividades propostas.

Após a realização das atividades o formulário será novamente submetido aos alunos a fim de observar o impacto das atividades da trilha pedagógica na relação dos alunos com as funções exponenciais e na relação com o ensino de matemática. Além das perguntas já respondidas no início da aplicação das atividades, acrescentamos 2 questões a fim de observar possíveis resultados obtidos. As perguntas são:

12. Após o desenvolvimento das atividades, você se sente mais preparado para ingressar no mercado de trabalho?
13. As atividades propostas geraram alguma forma de debate, sobre a temática previdenciária, fora do ambiente escolar? Se sim, faça um breve relato.



## 4 A trilha pedagógica

### 4.1 1<sup>A</sup> ETAPA: PREPARAÇÃO

#### 4.1.1 AULA 1: Cálculo de porcentagem, médias e potenciação

*Objetivo:* Revisar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

**Questão 1.1** Calcule as porcentagens abaixo:

- |                |                  |                   |
|----------------|------------------|-------------------|
| (a) 10% de 200 | (d) 17% de 90    | (g) 9,7% de 800   |
| (b) 15% de 300 | (e) 25% de 1200  | (h) 13,4% de 152  |
| (c) 22% de 80  | (f) 12,5% de 900 | (i) 22,8% de 2546 |

**Questão 1.2** A imagem na figura 1 representa o preço da banana numa feira de rua.

Sobre o preço inicial da banana, responda:



Figura 1 – Figura da questão 1.2.

- Qual será o preço da banana após um aumento de 10% ?
- Qual será o preço da banana após um desconto de 15%, em relação ao preço obtido no item a.)?

- (c) Se a banana passar a ser vendida a 9,20, qual será o percentual de aumento aplicado ao seu preço inicial?
- (d) Se a banana passar a ser vendida a 6,40, qual será o percentual de desconto aplicado, em relação ao valor obtido no item b)?

**Questão 1.3** Determine a média aritmética dos valores representados abaixo:

- (a) 23, 45, 73, 78, 94
- (b) 100, 328, 452, 581, 973, 325
- (c) 1248, 4284, 3124

**Questão 1.4** Leia os problemas abaixo e responda:

- (a) Na prova para um cargo na enfermaria do hospital, uma candidata fez 6 pontos na prova de conhecimentos específicos, 4 pontos em conhecimentos gerais e 5 pontos em Português. Determine a média ponderada das notas dessa candidata sabendo que os respectivos pesos são 5, 3 e 2.
- (b) Sabendo que um aluno obteve as notas 8, 9, 6 e 8 e que essas notas têm, respectivamente, os pesos 2, 2, 3 e 3, calcule a sua média.
- (c) A idade média dos meninos atendidos em uma clínica pediátrica foi 6 anos e das meninas, 8. O número de meninos era 25 e o de meninas, 30. Então, qual a idade média das crianças atendidas?
- (d) Na farmácia de um hospital universitário foi feita uma inspeção no lote de determinado remédio em comprimidos. Foram encontradas:
- 2 embalagens com 6 comprimidos;
  - 4 embalagens com 7 comprimidos;
  - 4 embalagens com 5 comprimidos;
  - 3 embalagens com 8 comprimidos.

Qual foi a média ponderada de comprimidos por embalagem?

**Questão 1.5** Calcule as potências:

- (a)  $2^3$       (b)  $5^4$       (c)  $8^0$       (d)  $10^3$       (e)  $7^2$       (f)  $8^1$

*Sugestão ao professor:* Esta aula de revisão consiste em atividades relativamente simples pois os alunos das turmas onde as mesmas foram aplicadas, carregavam muitas dificuldades dos anos anteriores por conta da pandemia. Os assuntos tratados nas questões são os que consideramos fundamentais para o aluno conseguir encarar as seguintes atividades. A aula foi pensada para ser desenvolvida inteiramente pelos alunos, mas pode ser facilmente adequada pelo professor de acordo com as capacidades dos alunos que realizarão as atividades. Por exemplo, fica a critério do professor a realização de uma exposição da matéria, feita prévia (ou posterior) ao desenvolvimento das atividades propostas nesta aula.

## 4.2 2<sup>A</sup> ETAPA: APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

### 4.2.1 AULA 2: Aplicação dos conceitos de porcentagem, médias e potenciação no contexto do mercado de trabalho.

*Objetivo:* Aplicar os conceitos de porcentagem, médias e potenciação, revistos na aula anterior, utilizando termos e objetos relacionados ao mercado de trabalho.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

**Questão 2.1** A figura 2 é o contracheque de um professor da rede estadual de ensino.

Neste contracheque, podemos observar que esse professor tem valores a receber e valores a descontar do seu salário. Um desses descontos (8994 - RIOPREVIDÊNCIA FINANC - ATIVOS) é referente a sua previdência, ou seja, é destinado a sua aposentadoria. Agora, sobre esse contracheque, responda:

- (a) Qual o percentual de desconto em relação ao salário do professor? Considere 3315,41 como base de cálculo.
- (b) Ao receber um aumento de 20% sobre sua base de cálculo, qual seria seu novo valor?
- (c) Após o aumento do item anterior, qual seria o valor do desconto previdenciário, mantida a mesma proporção?

**Questão 2.2** Consideremos a tabela 3, que descreve a evolução salarial de uma certa


**GOVERNO DO ESTADO**  
**RIO DE JANEIRO**

Secretaria de Estado de Planejamento e Gestão  
 SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO  
 CNPJ N°: 42.498.659/0001-60      Comprovante de Pagamento - 10/2023

CPF		PIS/PASEP		Nome	
IdFunc		Nascimento		Nº Dep. IR	Nº Dep. Sal. Família
Vínculo		Tipo de Vínculo		Folha	FolhaRef Mensal
1		EFETIVO		1	
Cargo Efetivo				Ref.	
PROFESSOR DOCENTE I - 30 HORAS				C03	
Cargo Comissionado				Ref.	
***				***	
Data Exercício/Início		UA/Setor	Lotação		
14/08/2023					
Banco - Agência - Conta		Data Aposentadoria	Fundamentação Legal		
		***	***		
Discriminação		Competência	Vantagens	Descontos	Informações Adicionais
0001 - VENCIMENTO		01/10/2023	R\$ 2.647,30	R\$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0207 - PISO MAGISTERIO		01/10/2023	R\$ 668,11	R\$ 0,00	Fonte: FUNDEB 70%
0709 - AUXÍLIO TRANSPORTE		01/10/2023	R\$ 359,10	R\$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
0725 - AUXÍLIO ALIMENTAÇÃO		01/11/2023	R\$ 449,10	R\$ 0,00	Fonte: FUNDEB 30%
8994 - RIOPREVIDÊNCIA FINANC - ATIVOS		01/10/2023	R\$ 0,00	R\$ 464,16	
8999 - IMPOSTO DE RENDA		01/10/2023	R\$ 0,00	R\$ 57,29	
Total de Ganhos		Total de Descontos		Total Líquido	
R\$ 4.123,61		R\$ 521,45		R\$ 3.602,16	
Valor FGTS	Base Cálculo FGTS	Base Cálculo Previdência	Base Cálculo IRPF		
R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 3.315,41	R\$ 2.851,25		
Código de Autenticação: [REDACTED]					
Para autenticar este contracheque, por favor entre no site abaixo e digite o código de autenticação.					
<a href="http://www.servidor.rj.gov.br/">http://www.servidor.rj.gov.br/</a>			Acessando a opção validação de contracheque		
Data e hora de emissão: 05/01/2024 00:17:28					

Figura 2 – Contracheque de um trabalhador.

trabalhadora durante 20 anos.

- (a) Com base na tabela 3, determine a média dos salários recebidos pela trabalhadora.
- (b) Determine 70% e 80% da média dos salários recebidos pela trabalhadora.

*Sugestão ao professor:* Ao final das atividades, é fundamental que os alunos compreendam que os cálculos presentes na questão 2.2 são a base para a definição do valor da aposentadoria. Para tanto, é interessante iniciar uma discussão sobre os resultados obtidos. Essa reflexão pode contribuir para uma maior conscientização sobre a importância de planejar a aposentadoria e os desafios que muitos trabalhadores enfrentam nesta nova fase da vida.

Tabela 3 – Evolução salarial de uma trabalhadora

Ano	Salário	Ano	Salário
1°	R\$ 900,00	11°	R\$ 1465,96
2°	R\$ 945,00	12°	R\$ 1539,25
3°	R\$ 992,25	13°	R\$ 1616,21
4°	R\$ 1041,86	14°	R\$ 1697,02
5°	R\$ 1093,95	15°	R\$ 1781,87
6°	R\$ 1148,64	16°	R\$ 1870,96
7°	R\$ 1206,07	17°	R\$ 1964,50
8°	R\$ 1266,37	18°	R\$ 2062,72
9°	R\$ 1329,68	19°	R\$ 2165,85
10°	R\$ 1396,16	20°	R\$ 2274,14

#### 4.2.2 AULA 3: Pesquisa sobre a realidade salarial da região e estudo dirigido a partir das informações obtidas na pesquisa.

*Objetivo:* Situar os alunos sobre a realidade salarial da região onde vivem e aplicar os conceitos aprendidos nas atividades anteriores dentro das suas realidades geográficas.

*Material utilizado:* Acesso a internet.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

**Questão 3.1** Dividindo a turma em grupos de 4 até 8 alunos, perfazendo um total de até 6 grupos, proponha a seguinte pesquisa:

- Como é calculado o valor da aposentadoria?
- Qual o valor descontado do salário destinado a aposentadoria?
- Qual a idade mínima para a aposentadoria?
- Qual a expectativa de vida média do brasileiro? E dos habitantes da sua região?
- Qual o salário médio da região onde você vive?
- Em comparação com o salário médio brasileiro, o salário da sua região é maior, menor ou igual? Se a média salarial for diferente da nacional, qual a proporção dessa diferença?

*Sugestão ao professor:* A realização desta atividade pode ser diversificada, sendo executada como apresentação de seminários, pesquisa, resumo, mapa mental ou outros instrumentos propostos. Parece importante que os alunos possam pesquisar, fora da aula, informações sobre as questões propostas.

## 4.3 3<sup>A</sup> ETAPA: CÁLCULO DO AUMENTO DO SALÁRIO

### 4.3.1 AULA 4: Atividades utilizando os conceitos aprendidos para determinar o aumento de salário de um trabalhador.

Para determinar o salário do trabalhador, estamos usando uma função exponencial.

*Objetivo:* Através do cálculo de atualização salarial de um trabalhador, concluir que precisamos calcular os valores de uma determinada função exponencial.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 1 que está na seção 3.3.

**Questão 4.1** Um trabalhador inicia sua vida profissional em 2024. O governo atual propôs um aumento do salário mínimo de 6,6%. Considerando que este aumento se torna fixo, ou seja, todos os anos trabalhados após 2024 apresentarão o mesmo aumento no salário mínimo.

Por cada real que o trabalhador recebe em 2024,

- |                                 |                |
|---------------------------------|----------------|
| (a) Quanto vai receber em 2025? | (e) E em 2030? |
| (b) E em 2026?                  | (f) E em 2035? |
| (c) E em 2027?                  | (g) E em 2050? |
| (d) E em 2028?                  | (h) E em 2059? |

**Questão 4.2** Assumindo que um trabalhador brasileiro médio e um trabalhador gonalense médio iniciam sua vida profissional em 2024 e que os salários serão reajustados a uma taxa fixa de 6,6% ao ano, responda.

- (a) Qual vai ser o salário de cada trabalhador em 2025? Em 2030? Em 2035? Em 2059?

- (b) Poderia escrever uma fórmula simples para representar a evolução salarial deste trabalhador? Qual será o salário do trabalhador no ano de  $2024+n$ ?

**Observação:** Como resultado da pesquisa da aula anterior, os alunos devem ter achado uma fonte para saber os salários médios brasileiro e gongalense. Uma fonte confiável é o site do IBGE, ver (IBGE, 2024).

*Sugestão ao professor:* A fim de responder às questões 4.1 e 4.2, é ideal a criação de uma tabela com três colunas específicas. A primeira delas seria preenchida com os anos e as demais seriam utilizadas para calcular o aumento percentual por cada real ganho, e a outra para registrar o valor total do aumento salarial em cada ano (ver tabela 1).

No item b) da questão 4.2, é esperado que o aluno chegue à seguinte função:

$$S(n) = A \cdot (1 + 6,6/100)^n \text{ onde } A \text{ é o salário em 2024.}$$

Vamos usar a notação  $s(n) = (1 + 6,6/100)^n$ . Isso significa que  $S(n) = A \cdot s(n)$ .

#### 4.3.2 AULA 5: Propriedade $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$ e relação $a^n = b \iff \log_a(n) = b$ .

*Objetivo:* Através da comparação salarial entre dois trabalhadores, levar o aluno a deduzir e compreender a propriedade  $s(n + m) = s(n) \cdot s(m)$  e apresentar ao aluno a relação  $a^n = b \iff \log_a(n) = b$ , necessária para determinar o tempo decorrido até cada trabalhador alcançar determinado patamar salarial.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Nesta aula, vamos usar a tabela 2 que está na seção 3.3.

**Questão 5.1** Vamos assumir que o valor do **salário mínimo** a partir de 2024, vai ser determinado pelo aumento fixo de 6,6% a cada ano. Agora, suponha dois trabalhadores (T1 e T2) ganhando o salário mínimo. Um deles (T1) começou a sua vida laboral em 2024 e o outro (T2) em 2029. Determine:

- (a) Qual vai ser o salário inicial de cada um dos trabalhadores?
- (b) Qual o salário dos trabalhadores em 2033?
- (c) E qual o salário deles em em 2039?

**Dica:** Utilize o raciocínio da questão 4.1. Segundo o (IBGE, 2024), o salário mínimo de 2024 é R\$1412.

**Observações:** Pelo enunciado da questão, é “esperado” que o aluno entenda que o salário de T1 e T2 coincide em todos os anos em que os dois estão trabalhando simultaneamente. No segundo momento, usando a fórmula de  $s(n)$  e o que já sabe sobre os salários de T1 e T2, o objetivo é que o aluno chegue a concluir a propriedade  $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$ . As seguintes conclusões fazem parte da argumentação necessária para resolver a atividade.

- O salário de T1 em 2024 é  $A$ . O salário de T2 em 2029 é  $S(5) = s(5) \cdot A$ .
- O salário de T1 em 2033 é  $S(9) = s(9) \cdot A$ . O salário de T2 em 2034 é  $s(4) \cdot s(5) \cdot A$ . Como os salários são iguais, temos que a função  $s$  satisfaz a propriedade  $s(9) = s(4+5) = s(4) \cdot s(5)$ .
- O salário de T1 em 2039 é  $S(15) = s(15) \cdot A$ . O salário de T2 em 2039 é  $s(10) \cdot s(5) \cdot A$ . Como os salários são iguais, temos que a função  $s$  satisfaz a propriedade  $s(15) = s(10+5) = s(10) \cdot s(5)$ .
- Podemos verificar que  $s(n+m) = s(n) \cdot s(m)$ , para todos os números naturais  $n$  e  $m$ . Além disso temos que  $s(0) = 1$ .

**Questão 5.2** Supondo que os trabalhadores T1 e T2 (da questão anterior) se aposentaram em momentos distintos, onde nenhum dos dois foi contemplado com 100% do benefício previdenciário. Determine qual o ano de aposentadoria de cada um dos trabalhadores, sabendo que:

- O último salário recebido pelo trabalhador T1 foi R\$5.760,94.
- O último salário recebido pelo trabalhador T2 foi R\$9.606,18.

*Sugestão ao professor:* Aqui o professor pode fazer uma breve apresentação da função exponencial e da função logaritmo, chamando a atenção de um fato importante. Tendo uma função  $s$  que satisfaz  $s(0) = 1$  e tal que para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , vale que

$$s(n+m) = s(n) \cdot s(m); \quad (4.1)$$

se estendemos a função  $s$  de maneira a estar definida em  $\mathbb{R}$ , conservando a propriedade (4.1), mas agora para todo  $n, m \in \mathbb{R}$ , vamos obter **a função exponencial**. Este é o conteúdo do teorema de caracterização da função exponencial, ver (LIMA, 2014) ou (LIMA et al., 2006), ou ainda (DE OLIVEIRA JUNIOR, 2024), teorema 3.4.

Por outro lado, na hora de falar da função logaritmo, pode chamar a atenção à questão 5.2 onde a função aparece como a inversa da exponencial.

### 4.3.3 AULA 6: Uso do geogebra para relacionar evolução salarial e o gráfico da exponencial

*Objetivo:* Baseando-se nas informações acumuladas nas aulas anteriores, utilizar o geogebra para demonstrar, através do comportamento da variação salarial de um trabalhador, o comportamento do gráfico da função exponencial.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

**Questão 6.1** Utilizando as informações das aulas anteriores, vamos inserir os valores encontrados no programa GeoGebra e responder algumas questões.

(a) Vamos usar a função Sequência (expressão, variável, valor inicial, valor final) do Geogebra. Podemos colocar os dados da seguinte forma:

- (i) Na primeira linha definiremos a função  $s(n) = 1,066^n$  (ver figura 3), que representa o ganho de cada real do salário de um trabalhador, ver Questões 4.1 e 4.2.

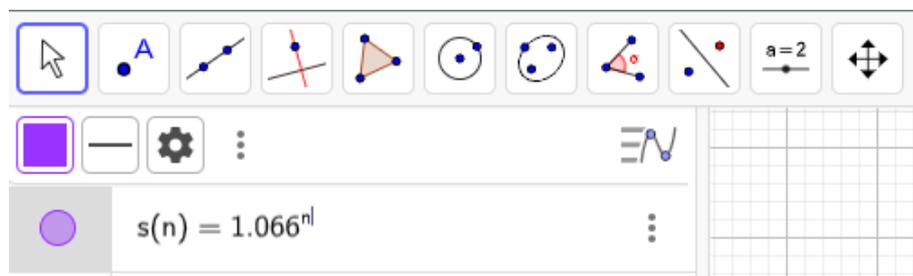


Figura 3 – Atividade em geogebra (a)

- (ii) Na segunda linha, utilizaremos o comando Sequência( $(n, s(n)), n, 0, 20$ ), ou seja, no primeiro lugar da função colocamos o par ordenado  $(n, s(n))$ ; no segundo lugar a variável que estamos usando ( $n$  neste caso); no terceiro lugar o valor inicial da variável  $n$  (0 neste caso) e no quarto lugar a valor final da variável. Ver figura 4.
- (iii) A seguir, podemos mudar somente o valor final da variável  $n$ . Podemos fazer para valor final igual a 40 e 200
- Sequência( $(n, s(n)), n, 0, 40$ )
  - Sequência( $(n, s(n)), n, 0, 200$ ).

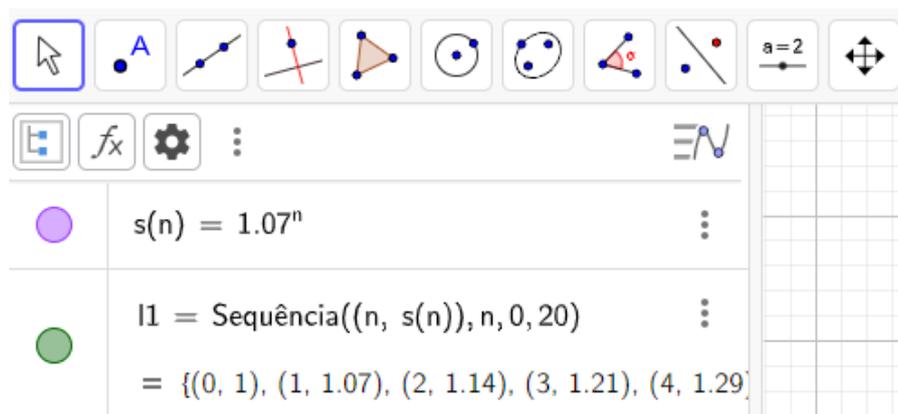


Figura 4 – Atividade em geogebra (b)

- (iv) Faça um zoom out no gráfico obtido no final do item anterior, de maneira a que, pelo menos, o início do gráfico tenha aparência de uma curva contínua.
- (b) A partir da imagem observada, qual o comportamento da curva quando inserimos valores maiores no último item da função Sequência?
- (c) Em grupo, discuta como o comportamento da função está presente em outros problemas do cotidiano.

*Sugestão ao professor:* No final desta atividade, podem ser apresentados para os alunos os gráficos das funções exponenciais. Aproveitando ainda a função Sequência do Geogebra, podem ser feitos outros exemplos de gráficos, mudando somente a função  $s(n)$ . É um momento adequado para mostrar que o crescimento ou decrescimento das funções exponenciais depende só da base que aparece em  $s(n)$ . A função cresce quando a base é maior do que 1 e decresce quando é menor do que 1.

## 4.4 4<sup>A</sup> ETAPA: CÁLCULO DOS DESCONTOS E BENEFÍCIOS

### 4.4.1 AULA 7: Cálculo do desconto previdenciário e determinação da aposentadoria de um trabalhador.

*Objetivo:* Apresentar ao aluno conceitos básicos do sistema trabalhista e previdenciário brasileiro e aprofundamento dos conceitos matemáticos acerca da função exponencial. Além de trabalhar o desenvolvimento de habilidades com ferramentas digitais de criação de tabelas.

*Material utilizado:* lista impressa com atividades propostas e computador com acesso a internet, ou computador com alguma folha de cálculos instalada.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

*Sugestão ao professor:* Nesta aula utilizaremos ferramentas digitais para a criação de tabelas (libreoffice, openoffice, excel, planilhas do google, etc). O passo a passo a seguir foi feito no aplicativo planilhas do google. Dentro do passo a passo são indicados alguns valores como taxas e valores iniciais de salários. Esses números devem ser ajustados para a realidade onde a atividade for desenvolvida. As informações obtidas na Questão 3.1 podem ser utilizadas como base para adequação das planilhas à realidade onde a atividade está sendo realizada.

**Passo 1:** Criar um arquivo novo (figura 5)

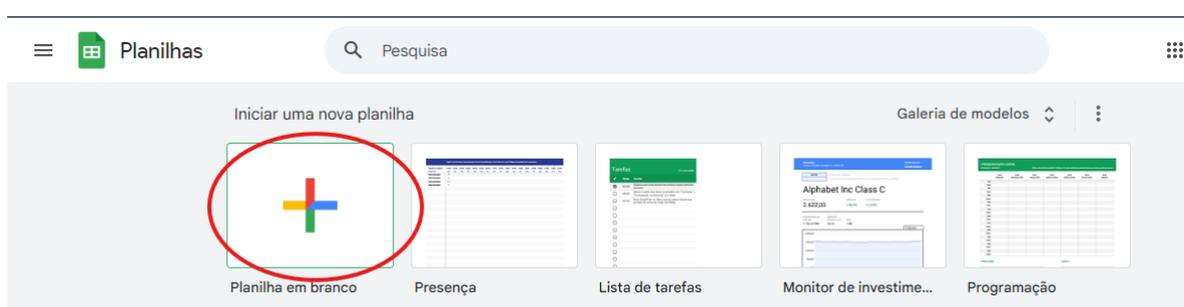


Figura 5 – Abrindo arquivo novo em planilhas de google

**Passo 2:** Criar duas páginas. A página 1 com nome CPREV (Cálculos previdenciários) e a página 2 com nome INV (Investimentos). Para criar páginas novas, basta clicar no sinal + (figura 6). Nesta etapa só vamos trabalhar com a página 1. A página 2 vai ser usada na próxima etapa.

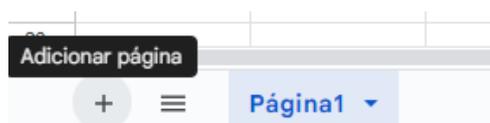


Figura 6 – Criando páginas novas

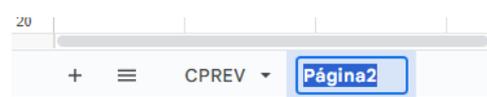


Figura 7 – Renomeando páginas

Para renomear as páginas basta clicar duas vezes sobre a aba da página desejada e colocar o novo nome (figura 7).

**Passo 3:** Criar três tabelas (Evolução salarial, Desconto mensal e Evolução do teto do INSS). Vamos explicar com detalhe como criar a primeira tabela.

Na célula A1, inserir o nome da primeira tabela. Na célula A2, inserir o ano de início do cálculo e na célula B2, inserir o valor do salário inicial (ver figura 8). Vamos usar o valor R\$2824, que é aproximadamente o salário médio gonçalense, segundo (IBGE, 2024). Este valor pode ser trocado para corresponder ao contexto dos alunos que realizam as atividades.

	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	2824

Figura 8 – Criando uma tabela



Figura 9 – O símbolo R\$ aos salários

Como a coluna B representa valores monetários, com a célula B2 selecionada clique no botão R\$ (figura 9).

**Passo 4:** Inserir fórmulas para atualização dos valores iniciais. Com a célula A3 selecionada, digite “=A2+1”(sem as aspas). Este comando atualizará o valor referente ao ano. Ver figura 10.

	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	R\$ 2.824,00
3	2025	
4		
5		

Figura 10 – Inserindo fórmula para criar a coluna A

Para atualizar todos os valores referentes aos anos, basta clicar, segurar e arrastar para baixo o círculo que aparece abaixo da célula A3, quando selecionada (figuras 11 e 12).

Para os valores referentes ao salário, com a célula B3 selecionada, digitamos “=B2\*1,0697”. O valor 1,0697 é referente a atualização salarial de acordo com a inflação média auferida, de aproximadamente 6,97%. Ver figura 13.

Agora, basta repetir o processo de clicar, segurar e arrastar para obter todos os valores atualizados de acordo com o ano desejado. O resultado aparece na figura 14.

Para produzir as outras tabelas, basta repetir o processo com atenção ao digitar as fórmulas de acordo com as células de referência. Nas colunas D e E vai aparecer a tabela de Desconto mensal e nas colunas G e H vai a tabela de Evolução do teto do INSS. Vamos esclarecer alguns pontos em relação a estas tabelas

**Passo 5:** Para que as três tabelas apresentem atualização anual padronizada, precisamos fazer o seguinte

- Nas células D2 e G2, inserir o código “=A2”.
- Na célula D3 inserir o código “=D2+1” e na célula G3, inserir o código “=G2+1”



Figura 11 – Gerando a coluna A (a)

	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	R\$ 2.824,00
3	2025	
4	2026	
5	2027	
6	2028	
7	2029	
8	2030	
9	2031	
10	2032	
11	2033	
12	2034	
13	2035	
14	2036	
15	2037	
16	2038	
17	2039	
18	2040	
19	2041	
20	2042	
21	2043	
22	2044	
23	2045	
24	2046	
25	2047	
26	2048	
27	2049	
28	2050	
29	2051	
30	2052	
31	2053	
32	2054	
33	2055	
34	2056	
35	2057	
36	2058	

Figura 12 – Gerando a coluna A (b)

B3		
	A	B
1	Evolução Salarial	
2	2024	R\$ 2.824,00
3	2025	R\$ 3.020,83
4	2026	

Figura 13 – Inserindo fórmula para criar a coluna B

- Repetir o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul (análogo ao feito nas figuras 11 e 12)

**Passo 6:** Para vincular os valores referentes a evolução salarial com a tabela referente aos descontos, iremos inserir na célula E2 o código “=B2\*0,14”(0,14 representa o desconto de 14% referente a contribuição para a previdência). Ver figura 15. Agora repetimos o processo de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Em alguns programas, após a inserção do primeiro código, aparece uma sugestão de preenchimento da coluna.

**Passo 7:** O processo de criação da tabela evolução do teto do INSS é igual ao processo de criação da tabela evolução salarial. Hoje, o valor máximo pago pela previdência social é de R\$7786,02, esse valor é atualizado pelo INPC (Índice Nacional de Preços ao

	A	B	C	D
1	Evolução Salarial			
2	2024	R\$ 2.824,00		
3	2025	R\$ 3.020,83		
4	2026	R\$ 3.231,38		
5	2027	R\$ 3.456,61		
6	2028	R\$ 3.697,54		
7	2029	R\$ 3.955,26		
8	2030	R\$ 4.230,94		
9	2031	R\$ 4.525,83		
10	2032	R\$ 4.841,29		
11	2033	R\$ 5.178,72		
12	2034	R\$ 5.539,68		
13	2035	R\$ 5.925,80		
14	2036	R\$ 6.338,82		
15	2037	R\$ 6.780,64		
16	2038	R\$ 7.253,25		
17	2039	R\$ 7.758,80		
18	2040	R\$ 8.299,59		
19	2041	R\$ 8.878,07		
20	2042	R\$ 9.496,87		
21	2043	R\$ 10.158,80		
22	2044	R\$ 10.866,87		
23	2045	R\$ 11.624,29		
24	2046	R\$ 12.434,51		
25	2047	R\$ 13.301,19		
26	2048	R\$ 14.228,29		
27	2049	R\$ 15.220,00		
28	2050	R\$ 16.280,83		
29	2051	R\$ 17.415,61		
30	2052	R\$ 18.629,47		
31	2053	R\$ 19.927,95		
32	2054	R\$ 21.316,93		
33	2055	R\$ 22.802,72		
34	2056	R\$ 24.392,06		
35	2057	R\$ 26.092,19		
36	2058	R\$ 27.910,82		

Figura 14 – Tabela da evolução salarial pronta

	D	E
1	Desconto mensal	
2	2024	R\$ 395,36

Figura 15 – Inserindo fórmula para criar a coluna E

Consumidor). Este índice apresentou valor acumulado médio de 3,7% ao ano, nos últimos 10 anos. Vamos admitir estes valores como parâmetros iniciais para a criação da última tabela. O resultado final está na figura 16.

### Questão 7.1

A tabela construída no programa de criação de planilhas, representa a evolução salarial de uma trabalhadora que iniciou sua jornada profissional em janeiro de 2024, até o momento da sua aposentadoria (considerando os dados do último censo de 2022). Considerando que essa mulher trabalha sob o regime de CLT em São Gonçalo e seu desconto previdenciário é de 14%, determine:

- O desconto mensal, em reais, feito nos anos de 2024, 2027, 2032, 2042 e 2056.
- O salário líquido (valor recebido após os descontos) em cada um dos anos citados no item a).
- O desconto anual feito em cada ano do item a).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Evolução salarial		Desconto mensal			Evolução do fato do INSS	
2	2024	R\$ 2.324,00		2024	R\$ 395,36		2024	R\$ 7.785,02
3	2025	R\$ 3.020,83		2025	R\$ 422,92		2025	R\$ 8.074,10
4	2026	R\$ 3.231,38		2026	R\$ 452,39		2026	R\$ 8.372,84
5	2027	R\$ 3.456,61		2027	R\$ 483,93		2027	R\$ 8.682,64
6	2028	R\$ 3.697,54		2028	R\$ 517,66		2028	R\$ 9.003,90
7	2029	R\$ 3.955,26		2029	R\$ 553,74		2029	R\$ 9.337,04
8	2030	R\$ 4.230,94		2030	R\$ 592,33		2030	R\$ 9.682,51
9	2031	R\$ 4.525,83		2031	R\$ 633,62		2031	R\$ 10.040,77
10	2032	R\$ 4.841,29		2032	R\$ 677,78		2032	R\$ 10.412,27
11	2033	R\$ 5.178,72		2033	R\$ 725,02		2033	R\$ 10.797,53
12	2034	R\$ 5.539,68		2034	R\$ 775,56		2034	R\$ 11.197,04
13	2035	R\$ 5.925,80		2035	R\$ 829,61		2035	R\$ 11.611,33
14	2036	R\$ 6.338,82		2036	R\$ 887,44		2036	R\$ 12.040,95
15	2037	R\$ 6.780,64		2037	R\$ 949,29		2037	R\$ 12.486,46
16	2038	R\$ 7.253,25		2038	R\$ 1.015,45		2038	R\$ 12.948,46
17	2039	R\$ 7.758,80		2039	R\$ 1.086,23		2039	R\$ 13.427,55
18	2040	R\$ 8.299,59		2040	R\$ 1.161,94		2040	R\$ 13.924,37
19	2041	R\$ 8.878,07		2041	R\$ 1.242,93		2041	R\$ 14.439,57
20	2042	R\$ 9.496,87		2042	R\$ 1.329,56		2042	R\$ 14.973,84
21	2043	R\$ 10.158,80		2043	R\$ 1.422,23		2043	R\$ 15.527,87
22	2044	R\$ 10.866,87		2044	R\$ 1.521,36		2044	R\$ 16.102,40
23	2045	R\$ 11.624,29		2045	R\$ 1.627,40		2045	R\$ 16.698,19
24	2046	R\$ 12.434,51		2046	R\$ 1.740,83		2046	R\$ 17.316,02
25	2047	R\$ 13.301,19		2047	R\$ 1.862,17		2047	R\$ 17.956,72
26	2048	R\$ 14.228,29		2048	R\$ 1.991,96		2048	R\$ 18.621,11
27	2049	R\$ 15.220,00		2049	R\$ 2.130,80		2049	R\$ 19.310,10
28	2050	R\$ 16.280,83		2050	R\$ 2.279,32		2050	R\$ 20.024,57
29	2051	R\$ 17.415,61		2051	R\$ 2.438,18		2051	R\$ 20.765,48
30	2052	R\$ 18.629,47		2052	R\$ 2.608,13		2052	R\$ 21.533,80
31	2053	R\$ 19.927,95		2053	R\$ 2.789,91		2053	R\$ 22.330,55
32	2054	R\$ 21.316,93		2054	R\$ 2.984,37		2054	R\$ 23.156,78
33	2055	R\$ 22.802,72		2055	R\$ 3.192,38		2055	R\$ 24.013,58
34	2056	R\$ 24.392,06		2056	R\$ 3.414,89		2056	R\$ 24.902,09
35	2057	R\$ 26.092,19		2057	R\$ 3.652,91		2057	R\$ 25.823,46
36	2058	R\$ 27.910,82		2058	R\$ 3.907,51		2058	R\$ 26.778,93

Figura 16 – Página 1 com as 3 tabelas

(d) O montante total descontado dos salários recebidos nos anos do item a).

**Questão 7.2** Como visto na questão anterior, o trabalhador brasileiro que atua sob o regime de CLT, é descontado de 7,5% a 14% em seu salário. O valor descontado é direcionado ao INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), dando direito ao trabalhador a inúmeros benefícios, de acordo com a respectiva carência. Entre esses benefícios está a aposentadoria. A aposentadoria por tempo de contribuição garante um benefício igual a 60% da média dos salários recebidos, caso o trabalhador tenha contribuído durante, no mínimo, 15 anos quando mulher e 20 anos quando homem. A esse percentual, acrescentasse 2% para cada ano trabalhado além do mínimo.

A partir destas informações do texto e das aulas anteriores, determine o valor do benefício de aposentadoria recebido por uma trabalhadora gonçalense:

- (a) Que trabalhou 15 anos.
- (b) Que trabalhou 18 anos.
- (c) Que trabalhou 23 anos.
- (d) Que trabalhou 33 anos.

**Questão 7.3** Suponhamos que a tabela usada nas questões anteriores representa a

evolução salarial de uma trabalhadora gonçalense. A partir dessas informações, responda:

- (a) Qual a média de todos os salários recebidos pela trabalhadora de acordo com a tabela apresentada na questão 7.1, supondo que esta trabalhadora aposentou-se no ano 2053?
- (b) Qual o valor da aposentadoria dessa trabalhadora?
- (c) Qual a diferença entre o valor determinado no item b) e o teto do INSS, no ano de sua aposentadoria? Qual a diferença percentual?
- (d) O que podemos concluir analisando os resultados obtidos e os comparando com o último salário recebido pela trabalhadora antes de se aposentar (R\$19927,55.)? Discuta com seu grupo e faça um breve relato, a partir da discussão, sobre o impacto da aposentadoria sobre o estilo de vida de um trabalhador.

**Observação:** A tabela leva em consideração um trabalhador em regime CLT, que pretende aposentar-se com 100% do valor referente ao seu benefício. Realize também os cálculos para um trabalhador homem, levando em consideração a necessidade de completar a tabela com mais 5 anos de trabalho.

## 4.5 5<sup>A</sup> ETAPA: COMPARAÇÃO DO BENEFÍCIO DA APOSENTADORIA COM OUTROS INVESTIMENTOS

### 4.5.1 AULA 8: Alternativas financeiras para além da aposentadoria.

*Objetivo:* Levar para a realidade do aluno alternativas financeiras além da aposentadoria e através de cálculos matemáticos realizar comparações entre essas alternativas.

*Material utilizado:* Lista impressa e computadores com acesso a internet.

*Aula(s) necessária(s):* 1 hora e 40 minutos (2 aulas de 50 minutos)

Para esta atividade criaremos outras três tabelas. Investimento I (BOVA11), Investimento II (IVVB11) e Investimento III (Tesouro renda+ 2060). Esta parte de criação das tabelas só deve ser feita depois do aluno entender qual é o procedimento para calcular manualmente o que é pedido na questão. Veja a sugestão para o professor no final da questão desta aula.

**Passo 1:** A partir da tabela criada para o desenvolvimento das questões da aula 7, chamamos (renomeamos) a página 2 de INV.

**Passo 2:** Na página INV criamos três tabelas: Investimento I, Investimento II e Investimento III. Ver figura 17.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Investimento I			Investimento II			Investimento III	

Figura 17 – Criando as 3 tabelas dos investimentos

**Passo 3:** Como os investimentos estão relacionados ao mesmo intervalo de tempo da evolução salarial, iremos relacionar os anos de rendimentos dos investimentos com os anos de atividade do trabalhador. Logo, iremos estabelecer uma relação entre as páginas 1 e 2, produzidas no arquivo. Para isso, nas células A2, D2 e G2, insira o código “=CPREV!A2”. A partir desse código, ao alterarmos o ano inicial na tabela evolução salarial (na página 1), todas as outras tabelas (das duas páginas) se atualizarão também. Ver figura 18.

	A	B
1	Investimento I	
2	2024	

Figura 18 – Relacionando a coluna A das duas páginas

**Passo 4:** Com a célula A3 selecionada digite o código “=A2+1”. Em seguida, repita o processo visto anteriormente de clicar, segurar e arrastar a partir do círculo azul. Isto foi feito na página CPREV, veja as figuras 10, 11 e 12. Repita o processo nas outras tabelas, reproduzindo o código de acordo com a coluna correspondente. Isto significa, repetir o processo nas colunas D e G.

**Passo 5:** Agora vamos atrelar os valores referente a tabela desconto mensal, com as tabelas de investimentos. Para simplificar o cálculo, iremos adotar como padrão, a atualização dos valores de maneira anual. Para isso, com a célula B2 selecionada, vamos inserir o código “=CPREV!E2\*12”. A seguir, com a célula B3 selecionada, vamos inserir o código “=CPREV!E3\*12+(B2\*(1+ $\alpha$ ))”. Novamente, repita o processo de clicar, segurar e arrastar. Nas figuras 19 e 20 mostramos este passo para  $\alpha = \frac{8,6}{100}$ .

As outras tabelas referentes aos investimentos seguem a mesma lógica. As colunas a serem modificadas são E e H. É importante ter cuidado na hora de usar os dados da página CPREV. Da mesma maneira que fizemos no Investimento I; para Investimento II e Investimento III, vamos usar a coluna E da página CPREV. A mudança fundamental para cada investimento vai ser no  $\alpha$  que é usado no passo 5.

*Observação:* Para determinar a rentabilidade do título TESOIRO RENDA+, pesquise na internet o valor médio do IPCA nos últimos 10 anos.

Como dito anteriormente, vamos considerar três produtos diferentes.

	A	B	C
1	Investimento I		
2	2024	R\$ 4.744,32	
3	2025	R\$ 10.227,33	

Figura 19 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (a)

	A	B	C	D	E
1	Investimento I		Investimento II		
2	2024	R\$ 4.744,32		2024	
3	2025	R\$ 10.227,33			
4	2026	R\$ 16.535,61			
5	2027	R\$ 23.764,78			
6	2028	R\$ 32.020,41			
7	2029	R\$ 41.419,00			
8	2030	R\$ 52.089,01			
9	2031	R\$ 64.172,07			
10	2032	R\$ 77.824,22			
11	2033	R\$ 93.217,36			
12	2034	R\$ 110.540,72			
13	2035	R\$ 130.002,55			
14	2036	R\$ 151.832,00			
15	2037	R\$ 176.281,02			
16	2038	R\$ 203.626,65			
17	2039	R\$ 234.173,33			
18	2040	R\$ 268.255,55			
19	2041	R\$ 306.240,68			
20	2042	R\$ 348.532,13			
21	2043	R\$ 395.572,68			
22	2044	R\$ 447.848,28			
23	2045	R\$ 505.892,05			
24	2046	R\$ 570.288,74			
25	2047	R\$ 641.679,57			
26	2048	R\$ 720.767,53			
27	2049	R\$ 808.323,14			
28	2050	R\$ 905.190,73			
29	2051	R\$ 1.012.295,31			
30	2052	R\$ 1.130.650,26			
31	2053	R\$ 1.261.365,11			
32	2054	R\$ 1.405.654,97			
33	2055	R\$ 1.564.849,86			
34	2056	R\$ 1.740.405,61			
35	2057	R\$ 1.933.915,36			
36	2058	R\$ 2.147.122,27			

Figura 20 – Inserindo fórmula para criar a coluna B, página INV. (b)

- (i) Vamos considerar que o Ibovespa apresentou uma valorização média de 8,6% a.a. O fundo ETF BOVA11, replica a rentabilidade do índice Ibovespa.
- (ii) O fundo S&P 500 apresentou valorização média de aproximadamente 16,7% a.a., O ETF IVVB11 replica a rentabilidade do índice S&P500.
- (iii) A figura 21 representa um dos títulos públicos do tesouro nacional. Este título foi criado em 30 de janeiro de 2023 com o intuito de tornar-se uma alternativa para o planejamento da aposentadoria. Este é um produto financeiro dito de renda fixa, logo, ele tem sua rentabilidade atrelada a um índice da economia brasileira (IPCA - Índice de Preços ao Consumidor Amplo).

<b>TESOURO RENDA+</b> APOSENTADORIA EXTRA	<b>Rentabilidade</b> IPCA + 6.23% aa	<b>Conversão</b> 2055	<b>Vencimento</b> 2074	<b>1 Título</b> R\$ 406,86
--	---	--------------------------	---------------------------	-------------------------------

Figura 21 – Rentabilidade do título Renda+

**Questão 8.1** Suponha que uma trabalhadora gonçalense aplique o mesmo valor descontado de seu salário em um dos investimentos descritos anteriormente. Para simplificar

os cálculos, vamos assumir que os valores descontados ao longo de cada ano vão ser investidos no final de cada ano. Também vamos trabalhar com a rentabilidade anual dos investimentos.

- (a) Construa as tabelas representando o montante acumulado nos investimentos realizados durante a vida laboral desta trabalhadora.
- (b) De acordo com as informações da aula anterior, na questão 7.3, são estabelecidos valores para o benefício de aposentadoria. A partir das tabelas construídas, determine o tempo que o montante acumulado no momento da aposentadoria para cada investimento, é capaz de equalizar o valor do benefício da aposentadoria com o último salário recebido.
- (c) Ainda de acordo com a questão 7.3, por quanto tempo o montante acumulado no momento da aposentadoria precisaria ficar investido no investimento I, para alcançar o mesmo montante do investimento II? E o investimento III?

*Sugestão ao professor:* Nesta aula, é interessante permitir ao aluno realizar os cálculos referentes aos anos iniciais dos investimentos, com o objetivo do aluno compreender o cálculo e como se dá a evolução dos valores. Após realizar pelo menos o cálculo referente aos três primeiros anos, o aluno deve ser capaz de generalizar (talvez com a ajuda do professor) o cálculo para qualquer ano. Alcançando tal resultado, o professor junto aos alunos deve iniciar a construção das tabelas referentes aos investimentos.

## 5 Resultados e desafios.

Durante o desenrolar das aulas foi perceptível a dificuldade apresentada pelos alunos em relação aos conceitos básicos. Devido aos resquícios da pandemia, muitos alunos ainda apresentam dificuldade para o cálculo das potências, onde acabam realizando o produto entre base e expoente das potências. Erro este, recorrente entre um número elevado de alunos. Porém, mesmo com os desafios observados, foi possível perceber que os alunos se mostraram dispostos e interessados a adquirir o conhecimento proposto nas atividades.

Abaixo temos dois exemplos de resultados obtidos durante a realização da aula 4. Na figura 22 temos o resultado correto das questões e na figura 23, vemos o erro recorrente que foi mencionado.

3.1 -	ANO	GANHO POR REAL	GANHO SALARIAL
3.2 -	2024	1,00	2,824,00
	2025	1,066	3010,384
$1,066^2$	2026	1,136	3209,069
$1,066^3$	2027	1,211	3420,867
$1,066^4$	2028	1,291	3646,645
$1,066^6$	2030	1,467	4143,887
$1,066^{19}$	2035	2,019	5704,189
$1,066^{24}$	2050	5,268	14878,255
$1,066^{35}$	2059	9,364	26446,417

B)  $2824 \cdot (1,066)^{n-2024}$

Figura 22 – Respostas de alunos na trilha, (a)

Ano	ganho por literal	ganho salarial
2024	3,00	2824,00
2025	3,066	3030,324
2026	3,136	3208,064
2027		
2028		
2030		
2035		
2050		
2058		

$3 + 6,6\%$  de 3,00  
 $6,6\%$  de 3,136  
 $2824 \cdot 3,066 \rightarrow 2824 \cdot (2,332) - 6,020,768$

Figura 23 – Respostas de alunos na trilha, (b)

Podemos concluir que o professor, ao propor as atividades, deve estar familiarizado com a turma. Pois, desta maneira, o professor será capaz de adaptar as atividades de preparação, desenvolvidas na aula 1, de acordo com as necessidades dos alunos.

## Referências

BRASIL. *Lei 9394 de 20 de dezembro de 1996*. Governo Federal. Congresso Nacional. 1996. Disponível em: <https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=9394&ano=1996&ato=3f5o3Y61UMJpWT25a>. Citado 1 vez na página 5.

DE OLIVEIRA JUNIOR, Mauricio Celso. *Uma trilha pedagógica usando modelagem matemática: aposentadoria e funções exponenciais*. 2024. Dissertação Profmat, Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional – Universidade Federal Fluminense. Citado 3 vezes nas páginas 5, 7, 20.

IBGE. *Portal Cidades do IBGE*. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama>. Acesso em: 7 ago. 2024. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23.

LIMA, Elon Lages. Números e funções reais. In: COLEÇÃO PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado 1 vez na página 20.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. In: COLEÇÃO do professor de matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 1 vez na página 20.