Procedimentos para Construção de Material Concreto por Processos Mecanizados e Impressão 3D

Clezio Aparecido Braga [1]
PROFMAT - UNIOESTE, CASCAVEL, PR

Resumo. Usando recursos de software CAD e técnicas para impressão 3D, construímos, modelos de sólidos geométricos para serem usados nas varias séries dos ensino fundamental e médio e também apresentamos um procedimento para construir, via Geogebra, um "quebra cabeça" de demonstração visual do teorema de Pitágoras. Como exportar o desenho para um formato CAD passível de ser fabricado por processo de corte mecanizado, principalmente em máquinas de corte a laser e por impressão 3D.

Palavras-chave. Sólidos Platônicos, O Teorema de Pitágoras, Geogebra, Formato dxf, corte a laser)

1 Introdução

Os laboratórios de ensino de matemática, nas escolas e universidades contam com acervos de materiais para manipulação e entendimento de conceitos matemáticos em seus diversos níveis. Atualmente com o advento da impressão 3D e acesso mais facilitados a máquinas de corte a laser, está mais fácil conseguir produzir fisicamente materiais manipuláveis para uso em salas de aula das escolas de ensino básico. Com o uso do Software de desenho programável OpenSCAD e juntando informações de geometria espacial, construímos alguns sólidos geométricos em formato apropriado para impressão 3D, que seguem anexos a esse texto e podem ser baixados e usados para gerar modelos físicos para uso em sala de aula. Uma curiosidade que observamos em visita a uma feira de profissões, na exposição do curso de Licenciatura em Matemática, são os "quebra cabeças" para a demonstração do teorema de Pitágoras. Perguntamos para a equipe de expositores quais seriam as medidas dos cortes para se produzir um desses modelos de "demonstração" visual do teorema de Pitágoras, mas ninguém tinha as medidas ou como construí-las. Então nos perguntamos como poderíamos encontrar as medidas para um possível desenho e produção de peças para um desses modelos? Será que essa divisão é única, ou podemos fazer de vários tamanhos? Na literatura encontramos várias forma de fazer isso, mas pensando na construção matemática e física do objeto construímos um modelo no Geogebra. (Veja GEOGEBRA para detalhes sobre o software.) Partimos de três pontos não colineares no plano, geramos um triângulo retângulo a partir deles (projeção ortogonal de um segmento sobre outro) e geramos um procedimento de como podem serem feitas as divisões das áreas dos quadrados do catetos a fim de montar a área do quadrado da hipotenusa. Essa forma para gerar subdivisões foi feito de forma dinâmica no Geogebra, dependendo apenas dos três pontos não colineares. Depois de feito o desenho convertemos a saída para o formato dxf que é um formato CAD utilizável para processamento de corte computadorizado ou impressão 3D.

No decorrer do texto explicaremos matematicamente a validade geométrica do modelo de geração das divisões das áreas, como gerar arquivos para impressão 3D ou corte à laser e deixar

[1] clezzio@gmail.com

alguns protótipos gerados e convertido em formatos stl e dxf que possam ser reproduzidos por impressão 3D, processos de corte a laser, plasma ou usinagem em fresadoras CNC. Os arquivos disponibilizados poderão ser facilmente reproduzido por qualquer pessoa ou unidade escolar que tenha acesso a um dos métodos de produção citados ou, até mesmo, de forma artesanal.

Ao final do texto apresentamos modelos de sólidos platônicos, exemplos de como gerar alguns deles no OpenScad e o modelador de vértices para montagem de esqueletos desses sólidos. Arquivos .scad segue anexo a esse texto.

2 Teorema de Pitágoras: procedimento de divisão de áreas

Partindo de três pontos não alinhados no plano construímos um triângulo retângulo e a partir dele fazemos uma divisão do quadrado de um dos catetos e montamos o quadrado da hipotenusa a partir quadrado do outro cateto e das partes geradas pela divisão do primeiro cateto. Veja na figura abaixo dois exemplos de como ficam a montagens.

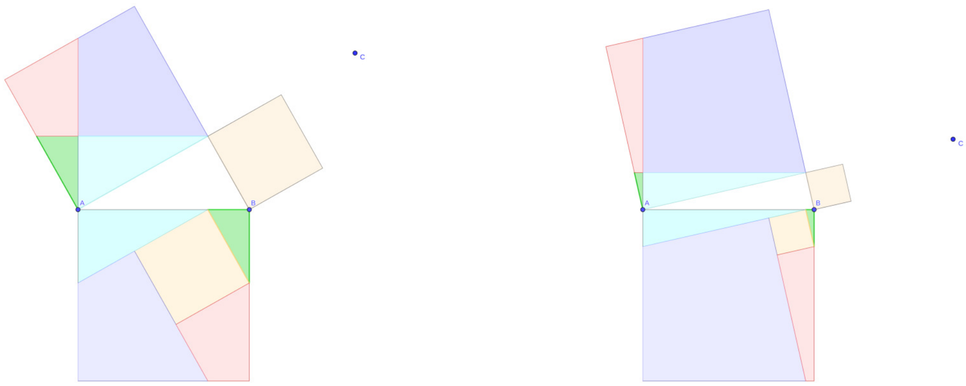

Figura 1: Construção da divisão e montagem dos quadrados.

Essa divisão pode ser gerada automaticamente no Geogebra a partir dos pontos A, B e C.

Para a demonstração geométrica do processo de divisão e montagem usaremos a figura 2 exibindo somente os vértice e as arestas. Detalhes dos argumentos geométricos utilizados podem ser encontrados em [4].

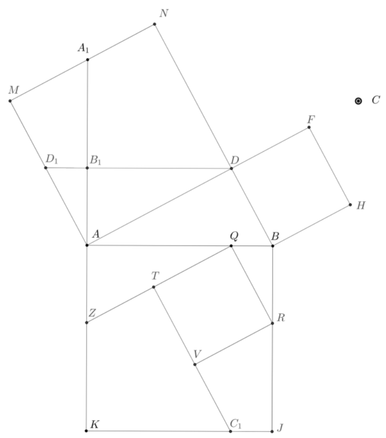

Figura 2: Construção da divisão

Para fins de notação usaremos XY para denotar um segmento de reta, XYZ para um triângulo, $XYZW$ para um quadrilátero e $\widehat{XYZ}$ para representar um ângulo entre os segmentos XY e YZ.

2.1 Construção da prova da validade da divisão dos quadrados

Dados três pontos não alinhados A, B e C, formemos os segmentos AB e AC. Considere o ponto D, obtido pela interseção do segmento AC com a reta ortogonal a esse segmento e passando por B. Construa o quadrado $ADNM$ cujo lado tem a medida do segmento AD. Seja D_1 a interseção da reta paralela a AB passando por D com o quadrado $ADNM$.

Observe que o quadrilátero $ABDD_1$ é um paralelogramo, pois os segmento BD encontra-se sobre a mesma reta que contém o segmento BN. O segmento DN e o segmento AM são paralelos, são lados do quadrado $ADNM$. Então AD_1 e BD estão sobre retas paralelas. Pelo teorema de Tales os segmento BD e AD_1 são congruentes, assim como AB e D_1D e, portanto, D_1D tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABD. Sejam os quadrado $ABJK$, cujo um dos lados é a hipotenusa do triângulo retângulo ABD e o quadrado $BDFH$, cujo um dos lados é o segmento BD e considere os pontos A_1, o ponto de interseção da reta ortogonal a AB passando por A e, B_1 o ponto de interseção entre os segmento AA_1 e DD_1.

Os triângulos AB_1D e AB_1D_1 são retângulos.

Considere o ponto Q sobre o segmento AB de modo que o segmento AQ seja congruente ao segmento B_1D. Então o segmento QB é congruente ao segmento D_1B_1. Fixemos os pontos Z sobre o segmento AK e R sobre o segmento BJ de modo que os triângulos AQZ e QBR sejam congruentes aos triângulos AB_1D e AB_1D_1 respectivamente. Sendo os triângulos AQZ e QBR triângulos retângulos, eles são semelhantes, então o ângulo $\widehat{ZQR}$ é reto. Considere o ponto T sobre o segmento QZ tal que o segmento QT seja congruente à QR, que será também congruente a BD. Escolhamos então um ponto V de modo a formar o quadrado $TQRV$ congruente ao quadrado $BDFH$.

Seja C_1 a interseção do segmento KJ com a reta que passa pelos pontos T e V e formemos os quadriláteros $KZTC_1$ e $VRJC_1$.

Os segmentos DD_1 e AA_1 são congruentes, pois são as hipotenusas dos triângulos retângulos ADD_1 e MAA_1 respectivamente. Como B_1A é congruente a AZ, temos que ZK é congruente a B_1A_1.

O segmento ZQ é congruente a MN e MA_1 é congruente a QT, então ZT é congruente a A_1N. Observe que RJ é congruente a A_1B_1. Para finalizar, considere os triângulos ZTK e A_1NB_1 (não exibidos na figura 2).

Como ZT é congruente a A_1N, o ângulo $\widehat{B_1A_1N}$ é igual ao ângulo $\widehat{KZT}$, então os triângulos ZTK e A_1NB_1 são congruentes e, portanto, os segmentos KT e B_1N são congruentes. Sendo os ângulos $\widehat{ZTC_1}$ e $\widehat{A_1ND}$ ambos ângulos retos, os ângulos $\widehat{B_1ND}$ e $\widehat{KTC_1}$ são iguais e pelo teorema de Tales, os ângulos $\widehat{B_1DN}$ e $\widehat{KC_1T}$ são iguais, então os triângulos KTC_1 B_1DN são congruentes e por consequência o os quadriláteros B_1A_1ND e $KZTC_1$ são congruentes. Também C_1J é congruente a D_1B_1 e BC_1 é côngruo a MD_1 e, então os quadriláteros VC_1JR e $MD_1B_1A_1$.

Com isso vemos que podemos montar o quadrado da hipotenusa a partir do quadrado dos catetos.

Para a construção do desenho no Geogebra, foi preciso fazer uma restrição no ponto C para permitir a divisão sem extrapolar os limites dos quadrados dos catetos do triângulo ABD. O ponto C deve ser um ponto no primeiro quadrante com coordenas $x \geq y$.

2.2 Exportação do arquivo em formato compatível

Uma vez construído de forma dinâmica no Geogebra o desenho, procedemos a exportação do arquivo para "pdf" e salvamos.

De posse do arquivo pdf, abrimos o Inkscape e abrimos nosso arquivo pdf. Em seguida, em "salvar como", escolhemos o formato dxf e salvamos. O arquivo dxf já pode ser levado para corte laser, mas pode ser que tenha linhas sobrepostas ou informações de cores que não são necessárias para realização do corte. Aqui podemos entrar com o LibreCad para promover uma limpeza no desenho, deixando apenas as linhas de corte sem duplicação. Para corte em fresadoras CNC, com ponta rotativa, é preciso separar cada um dos polígonos do desenho no arquivo dxf para poder executar a usinagem das peças. Para execução em impressoras 3d, além de separar os modelos, é necessário fazer uma extrusão vertical com a altura desejada para as peças.

3 Procedimento nos softwares, como fazer?

Para realização do procedimento de construção do "quebra cabeça" iremos usar primeiramente o Geogebra; para conversões, o InkScape, ([2]) e para ajustes o LibreCAD ([3]) ou o OpenScad ([5]). Todos esses softwares são livres e podem ser usados sem custos.

Por que utilizar 3 softwares diferentes nesse processo? Porque o Geogebra é bastante conhecido na comunidade matemática, podendo ser facilmente compreendido e utilizado por professores de matemática e educação matemática. Entretanto, o Geogebra não possui suporte para arquivos do tipo (Drawing Exchange Format) dxf, popularizado pelo AutoCad e um dos principais formatos utilizados para corte mecanizados (laser, plasma, usinagem por fresagem, jato d'água, etc). Por esse motivo se faz necessário a conversão de um formato suportado pelo Geogebra em um formato CAD que permita executar o processo físico de corte do objeto, sem ter que redesenhar em CAD, o desenho obtido dinamicamente pelo Geogebra.

As vantagens de usar o Geogebra é que, mudando um dos três pontos, temos outra divisão e, portanto a possibilidade da geração de um novo objeto físico com novas medidas.

O Geogebra tem suporte para exportação de arquivos nos formatos: pdf, png, svg, txt (Pstricks), txt (PGF/TikZ), txt (asymptote), html (planilha dinâmica web), html (protocolo de construção), stl (Impressão 3D) e mais alguns outros, mas não em dxf. Mesmo exportando para stl, o modelo exportado não serve para os propósitos de montar e desmontar o “quebra cabeça”. Como as máquinas de corte computadorizadas, ou a grande maioria delas, suportam o formato dxf, vamos usá-lo como formato final.

Para realizar nosso procedimento de exportação de arquivos, primeiro exportamos do Geogebra para pdf.

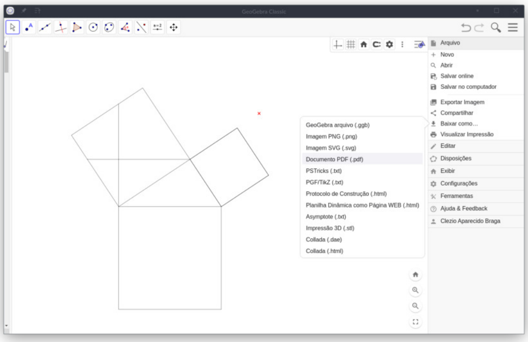

Figura 3: Exportando para pdf

Com o arquivo pdf gerado convertemos para dxf usando o Inkscape. A conversão é feita abrindo o arquivo pdf no Inkscape e depois na aba “arquivos” escolha “Salvar Como” (seta amarela na figura 4).

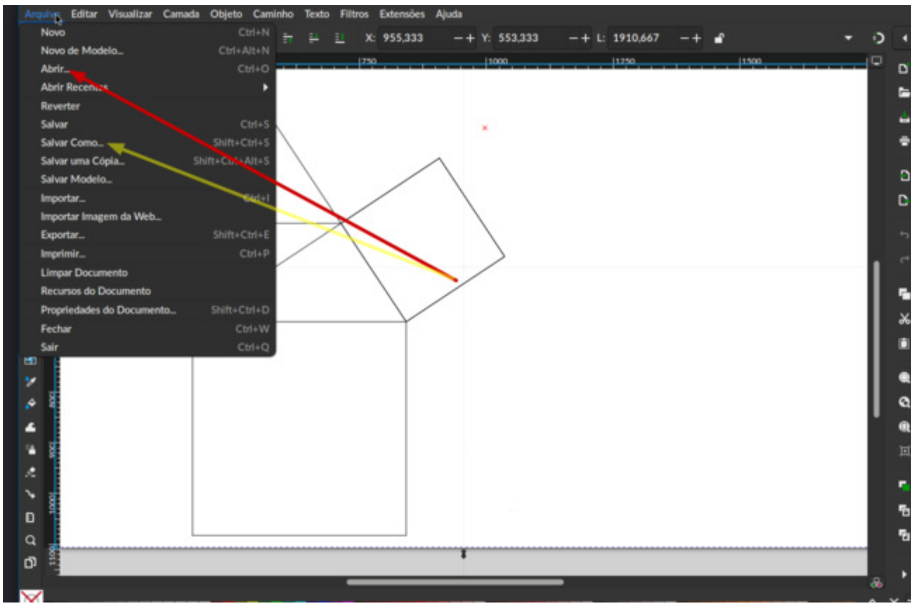

Figura 4: Abrir o pdf e salvar em dxf

Na janela que se abre, escolha o formato dxf na caixa combo inferior (seta vermelha na figura 5) e clique em salvar.

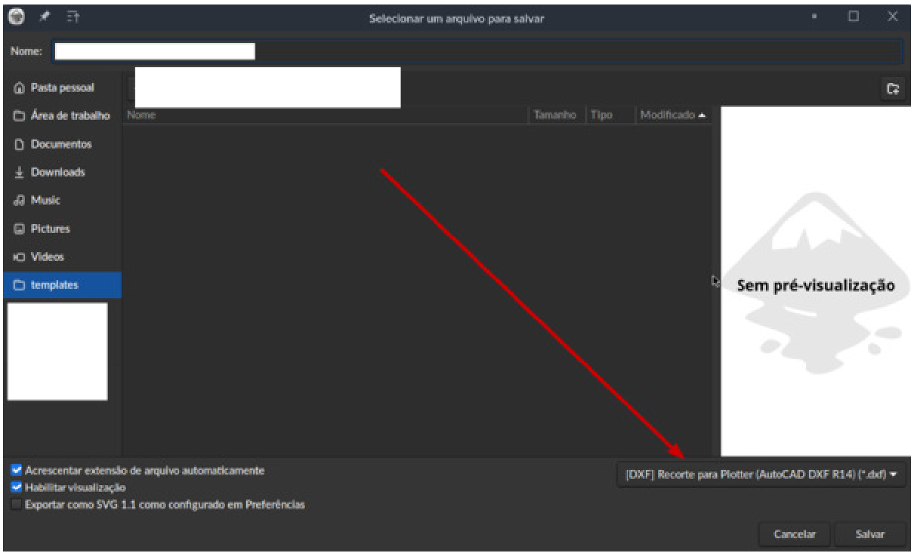

Figura 5: Salvando em formato dxf

Pronto! Você já tem um arquivo “dxf” 2D em sua pasta. Esse arquivo já pode ser levado para o processo de corte mecânico em plástico, mdf, mdp, madeira, metal, eva, papel, etc., dependendo do recurso disponível e da preferência. Mas como dissemos antes, pode ser que tenha linhas duplicadas oriundas do Geogebra. Para usá-lo em uma fresadora ou fazer uma extrusão 3D funcional é preciso trabalhar o arquivo dxf e fazer a separação dos polígonos.

Um exemplo pode ser visto na Figura 6.

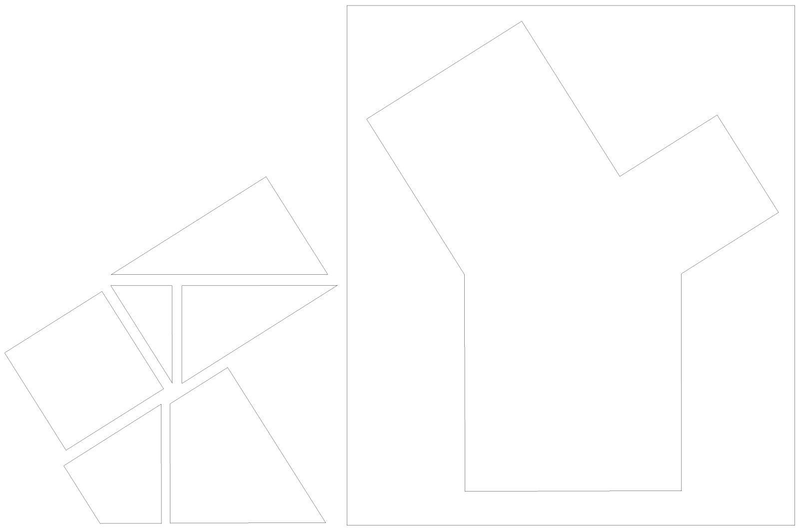

Figura 6: Visualização de um arquivo dxf com os polígonos separados e uma região de montagem.

Para um modelo 3D à partir do desenho da Figura 6, importamos o arquivo dxf no OpenScad e executamos uma extrusão linear com a altura que desejamos. O Comando usado para isso é:

```
linear_extrude(4){scale(0.2){import("caminhoparaoarquivo/arquivo.dxf");}
```

Usamos uma escala de 20% para se adequar a uma mesa de impressão de 20cm×20cm, mas isso pode ser feito em qualquer escala. A altura usada nesse exemplo foi de 4 mm. Veja na Figura 7 com fica a saída do modelo tridimensional no OpenScad. Esse modelo agora pode ser exportado para stl e levado a uma impressora 3D para produção das peças. O ideal é que os polígonos sejam impressos em uma escala minimamente menor que a escala da moldura de montagem para garantir o encaixe, caso contrário, será preciso executar alguns lixamentos para garantir o encaixe perfeito. Em anexo a esse texto seguem os arquivos em formato stl dos polígonos e das molduras separadamente.

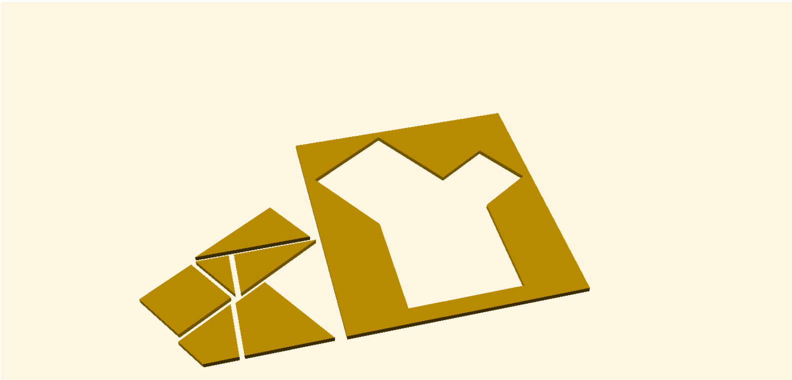

Figura 7: Modelo de extrusão 3D

4 Sólidos geométrico e esqueletos de sólidos

Além de todo o processo que fizemos para gerar um modelo tridimensional do "quebra cabeça" do teorema de Pitágoras, podemos gerar diretamente no OpenScad, sólidos geométricos e peças (vértices) para montar esqueleto de sólidos e polígonos. Esse tema faz parte de um estudo conjunto com J. A.B. Brandalize, e pode ser encontrado em [1]. O OpenScad, em uma primeira abordagem, pode parecer um pouco difícil de se usar, mas com o tempo fica mais fácil do que se imagina. Parecido com o padrão Latex para produção de textos, o OpenScad produz desenhos tridimensionais a partir de comando textuais. Não é nosso intuito explorar o OpenSCAD nesse trabalho, mas apresentaremos alguns desenhos que ilustram suas funcionalidades e sua utilidade em ensino básico.

Por exemplo, com o comando

```
cylinder(r1=20,r2=0,h=40,$fn=4);
```

produzimos uma pirâmide de base quadrada com lados de $20\sqrt{2}$mm e altura de 40mm. Parece estranho, mas é um cilindro (na verdade um tronco de cone) com raio da base de 20mm, raio superior de 0mm, altura de 40mm e com um número de faces igual a 4. Outra vantagem é que de posse do software, basta copiar a programação textual de um desenho para ter um na sua tela. Experimente copiar o texto em destaque abaixo e colar na janela textual do OpenScad.

```
aresta=10;
a=aresta;
// Diagonal
d=sqrt(2)*aresta;
polyhedron(points=[[(1/2)*a,(-1/2)*a,0],[(1/2)*a,(1/2)*a,0],
```

```
[(-1/2)*a,(1/2)*a,0],[(-1/2)*a,(-1/2)*a,0],[0,0,(1/2)*d],[0,0,(-1/2)*d]],
faces=[[0,4,1],[1,4,2],[2,4,3],[3,4,0],[0,1,5],[1,2,5],[2,3,5],[3,0,5]]);
```

Faça o mesmo com:

```
aresta=10;
a=aresta;
h1=(a/2)/cos(18);
h2=(a/2)/sin(36);
h=h1+2*h2;
c1=(-1/2)*h;
c2=(-1/2)*h1;
c3=(1/2)*h1;
c4=(1/2)*h;
d=h1+h2;
polyhedron(
points=[[h2,0,c1], //0
[(1/2)*h1,h2*cos(18),c1], //1
[-h2*cos(36),(1/2)*a,c1], //2
[-h2*cos(36),(-1/2)*a,c1], //3
[(1/2)*h1,-h2*cos(18),c1], //4
[d,0,c2], //5
[(1/2)*h2,d*cos(18),c2], //6
[-d*cos(36),d*sin(36),c2], //7
[-d*cos(36),-d*sin(36),c2], //8
[(1/2)*h2,-d*cos(18),c2], //9
[-d,0,c3], //10
[(-1/2)*h2,-d*cos(18),c3],//11
[d*cos(36),-d*sin(36),c3],//12
[d*cos(36),d*sin(36),c3], //13
[(-1/2)*h2,d*cos(18),c3], //14
[-h2,0,c4], //15
[(-1/2)*h1,-h2*cos(18),c4], //16
[h2*cos(36),(-1/2)*a,c4], //17
[h2*cos(36),(1/2)*a,c4], //18
[(-1/2)*h1,h2*cos(18),c4] //19
],
faces=[[0,1,2],[0,2,3],[0,3,4],[0,5,13],[0,13,1],[1,13,6],[1,6,14],[1,14,2],
[2,14,7],[2,7,10],[2,10,3], [3,10,8],[3,8,11], [3,11,4],[4,11,9],[4,9,12],
[4,12,0], [0,12,5],[8,10,15],[8,15,16], [8,16,11],[9,11,16],[9,16,17],[9,17,12],
[5,12,17],[5,17,18],[5,18,13],[6,13,18],[6,18,19],[6,19,14],[7,14,19],
[7,19,15],[7,15,10], [15,17,16],[15,18,17],[15,19,18]]);
```

Esse são exemplos para serem copiados e executados no OpenSCAD, é claro que figuras mais complexas podem ser geradas, mais é preciso ter uma boa noção de matemática, principalmente; trigonometria, geometria, álgebra linear; conhecer os recursos do software; uma boa percepção espacial e um pouco de criatividade. Na figura 8 podemos ver como fica o desenho 3D definido pelo texto acima.

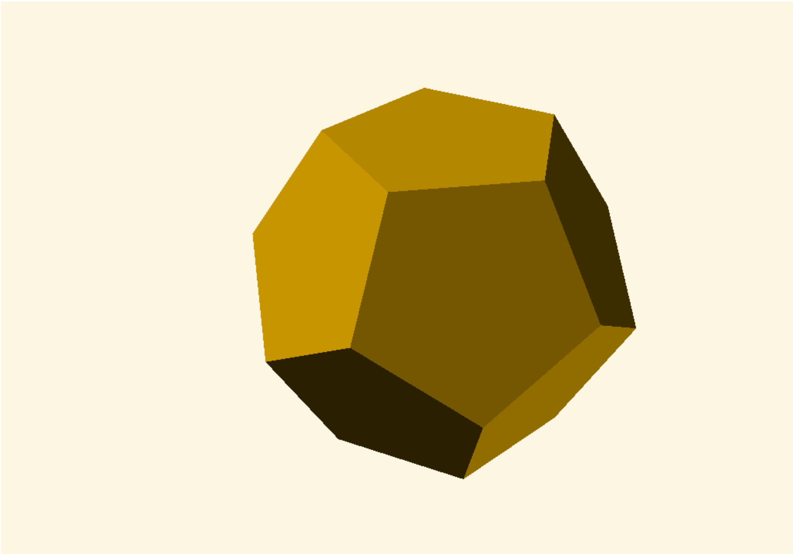

Figura 8: Dodecaedro

Outro recurso que deixaremos disponível nesse trabalho são os desenhos de vértices para geração de sólidos platônicos. São arquivos scad e stl que podemos usar para gerar desenhos tridimensionais de objetos para gerar esqueletos de alguns sólidos geométricos.

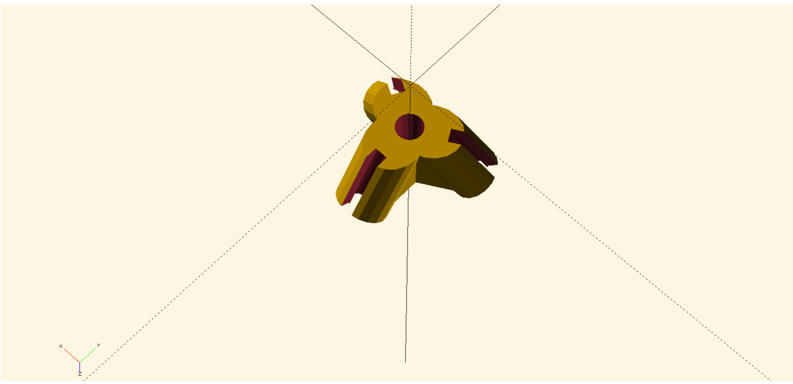

Figura 9: Vértice de um tetraedro

O arquivo original para gerar vértices de sólidos platônicos pode ser encontrados em

"https://www.thingiverse.com/thing:9359".

O arquivo é paramétrico e podemos ajustar o diâmetro das arrestas (varetas, tubos, palitos) a serem usadas, bem como escolher o sólido.

Seguem em anexo os arquivos para geração desses sólidos e vértices.

Para montar os esqueletos são necessário: 4 vértices para o tetraedro; 8 vértices para o cubo; 6 vértices para o octaedro; 20 vértices para o dodecaedro e 12 vértices para o icosaedro.

5 Considerações Finais

Nesse texto fizemos um resumo de um procedimento usando OpenSCAD para gerar sólidos platônicos e de uso do Geogebra para gerar desenhos com divisões nos quadrados dos lados de um triângulo retângulo para a confecção de um "quebra cabeça" de demonstração visual do teorema de Pitágoras. Esse processo pode ser reconstruído por qualquer pessoa com alguma destreza no uso do Geogebra. O processo de exportação é relativamente simples no Inkscape, mas a edição do arquivo CAD é um pouco técnica.

A figura 10 mostra o corte a laser do quebra cabeça do teorema de Pitágoras.

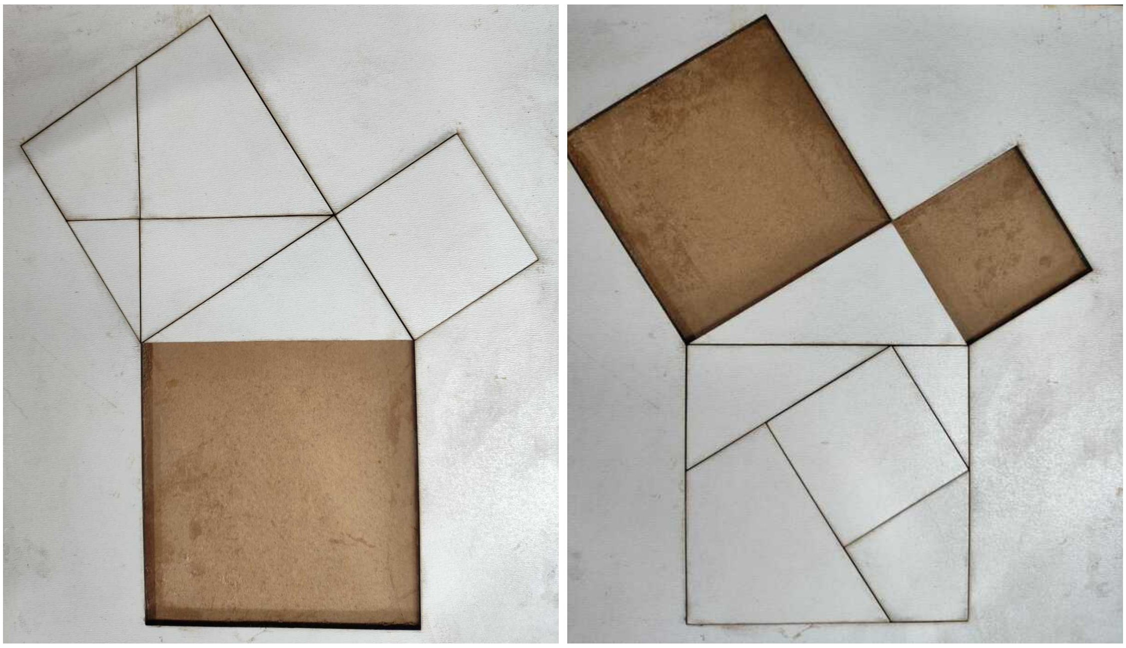

Figura 10: Modelo fabricado por corte a laser.

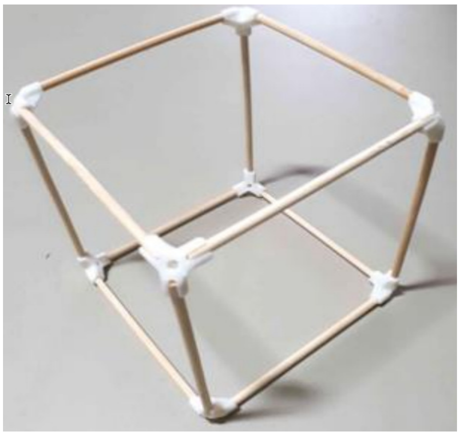

Figura 11: Esqueleto de um cubo com vértices impressos e varetas de espetinho.

Esses procedimentos podem ser usados para confecção de outros materiais didáticos para ensino de matemática.

Os modelos disponibilizados nos arquivos anexos podem ser baixados e usados livremente.

Referências

[1] Clezio A. Braga e João A. B. Brandalize. "OpenSCAD, gerando modelos tridimensionais para uso no ensino de geometria". Em: **Brazilian Journal of Development** 9.05 (mai. de 2023), pp. 17673–17686. DOI: `10.34117/bjdv9n5-212`. URL: `https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/60006`.

[2] Equipe INKSCAPE. **Site oficial do software de desenho vetorial INKSCAPE**. Online. Acessado em 29/09/2024, `https://inkscape.org/pt-br`.

[3] Equipe LibreCAD. **Site oficial do software LibreCAD**. Online. Acessado em 29/09/2024, `https://librecad.org`.

[4] Antônio Caminha Muniz Neto. Neto. **Geometria**. 2a. ed. São Paulo: SBM, 2022. ISBN: 9788583371854.

[5] Equipe OpenSCAD. **OpenSCAD The Programmers Solid 3D CAD Modeller**. Online. Acessado em 29/09/2024, `https://openscad.org/index.html`.