UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES

SEQUÊNCIA DIDÁTICA:
COMO OS EGÍPCIOS CALCULAM A ÁREA DE QUADRILÁTEROS?

CAMPINA GRANDE
2024

EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES

SEQUÊNCIA DIDÁTICA:
COMO OS EGÍPCIOS CALCULAM A ÁREA DE QUADRILÁTEROS?

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na educação básica.

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

CAMPINA GRANDE
2024

A474s Alves, Emanuel Carlos Albuquerque.
Sequência didática [manuscrito] : como os egípcios calculam a área de quadriláteros? / Emanuel Carlos Albuquerque Alves. - 2024.
34 p. : il. colorido.

Digitado. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. "Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Quadriláteros. 2. Matemática dos egípcios. 3. Ensino de matemática. 4. Ensino de geometria. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Lêda C. D. Andrade - CRB - 15/1032 BC/UEPB

EMANUEL CARLOS ALBUQUERQUE ALVES

SEQUÊNCIA DIDÁTICA:
COMO OS EGÍPCIOS CALCULAM A ÁREA DE QUADRILÁTEROS?

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na educação básica.

Aprovada em: 23/08/2024.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____
Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____
Prof. Dr. Ion Moutinho Goncalves (Membro externo)
Universidade Federal Fluminense (UFF)

RESUMO

Este trabalho é o produto didático resultante da dissertação de mestrado profissional intitulada "Por Uma Geometria Pictórica: Histórias, Usos e Conexões de Imagens" (Alves, 2024). Este produto didático é composto de roteiro e orientações para aplicação em sala pelo professor, juntamente com a sequência de atividades para os alunos. A proposta é estruturada para ser aplicada nas séries finais do Ensino Fundamental e explora a área de quadriláteros de forma histórica, remontando ao método dos Egípcios, e investigativa. Pode ser utilizada tanto para introduzir este conteúdo quanto para diversificar e enriquecer a compreensão deste objeto de aprendizagem da matemática.

Palavras-chaves: quadriláteros; matemática dos egípcios; ensino de geometria; ensino de matemática.

SUMÁRIO

1 PRODUTO EDUCACIONAL

Este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática, composto de roteiro e orientações para aplicação em sala pelo professor, juntamente com a sequência de atividades para os alunos. A proposta é estruturada para ser aplicada nas séries finais do Ensino Fundamental e explora a área de quadriláteros de forma histórica, remontando ao método dos Egípcios, e investigativa. Pode ser utilizada tanto para introduzir este conteúdo quanto para diversificar e enriquecer a compreensão deste objeto de aprendizagem da matemática.

O conteúdo deste trabalho é o produto didático resultante da dissertação de mestrado profissional intitulada "Por Uma Geometria Pictórica: Histórias, Usos e Conexões de Imagens" (Alves, 2024). A dissertação investiga a matemática através de elementos pictóricos e geométricos, demonstrando que esses elementos estiveram presentes desde o início da matemática, mas foram gradualmente sobrepostos por aspectos algébricos e simbólicos devido a questões filosóficas, e não necessariamente por questões de aprendizagem. Esta abordagem evidencia a importância de resgatar e utilizar essas conexões pictóricas e geométricas para proporcionar uma aprendizagem mais diversificada e significativa dos objetos matemáticos.

2 MATERIAL DO PROFESSOR

2.1 Título

Como os egípcios calculavam a área de quadriláteros?

2.2 Público alvo:

Professores e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. É ideal também que estes alunos tenham como pré-requisito:

- Noção sobre ângulos notáveis e dos valores de seno e cosseno destes;
- Noção de função;

2.3 Objetivos:

2.3.1 Objetivo geral

Analisar a fórmula do Agrimensor dos Egípcios, usada para estimar a área de quadriláteros, reconhecendo geometricamente como uma estimativa superior para a área.

2.3.2 Objetivos específicos

- Reconhecer quadriláteros e diferenciá-los com base na medida de seus ângulos e no paralelismo de seus lados;

- Mensurar a área de retângulos e paralelogramos a partir de malha quadriculada e fórmulas, mostrando que a fórmula do Agrimensor é válida como uma desigualdade.

- Compreender a relação entre a variação das medidas dos ângulos internos com a medida da área de um quadrilátero, reconhecendo quando a fórmula do Agrimensor apresentava um bom resultado.

2.4 Material necessário

Pedaço de cartolina, lápis de pintura, tesoura, transferidor, régua, canudo, miçangas, barbante e computadores/celulares com Geogebra.

2.5 Procedimento didático-metodológico

Serão necessários dois momentos, cada um com duas aulas consecutivas. No primeiro momento, serão abordadas as três primeiras partes da sequência didática (SD); no segundo, as demais. É importante seguir a sequência, porém deve-se valorizar mais as interações entre os alunos e o professor durante o desenvolvimento da SD.

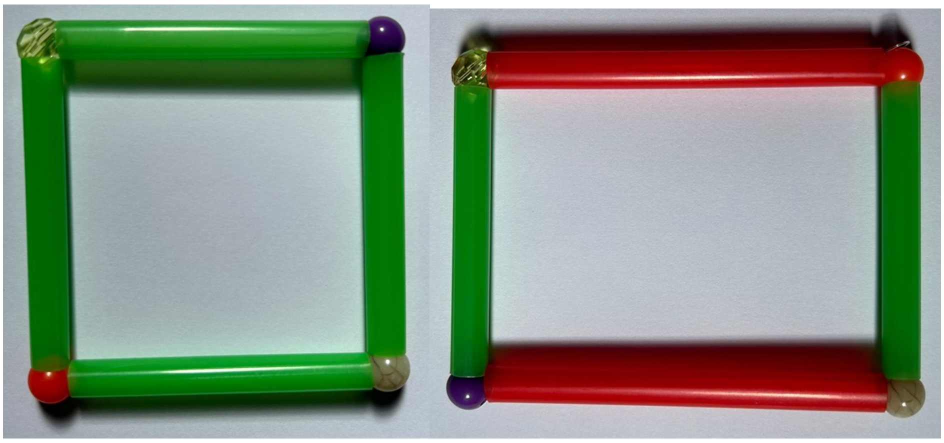
A seguir, são apresentadas orientações para o professor sobre o desenvolvimento da sequência.

2.5.1 PARTE 1: Quadriláteros

A atividade tem como objetivo revisar as noções geométricas sobre quadriláteros, explorando suas definições e os aspectos relacionados aos lados e ângulos para sua classificação. É fundamental incentivar a interação entre os alunos e entre os alunos e o professor, garantindo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos.

Com relação as construções de quadriláteros e canudos no final da atividade vale destacar dois pontos. O primeiro, em relação ao material, é importante que o diâmetro da miçanga seja um pouco maior do que o diâmetro do canudo, para que a estrutura final montada tenha uma boa estrutura e mantenha os ângulos retos. Observe a seguir na figura 1:

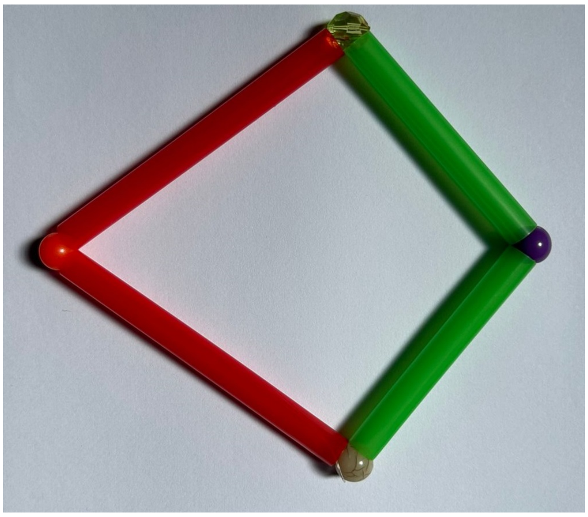
Figura 1: Quadrado e retângulos feitos de canudo



Fonte: Foto própria do autor

O segundo ponto refere-se à construção utilizando dois canudos de um certo tamanho e dois canudos de outro tamanho do item 7 da Atividade 3.1. Dependendo da ordem em que os canudos são encaixados, o quadrilátero resultante pode não ser um retângulo, mas sim um quadrilátero em formato de pipa (Figura 2). Se isso acontecer, peça ao aluno para manter a peça e, em seguida, construir outra de modo que o resultado final seja um retângulo. A construção do retângulo é necessária para atividades posteriores, mas o quadrilátero em formato de pipa também pode ser explorado na parte 5 da sequência didática.

Figura 2: Quadrilátero feito de canudos



Fonte: Foto própria do autor

2.5.2 PARTE 2: Área de retângulos e paralelogramos

A atividade tem como objetivo formalizar que a área de um retângulo é dada pelo produto do comprimento pela altura. Além disso, demonstra que essa fórmula também é válida para os paralelogramos, embora, neste caso, a altura não corresponda a um dos lados, como acontece especificamente nos retângulos.

Durante o preenchimento das tabelas pelos alunos com seus próprios dados, o professor pode construir uma tabela no quadro, coletando informações de diferentes alunos e formalizando coletivamente a maneira de calcular a área dos retângulos e dos paralelogramos.

2.5.3 PARTE 3: Área de quadriláteros pelos egípcios

A atividade tem como proposta apresentar a fórmula do Agrimensor dos egípcios para calcular a área de quadriláteros. No item 1, é importante destacar que essa fórmula funciona corretamente para retângulos e, consequentemente, para quadrados. Já no item 2, deve-se ressaltar que a fórmula não é válida, mas oferece um limite superior para a área dos quadriláteros, assim como para a área do paralelogramo em questão.

2.5.4 PARTE 4: Demonstrando a desigualdade

A atividade tem como objetivo demonstrar que a fórmula do Agrimensor pode ser vista como uma desigualdade que estabelece um limite superior para a área de quadriláteros. Por se tratar de uma demonstração, algo não tão comum no Ensino Básico, é importante que haja uma construção gradual e uma socialização a cada passo. Isso mostrará que, independentemente do quadrilátero utilizado inicialmente por cada aluno, o resultado será válido para qualquer quadrilátero.

2.5.5 PARTE 5 e PARTE 6: Analisando a fórmula do agrimensor

Ambas atividades tem como proposta analisar em quais situações a fórmula do Agrimensor apresenta uma melhor estimativa para a área de quadriláteros quaisquer, sendo que a parte 6 só pode ser explorada caso os alunos tenham acesso ao Geogebra por algum dispositivo eletrônico como celular, tablet ou computador.

Na parte 5, os alunos utilizam os quadriláteros construídos com canudos, deformando o quadrado e o retângulo em paralelogramos ao pressionar a estrutura, constatando visualmente e aritmeticamente que a área da região está diminuindo.

Na parte 6, utilizando o GeoGebra, a proposta é construir a deformação do quadrilátero em função de um ângulo do retângulo, observando assim as mudanças visualmente e graficamente no software.

Além disso, ao utilizar o GeoGebra, pode-se propor como exercício a construção de quadriláteros com lados distintos ou até mesmo no formato de pipa, como ocorrido na parte 1 por algum aluno, para verificar a validação dos resultados obtidos anteriormente.

2.6 Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

ALVES, Emanuel Carlos Albuquerque. **Por uma geometria pictórica: Histórias, usos e conexão de imagens**. Orientador: Arlandson Matheus Silva Oliveira. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - UEPB. Campina Grande, 2024.

WILSON, W. W.; WILSON, G. L. Na ancient Egyptian approximation. The Mathematical Gazette. ´1991. p 89 – 90.

TOU, Erik. Measuring the Accuracy of na Ancient Area Formula. SIAS Faculty Publications. 2014. Disponível em: <https://digitalcommons.tacoma.uw.edu/ias_pub/848>. Acesso em: 01 de jun. 2024.

3 MATERIAL DO ALUNO

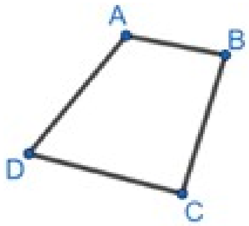
Sequência Didática: Como os egípcios calculavam a área de quadriláteros?

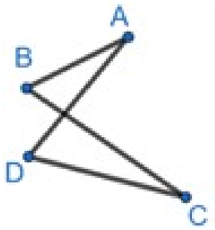
3.1 – PARTE 1: Quadriláteros

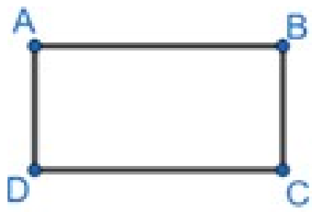
1. Você sabe o que é um quadrilátero? (   ) Sim   (   ) Não

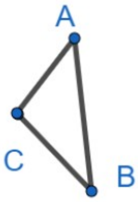
Descreva suas ideias a respeito do que seja um quadrilátero:

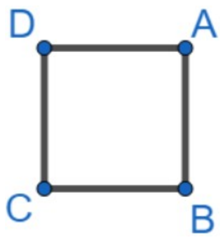
2. Circule ou pinte as figuras a seguir que podem representar um quadrilátero:

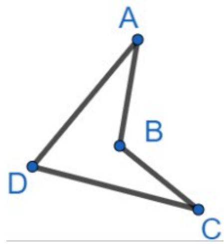


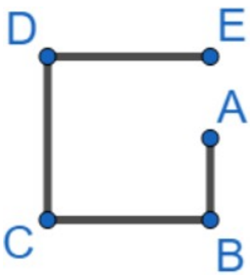


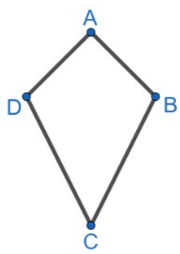


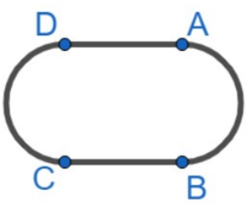












3. Agora, no pedaço de cartolina você deve usar régua e lápis para desenhar um quadrilátero. Depois recorte e com a régua meça os lados dos quadriláteros.

Quais as medidas dos lados desse quadrilátero?

____

5. Você sabe o que é ângulo? (   ) Sim (   ) Não

Descreva suas ideias a respeito do que seja um ângulo:

____

____

____

4. A partir do quadrilátero feito anteriormente, desenhe uma cópia em uma folha. Depois, recorte essa folha e faça a representação dos ângulos internos desse quadrilátero.

5. Recorte só os ângulos e depois junte-os.

Qual foi a soma dos ângulos do quadrilátero? ____________

6. Vamos construir outros quadriláteros, mas dessa vez com canudos e bolinhas de miçangas.

Primeiro, corte quatro pedaços de canudo da mesma medida. Depois, passe cada pedaço de canudo seguido de uma miçanga pela linha e dê um nó para juntar.

Qual quadrilátero formado por você?

____

Quais quadriláteros podem ser formados deformando/apertando o quadrilátero montado?

____

7. Agora, corte dois pedaços de canudo da mesma medida e mais outros dois pedaços maiores de mesmo tamanho. Depois, passe cada pedaço de canudo seguido de uma miçanga pela linha e dê um nó para juntar.

Qual quadrilátero formado por você?

___

Quais quadriláteros podem ser formados deformando/apertando o quadrilátero montado?

___

3.2 – PARTE 2: Área de retângulos e paralelogramos

1. Você sabe o que é área? (   ) Sim   (   ) Não

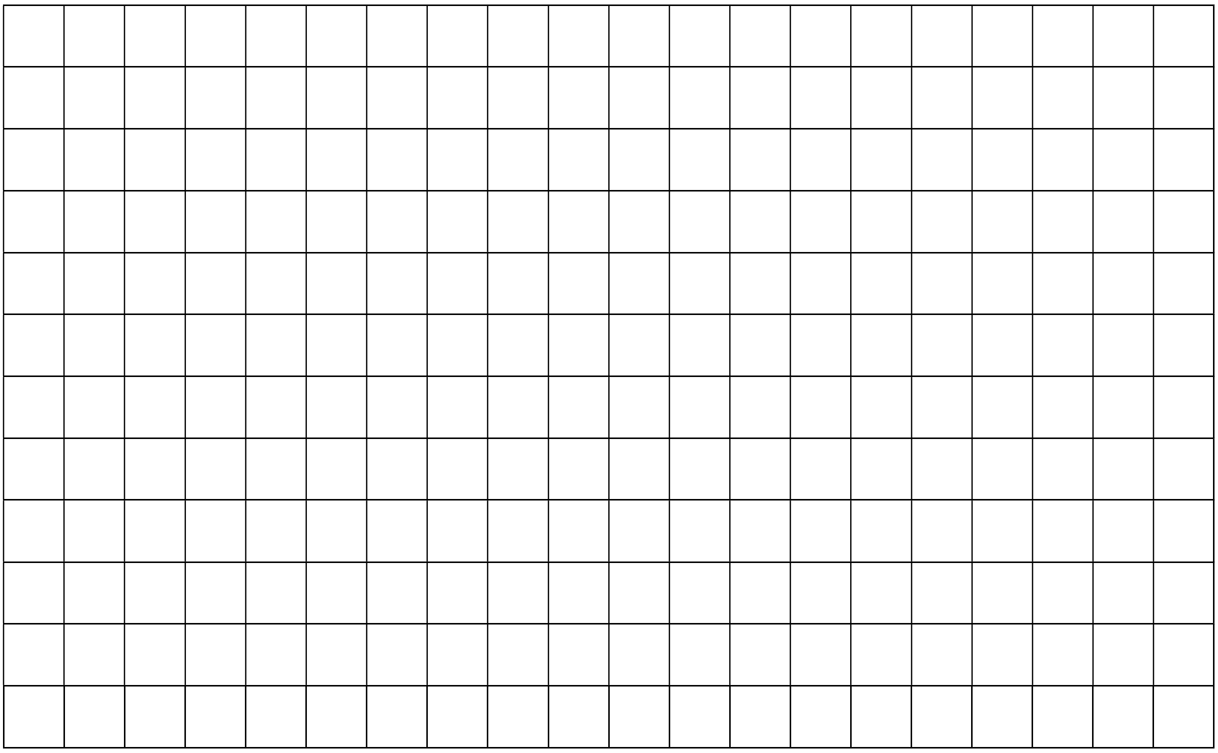
Descreva suas ideias a respeito do que seja área:

____

____

____

2. Desenhe quatro retângulos na malha quadriculada:



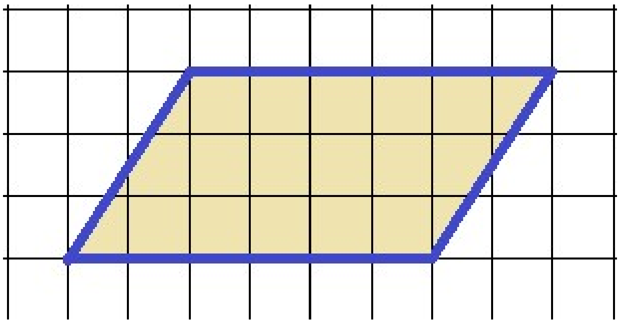
Agora, complete a tabela com os dados de cada retângulo, onde a área é dada pela quantidade de quadrados dentro da região retangular.

	Altura	Comprimento	Área do retângulo
Retângulo 1			
Retângulo 2			
Retângulo 3			
Retângulo 4			

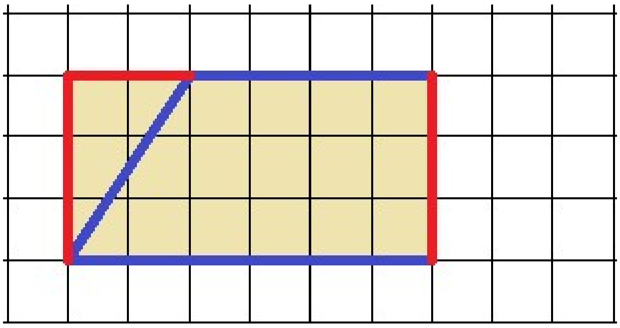
3. Como podemos calcular a área de um retângulo utilizando a altura e o comprimento?

____

4. Agora, observe a ideia de uma aluna para calcular a área de um paralelogramo. Primeiro, ela desenhou o paralelogramo na malha quadriculada:



Depois, para contar a quantidade de quadradinhos dentro da região do paralelogramo, ela viu que poderia reorganizar o paralelogramo "cortando" um triângulo de um lado e adicionando ao lado oposto, montando assim, um retângulo.



Você acha que a área deste retângulo é igual à do paralelogramo inicial?

(   ) Sim   (   ) Não

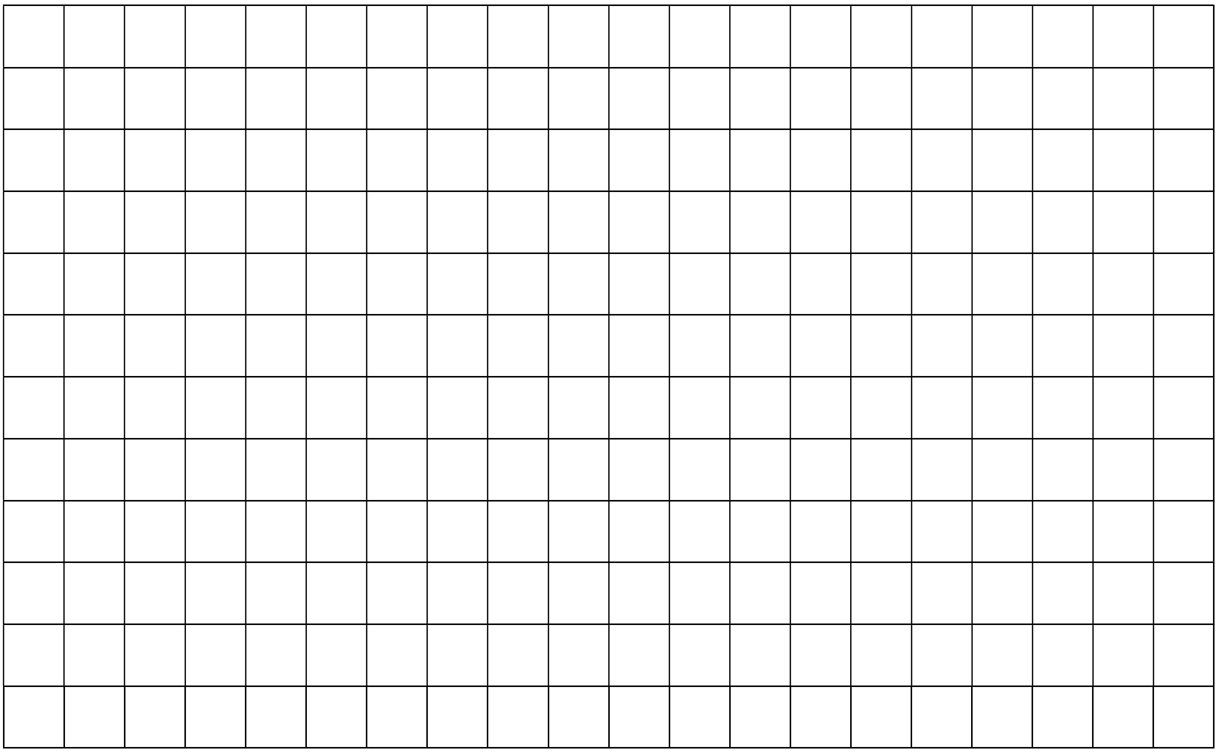
Justifique:

____

____

____

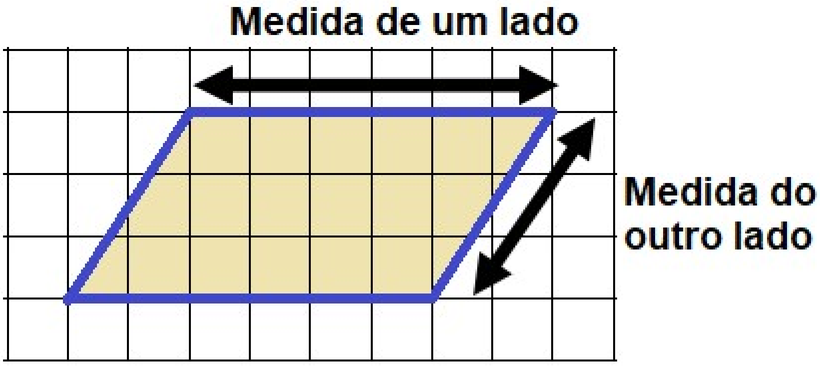
5. Desenhe quatro paralelogramos, que não sejam retângulos, com a mesma altura e comprimento dos retângulos desenhados anteriormente na malha quadriculada a seguir.



Complete a tabela com os dados de cada paralelogramo. Onde o **comprimento** é o lado do paralelogramo que está sobre as linhas da malha quadriculada.

	Altura	Comprimento	Área do Paralelogramo
Paralelogramo 1			
Paralelogramo 2			
Paralelogramo 3			
Paralelogramo 4			

Agora, complete a tabela com os dados de cada paralelogramo e depois calcule o produto das medidas pedidas.



Onde a **medida de um lado** é referente ao lado do paralelogramo que está sobre as linhas da malha quadriculada, a qual estávamos chamando de **comprimento**. E a **medida do outro lado** é referente ao lado do paralelogramo que atravessa os quadrados da malha, neste caso use uma régua para medir.

	Medida de um lado	Medida do outro lado	Produto dos lados
Paralelogramo 1			
Paralelogramo 2			
Paralelogramo 3			
Paralelogramo 4			

Pode-se afirmar que a **área de um retângulo** é sempre calculada pelo produto dos lados?

( ) Sim ( ) Não

Pode-se afirmar que a **área de um paralelogramo** é sempre calculada pelo produto dos lados?

( ) Sim ( ) Não

Com base nos valores calculados nas tabelas, pode-se afirmar que a **área de um paralelogramo** é sempre menor ou igual que o produto dos lados?

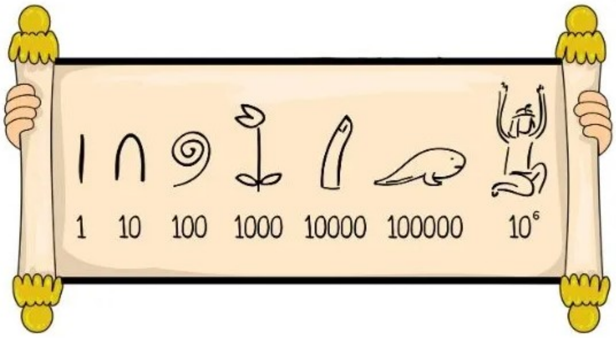
( ) Sim ( ) Não

3.3 – PARTE 3: Área de quadriláteros pelos egípcios

Nesta atividade, vamos explorar como o povo do Egito Antigo calculava a área de um quadrilátero qualquer.

Ao falar sobre a matemática dos antigos egípcios, é comum as pessoas se lembrarem um pouco do sistema numérico utilizado por eles. Este sistema era de base decimal, não posicional, e utilizava desenhos chamados hieróglifos para representar quantidades. Veja alguns exemplos no desenho abaixo:

Figura 3: Sistema de numeração egípcio

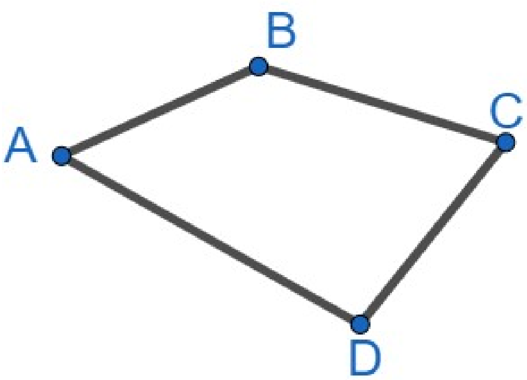


Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm

No Egito Antigo, havia pessoas, chamadas de agrimensores, responsáveis por calcular o imposto que um agricultor teria que pagar com base na área de sua região de plantio, utilizando a produção como pagamento. O trabalho do agrimensor se dava principalmente nas cheias e no recuo das águas do Rio Nilo, pois era preciso reorganizar as terras dos agricultores para que possuíssem ainda a mesma quantidade de terra para plantar.

Essas regiões de plantio tinham a forma de quadriláteros e muitas vezes eram retangulares. Para mensurar a área dos retângulos, eles multiplicavam a medida da altura pela medida do comprimento, como fazemos hoje. Quando o terreno tinha a forma de um quadrilátero que não era um retângulo, eles utilizavam um método diferente, multiplicando a média dos lados opostos (Figura 4).

Figura 4: Fórmula do agrimensor

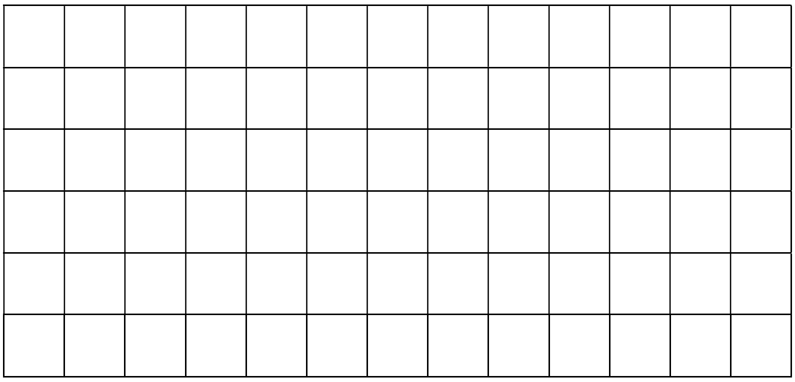


$$A_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{BC + DA}{2}$$

Fonte: Produção própria

Vejamos se a fórmula funciona mesmo:

1. Desenhe um retângulo ABCD na malha quadriculada:



Qual a área do retângulo ABCD, pela forma que foi feita nas outras atividades:

____

Agora, pela fórmula do agrimensor dos egípcios:

Medida de AB: ________ Medida de BC: ________

Medida de CD: ________ Medida de DA: ________

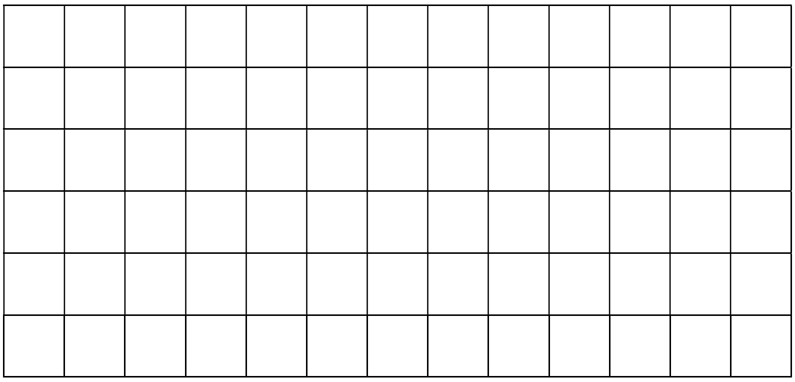
Área de ABCD:

$$A_{ABCD} = \frac{\_\_ + \_\_}{2} \cdot \frac{\_\_ + \_\_}{2} = \frac{\_\_}{2} \cdot \frac{\_\_}{2} = \frac{\_\_}{4} = \_\_$$

Ambas as formas de calcular a área do retângulo apresentaram o mesmo resultado?

( ) Sim ( ) Não

2. Desenhe um paralelogramo ABCD na malha quadriculada:



Qual a área do paralelogramo ABCD, pela forma que foi feita nas outras atividades:

____

Agora, pela fórmula do agrimensor dos egípcios:

Medida de AB: ________ Medida de BC: ________

Medida de CD: ________ Medida de DA: ________

Área de ABCD:

$$A_{ABCD} = \frac{\underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}}{2} \cdot \frac{\underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}}{2} = \frac{\underline{\quad\quad}}{2} \cdot \frac{\underline{\quad\quad}}{2} = \frac{\underline{\quad\quad}}{4} = \underline{\quad\quad}$$

Ambas as formas de calcular a área do paralelogramo apresentaram o mesmo resultado?

(   ) Sim (   ) Não

A partir do paralelogramo percebemos que a fórmula não é válida para qualquer quadrilátero, porém ela serve para estipular um certo limite superior para a área de um quadrilátero. Assim, temos que dado um quadrilátero ABCD, tem-se

$$A_{ABCD} \leq \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{BC + DA}{2}$$

Vejamos a seguir a demonstração de W. W. Wilson e G. L. Wilson desse fato.

3.4 – PARTE 4: Demonstrando a desigualdade

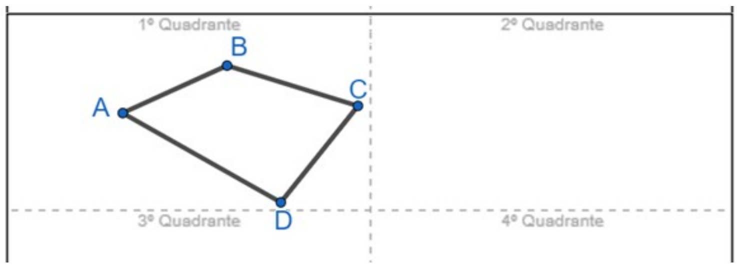
Passo 1. Desenhe um quadrilátero qualquer em um pedaço de cartolina, recorte-o fazendo um molde e depois reproduza esse quadrilátero no primeiro quadrante do espaço abaixo, indicando os vértices A, B, C e D.

1º Quadrante	2º Quadrante
3º Quadrante	4º Quadrante

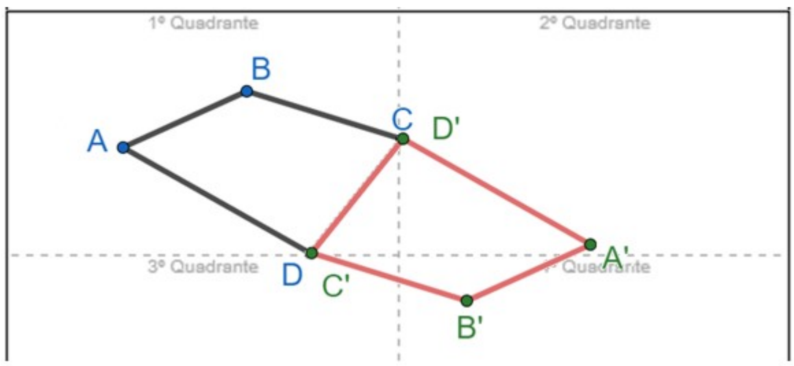
Passo 2. Gire o molde 180º e encostado ao quadrilátero do 1º quadrante, desenhe outra cópia do quadrilátero pegando boa parte do 2º quadrante. Repita isso para o 4º quadrante e, por fim, para o 3º quadrante.

Em caso de dúvida, veja o exemplo:

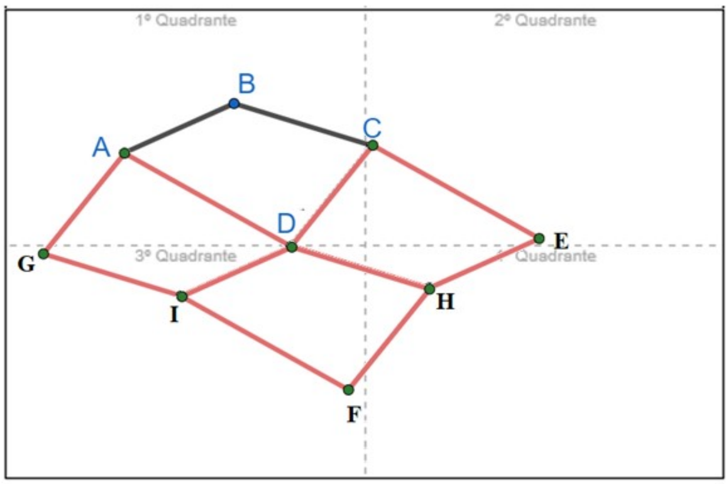
Reproduza o quadrilátero no primeiro quadrante



Gire o molde 180º e encostado ao quadrilátero do 1º quadrante, desenhe outra cópia do quadrilátero pegando boa parte do 2º quadrante

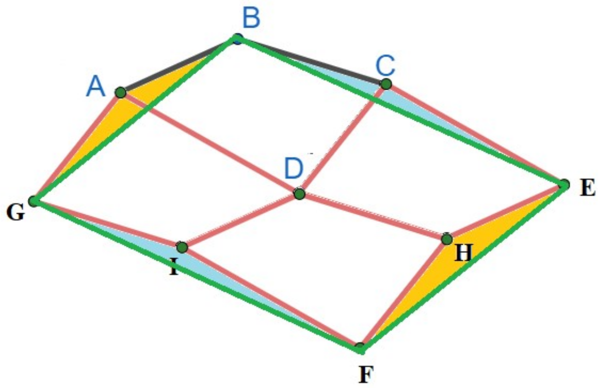


Repita isso para o 4º quadrante e, por fim, para o 3º quadrante.



Passo 3. Conecte os vértices que só fazem parte de um dos quadriláteros. Atribua as mesmas letras utilizadas no exemplo.

No exemplo da folha anterior, são os vértices B, E, F e G.



Passo 4. Recorte a figura toda.

1. Recorte o triângulo BAG e tente encaixar sobre o triângulo EHF. É possível dizer que eles são congruentes?

( ) Sim ( ) Não

2. Os lados RF e BG são congruentes e paralelos? ( ) Sim ( ) Não

3. Recorte o triângulo BCE e tente encaixar sobre o triângulo GIF. É possível dizer que eles são congruentes?

( ) Sim ( ) Não

4. Os lados GF e BE são congruentes e paralelos? ( ) Sim ( ) Não

5. Qual o quadrilátero formado pelos vértices BEFG?

____

6. A área do quadrilátero BEFG vale quantas vezes a área do quadrilátero inicial ABCD?

$$A_{GBEF} = \_\_\_\_\_ \cdot A_{ABCD}$$

Passo 5. Responda as questões:

1. Utilizando a desigualdade triangular em relação ao triângulo BAG, complete:

$$\boldsymbol{GB} \leq \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$$

2. Utilizando a desigualdade triangular em relação ao triângulo BCE, complete:

$$\boldsymbol{BE} \leq \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$$

3. Multiplicando cada membro das desigualdades, obtemos:

$$\boldsymbol{BE} \cdot \boldsymbol{GB} \leq (\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) \cdot (\underline{\qquad} + \underline{\qquad})$$

4. Por outro lado, como vimos nas primeiras atividades, a área de um paralelogramo é sempre menor que ou igual que o produto dos seus lados. Assim, podemos afirmar que:

$$\boldsymbol{A_{GBEF}} \leq \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

5. Temos do item 6, do passo anterior que:

$$\boldsymbol{A_{GBEF}} = \underline{\qquad} \,.\, \boldsymbol{A_{ABCD}}$$

6. Juntando as informações do item 4 e 5, temos:

$$\underline{\qquad} \,.\, \boldsymbol{A_{ABCD}} \leq \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad}$$

7. Juntando as informações do item 3 e 6, temos:

$$\underline{\qquad} \,.\, \boldsymbol{A_{ABCD}} \leq (\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) \cdot (\underline{\qquad} + \underline{\qquad})$$

8. Assim, obtemos o resultado final:

$$\boldsymbol{A_{ABCD}} \leq \frac{(\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) \cdot (\underline{\qquad} + \underline{\qquad})}{\underline{\qquad}}$$

Isto é,

$$\boldsymbol{A_{ABCD}} \leq \frac{(\underline{\qquad} + \underline{\qquad})}{\underline{\qquad}} \cdot \frac{(\underline{\qquad} + \underline{\qquad})}{\underline{\qquad}}$$

3.5 – PARTE 5: Analisando a fórmula do agrimensor

Na atividade anterior, demonstramos que, para qualquer quadrilátero, a área é menor ou igual ao produto da média dos lados opostos. Nesta atividade, vamos analisar em quais situações a fórmula do agrimensor fornece uma estimativa da área do quadrilátero com uma margem de erro pequena, isto é, quando ela serviria para uma situação real.

1. Pegue os quadriláteros construídos com canudos e meça os lados do quadrado e do retângulo construídos com os pedaços de canudos.

Quadrado	Lado:
Retângulo	Lado 1: Lado 2:

2. Qual é a área do quadrado e do retângulo construídos com os canudos utilizando o método encontrado nas atividades anteriores?

Quadrado: ____________________

Retângulo: ____________________

3. Agora, utilizando a fórmula do Agrimensor, qual seria a área deles?

Quadrado:

Retângulo:

4. Houve diferença entre o resultado da área calculada pelo método atual e o método do Agrimensor?

(   ) Sim   (   ) Não

5. Agora deforme um pouco o quadrado feito de canudos. Você acha que a área plana desse novo quadrilátero se alterou?

(   ) Sim   (   ) Não

6. Você notou que esse novo quadrilátero é um paralelogramo? Então é possível calcular a área medindo a altura e depois multiplicando o valor do comprimento, que por sinal já foi medida. Dessa forma, calcule a área desse paralelogramo.

Paralelogramo 1: ____

7. Deforme achatando mais o paralelogramo. Depois calcule a área novamente medindo a altura e multiplicando pelo valor do comprimento.

Paralelogramo 2: ____

8. O que está acontecendo com a área do quadrilátero que inicialmente é um quadrado e vamos achatando-o?

(   ) Permanece a mesma   (   ) Está diminuindo   (   ) Está aumentando

9. O que acontece com a área do quadrilátero que inicialmente é um quadrado e vamos achatando-o se usarmos a **fórmula do Agrimensor**?

(   ) Permanece a mesma   (   ) Diminui   (   ) Aumenta

Por que?

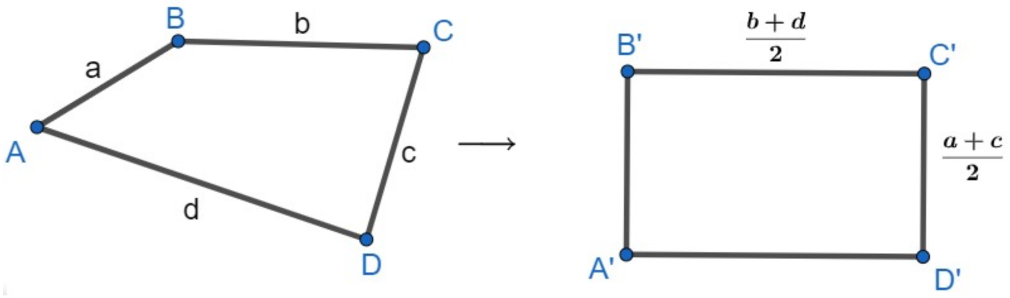
____

9. Repita o processo para o retângulo feito de canudos e preencha a tabela:

	Área
Retângulo	
Paralelogramo 1	
Paralelogramo 2	

Observe que quando o quadrilátero é mais próximo de um formato retangular a fórmula do agrimensor fornece bons resultados. Isso se dá porque basicamente a fórmula do agrimensor força o quadrilátero a uma forma retangular cuja os lados são as médias dos lados opostos do quadrilátero inicial.

Figura 5: Área de um quadrilátero pela fórmula do Agrimensor



Fonte: Produção própria

3.6 – PARTE 6: Analisando a fórmula do agrimensor com Geogebra

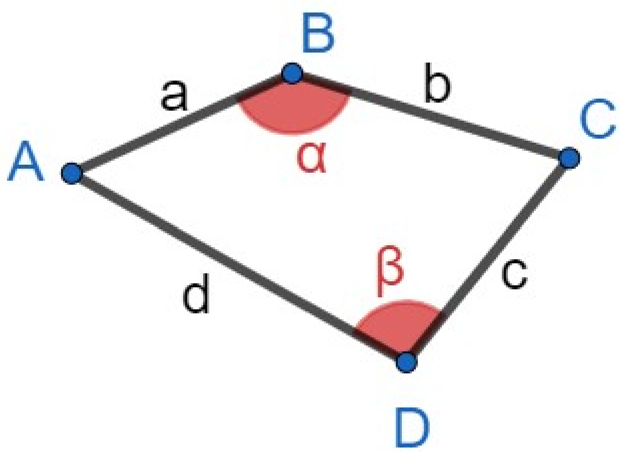
Existe uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero qualquer convexo, utilizaremos ela para analisar quando a fórmula do agrimensor apresentar melhor precisão.

A fórmula é a do alemão Carl Anton Bretschneider (1842), ela utiliza as medidas dos lados do quadrilátero e também a medida dos ângulos internos.

Fórmula de Bretschneider: Dado um quadrilátero ABCD, com AB, BC, CD e DA medindo, a, b, c e d, respectivamente. Além disso, p sendo o semi-perímetro, α e β ângulos internos opostos, tem-se que a área do quadrilátero é dada por

$$A_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \ - abcd.cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}.$$

Figura 6: Quadrilátero convexo

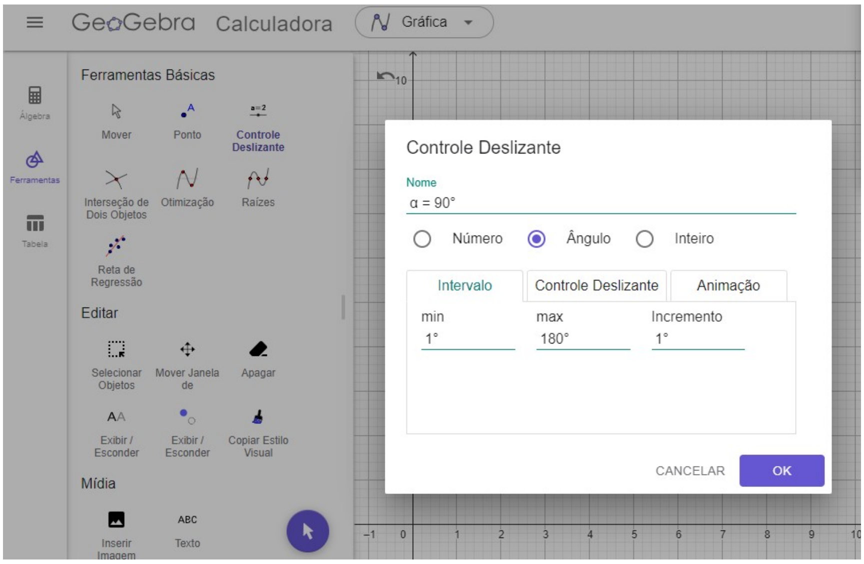


Fonte: Produção própria

A atividade a seguir faremos uso dessa fórmula no Geogebra para observamos a variação da área de um quadrilátero em função de um dos ângulos internos.

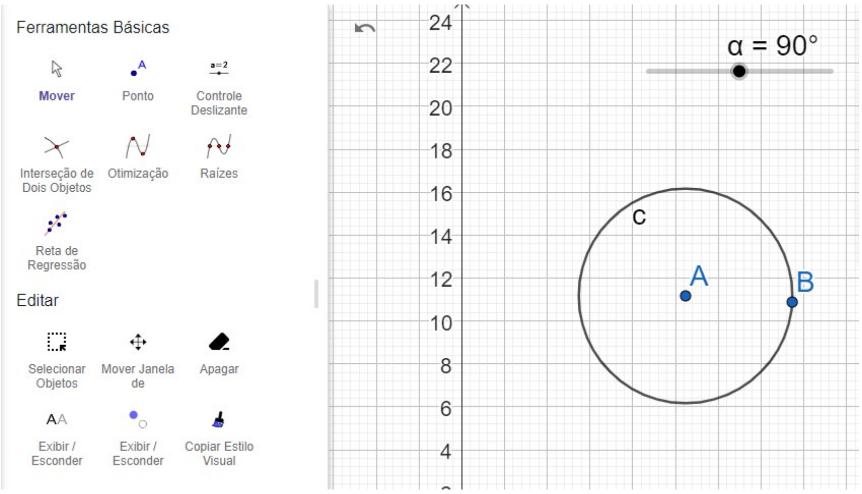
Para essa atividade utilizaremos as medidas do quadrado feito de canudos.

1. Primeiro, crie um controle deslizante, escolha a opção de ângulo, começando em 90º, com intervalo que varie de 1º até 179º e chame-o de α.



2. Utilize a ferramenta Círculo: centro & raio  e crie um círculo de raio igual a medida do lado do seu quadrado feito de canudo.

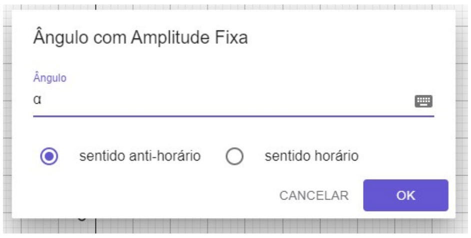
3. Marque um ponto na circunferência. No exemplo, temos o círculo de centro A e raio B.



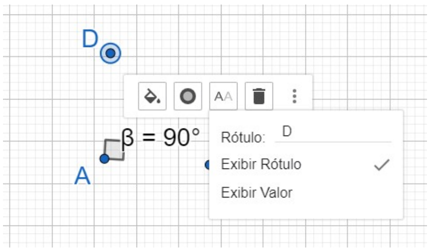
4. Utilize a ferramenta Exibir/Esconder  e esconda a circunferência.

5. Utilizando a ferramenta Ângulo com aplitude fixa 

, clique em B, depois em A, e chame de α.

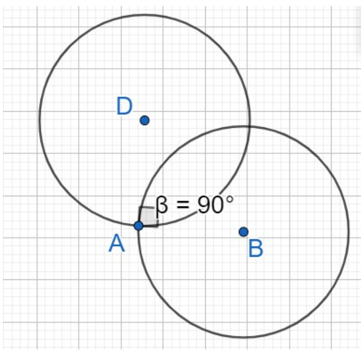


6. Ao utilizar a ferramenta de ângulo será criado um ponto B. Retomei-o para D.



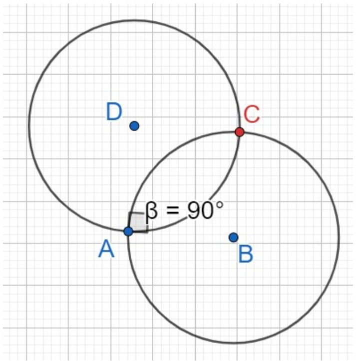
7. Utilize a ferramenta Círculo dados centro e um dos seus pontos 

e crie uma circunferência ciclando em D, em seguida, clicando em A. Depois, crie outra circunferência ciclando em B, em seguida, clicando em A.



8. Utilize a ferramenta Interseção de dois objetos 

e clique na interseção das duas circunferências.

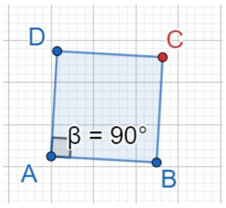


9. Utilize a ferramenta Exibir/Esconder 

e esconda as duas cirunferências.

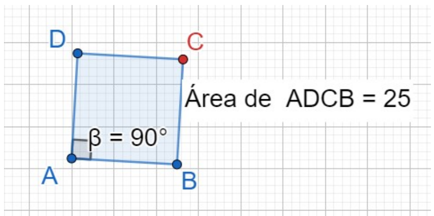
10. Utilize a ferramenta Polígono 

e clique nos pontos A, em seguida B, C, D e A.



11. Utilize a ferramenta Área 

e clique no polígono.



12. Agora, você pode mexer no controle deslizante α e observar a variação da área do quadrilátero.

Para notar melhor a variação da área iremos construir o gráfico que relaciona a área do quadrilátero com o ângulo α.

1. Primeiro, calcule o valor de p, o semí-perímetro do seu quadrado feito de canudo.

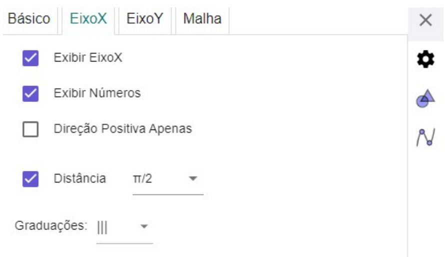
P = ______________________________

2. Vamos reduzir a expressão da fórmula de Bretschneider para inserir no Geobebra. Observe que o ângulo oposto ao ângulo α também será α. Além disso, substitua os valores de p e dos lados.

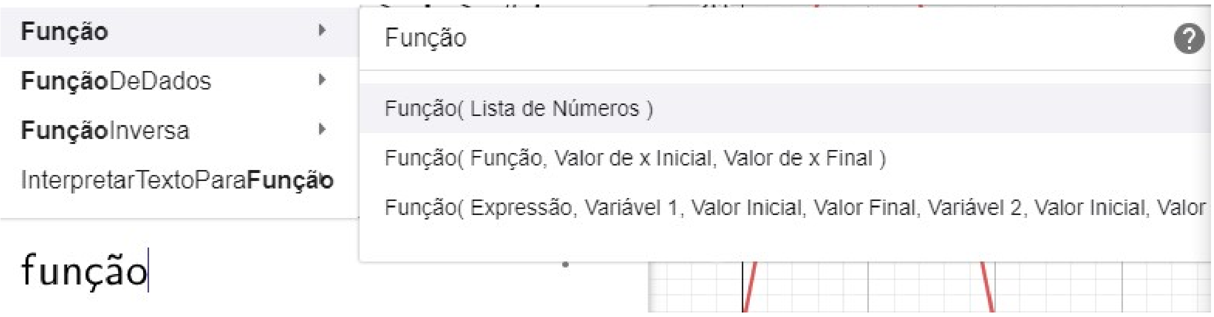
$$A_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \;\; - abcd.cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}.$$

3. Insira a expressão final no Geogebra, que será chamada de função f.

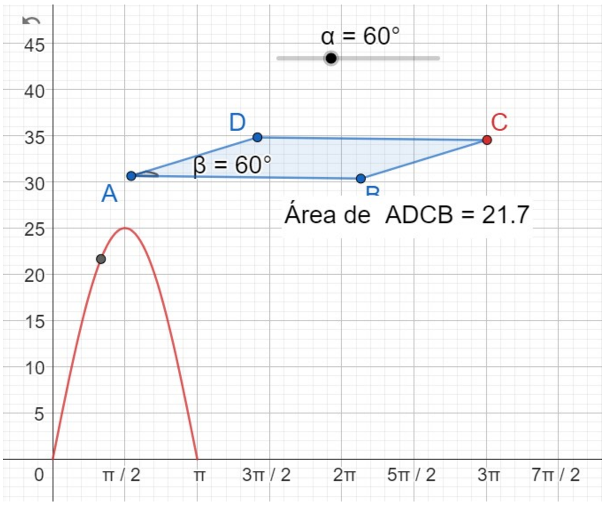
4. Para ter uma noção melhor da variação do ângulo, vá em configurações e escolha a distância do Eixo x como π /2.



5. Também digite na entrada função e escolha a função com valor inicial e valor final. Utilize o mesmo nome da função criada anteriormente, no caso f, o valor inicial 0 e o valor final π. Criando a função g.



6. Esconda a primeira função f. Depois crie o ponto (α, g(α)). Observe que quando você mexer no controlo deslizante, este ponto estará deslizando sobre a função.



7. O que é possível deduzir a respeito a respeito do gráfico ao variar o ângulo α? Utilize a deformação do polígono para auxiliar na explicação.

8. Refaça a construção feita no Geogebra, mas dessa vez com as medidas utilizadas no retângulo feito de canudos. Faça novas deduções a respeito do gráfico ao variar o ângulo α. Elas são parecidas as que foram feitas por você no item anterior?

9. Para quais ângulos a aproximação da fórmula do Agrimensor é melhor?

( ) Quando o ângulo α se aproxima de 0º.
( ) Quando o ângulo α se aproxima de 90º.
( ) Quando o ângulo α se aproxima de 180º.