

O uso de grafos como motivação para o estudo de matrizes

Francisco Rafael Cáceres
Colégio da Polícia Militar - Foz do Iguaçu
franciscorafaelcaceres@gmail.com

Amarildo de Vicente
Unioeste - Cascavel
amarildo.vicente@unioeste.br

Paulo Domingos Conejo
Unioeste - Cascavel
Paulo.Conejo@unioeste.br

Resumo

O foco principal deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino de matrizes com o uso de grafos, empregando o software Geogebra como apoio computacional. Para isso é apresentada uma ideia geral sobre o conceito de grafo, nomenclaturas e tipos, sem excessivo rigor matemático. Na sequência algumas aplicações de grafos são exibidas, como centro de emergência e o problema do menor caminho. Por fim, são indicadas algumas atividades voltadas ao ensino médio, visando abordar matrizes de uma maneira eficaz e que faça sentido ao cotidiano do aluno, auxiliando docentes e discentes no processo de ensino e aprendizagem.

Introdução

O ensino de matrizes em boa parte dos materiais didáticos é abordado de forma vaga e meramente teórico, fazendo com que os estudantes não compreendam de fato suas possíveis aplicações. O objetivo central deste trabalho é apresentar uma possibilidade de ensinar alguns conceitos sobre matrizes utilizando a ideia de grafos. A importância dos grafos no estudo de matrizes está no fato de que, em casos mais simples, podem ser representados geometricamente, eliminando em parte a abstração matemática existente no significado da estrutura de uma matriz.

Neste texto faremos uma rápida explanação de alguns conceitos sobre grafos, sua representação gráfica e matricial e também algumas aplicações mais comuns. Para facilitar o entendimento faremos uso de exemplos e ilustrações.

1 Entendendo o uso de grafos

Em muitas situações usamos grafos para representar um conjunto de pontos como cidades, salas, dispositivos de uma placa eletrônica, etc., ligados entre si por algum tipo de conexão, como estradas, corredores, fios, entre outras.

Exemplo 1

Consideremos quatro lugares distintos de uma escola, conectados entre si por meio de passarelas. Vamos estabelecer que estes lugares sejam a biblioteca, a quadra de esportes, a cantina e o bloco de salas de aula. Na Figura 1 (a) está representada uma situação possível para o posicionamento dos locais citados.

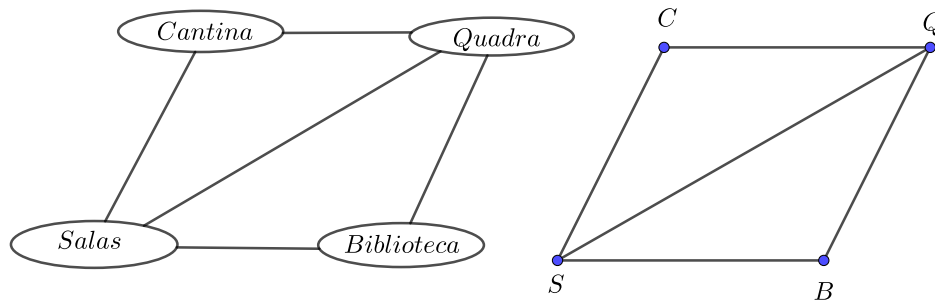


Figura 1: Locais de uma escola

Fonte: Produção dos autores

Nesta figura temos um exemplo simples de grafo. As localidades representadas são chamadas de vértices ou nós e os caminhos entre eles são chamados de arestas. A fim de simplificar a representação é mais comum que se use letras ou números para nomear os vértices. Na Figura 1(b) está uma representação do mesmo grafo citado com esta simplificação.

Note que não há um caminho ligando diretamente a biblioteca à cantina. Isto significa que para fazer este trajeto é necessário passar pela quadra ou pelo bloco de salas de aula. É bastante natural que um aluno que deseja sair da cantina para ir até a biblioteca escolha o caminho mais curto. Este é um assunto bastante relevante na teoria dos grafos e falaremos sobre ele mais adiante.

Vejamos mais um exemplo a fim de esclarecer outros conceitos.

Exemplo 2

Vamos supor que A, B, C e D sejam três pessoas conectadas por meio de uma rede de comunicações. Vamos admitir que:

- A pode trocar (enviar e receber) mensagens apenas com B e pode enviar mensagens para C e D ;
- B pode trocar mensagens com A e com C e receber mensagens de D ;
- C pode trocar mensagens com B , pode receber de A e enviar para D ;
- D pode receber de A e de C e enviar para B .

A Figura 2(a) apresenta as possíveis comunicações entre as três pessoas. As setas indicam o sentido das mensagens. É importante notar como é bem mais fácil visualizar os possíveis tráfegos de mensagens observando o grafo do que lendo o texto anterior.

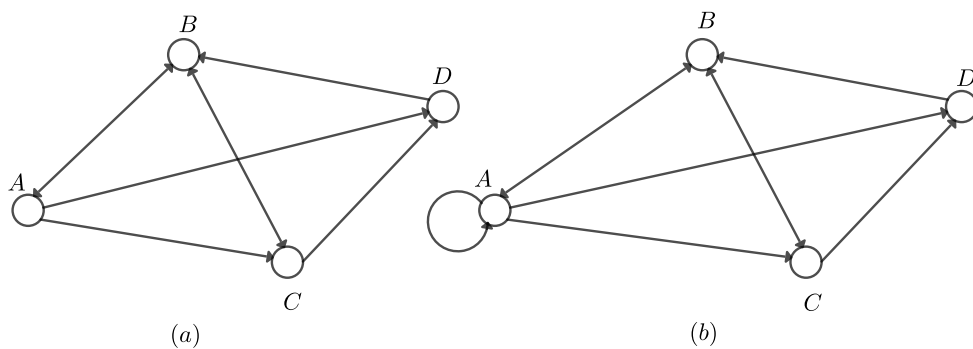


Figura 2: Rede local de comunicação

Fonte: Produção dos autores

Em situações como esta, em que se estabelece um sentido para as arestas, tem-se um grafo orientado, ou grafo direcionado. Na literatura é comum encontrar a denominação digrafo para este tipo de grafo. Esta palavra é uma espécie de tradução da expressão *directed graph* do Inglês e que quer dizer exatamente grafo direcionado. Na situação apresentada no Exemplo 2 ainda é possível apresentar o conceito de *laço* em um grafo. Em se tratando de redes de comunicações, há várias situações em que é possível uma pessoa enviar uma mensagem para si mesma. A Figura 2(b) apresenta o caso em que a pessoa denominada A pode fazer este tipo de envio.

Quando uma aresta possui duplo sentido, como é o caso da aresta AB das Figuras 2(a) e 2(b), é usual fazermos uso de duas arestas informando os sentidos (Figura 3). Isso facilita o trabalho de referência a uma aresta quando ela possui algum tipo de medida, como distância por exemplo.

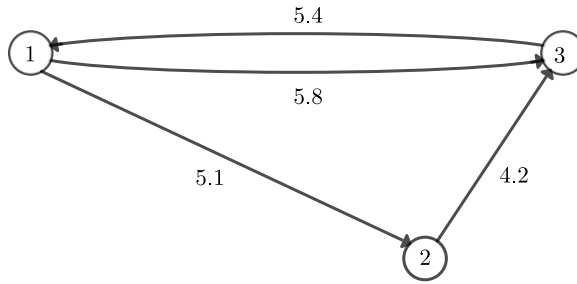


Figura 3: Grafo valorado e com arestas paralelas
 Fonte: Produção dos autores

É importante salientar que a distância para ir de um ponto A até um ponto B pode ser diferente do trajeto oposto. Na Figura 3 esta afirmação é notada entre os vértices 1 e 3.

Como pode ser observado no grafo da Figura 3, cada aresta possui um valor numérico. Quando isto ocorre o grafo recebe o nome de **grafo valorado** ou **grafo ponderado**. Neste texto vamos optar pela primeira expressão. Os significados destas medidas variam de acordo com o problema tratado, podendo representar distância, tempo de percurso, custo monetário para percorrer um trajeto, entre outros. As palavras custo ou peso são em geral empregadas para representar quaisquer destas medidas. Aqui vamos adotar a primeira delas (custo).

2 Representação matricial de um grafo

Daremos aqui apenas os conceitos que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Também é preciso esclarecer que, em se tratando de grafos, as definições variam bastante de um autor para outro. Veja por exemplo Boaventura Neto(2003) e Goldberg e Luna (2005). Apesar das diferenças citadas toda a teoria envolvida sobre o tema converge para objetos comuns.

2.1 Matriz de adjacência

Em geral, quando usamos grafos para representar situações do dia a dia, como cidades de um estado interligadas por estradas, eles podem se tornar em estruturas muito

complexas, no sentido de que possuem uma quantidade muito grande de vértices e arestas. Quando isto ocorre, o estudo de fenômenos que são investigados por meio de grafos ficam impraticáveis de serem feitos manualmente, exigindo então um apoio computacional. Neste momento surge necessidade de representar os grafos por meio de estruturas matemáticas que o computador possa interpretar. Uma das formas de fazer esta representação é por meio de matrizes. A partir daqui vamos entender como isso pode ser feito.

Voltemos ao grafo da Figura 3. Vamos denominar a aresta que vai do vértice 1 ao 2 de a_{12} , a que vai do 1 ao 3 de a_{13} e assim por diante. Vemos que há uma ligação direta do vértice 1 ao vértice 3. Por este motivo vamos atribuir valor 1 à aresta a_{13} . Este número tem o significado de valor lógico verdadeiro. Também é possível fazer o trajeto de volta, do 3 ao 1, motivo pelo qual também vamos atribuir 1 à aresta a_{31} . Do vértice 1 para o 2 também há uma ligação direta e, de modo similar ao caso anterior, vamos atribuir valor 1 para a aresta a_{12} . Já o caminho inverso, do 2 para o 1, não é possível de ser feito diretamente, de modo que vamos atribuir 0 para à aresta a_{21} . Ao contrário do algarismo 1, o 0 indica valor lógico falso. Além disso, como o grafo em questão não possui laços, vamos atribuir valor 0 às supostas arestas a_{11} , a_{22} e a_{33} . Seguindo desta forma teremos as seguintes atribuições:

$$\begin{aligned} a_{11} &\leftarrow 0, a_{12} \leftarrow 1, \text{ e } a_{13} \leftarrow 1; \\ a_{21} &\leftarrow 0, a_{22} \leftarrow 0 \text{ e } a_{23} \leftarrow 1; \\ a_{31} &\leftarrow 1, a_{32} \leftarrow 0 \text{ e } a_{33} \leftarrow 0. \end{aligned}$$

Claramente os valores que aparecem nestas atribuições podem ser representados por meio de uma matriz, que vamos chamar de A , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é recebe o nome de *matriz de adjacência* pois informa se um vértice i é adjacente (vizinho) de outro vértice j por meio da aresta a_{ij} . De um modo mais formal podemos defini-la por $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se há uma conexão direta do vértice } i \text{ ao vértice } j; \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

A matriz de adjacência sempre será uma matriz quadrada e, sendo n o número de vértices do grafo tratado, ela será uma matriz $n \times n$, ou seja, de ordem n .

Uma diferença notável surge neste conceito quando o grafo não é orientado. Como ilustração, consideremos o grafo apresentado na Figura 4. De acordo com a definição anterior sua matriz de adjacência é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O que se nota é que a linha 1 tem os mesmos elementos da coluna 1, na mesma ordem; a linha 2 tem os mesmos elementos da coluna 2, também na mesma ordem, e este fato se repete para as demais linhas e colunas. Em uma matriz quadrada, quando esta relação ocorre dizemos que tal matriz é simétrica. Ela permanece inalterada quando fazemos a sua transposta A^t , que é uma operação em que se faz as trocas das linhas pelas colunas de mesmo índice (ver Iezzi e Hazzan (2013)). Dizemos então $A = A^t$.

2.2 Matriz de incidência

A matriz de incidência, que vamos denominar por B , é utilizada para informar a relação que uma dada aresta a_{ij} possui com um vértice k específico no sentido de sair ou chegar a tal vértice. Cada linha desta matriz corresponde a um vértice e cada coluna corresponde a uma aresta. Assim, se o grafo em análise possuir n vértices e m arestas, sua matriz de incidência terá ordem $n \times m$. Seguindo a mesma lógica usada na seção anterior, observemos o grafo da Figura 4, que é direcionado e não possui laços.

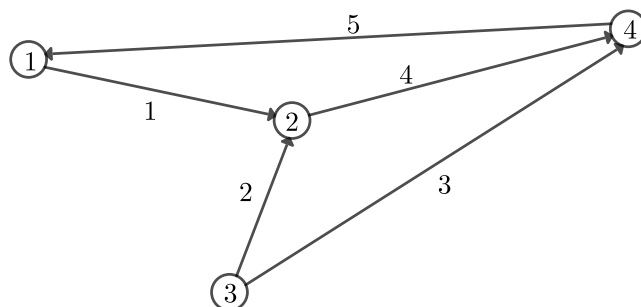


Figura 4: Grafo para ilustração de matriz de incidência

Fonte: Produção dos autores

Notemos que a aresta 1 está anexada ao vértice 1 no sentido de saída. Vamos

atribuir o valor lógico 1 ao elemento b_{11} de B . Esta mesma aresta está conectada ao vértice 2 no sentido de chegada. Vamos atribuir o valor lógico -1 ao elemento b_{12} . Veja que esta aresta não está conectada com nenhum dos demais vértices (3 e 4). Desta forma vamos atribuir 0 para b_{13} e b_{14} . A matriz que vamos obter seguindo esta lógica será

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De um modo mais formal podemos definir a matriz de incidência por $B = [b_{ij}]$ em que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } j \text{ sai do vértice } i; \\ -1 & \text{se a aresta } j \text{ chega no vértice } i; \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (2)$$

2.3 Matriz de custos

Aqui estaremos interessados em apresentar o custo para ir de um vértice a outro, quando possível, passando por uma única aresta. Observe o grafo da Figura 3. Note que para cada aresta há um valor especificado. A fim de nos referirmos a estes valores vamos usar a notação w_{ij} para designar o custo da aresta que tem origem no vértice i e extremidade no vértice j . Por exemplo, w_{13} é o custo da aresta que tem origem no vértice 1 e extremidade no vértice 3. Admitiremos que o custo de ir de determinado vértice para ele próprio (laço) seja zero, isto é, $w_{11} = 0, w_{22} = 0$, e assim por diante. Caso não seja possível ir diretamente do vértice i para o vértice j denotaremos tal fato por $w_{ij} = \infty$. Vamos novamente observar o grafo da Figura 3. De acordo com o que foi exposto teremos $w_{12} = 5,1, w_{13} = 5,8$ e assim por diante. No caso de ir diretamente do vértice 2 para o 1 não é possível, fato se indica por $w_{21} = \infty$. Em resumo temos os seguintes custos:

$$\begin{aligned} w_{11} &= 0, w_{12} = 5,1 \text{ e } w_{13} = 5,4; \\ w_{21} &= \infty, w_{22} = 0 \text{ e } w_{23} = 4,2; \\ w_{31} &= 5,8, w_{32} = \infty \text{ e } w_{33} = 0. \end{aligned}$$

Não é difícil perceber que o conjunto dos custos apresentados podem ser representados pela matriz C dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5.1 & 5.4 \\ \infty & 0 & 4.2 \\ 5.8 & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é chamada de **matriz de custos**. De um modo mais formal podemos defini-la por $C = [c_{ij}]$ em que

$$c_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } i \neq j \text{ e é possível ir diretamente do vértice } i \text{ ao vértice } j; \\ 0 & \text{se } i = j; \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e é impossível ir diretamente do vértice } i \text{ ao vértice } j. \end{cases}$$

2.4 Matriz de custos mínimos

Esta é sem dúvidas uma das principais aplicações envolvendo a teoria dos grafos. Está presente no nosso dia a dia e, mesmo sem perceber, fazemos uso dela sempre que usamos um dispositivo eletrônico para procurar o menor caminho entre dois pontos. Sua obtenção em geral é bastante trabalhosa e, exceto em casos muito simples, precisamos de um computador para nos auxiliar. Neste trabalho vamos utilizar um aplicativo online gratuito para obtê-la a fim de resolver um problema de caráter ilustrativo. Falaremos também sobre o software livre Geogebra a fim de tratar sobre problemas de distância mínima.

Considere o grafo apresentado na Figura 5.

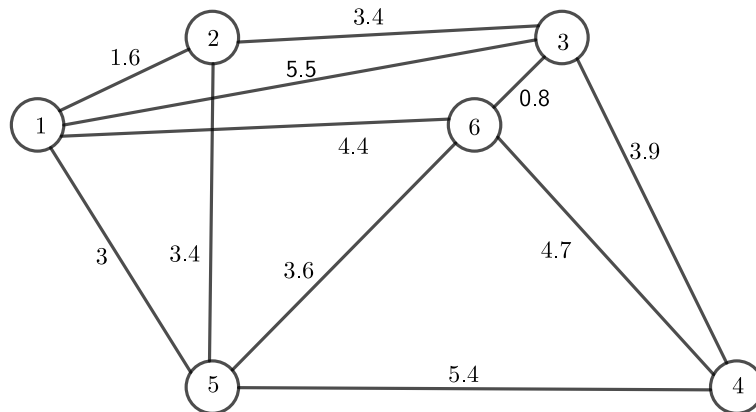


Figura 5: Grafo ilustrativo para custo mínimo entre dois vértices

Fonte: Produção dos autores

Vemos claramente que o menor caminho para ir do vértice 1 ao 2 mede 1.6 unidades (caminho direto pela aresta a_{12}). Todavia, a obtenção do menor caminho do vértice 1 ao 4 não é uma tarefa tão imediata, havendo a necessidade fazermos uma análise entre as possibilidades existentes. No caso, a melhor escolha é ir do vértice 1 ao 5 e aí seguir para o vértice 4, com um custo de 8.4 unidades.

Talvez este exemplo já sirva para concluirmos que, para um grafo com uma quantidade muito grande de nós, o processo manual se torna inviável. Existem vários algoritmos computacionais para fazer este trabalho. Os algoritmos de Dijkstra e de Ford-Warshall, que podem ser encontrados em Boaventura Neto (2003), estão entre os mais conhecidos. Mas isso requer o conhecimento de alguma linguagem de programação, que não é objeto deste trabalho. Vamos então fazer o uso do site <https://graphonline.ru/pt/>, onde este trabalho pode ser feito de modo online. A fim de facilitar a compreensão do procedimento vamos utilizar o grafo da Figura 6.

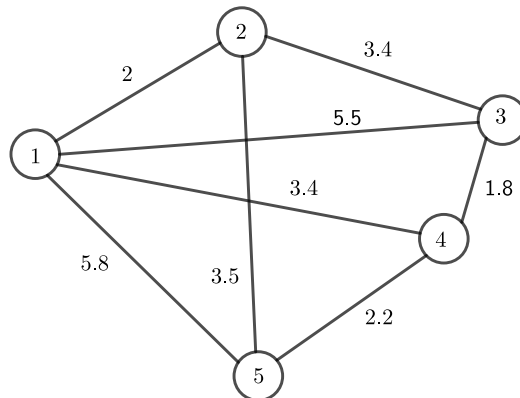


Figura 6: Grafo para ilustração da matriz de custos mínimos

Fonte: Produção dos autores

Segue um roteiro para executarmos a tarefa desejada. Primeiramente acesse o site citado (ver Figura 7). Se preferir, mude o idioma para Português no canto superior direito da tela.

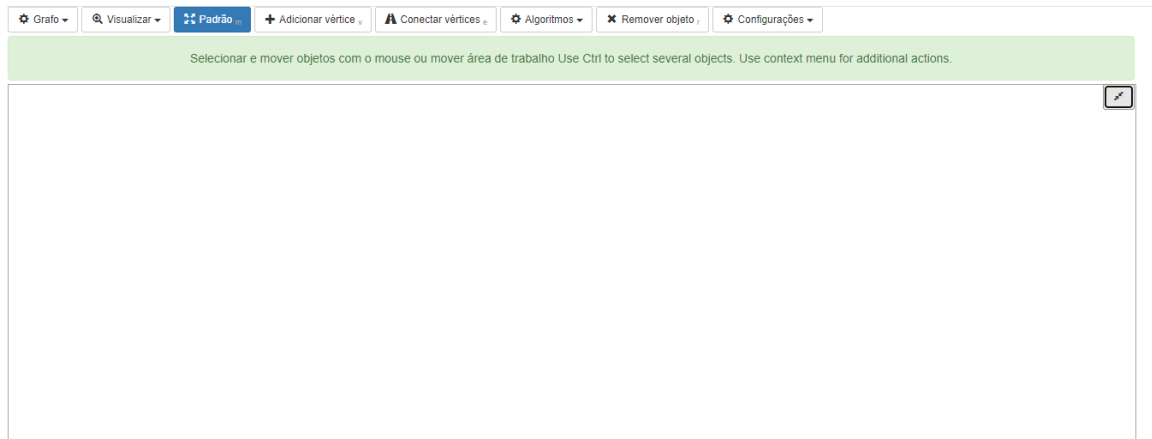


Figura 7: Tela do site <https://graphonline.ru/pt/>
 Fonte: Produção dos autores

1. Clique em “+ adicionar vértice”.
2. Vá clicando na área em branco até produzir todos os vértices desejados. Pode-se renomear este vértices clicando sobre eles com o botão direito do mouse.
3. Clique em “Conectar vértices”. Para cada par de vértices escolhido é necessário digitar o valor (peso) e após isso selecionar “Direcionado” ou “Não direcionado”. A qualquer momento é possível remover um vértice ou aresta que tenha sido criado erroneamente (botão “Remover objeto”).
4. Encerrada a construção do grafo clique na aba “Algoritmos” e selecione “Algoritmo de Floyd-Warshal”.

Feito isso serão exibidos graficamente os caminhos entre todos os pares de vértices. Também é possível visualizar e copiar a matriz de distâncias mínimas clicando na aba “Mostrar matriz de distâncias”, que só aparece após o encerramento do passo 4.

Para o grafo da Figura 6 a matriz de custos mínimos, que vamos chamar de M , será

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2.2 & 5.1 & 5 & 3.9 \\ 2.2 & 0 & 3 & 4 & 3.7 \\ 5.1 & 3 & 0 & 1 & 4.1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 3.1 \\ 3.9 & 3.7 & 4.1 & 3.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Algumas aplicações de grafos

3.1 Centro de emergência

Esta é uma das mais importantes aplicações de grafos e em geral está relacionada ao tempo de viagem entre dois pontos. O centro de emergência de um grafo é o vértice a partir do qual o tempo máximo gasto para ir a qualquer outro vértice é o menor possível. Pode-se pesquisar também o processo inverso, ou seja, o tempo gasto para retornar de qualquer vértice para um vértice específico. Mas o caso mais geral é quando combinamos os tempos de ida e volta. Vamos analisar primeiramente o caso só de ida. Um exemplo clássico deste conceito é a escolha do local onde uma ambulância deve permanecer a fim de atender uma ocorrência ao redor, no menor tempo possível.

A fim de facilitar a compreensão, observe o digrafo da Figura 8. Vamos supor que o objetivo seja minimizar o tempo a ser percorrido por uma ambulância e que o tempo médio para percorrer quaisquer das arestas seja de 1 min.

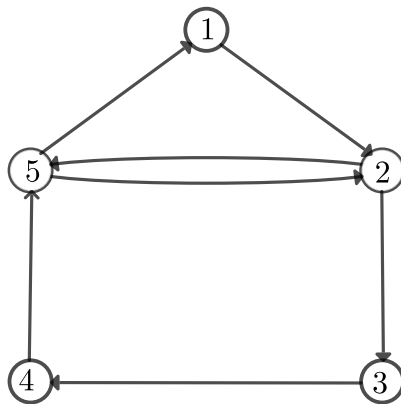


Figura 8: Grafo ilustrativo para o centro de emergência

Fonte: Produção dos autores

Agora vamos admitir que uma ambulância tenha que se deslocar do vértice 1 para atender a um chamado. Caso a ocorrência seja no vértice 2, o tempo de viagem será de 1 min; se a ocorrência for no vértice 3, o tempo gasto será de 2 min; para o vértice 4 o tempo será de 3 min; finalmente, para ir ao vértice 5, ela gastará 2 min, fazendo o trajeto que passa pelo vértice 2. Como se nota, a pior situação ocorrerá se for necessário atender ao vértice 4, gastando um total de 3 min.

De modo similar, esta análise pode ser feita para cada um dos demais vértices. A Tabela 1 mostra o tempo máximo (pior caso) a ser percorrido de acordo com o vértice de partida da ambulância.

Tabela 1: Tempos máximos gastos a partir de cada vértice (min)

Vértices	1	2	3	4	5
Tempo máximo (pior caso)	3	2	3	3	3

O objetivo do centro de emergência, neste exemplo, é buscar o local a partir do qual o tempo máximo gasto no deslocamento para os demais vértices seja o menor possível. Observando os elementos da Tabela 1 nota-se que a melhor situação é aquela em que a ambulância sai do vértice 2. Este seria então o centro de emergência do grafo em questão.

Vamos observar a matriz de custos mínimos para o grafo dado. Neste caso é bem fácil ver que a matriz de custos mínimos é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os elementos da linha 1 em M (m_{11}, m_{12} , etc.) representam os tempos mínimos que a ambulância deverá consumir saindo do vértice 1. Nota-se que o pior caso ocorrerá quando ela precisar ir ao vértice 4, cujo tempo será de 3 min ($3 = \max\{0, 1, 2, 3, 2\}$). De modo similar, se ela estiver no vértice 2, os piores casos ocorrerão quando tiver que se deslocar até o vértice 1 ou ao 4, cujos tempos de viagem são de 2 min ($2 = \max\{2, 0, 1, 2, 1\}$). Seguindo esta lógica vamos construir a matriz coluna $P = [p_i]$ tal que p_i é o máximo valor da linha i da matriz M . Esta matriz apresenta os piores casos para cada um dos vértices, sendo dada por

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, o centro de emergência corresponde ao vértice representado pela linha onde ocorre a melhor das situações. Neste exemplo vemos que o menor valor está na linha

2. Logo, o vértice 2 deve ser escolhido como centro de emergência. Pode acontecer que mais de um vértice atenda a este requisito. Por isto, costuma-se representar o centro de emergência por um conjunto, que vamos denominar por CE . Neste caso $CE = \{2\}$.

De um modo similar ao que foi exposto anteriormente, pode haver uma situação onde o caminho de volta também precisa ser feito de forma ágil.

Vamos analisar a primeira coluna da matriz de custos mínimos M . O elemento m_{21} representa o custo de ir do vértice 2 para o vértice 1; m_{31} é o custo para ir do vértice 3 ao 1, e assim por diante. Logo, os elementos desta coluna indicam os custos para ir de um vértice j qualquer, $j \neq 1$, para o vértice 1. Então, caso a ambulância deva retornar para o vértice 1, o pior caso é aquele em que ela precisa atender a uma ocorrência no vértice 3, cujo tempo de retorno será de 3 min ($3 = \text{máx}\{0,2, 3, 2, 1\}$). De modo similar, se a ambulância tiver que retornar para o vértice 2, representado pela segunda coluna de M , o pior caso ocorrerá se ela tiver que atender uma ocorrência no vértice 3, para o qual o tempo de retorno será de 3 min ($3 = \text{máx}\{1, 0, 3, 2, 1\}$).

Vamos apresentar os tempos máximos de retorno para cada vértice em uma matriz linha, que chamaremos de L , como segue:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que, dentre as piores situações, a menos ruim é aquela em que a ambulância tem que retornar para o vértice 5 (2 min).

A análise feita para as colunas pode ser feita de modo semelhante, por meio de linhas, se tomarmos a matriz transposta de M , dada por

$$M^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este procedimento facilita a obtenção do centro de emergência de ida e volta combinadas. Veja que a análise de uma linha i da matriz M^t é equivalente à análise da coluna i de M . Agora, se somarmos estas duas matrizes, M com M^t , teremos a matriz $S = M + M^t$ que representa a soma dos tempos gastos para a ida e a volta. No caso,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analisando a primeira linha de S nota-se que os piores casos ocorrem para os vértices 3 e 4, sendo que os tempos gastos com ida e volta totalizam 5 min. Para a segunda linha os piores casos se verificam também para os vértices 3 e 5, com um tempo de 4 min. Prosseguindo esta análise podemos representar os piores tempos por meio de uma matriz coluna P , como fizemos anteriormente, sendo P dada por

$$P = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Concluimos então que os melhores locais para posicionar a ambulância seriam os vértice 2 ou 5. Desta forma o centro de emergência para ida e volta do grafo em questão é o conjunto $CE = \{2, 5\}$.

4 Propostas de atividades

O objetivo principal desta sessão é apresentar atividades que podem ser direcionadas a alunos do ensino médio, visando aplicações reais voltadas ao estudo de matrizes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz a importância do ensino da matemática com aplicações a realidade.

[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos [...] (BRASIL, 2017, p. 528).

E ainda,

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) orientam que

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Assim, um ensino cada vez mais dinâmico, aplicado e prático deve ser inserido aos alunos em sala de aula, possibilitando uma formação mais completa, onde os conceitos científicos, experiências cotidianas e realidade escolar possam se unificar.

Com base nos conhecimentos apresentados serão agora expostas atividades que envolvem o conhecimento de grafo, digrafo e matrizes. Em cada atividade busca-se conectar os conteúdos ao dia a dia do aluno, como torneios esportivos, redes sociais e jogos.

4.1 Atividade 1 - Conhecendo um grafo no torneio da escola

Em uma escola um torneio de basquete está sendo realizado, com uma equipe representante de cada turma. O sistema do torneio é do tipo todos contra todos, onde todas as equipes participantes devem ter um confronto com cada equipe. Participam desse torneio seis turmas: 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B. Algumas partidas já foram realizadas:

1A jogou com 2A, 2B e 3B;

1B jogou com 2A, 3A e 3B;

2A jogou com 1A e 1B;

2B jogou com 1A e 3B;

3A jogou com 1B e 3B;

3B jogou com 1A, 1B, 2B e 3A.

A forma como essas informações estão dispostas dificulta identificar se faltou algum confronto ou não. Com isso, será utilizado um ponto para representar cada turma e um segmento ligando cada turma onde um confronto já foi realizado. A estrutura resultante está representada na Figura 9, por meio de um grafo.

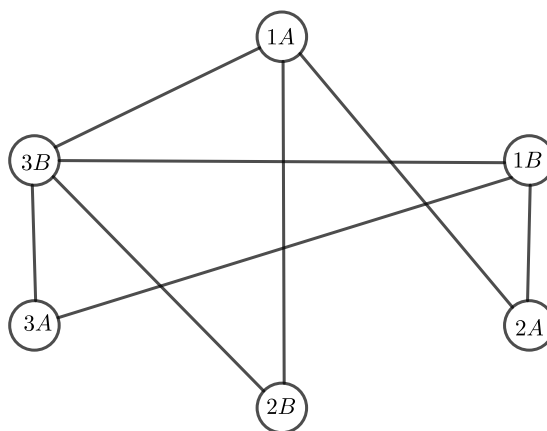


Figura 9: Grafo Torneio de Basquete

Fonte: Produção dos autores

Com as informações dadas e a maneira como elas estão agora exibidas responda as seguintes perguntas:

- Com quais turmas o 2B ainda precisa jogar? E o 3A?
- Quantos jogos faltam para o 1B terminar sua participação no torneio?
- Faça o grafo completo onde todas as equipes tenham jogado todas as partidas do torneio.

4.2 Atividade 2 - Conhecendo um digrafo com o Instragram

Atualmente há no mercado digital muitos aplicativos de redes sociais. Um dos mais utilizados é chamado Instagram, uma rede social de fotos para usuários dos sistemas Android ou iOS. Nele é possível tirar fotos, editá-las, postá-las e fazer o compartilhamento delas com sua rede de contatos.

Dentro do Instragram é possível que um usuário siga pessoas famosas, amigos e familiares e vice-versa, porém, pode acontecer de uma pessoa não seguir novamente ou deixar de seguir, termo amplamente conhecido na rede como *unfollow*.

Em um grupo de seis pessoas, denominadas por A, B, C, D, E e F, no Instragram, ocorre a seguinte configuração:

A segue B, C e E;

B segue A e D;

D segue B e F;

F segue A, D e E;

E segue A e C;

C segue A e E.

A situação descrita em palavras pode ser representada por meio de um digrafo. A estrutura é bastante semelhante a já apresentada, com a diferença que as arestas terão agora um sentido. Por exemplo, como A segue a B, do vértice que representa A sairá um segmento com uma seta na direção de B. Utilizando as informações citadas, o digrafo resultante está representado na Figura 10.

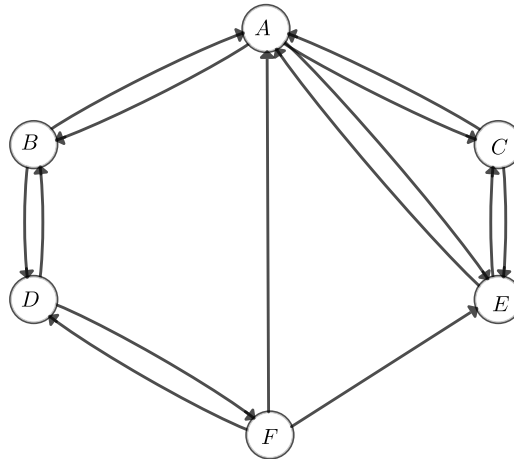


Figura 10: Conhecendo um Digrafo
 Fonte: Produção dos autores

Analisando o digrafo, responda as seguintes perguntas:

- Quem possui mais seguidores?
- Quem possui menos seguidores?
- Quem segue mais pessoas?
- Quem segue menos pessoas?
- Suponhamos que A deixe de ter o Instagram e exclua sua conta. Como seria a nova configuração? Faça o esboço do novo digrafo.

4.3 Atividade 3 - Construindo uma matriz de custos

Uma professora mora em um bairro, que chamaremos de Bairro A, no qual há alguns locais onde ela costuma frequentar: uma praça, a escola onde trabalha, uma padaria, um ginásio de esportes, um posto de saúde e um mercado. De sua casa ela pode chegar diretamente à padaria, ao ginásio de esportes e à praça. Para ir a outro local, diferente desses já citados, ela deve obrigatoriamente passar pela padaria, pelo ginásio de esportes ou pela praça. As distâncias em centenas de metros estão representadas no grafo valorado na Figura 11. Cada vértice representa um dos locais citados e cada aresta, a distância entre eles, podendo ser percorrida em ambos os sentidos, isto é, ida e volta.

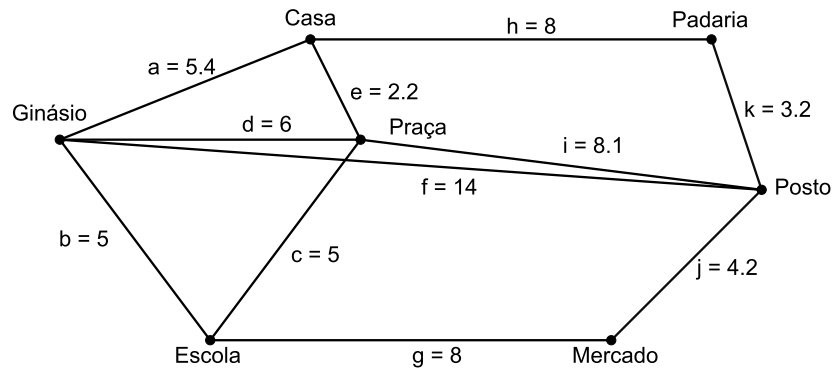


Figura 11: Distâncias (hm) entre os pontos de referência do Bairro A
 Fonte: Produção dos autores

Por exemplo, para a professora sair de sua casa e chegar à padaria ela deverá andar 800 metros. Se desejar ir de sua casa até o posto de saúde, ela pode ir passando pela padaria, pela praça, entre outros locais.

Todas essas informações podem ser representadas em uma matriz, que é a matriz de custos mínimos da Seção 2.4. Por exemplo, se a professora desejar ir ao posto e fizer o trajeto Casa-Ginásio, Ginásio-Praça e Praça-Posto, terá que percorrer as distâncias de 540 m, 600 m e 810 m, respectivamente, que resulta em um trajeto de 1950 m. Agora, se ela fizer o trajeto Casa-Padaria, Padaria-Posto, terá que fazer as distâncias 800 m e 320 m, respectivamente, que resulta em 1120 m, 830 m a menos que o trajeto anterior. Representando as distâncias dos menores trajetos em forma matricial, com a ajuda do site <https://graphonline.ru/pt/>, obtemos a matriz M dada por

$$\begin{array}{l}
 \text{Casa} \\
 \text{Padaria} \\
 \text{Ginásio} \\
 \text{Praça} \\
 \text{Posto} \\
 \text{Escola} \\
 \text{Mercado}
 \end{array}
 M = \begin{bmatrix}
 \text{Casa} & \text{Padaria} & \text{Ginásio} & \text{Praça} & \text{Posto} & \text{Escola} & \text{Mercado} \\
 0 & 8 & 5.4 & 2.2 & 10.3 & 7.2 & 14.5 \\
 8 & 0 & 13.4 & 10.2 & 3.2 & 15.2 & 7.4 \\
 5.4 & 13.4 & 0 & 6 & 14 & 5 & 13 \\
 2.2 & 10.2 & 6 & 0 & 8.1 & 5 & 12.3 \\
 10.3 & 3.2 & 14 & 8.1 & 0 & 12.2 & 4.2 \\
 7.2 & 15.2 & 5 & 5 & 12.2 & 0 & 8 \\
 14.5 & 7.4 & 13 & 12.3 & 4.2 & 8 & 0
 \end{bmatrix}$$

Analisando a matriz de custos mínimos responda:

- Qual a distância entre a casa da professora e a escola?
- Qual a distância entre o mercado e o ginásio?
- Qual a distância entre a padaria e a escola?
- Por que a diagonal principal desta matriz é toda nula?
- Montando uma matriz apenas com os valores das distâncias (ver Seção 2.3) podemos notar que ela tem uma propriedade. Que propriedade é essa?

4.4 Atividade 4 - Localizando um centro de emergência

Em muitos casos reais, determinar um ponto central ou de menor distância entre todos os outros pontos é de suma importância. Ainda em relação ao Bairro A da Atividade 3, buscaremos o seu centro de emergência, descrito na Seção 3.1.

Para se determinar tal centro, basta analisar os valores máximos em cada linha de M . Assim, temos a seguinte matriz:

Local	Máx. Dist. (hm)
Casa	14.5
Padaria	15.2
Ginásio	14
Praça	12.3
Posto	14
Escola	15.2
Mercado	14.5

$$P = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 15.2 \\ 14 \\ 12.3 \\ 14 \\ 15.2 \\ 14.5 \end{bmatrix}.$$

Com o auxílio da matriz das distâncias máximas P responda:

- O Posto de Saúde, que deve ser localizado em um local estratégico para minimizar o tempo de atendimento, está bem localizado?
- Se fosse possível a construção de um novo Posto de Saúde, qual seria o local ideal?
- Caso o local ideal não fosse possível, qual seria a segunda opção?
- Em seu bairro há algum hospital? Ele está localizando no centro de emergência?
- Suponha que fosse feito uma nova via entre a padaria e o posto de saúde com uma nova distância de 400 m. Nessa nova configuração, o posto passaria a ser o centro de emergência?

4.5 Uma análise da Atividade 3 no GeoGebra

No desenvolvimento da Atividade 3 empregamos o site <https://graphonline.ru/pt/>, que nos forneceu a matriz de custos mínimos entre todos os pares de vértices. Eventualmente podemos estar interessados em encontrar a menor distância entre um par de vértices apenas. Neste caso tal atividade pode também ser desenvolvida com software Geogebra. Nele é possível abordar, de maneira bastante intuitiva, desde elementos da geometria plana à otimização.

O uso de ferramentas digitais contribui no processo de ensino e aprendizagem que, segundo Perrenoud(2000) ajudam a construir conhecimentos ou competências, porque tornam acessíveis operações e manipulações impossíveis ou muito desencorajadoras se reduzidas com papel e lápis.

O software GeoGebra possui um comando chamado “CaminhoMínimo” que, em um dado conjunto de vértices e segmentos, gera a menor rota possível entre dois vértices.

No grafo da Figura 11, perceba que cada local é representado como um ponto com coordenadas no plano cartesiano e cada rota como um segmento valorado (em dezenas de metros). Por exemplo, a distância do ginásio até a escola é de 5 hm. Para inserir o comando “CaminhoMínimo” basta digitá-lo no campo de entrada. Ao iniciar a escrita do comando sua estrutura é exibida como segue:

```
“CaminhoMínimo( <Lista de Segmentos>, <Ponto Inicial>, <Ponto Final>, <Usar  
Número de Segmentos como Custo (true | false)> )”.
```

Primeiramente deve ser informada a lista dos segmentos, que no caso é “{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k}”. Se as medidas das arestas não correspondes às medidas reais é preciso ajustá-las multiplicando os segmentos por valores apropriados ($2*a$, $1.5*b$, etc.). Em seguida deve ser informado o ponto de onde se deseja iniciar a rota e o ponto final. Por fim, é necessário escolher a palavra *true* (verdade) para que o comprimento do segmento seja levado em consideração no cálculo da menor rota, ou a palavra *false* (falso) para que apenas as quantidades de arestas sejam levadas em consideração, isto é, quanto menos arestas a rota passar, melhor.

Vamos escolher Casa como ponto inicial e Mercado como ponto final. Vamos também selecionar a opção *true* para que as distâncias sejam levadas em consideração. Após pressionar a tecla *Enter* obteremos como resultado a rota indicada na Figura 12.

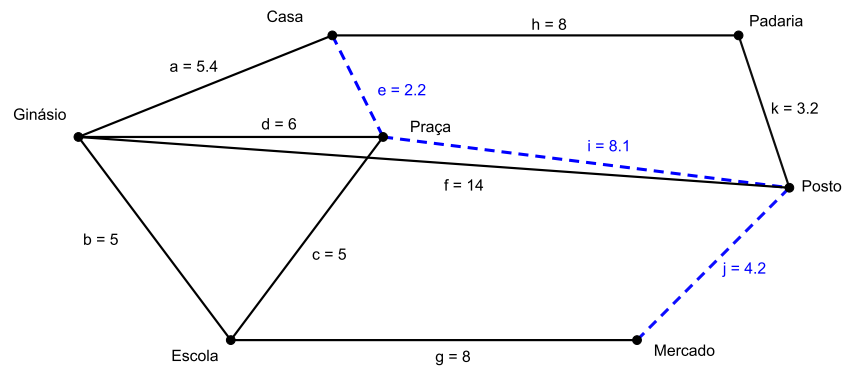


Figura 12: Grafo representado locais do Bairro A no GoeGebra.

Fonte: Produção dos autores

Assim, na solução destacada em azul, a professora sairia de casa e iria até a praça percorrendo 220 m, iria da praça até o posto, que distam 810 m, para então ir ao mercado, descolocando-se mais 420 m, totalizando um deslocamento de 1450 m.

Desta forma, nota-se que com esta ferramenta do programa GeoGebra e com os conceitos exibidos, é possível explorar ainda mais as atividades propostas, podendo-se sugerir variações em um mesmo problema, gerando ainda mais aplicações, como inserir mapas ou figuras, marcar os pontos desejados e otimizar rotas. Assim, os alunos têm inicialmente os conceitos matemáticos que estão por trás do comando, atrelando-se teoria, prática e vida real.

5 Considerações finais e conclusões

Sem dúvidas a Matemática é rica e aplicável nas mais diversas situações. A busca incessante em deixar esta disciplina mais atrativa se faz cada dia mais necessária, visto que as novas gerações, desde cedo, têm uma gama de ferramentas disponíveis e aquilo que não faz sentido algum aos olhos do estudante pode ser deixado de lado.

Pode-se notar que, quando o conteúdo de matrizes é abordado, já que é quase unânime o seguinte questionamento: “Para que aprender isso, professor?”. Partindo desse pressuposto, buscou-se trazer uma teoria que permitisse, de maneira bastante intuitiva, aplicar os conceitos de matrizes. Em livros didáticos e provas para ingressar em universidades públicas e privadas, essa temática vem quase sempre empregada sem ligações a ações cotidianas dos alunos.

Com o estudo de grafos, além de facilitar a visualização de alguns problemas, é possível a aplicação de matrizes, o que permite que os alunos tragam temáticas que possam ser resolvidas por meio de algoritmos de roteamento. Grande parte dos alunos do ensino médio faz uso das redes sociais e notou-se, por intermédio das atividades propostas, que por trás das redes sociais há grafos, e se há grafos, há matrizes. O mesmo ocorre em jogos que, muitos em sua essência, têm por objetivo algum processo de otimização de menor rota ou menor tempo e assim, novamente, pode ser escrito como um grafo, para então ser resolvido e otimizado com o uso de matrizes.

Os conceitos de menor rota podem ainda ser aplicados a futuras construções em cidades e bairros planejados, colocando nos centros de emergência hospitais e escolas, por exemplo, proporcionando bem estar e qualidade de vida à sociedade como um todo.

Sabe-se que a atividade docente atualizada e com proposta de metodologias ativas voltadas ao que os alunos dominam e manipulam diariamente requer bastante estudo e preparo.

Assim, sugere-se que professores do ensino médio façam uso do que foi apresentado, realizem novos roteiros e façam possíveis adequações, para mostrarem aos alunos o poder que a matemática tem de estar presente onde eles menos esperam.

6 Referências

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmo**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 14 out. 2024.

BRASIL. Orientações Curriculares para o Ensino Médio v.2. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Secretaria de Educação Básica.– Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 14 out. 2024.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**, 8. ed., São Paulo: Atual, 2013.

PERRENOUD, P. Dez Novas Competências para Ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2000.