UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN

O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E SUA APLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

TOLEDO

2024

VIVIANE VANESSA DOHL FEITEN

O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA E SUA APLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

THE PRINCIPLE OF FINITE INDUCTION AND ITS APPLICATION IN BASIC EDUCATION

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Profº Dr. Robson Willians Vinciguerra

Coorientador: Profº Dr. Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO
2024

4.0 Internacional

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é resultado da dissertação de mestrado intitulada "O Princípio da Indução Finita e sua Aplicação na Educação Básica", a ferramenta que dá nome ao trabalho é fundamental na matemática, especialmente para demonstrar o termo geral de uma sequência definida por recorrência.

A indução finita permite provar que uma propriedade ou fórmula é verdadeira para todos os inteiros naturais, não apenas para alguns casos específicos. Isso é crucial para assegurar que a fórmula conjecturada por meio de uma recorrência seja verdadeira.

Este trabalho apresenta uma sugestão de aplicação em sala de aula do jogo Torre de Hanói, que evidencia a recorrência existente na sequência formada pelo número mínimo de movimentos de diferentes quantidades de discos e, a partir desta recorrência, aplica-se o princípio de indução finita para demonstrar a validade da fórmula encontrada.

2 A TORRE DE HANÓI E A LENDA DO FIM DO MUNDO

Benares é uma cidade na Índia, mais popularmente conhecida por Varanasi ou Kashi, considerada como uma cidade sagrada e capital espiritual indiana. No grande Templo de Benares havia uma grande torre do bramanismo utilizada como fonte de melhora e disciplina aos jovens monges que ali habitavam. Conta uma antiga lenda Hindu, que abaixo da cúpula desse templo, marca do centro do mundo, haviam três hastes de diamante fixadas sobre uma placa de bronze e, em uma destas hastes, 64 discos de ouro de diferentes diâmetros, formando uma pirâmide. Segundo a lenda, os discos foram colocados pelo deus Brahma no momento da criação do mundo. Aos monges era dada a tarefa de movimentar os discos entre as hastes seguindo as regras divinas: mover um disco por vez e não colocar um disco de diâmetro maior sobre um de diâmetro menor. O objetivo era transferir a pirâmide para uma outra haste, segundo as regras divinas. Os monges deveriam trabalhar nessa tarefa constantemente, noite e dia, e, ao finalizarem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o fim do mundo chegaria. (HINZ *et al.*, 2013)

A pergunta que todo mundo se faz é: será que ainda falta muito tempo para acabar o mundo considerando a lenda verdadeira? Essa indagação é tão famosa que criou-se um jogo, conhecido como Torre de Hanói e que nos ajudará a encontrar essa resposta ao final desta atividade!

A Torre de Hanói é um famoso quebra-cabeça ou jogo lógico, que ilustra a situação descrita na lenda do fim do mundo, composto por uma base com três hastes fixadas e discos de diferentes diâmetros. O objetivo é mover todos os discos da primeira haste para a terceira, utilizando uma haste intermediária, respeitando certas regras e utilizando a menor quantidade de movimentos possíveis.

Figura 1 – Torre de Hanói

Fonte: Do autor (2024)

2.1 A Torre de Hanói e suas Regras

Regras do Jogo

1. Cada movimento consiste em mover o disco do topo de uma pilha para o topo de outra pilha, mantendo a ordem dos discos (discos maiores não podem ficar sobre discos menores).
2. Só é permitido mover um disco de cada vez.
3. Um disco só pode ser movido para o topo da pilha.

Conhecida a lenda, o jogo, as regras, seu desafio será manusear a Torre de Hanói e completar a tabela com a quantidade mínima de movimentos de acordo com o número de discos correspondentes:

Número de discos:	1	2	3	4	5	...
Número mínimo de movimentos:	1	3	7	15	31	...

Ao resolver esse exercício é importante certificar-se que as quantidades encontradas sejam realmente as mínimas. Nesse momento, como sugestão, confira com um ou mais colegas e o professor os resultados encontrados.

3 IDENTIFICANDO PADRÕES EM SEQUÊNCIAS

Vimos que o número mínimo de movimentos para 1 disco, 2 discos, 3 discos, ... formam uma lista conhecida como sequência numérica.

Uma sequência numérica pode ser listada de acordo com a posição em que cada elemento ocupa na lista:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n, \ldots$$

onde:

x_1 é o elemento da primeira posição;

x_2 é o elemento da segunda posição;

...

x_n é o elemento da enésima posição.

Sabia que é possível encontrar padrões de formação em sequências numéricas? Veja o exemplo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...
1	3	5	7	9	11	...

Se essa sequência continuasse, é possível dizer qual seriam os próximos números a serem inseridos?

Vejamos a relação entre um número e seu antecessor:

- $3 = 1 + 2$, ou seja, $x_2 = x_1 + 2$.
- $5 = 3 + 2$, ou seja, $x_3 = x_2 + 2$.
- $7 = 5 + 2$, ou seja, $x_4 = x_3 + 2$.
- $9 = 7 + 2$, ou seja, $x_5 = x_4 + 2$.
- $11 = 9 + 2$, ou seja, $x_6 = x_5 + 2$.

Padrão de Formação

Observe que neste caso, cada termo é o anterior adicionado duas unidades.

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 2$

No geral, podemos ilustrar da seguinte maneira:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	5	7	9	11	13	15	...
1	1+2	3+2	5+2	7+2	9+2	11+2	13+2	...

Agora que já tivemos um primeiro contato sobre como funciona uma sequência com o exemplo acima, vamos encontrar os próximos números das sequências abaixo e o padrão de formação de cada uma delas:

1. Determine os próximos números e o padrão de formação baseado no termo anterior das sequências abaixo, seguindo o exemplo da letra a:

a)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
2	$2+2$	$4+2$	$6+2$	$8+2$	$10+2$	$12+2$	$14+2$	...

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 2$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	5	9	13	17	21	25	29	...
1	$1+4$	$5+4$	$9+4$	$13+4$	$17+4$	$21+4$	$25+4$	...

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 4$

c)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
0	3	6	9	12	15	18	21	...
0	$0+3$	$3+3$	$6+3$	$9+3$	$12+3$	$15+3$	$18+3$	...

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 3$

d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
11	22	44	88	176	352	704	1408	...
11	$2 \cdot 11$	$2 \cdot 22$	$2 \cdot 44$	$2 \cdot 88$	$2 \cdot 176$	$2 \cdot 352$	$2 \cdot 704$	...

Padrão de formação: $x_n = 2x_{n-1}$

e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...
1	3	7	15	31	63	127	...
1	$2.1+1$	$2 \cdot 3+1$	$2 \cdot 7+1$	$2 \cdot 15+1$	$2 \cdot 31+1$	$2 \cdot 63+1$	...

Padrão de formação: $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1$

2. Na lenda dizia que o mundo viraria pó após realizarmos os movimentos com os 64 discos, que será resolvido com o número mínimo de movimentos x_{64}. De acordo com o padrão de formação obtido no item acima, temos $x_{64} = 2 \cdot x_{63} + 1$.

Embora seja possível encontrar uma expressão que envolva o x_{64}, teremos que ele é um valor que depende do x_{63}. Como prosseguir se não temos o x_{63}?

Resposta: Deve-se encontrar TODOS os termos anteriores ou encontrar uma fórmula que não dependa mais do anterior.

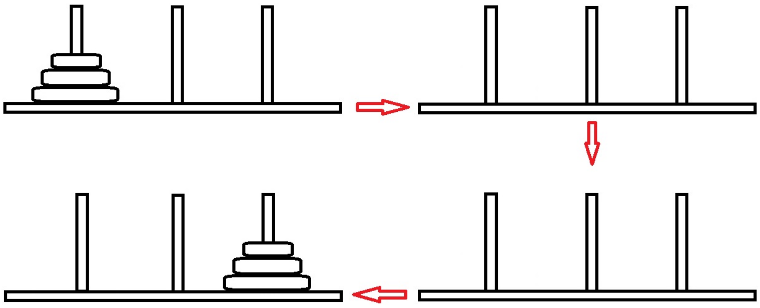
Para resolver essa situação, precisaremos encontrar um padrão que dependa da **posição** e não mais do **termo anterior**.

3.1 Desvendando o mistério da fórmula da Torre de Hanói

- Os padrões de formações encontrados são conhecidos como recorrência, pois recorre sempre ao termo anterior para obter o seguinte, por exemplo, na sequência de números pares temos $x_n = x_{n-1} + 2$, ou seja, é o termo anterior adicionado duas unidades.
- Sequências definidas por recorrência podem surgir quando modelamos a resolução de um problema.
- Vamos entender agora a recorrência obtida com a Torre de Hanói: $x_{n-1} = 2 \cdot x_{n-1} + 1$.

1. Se na Torre de Hanói há 3 discos, quantos discos há sobre o disco maior?
   2 discos.
2. Para deixar o disco maior livre, o que é necessário fazer com os demais discos?
   Transferir para outra haste com o número mínimo de movimentos necessários para os dois discos.
3. Após passar o disco maior para outra haste, qual será o próximo passo?
   Transferir novamente os 2 discos, agora sobre o disco maior, com a quantidade mínima de movimentos para dois discos.
4. Resuma a resolução da Torre de Hanói com 3 discos em 3 passos completando com os desenhos dos discos faltantes em cada etapa da solução abaixo:

Figura 2 – Solução em Partes



Fonte: Do Autor (2024)

É posível verificar que o número mínimo de movimentos para 3 discos x_3 será:

Movimentos Mínimos

1. O número mínimo de movimentos para passar 2 discos da haste 1 para a haste 2 é: $x_2 = 3$
2. O número mínimo de movimentos para passar o disco maior da haste 1 para a haste 3 é: 1
3. O número mínimo de movimentos para passar 2 discos da haste 2 para a haste 3 é: $x_2 = 3$

Portanto,

$$x_3 = x_2 + 1 + x_2 = 2 \cdot x_2 + 1$$

- Agora é sua vez! E se fossem 4 discos? Utilize o cálculo acima adaptado para x_4:

$$x_4 = x_3 + 1 + x_3 = 2 \cdot x_3 + 1$$

- Vamos mais longe! E se agora fossem n discos? Tente adaptar o cálculo para x_n:

$$x_n = x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2 \cdot x_{n-1} + 1$$

4 OUTRA FÓRMULA PARA A SEQUÊNCIA

Vimos que calcular o número mínimo de movimentos para uma grande quantidade de discos é possível, mas trabalhoso quando sua fórmula necessita recorrer ao **termo anterior**. Não desanime! Vamos mostrar que uma sequência definida por recorrência nos dá uma lei de formação que depende da **posição** do termo desejado, vejamos um exemplo na sequência de números pares:

Considerando o **termo anterior**, tem-se:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
2	2+2	4+2	6+2	8+2	10+2	12+2	14+2	...

Considerando apenas a **posição**, tem-se:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	...

- É possível ver que ao utilizar a posição, não é necessário saber o resultado do termo anterior, mas somente a **posição** do termo desejado e o padrão de formação requerido.
- Assim, na sequência de números pares podemos também multiplicar a posição desejada por 2 ao invés de adicionar duas unidades ao anterior.
- Seu desafio agora será encontrar o **padrão de construção** das sequências a seguir utilizando somente a **posição** como referência:

1. Complete as sequências abaixo e ache o padrão de formação seguindo o exemplo a):

a)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	...

Padrão de formação: $x_n = 2 \cdot n$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...
1	5	9	13	17	21	25	...
$4 \cdot 1 - 3$	$4 \cdot 2 - 3$	$4 \cdot 3 - 3$	$4 \cdot 4 - 3$	$4 \cdot 5 - 3$	$4 \cdot 6 - 3$	$4 \cdot 7 - 3$	...

Padrão de formação: $x_n = 4 \cdot n - 3$

c)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\dots$
0	3	6	9	12	15	18	$\dots$
$3 \cdot 1 - 3$	$3 \cdot 2 - 3$	$3 \cdot 3 - 3$	$3 \cdot 4 - 3$	$3 \cdot 5 - 3$	$3 \cdot 6 - 3$	$3 \cdot 7 - 3$	$\dots$

Padrão de formação: $x_n = 3 \cdot n - 3$

d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\dots$
11	22	44	88	176	352	$\dots$
$11 \cdot 2^{(1-1)}$	$11 \cdot 2^{(2-1)}$	$11 \cdot 2^{(3-1)}$	$11 \cdot 2^{(4-1)}$	$11 \cdot 2^{(5-1)}$	$11 \cdot 2^{(6-1)}$	$\dots$

Padrão de formação: $x_n = 11 \cdot 2^{(n-1)}$

e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\dots$
1	3	7	15	31	63	127	255	$\dots$
$2^1 - 1$	$2^2 - 1$	$2^3 - 1$	$2^4 - 1$	$2^5 - 1$	$2^6 - 1$	$2^7 - 1$	$2^8 - 1$	$\dots$

Padrão de formação: $x_n = 2^n - 1$

- Essa última construção nos forneceu exatamente a fórmula necessária para inferir o número mínimo de movimentos para n discos da Torre de Hanói.
- Mas será que essa fórmula encontrada é realmente válida para todos os n, ou seja, para todas as quantidades de discos que eu queira?
- A matemática nos dá um **método**, conhecido como **Princípio da Indução Finita** (MORGADO, 2015), para verificar se a fórmula encontrada está de **acordo** com a sua respectiva recorrência em **todos os termos da sequência**.
- Antes de aplicar a fórmula e solucionar o nosso enigma, vamos verificar se a fórmula está correta.

5 VERIFICANDO A VALIDADE DA FÓRMULA ENCONTRADA

Para verificarmos a fórmula encontrada vamos utilizar uma demonstração matemática chamada de princípio da indução finita.

Mas o que é o princípio da indução finita?

O princípio de indução finita nos remete a uma brincadeira feita com dominó conhecida como "efeito dominó", Figura 3. A brincadeira consiste em construir uma fileira de dominós formando um desenho de modo que a distância entre dois dominós seja sempre menor que a altura do dominó para que sempre que um dominó cair, este derrube o seguinte e assim por diante.

Figura 3 – Efeito dominó

Fonte: Do autor (2024)

Ao derubar a primeira peça da fileira construída, todas as demais peças vão caindo na sequência que foram colocadas. Na brincadeira, desejamos que todas as peças sejam derrubadas, no caso do princípio de indução finita, queremos que uma fórmula valha para todos números naturais.

Para que todos os dominós caiam, duas coisas precisam ocorrer:

- Precisamos garantir que sempre que uma peça cair, a seguinte cairá;
- Também precisamos derrubar a primeira peça (HEFEZ, 2016).

Como exemplo, vamos analisar a sequência dos números pares positivos.

Temos a sequência construída a partir da recorrência ao anterior $x_n = x_{n-1} + 2$ e o padrão de formação induzido pela posição: $x_n = 2 \cdot n$. Esses quadros já foram feitos anteriormente, e esses padrões de formação já encontrados, então, podemos simplesmente aproveitá-los:

Tabela 1 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
2	4	6	8	10	12	14	16	$\ldots$
2	$2+2$	$4+2$	$6+2$	$8+2$	$10+2$	$12+2$	$14+2$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 2$

Tabela 2 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
2	4	6	8	10	12	14	16	$\ldots$
$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7$	$2 \cdot 8$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = 2 \cdot n$

Será que o padrão de formação $x_n = 2n$ é realmente válido para todos os números naturais?

Para que o "efeito dominó" aconteça, a primeira peça precisa ser derrubada e na sequência provocar a derrubada das demais, a demonstração pode ser vista no esquema abaixo:

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: $x_1 = 2 \cdot 1 = 2$ que é o primeiro termo da sequência.

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale $x_1 = 2 \cdot 1 \Rightarrow$ **Valerá** $x_2 = 2 \cdot 2$

Justificativa: $x_2 = x_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2$

Atenção: Para mostrar $x_2 = 2 \cdot 2$, usamos dois fatos na justificativa:

- A recorrência: $x_2 = x_1 + 2$.
- A hipótese que a fórmula vale para o anterior: $x_1 = 2 \cdot 1$

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale $x_2 = 2 \cdot 2 \Rightarrow$ **Valerá** $x_3 = 2 \cdot 3$

Justificativa: $x_3 = x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 3$

Terceiro cai $\Rightarrow$ Quarto cairá

Vale $x_3 = 2 \cdot 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_4 = 2 \cdot 4$

Justificativa: $x_4 = x_3 + 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 4$

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale $x_n = 2 \cdot n \Rightarrow$ **Valerá** $x_{n+1} = 2 \cdot (n + 1)$

Justificativa: $x_{n+1} = x_n + 2 = 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$

Logo, valer para n (derrubar o dominó n) acarretará que valerá para $n + 1$ (derrubará o dominó $n + 1$) e, portanto, nossa sequência está validada (todos dominós estão derrubados).

Agora chegou a sua vez! Faça o mesmo para as demais sequências já conhecidas.

1. Sequência numérica $(1{,}5{,}9{,}13{,}...)$

Tabela 3 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
1	5	9	13	17	21	25	29	$\ldots$
1	$1+4$	$5+4$	$9+4$	$13+4$	$17+4$	$21+4$	$25+4$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 4$

Tabela 4 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
1	5	9	13	17	21	25	29	$\ldots$
$4 \cdot 1 - 3$	$4 \cdot 2 - 3$	$4 \cdot 3 - 3$	$4 \cdot 4 - 3$	$4 \cdot 5 - 3$	$4 \cdot 6 - 3$	$4 \cdot 7 - 3$	$4 \cdot 8 - 3$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = 4 \cdot n - 3$

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 **nos dá:** $x_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$ **que é o primeiro termo da sequência.**

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale $x_1 = 4 \cdot 1 - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_2 = 4 \cdot 2 - 3$

Justificativa: $x_2 = x_1 + 4 = (4 \cdot 1 - 3) + 4 = 4 \cdot (1 + 1) - 3 = 4 \cdot 2 - 3$

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale $x_2 = 4.2 - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_3 = 4.3 - 3$

Justificativa: $x_3 = x_2 + 4 = (4 \cdot 2 - 3) + 4 = 4 \cdot (2 + 1) - 3 = 4 \cdot 3 - 3$

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale $x_n = 4 \cdot n - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_{n+1} = 4 \cdot (n + 1) - 3$

Justificativa: $x_{n+1} = x_n + 4 = (4 \cdot n - 3) + 4 = 4 \cdot (n + 1) - 3$

2. Sequência numérica $(0,3,6,9,...)$

Tabela 5 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\dots$
0	3	6	9	12	15	18	21	$\dots$
0	$0+3$	$3+3$	$6+3$	$9+3$	$12+3$	$15+3$	$18+3$	$\dots$

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 3$

Tabela 6 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\dots$
0	3	6	9	12	15	18	21	$\dots$
$3\cdot 1-3$	$3\cdot 2-3$	$3\cdot 3-3$	$3\cdot 4-3$	$3\cdot 5-3$	$3\cdot 6-3$	$3\cdot 7-3$	$3\cdot 8-3$	$\dots$

Padrão de formação: $x_n = 3 \cdot n - 3$

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: $x_1 = 3 \cdot 1 - 3 = 3 - 3 = 0$ **que é o primeiro termo da sequência.**

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale $x_1 = 3 \cdot 1 - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_2 = 3 \cdot 2 - 3$

Justificativa: $x_2 = x_1 + 3 = (3 \cdot 1 - 3) + 3 = 3 \cdot (1 + 1) - 3 = 3 \cdot 2 - 3$

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale $x_2 = 3 \cdot 2 - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_3 = 3 \cdot 3 - 3$

Justificativa: $x_3 = x_2 + 3 = (3 \cdot 2 - 3) + 3 = 3 \cdot (2 + 1) - 3 = 3 \cdot 3 - 3$

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale $x_n = 3 \cdot n - 3 \Rightarrow$ **Valerá** $x_{n+1} = 3 \cdot (n + 1) - 3$

Justificativa: $x_{n+1} = x_n + 3 = (3 \cdot n - 3) + 3 = 3 \cdot (n - 1) + 3 = 3 \cdot (n + 1) - 3$

3. Sequência numérica $(11{,}22{,}44{,}88{,}...)$

Tabela 7 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
11	22	44	88	176	352	704	1408	$\ldots$
11	$2 \cdot 11$	$2 \cdot 22$	$2 \cdot 44$	$2 \cdot 88$	$2 \cdot 176$	$2 \cdot 352$	$2 \cdot 704$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = 2 \cdot x_{n-1}$

Tabela 8 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\ldots$
11	22	44	88	176	352	704	$\ldots$
$11 \cdot 2^{(1-1)}$	$11 \cdot 2^{(2-1)}$	$11 \cdot 2^{(3-1)}$	$11 \cdot 2^{(4-1)}$	$11 \cdot 2^{(5-1)}$	$11 \cdot 2^{(6-1)}$	$11 \cdot 2^{(7-1)}$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = 11 \cdot 2^{(n-1)}$

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: $x_1 = 11 \cdot 2^{(1-1)} = 11 \cdot 2^0 = 11 \cdot 1 = 11$ **que é o primeiro termo da sequência.**

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale $x_1 = 11 \cdot 2^{(1-1)}$ $\Rightarrow$ **Valerá** $x_2 = 11 \cdot 2^{(2-1)}$

Justificativa: $x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot (11 \cdot 2^{(1-1)}) = 11 \cdot 2 \cdot 2^{(1-1)} = 11 \cdot 2^{(1+1-1)} = 11 \cdot 2^{(2-1)}$

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale $x_2 = 11 \cdot 2^{(2-1)}$ $\Rightarrow$ **Valerá** $x_3 = 11 \cdot 2^{(3-1)}$

Justificativa: $x_3 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot (11 \cdot 2^{(2-1)}) = 11 \cdot 2 \cdot 2^{(2-1)} = 11 \cdot 2^{(1+2-1)} = 11 \cdot 2^{(3-1)}$

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale $x_n = 11 \cdot 2^{(n-1)}$ $\Rightarrow$ **Valerá** $x_{n+1} = 11 \cdot 2^{((n+1)-1)}$

Justificativa:

$x_{n+1} = 2 \cdot x_n = 2 \cdot (11 \cdot 2^{(n-1)}) = 11 \cdot 2 \cdot 2^{(n-1)} = 11 \cdot 2^{(1+n-1)} = 11 \cdot 2^{((n+1)-1)}$

A sequência desejada

Finalmente estamos preparados para mostrar a última sequência que é justamente a sequência de números mínimos de movimentos da Torre de Hanói e a qual possibilita a resolução do problema inicial.

4. Sequência numérica $(1,3,7,15,...)$

Tabela 9 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	7	15	31	63	127	255	...
1	$2.1+1$	$2\cdot3+1$	$2\cdot7+1$	$2\cdot15+1$	$2\cdot31+1$	$2\cdot63+1$	$2\cdot127+1$	...

Padrão de formação: $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1$

Tabela 10 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	7	15	31	63	127	255	...
2^1-1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1	2^6-1	2^7-1	2^8-1	...

Padrão de formação: $x_n = 2^n - 1$

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 **nos dá:** $x_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ **que é o primeiro termo da sequência.**

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale $x_1 = 2^1 - 1 \Rightarrow$ **Valerá** $x_2 = 2^2 - 1$

Justificativa: $x_2 = 2 \cdot x_1 + 1 = 2 \cdot (2^1 - 1) + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 2^2 - 1$

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale $x_2 = 2^2 - 1 \Rightarrow$ **Valerá** $x_3 = 2^3 - 1$

Justificativa: $x_3 = 2 \cdot x_2 + 1 = 2 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 2 + 1 = 2^3 - 1$

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale $x_n = 2^n - 1 \Rightarrow$ **Valerá** $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Justificativa: $x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

6 RESOLVENDO O ENIGMA GERADO PELA LENDA

Com a fórmula validada para encontrar o número mínimo de movimentos necessários, vamos responder ao questionamento inicial:

Falta muito tempo para acabar o mundo?

Para isso vamos considerar que os monges sejam extremamente rápidos, habilidosos e que todos eles consigam, em um cenário ideal, fazer os movimentos em apenas 1 segundo.

Assim, considerando um ano de 365 dias, com 24 horas por dia, cada hora com 60 minutos e cada minuto com 60 segundos, temos que a cada ano é possível realizar 31.536.000 movimentos.

Logo, resolvendo para 64 discos temos:

$$d_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

No entanto, como queremos saber em anos, faremos d_{64} dividido por 31.536.000.

Assim, teremos: 584.942.417.355.072, ou seja, aproximadamente 584 trilhões de anos.

7 PARA VOCÊ PROFESSOR

A demonstração matemática é a ferramenta utilizada para comprovar as afirmações existentes dentro da matemática, com exceção dos axiomas, todas as demais verdades matemáticas exigem uma demonstração. Não podemos deixar essa tarefa apenas para o ensino superior, mesmo no ensino básico os alunos também precisam ter essa experiência de fazer matemática, caso contrário, haverá uma lacuna no aprendizado dos estudantes.

Ao se tratar de uma primeira experiência, é necessário que a formalidade exigida na prova de um resultado matemático seja adaptado e planejado com atividades que os alunos possam gradualmente compreender as etapas de uma demonstração e também o raciocínio lógico utilizado. Neste trabalho, apresentamos uma proposta didática para apresentar a demonstração por indução finita.

É fundamental que o professor tenha domínio do assunto e conheça as demonstrações das afirmações matemática ensinadas, pois, mesmo sem realizá-las integralmente durante as aulas, pode apresentar ideias sobre como as afirmações são verificadas. Isso permite ao professor utilizar uma linguagem adequada e transmitir segurança no ensino, além de possibilitar aos alunos contemplar a beleza e as verdades da matemática.

Este trabalho trata-se de uma sugestão e deve ser adaptado às diferentes realidades e particularidades de cada turma.

8 SOBRE OS AUTORES

8.1 Viviane Vanessa Dohl Feiten

Graduada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2015), Graduada em Pedagogia pela Sociedade Educacional da Lapa (2017), Especialista em Metodologia no Ensino de Matemática pela Sociedade Educacional da Lapa (2016), Especialista em Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (2018), Especialista em Práticas Inovadoras na Educação pela Faculdade Biopark (2023). Atualmente é professora pertencente ao quandro permanente da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná, e professora efetiva da Faculdade Biopark.

8.2 Robson Willians Vinciguerra

Possui graduação em Matemática pela Universidade Paranaense (2006), mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (2009) e doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2017). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em álgebra. Atualmente é Professor Adjunto do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

8.3 Wilian Francisco de Araujo

Possui graduação em Licenciatura em matemática pela Universidade Estadual de Maringá (2005), mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (2009) e doutorado em Doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo (2014). Atualmente é professor adjunto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra de Lie, atuando principalmente no seguinte tema: Extensão de Cauchon.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho exploramos como o princípio da indução finita pode ser aplicado na educação básica através de atividades sugeridas para os alunos. Essas atividades deverão ser adaptadas conforme as necessidades identificadas pelo professor em cada turma.

É crucial conectar os conteúdos da educação básica ao ensino superior para proporcionar uma transição fluida e progressiva no aprendizado dos alunos. Esta integração fortalece a consolidação dos fundamentos e competências essenciais desde os primeiros anos escolares até níveis mais avançados, promovendo uma compreensão mais profunda e aplicação prática dos conhecimentos. Além de reduzir lacunas educacionais, essa abordagem estimula o engajamento dos estudantes, preparando-os para desafios acadêmicos, profissionais e pessoais futuros, ao reconhecer a continuidade e relevância dos conceitos ao longo de sua trajetória educacional.

REFERÊNCIAS

HEFEZ, A. Aritmética. **Rio de Janeiro: SBM**, v. 16, p. 17, 2016.

HINZ, A. M. *et al.* **The tower of Hanoi-Myths and maths**. [*S.l.*]: Springer, 2013.

MORGADO, A. C. Matemática discreta/augusto césar morgado; paulo cezar pinto carvalho. capa de pablo diego regino. **Rio de Janeiro: SBM**, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Versão para preenchimento

1. Determine os próximos números e o padrão de formação baseado no termo anterior das sequências abaixo, seguindo o exemplo da letra a:

a)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
2	4	6	8	10	12	14	16	$\ldots$
2	$2+2$	$4+2$	$6+2$	$8+2$	$10+2$	$12+2$	$14+2$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = x_{n-1} + 2$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
1	5	9	13	17	21	25	29	$\ldots$
1								$\ldots$

Padrão de formação: ______________________

c)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
0	3	6	9					$\ldots$
0								$\ldots$

Padrão de formação: ______________________

d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
11	22	44	88					$\ldots$
11								$\ldots$

Padrão de formação: ______________________

e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
1	3	7	15					$\ldots$
1								$\ldots$

Padrão de formação: ______________________

2. Complete as sequências abaixo e ache o padrão de formação seguindo o exemplo a):

a)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
2	4	6	8	10	12	14	16	$\ldots$
$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	$2\cdot 4$	$2\cdot 5$	$2\cdot 6$	$2\cdot 7$	$2\cdot 8$	$\ldots$

Padrão de formação: $x_n = 2n$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	5	9	13	17	21	25	29	...
								...

Padrão de formação: ____________________________

c)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
0	3	6	9					...
								...

Padrão de formação: ____________________________

d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
11	22	44	88					...
								...

Padrão de formação: ____________________________

e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	7	15					...
								...

Padrão de formação: ____________________________

3. Em cada uma das sequências, preencha corretamente os espaços e, por fim, utilize as informações do preenchimento pra completar a demonstração por indução:

   a) Sequência numérica $(1,5,9,13,...)$

Tabela 1 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	5	9	13	17	21	25	29	...
1								...

Padrão de formação: ____________________________

Tabela 2 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	5	9	13	17	21	25	29	...
1								...

Padrão de formação: ______________________

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: __________ que é o primeiro termo da sequência.

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale ______________________ $\Rightarrow$ **Valerá** ______________________

Justificativa: ____________________________________

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale ______________________ $\Rightarrow$ **Valerá** ______________________

Justificativa: ____________________________________

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale ______________________ $\Rightarrow$ **Valerá** ______________________

Justificativa: ____________________________________

b) Sequência numérica $(0,3,6,9,...)$

Tabela 3 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
0	3	6	9					$\ldots$
0								$\ldots$

Padrão de formação: ________________________

Tabela 4 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\ldots$
0	3	6	9					$\ldots$
0								$\ldots$

Padrão de formação: ________________________

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: ____________ que é o primeiro termo da sequência.

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

c) Sequência numérica $(11{,}22{,}44{,}88{,}...)$

Tabela 5 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
11	22	44	88					...
11								...

Padrão de formação: ________________________

Tabela 6 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
11	22	44	88					...
11								...

Padrão de formação: ________________________

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: ____________ que é o primeiro termo da sequência.

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

A sequência desejada

Finalmente estamos preparados para mostrar a última sequência que é justamente a sequência de números mínimos de movimentos da Torre de Hanói e a qual possibilita a resolução do problema inicial.

d) Sequência numérica $(1,3,7,15,...)$

Tabela 7 – Recorrendo ao termo anterior

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	7	15					...
1								...

Padrão de formação: ___________________________

Tabela 8 – Recorrendo a posição

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...
1	3	7	15					...
1								...

Padrão de formação: ___________________________

DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

DERRUBANDO O PRIMEIRO

Primeiro caiu

A fórmula para x_1 nos dá: ____________ que é o primeiro termo da sequência.

DERRUBANDO OS DEMAIS

Primeiro cai $\Rightarrow$ Segundo cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Segundo cai $\Rightarrow$ Terceiro cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____

Dado que é inviável verificar um a um isoladamente, vamos generalizar isso para um "n" qualquer, que é o suficiente.

n cai $\Rightarrow$ n+1 cairá

Vale __________________________ $\Rightarrow$ **Valerá** __________________________

Justificativa: ____