UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO POLINOMIAL DE 1° E 2° GRAU USANDO COMO INSTRUMENTO O SOFTWARE DESMOS

MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO
FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES

2024

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Pedro Franco de Sá
Coordenador do PPGEM

Ana Kely Martins da Silva
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os autores

Revisão: Os autores

Conselho Editorial

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

Cristo, Maicon Michel Trindade de
Uma proposta para o ensino de inequação polinominal de 1° e 2° grau usando como recurso o software Desmos/ Maicon Michel Trindade de Cristo, 2024.
49 p.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de Inequação Polinomial de 1° e 2° grau com o Auxilio do Software Desmos” do Mestrado profissional em Ensino da Matemática da Universidade do Estado do Pará. Belém, 2024.

1. Matemática. 2. inequação polinominal. 3. software Desmos. I. Alves, Fábio José Costa. II Título.

CDD 23 ed.512.5

Bibliotecária Priscila Melo CRB-2 / 1345

CRISTO; Maicon Michael Trindade de, ALVES; Fábio José Costa.
Uma Proposta para o Ensino de Inequação Polinomial de 1° e 2° grau Usando como Recurso o Software Desmos. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, (PPGEM/UEPA), 2024.

ISBN: 978-65-84998-98-8

Aprendizagem de Matemática. Gêneses Instrumental. Registro de Representação Semiótica. Analise Microgenética. Ensino de inequação polinomial de 1º e 2° grau. Inequação polinomial de 1° e 2° grau.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO POLINOMIAL DE 1º E 2º GRAU USANDO COMO RECURSO O SOFTWARE DESMOS".**

Mestrando: **MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO**

Data da avaliação: **26/06/2024**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ______

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Escola Estadual Ensino Médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: com alunos de graduação

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: com alunos do ensino médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(X) na escola, como um curso extra

( ) outro:

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como

( ) outros membros da comunidade, tais como

O produto educacional foi considerado:

( ) APROVADO (X) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA	Assinaturas
Profº. Fábio José da Costa Alves (Presidente) Doutor em Geofísica IES de Obtenção do Título: UFPA	Fabio Alves
Profª. Cinthia Cunha Maradei Pereira (Membro Interno) Doutora em Bioinformática IES de Obtenção do Título: UFPA	
Profª. Talita Carvalho Silva de Almeida (Membro Externo2) Doutora em Educação Matemática IES de Obtenção do Título: PUC/SP	Talita Almeida

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a),

Apresento-lhe um produto educacional desenvolvido a partir de uma pesquisa de mestrado, disponível no link http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/870384, realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará, sob a supervisão do Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves. Este produto foi criado para auxiliar professores que desejam incorporar uma nova abordagem no ensino do objeto matemático "inequação polinomial de 1º e 2º graus", utilizando o software Desmos como ferramenta em suas turmas de ensino médio. A sequência de atividades foi elaborada com base na Teoria Instrumental de Rabardel (1995) e na Teoria das Representações Semióticas de Duval (1993), com o objetivo de transformar o Desmos em um instrumento cognitivo eficaz para a aprendizagem.

A sequência de atividades foi validada experimentalmente, demonstrando grande potencial para a aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º graus. No decorrer das atividades, os alunos passaram por um processo de instrumentalização e instrumentação, conforme descrito por Rabardel, no qual o Desmos deixou de ser apenas um artefato e se tornou um instrumento didático essencial, permitindo que os alunos realizassem conversões entre registros algébricos e gráficos, de acordo com a Teoria das Representações Semióticas de Duval. Para alcançar esses resultados, desenvolvemos uma sequência de sete atividades que exploram a potencialidade do ambiente de geometria dinâmica do Desmos na aprendizagem de inequações simultâneas polinomiais de 1º e 2º graus, sistemas de inequações polinomiais de 1º e 2º graus, e inequações produto/quociente polinomial de 1º e 2º graus.

Após a aplicação dessa sequência, os resultados mostraram-se promissores. O uso do Desmos facilitou a visualização gráfica das inequações polinomiais, promovendo não apenas uma compreensão mais dinâmica e visual dos conceitos matemáticos, mas também estimulando a aprendizagem interativa entre os alunos.

Essa interação favoreceu a superação de obstáculos na conversão de registros semióticos, conforme proposto por Duval (1993), e contribuiu para a construção de um conhecimento mais profundo. É importante destacar que, para que os alunos se apropriem do Desmos como um instrumento eficaz, há um período de adaptação necessário. Durante esse tempo, as intervenções propostas na sequência de atividades são cruciais para apoiar o processo de aprendizagem, auxiliando os alunos a dominar tanto o tratamento algébrico quanto a conversão entre diferentes registros de representação.

INTRODUÇÃO

As inequações são um tema recorrente em diversos níveis de ensino na matemática, começando no ensino fundamental a partir do 7º ano, passando pelo ensino médio e chegando até os cursos de ciências exatas no nível superior, especialmente em aulas introdutórias de cálculo. O estudo das inequações ajuda os alunos a realizarem manipulações algébricas e gráficas importantes para a compreensão de funções e limites, conforme destacado pela pesquisadora Alvarenga (2013). Os documentos oficiais de educação no Brasil enfatizam a importância de aprender sobre inequações. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino fundamental afirmam que, ao final dessa etapa, os alunos devem ser capazes de produzir e interpretar diferentes expressões algébricas, reconhecer igualdades e desigualdades, identificar equações e inequações, e resolver problemas que envolvam equações e inequações de primeiro grau (BRASIL, 1998, p. 81).

Da mesma forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino médio reforça a importância desse tema ao afirmar que os alunos devem ser capazes de "resolver problemas por meio de equações e inequações, compreendendo os procedimentos utilizados" (BRASIL, 2017, p. 270). Apesar da relevância das inequações, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, especialmente sobre inequações polinomiais do 1º e 2º graus, ainda são escassas. Segundo Dicetti, Bisognin e Pretto (2020), nos últimos cinco anos, foram encontrados apenas 28 trabalhos relacionados ao tema, e apenas cinco desses estavam focados no ensino de inequações.

Para contribuir com essa área de pesquisa e oferecer uma proposta prática para os professores do ensino médio, foi desenvolvida uma sequência de atividades baseada nas teorias de Rabardel (1995) e Duval (1993). A partir da perspectiva de Rabardel sobre instrumentos cognitivos, o software Desmos foi escolhido como ferramenta pedagógica para ajudar os alunos a interagirem de maneira mais dinâmica com os conceitos matemáticos. Já com base nas abordagens de Duval, as atividades foram elaboradas para explorar diferentes formas de representação, como gráficos e expressões algébricas, ajudando os alunos a fazerem conexões entre essas formas e, assim, compreenderem melhor as inequações.

No próximo capítulo, será apresentada uma introdução ao software Desmos, explicando suas funcionalidades básicas. Essa introdução tem como objetivo ajudar os professores a se familiarizarem com o Desmos e integrá-lo em suas aulas, seguindo as abordagens teóricas mencionadas.

SOFTWARE DESMOS

O *software* Desmos é uma avançada calculadora gráfica que pode ser acessada gratuitamente através de um endereço na web tanto por computadores ou por *smartphone.* Atualmente, segundo os dados fornecidos pela Desmos *Studio,* mais de 75 milhões de pessoas no mundo usam o *software* Desmos anualmente para os mais devidos fins como: realizar conjecturas, conectar diferentes representações dinamicamente e realizarem artes a partir do conhecimento matemático. O *software* Desmos apresenta uma interface simples de se manipular e entender, pois não precisa ser instalado no computador para funcionar, basta estar conectado a uma rede de internet para acessar suas ferramentas.

Ao acessar o site https://www.desmos.com/?lang=pt-BR seremos orientados a uma tela, no qual podemos explorar os mais diversos recursos, mas para a finalidade dessa dissertação iremos explorar a sua calculadora gráfica.

A Figura 3 ajuda a entendermos a interface inicial do *software* Desmos.

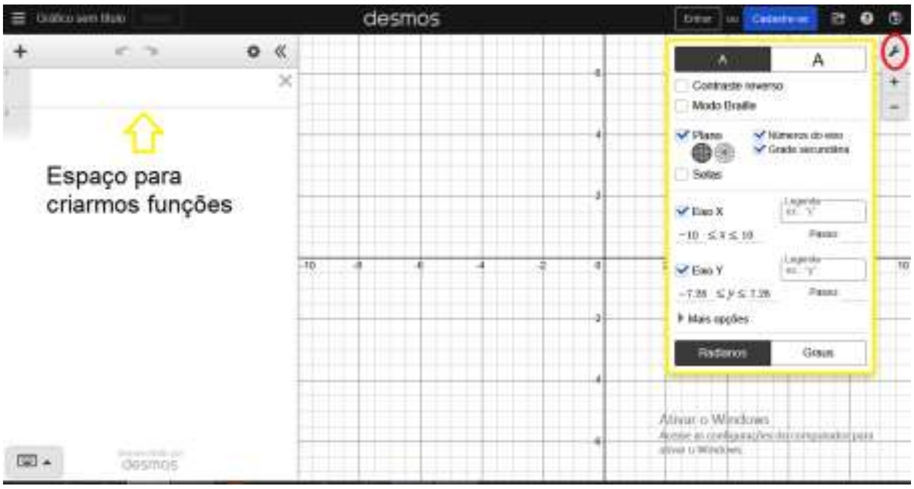
Figura 3: Tela inicial do *software* Desmos.

Fonte: Autor, 2024.

Ao clica na calculadora gráfica, iremos ser direcionado para uma nova tela, no qual teremos acesso às ferramentas gráficas disponíveis para os usuários como: aba para calculadora, configuração no qual podemos modificar o tamanho da fonte da imagem e do gráfico além de ter as opções de incluir ou tirar o plano cartesiano. Podemos também, nomear os eixos X ou Y de acordo como o problema que desejamos criar, delimitar os intervalos numéricos entre esses eixos e criar os “passos” que a opção de quanto em quanto o eixo X ou o Y irá crescer.

A Figura 4 mostra todas essas opções que foi citada anteriormente para guiar o novo usuário.

Figura 4: Calculadora gráfica.

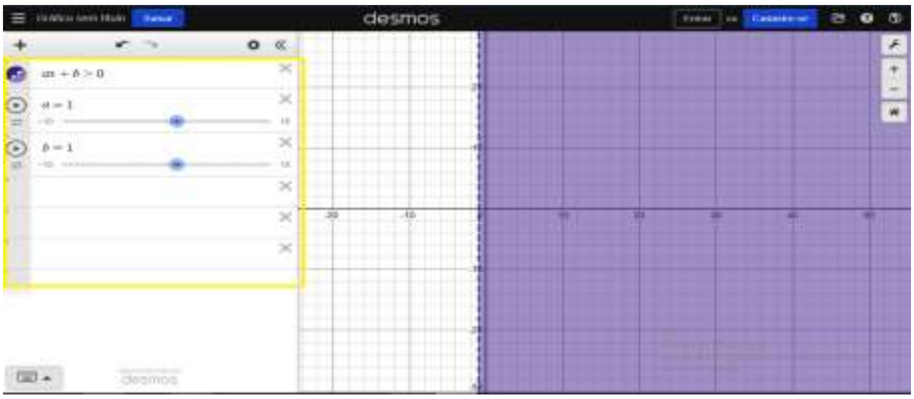


Fonte: Autor, 2024.

Como o software Desmos é totalmente dinâmico, ao realizar uma função geral como $ax + b > 0$, ele cria automaticamente o controle deslizante a e b, no qual podemos delimitar o intervalo que a função pode variar, proporcionando o araste para modificarmos a função dentro do intervalo delimitado. E ao inserir o símbolo de inequação, ele cria automaticamente uma faixa vertical simbolizando as possíveis soluções da inequação inserida.

A Figura 5 mostra como a função de inequação $ax + b > 0$, se comporta ao ser inserido no Desmos.

Figura 5: Comportamento da inequação $ax + b > 0$.



Fonte: Autor, 2024.

Para a nossa pesquisa, escolhemos o *software* Desmos por apresentar uma funcionalidade simples, sendo acessíveis para as pessoas que tem conhecimento mínimo de informática e devido ao seu dinamismo, pois é possível verificar o comportamento gráfico das funções de inequações polinomiais de 1° e 2° grau a partir da função araste.

OBJETO MATEMÁTICO

O objeto matemático que será abordado nesta dissertação de mestrado é a inequação polinomial de 1º e 2º grau e sua abordagem funcional gráfica. A fundamentação teórica deste capítulo baseia-se na tese de doutorado do pesquisador Mineiro (2019). Para o desenvolvimento do tema, é de extrema importância que, primeiramente, realizemos um estudo epistemológico sobre o objeto matemático, abordando desde o surgimento das equações polinomiais de 1º e 2º graus até o desenvolvimento das desigualdades e inequações. Isso porque, conforme o período histórico e a realidade de cada civilização, "existem diferentes formas de interpretar a matemática, ou seja, diferentes modelos epistemológicos, compostos de diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias" (MINEIRO, 2019, p. 57).

Os primeiros registros sobre equações polinomiais de 1º grau surgiram nos papiros de Rhind, desenvolvidos pelos antigos egípcios por volta de 1650 a.C., segundo Eves (2011). Os babilônios, por sua vez, desenvolveram equações polinomiais de grau maior ou igual a dois; esses registros podem ser encontrados, de acordo com Eves (2011), na Universidade de Yale, nos Estados Unidos, em uma coleção datada de aproximadamente 1600 a.C., contendo centenas de problemas com equações simultâneas, resolvidos por meio de equações do tipo biquadrada. Segundo Mineiro (2019), esses registros escritos de equações polinomiais de 1º e 2º grau provavelmente surgiram a partir das necessidades humanas, quando o homem deixou de ser nômade e passou a se fixar em um determinado território. Era importante para ele reconhecer a regularidade dos ciclos da natureza, como as estações do ano, a duração dos dias, as técnicas de cultivo e o manejo do solo.

Ainda segundo Mineiro (2019), a partir do momento em que os seres humanos começaram a mensurar seus bens, como a quantidade de animais, frutas, terrenos, etc., o conhecimento numérico básico (um, dois, três,...) tornou-se insuficiente. Eles passaram a sentir a necessidade de comparar seus bens, o que fez surgir a noção de grandeza e de comparação, como a de igualdade e desigualdade. Deste modo:

> tão importante quanto expressar que a quantidade a de elementos de uma coleção era igual à quantidade b de elementos de outra ($a=b$) (como ocorria por exemplo ao relacionar de forma biunívoca a quantidade de objetos de uma coleção com a quantidade de marcas feitas em um pedaço de madeira), ou que tinham quantidade diferentes ($a \neq b$), existiam situações em que se tornava necessário expressar a relação de ordem que existia entre essas quantidades, recorrendo às desigualdades por meio da indicação explícita de qual era a coleção que tinha mais elementos e qual a que tinha menos, ou em outros termos, qual era a maior e qual era a menor, nos casos em que não possuíam a mesma quantidade. (MINEIRO, 2019, p.58).

Os primeiros registros escritos sobre igualdade e desigualdade surgiram provavelmente, segundo Mineiro (2019), com os postulados criados por Euclides em seu livro *Elementos de Euclides*. Em um deles, afirma-se que "duas retas paralelas cortadas por duas retas transversais formam ângulos alternos, externos e internos congruentes". Em outro postulado, referente à desigualdade, ele afirma: “para qualquer triângulo, a soma do comprimento de dois lados é maior do que o comprimento do lado remanescente, quaisquer que sejam os lados considerados” (EUCLIDES, 2007, p. 23, apud MINEIRO, 2019, p. 62).

Mineiro (2019) cita, em sua pesquisa, outras situações históricas envolvendo inequações e desigualdades, como o trabalho de Fermat para calcular o valor aproximado de $\sqrt{3}$, e o de Newton, que foi um dos primeiros a provar teoremas utilizando a noção de desigualdade para demonstrar séries infinitas. Ele também menciona a pesquisa de Harriot, que demonstrou, por meio de desigualdades, o teorema da desigualdade entre as médias. Ainda em sua pesquisa, Mineiro (2019) apresenta situações envolvendo desigualdades e inequações, diferenciando os dois termos apresentados. No entanto, o objetivo da nossa pesquisa não é realizar um levantamento histórico detalhado, sugerindo ao leitor que consulte as referências para acessar o trabalho do pesquisador Mineiro (2019).

Como podemos perceber, o uso de equações e inequações polinomiais é inerente ao desenvolvimento da matemática, contribuindo significativamente para a resolução dos mais diversos problemas, como, por exemplo, em situações econômicas em que se busca o maior lucro ou o menor prejuízo. A partir do exposto, podemos afirmar que a razão de ser das inequações polinomiais está associada às necessidades humanas, como demonstrado nesse breve levantamento histórico. Após esse levantamento sobre o surgimento das equações, desigualdades e inequações, faz-se necessário definir matematicamente as inequações polinomiais, a fim de diferenciá-las das equações polinomiais e das desigualdades, uma vez que se tratam de objetos matemáticos distintos.

Segundo Houaiss (2001, apud Mineiro, 2019), é comum associarmos a palavra "desigualdade" com "inequação", uma vez que desigualdade é usada para comparar expressões que apresentam quantidades desiguais, enquanto a inequação é usada para comparar duas expressões matemáticas contendo os símbolos (<, >, ≤, ≥), cujo objetivo é determinar o valor da variável que satisfaça a desigualdade. Antes de prosseguir, vamos definir o que são funções polinomiais, uma vez que seu uso será de extrema importância na resolução das inequações polinomiais de 1º e 2º grau, especialmente através das interpretações gráficas de suas raízes. . Desta forma, definimos funções polinomiais de modo que sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que seus domínios são respectivamente, $D_1 \subset \mathbb{R}\ e\ D_2 \subset \mathbb{R}$, contidos nos números reais. Denominamos de inequação na incógnita x qualquer uma das sentenças abaixo:

$f(x) > g(x)$, leia-se $f(x)$ maior que $g(x)$.

$f(x) < g(x)$, leia-se $f(x)$ menor que $g(x)$.

$f(x) \geq g(x)$, leia-se $f(x)$ maior ou igual a $g(x)$.

$f(x) \leq g(x)$, leia-se $f(x)$ menor ou igual a $g(x)$.

É importante observar que as soluções de uma inequação são intervalos que podem ser abertos ou fechados. Portanto, o intervalo representará o domínio de validade, que, para essa dissertação, consideramos como sendo a solução da inequação polinomial. Desta forma, considere $f(x)$ e $g(x)$ como sendo funções polinomiais. E $f(x) > g(x)$. Assim, considere D_1 e D_2, como sendo o domínio da função $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Chamaremos o conjunto D de validade se, $D = D_1 \cap D_2$ e somente se, para todo $x_1 \in D$, temos que $x_1 \in D_1$ e $x_1 \in D_2$. Portanto, a solução da inequação $f(x) > g(x)$ é $D = D_1 \cap D_2$. As soluções dos outros casos seguem de maneira análoga a do primeiro caso.

Sendo assim, podemos definir a solução de uma inequação polinomial da seguinte forma:

Definição 1:

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, dizemos que ele é a solução da inequação $f(x) < g(x)$, se e somente se, $f(x_0) < g(x_0)$.

A partir dessa definição, podemos definir o conjunto solução de uma inequação, que denominaram de conjunto S, para todo número real.

Definição 2:

Chamamos de S o conjunto solução de toda inequação definida nos reais, tal que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, são verdadeiras as seguintes sentenças:

$$f(x_0) > g(x_0),\ S = \{x_0 \in \mathbb{R}\ ,/\ x > x_0\}$$
$$f(x_0) < g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R}\ ,/\ x < x_0\}$$
$$f(x_0) \geq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R}\ ,/\ x \geq x_0\}$$
$$f(x_0) \leq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R}\ ,/\ x \leq x_0\}$$

Dada a inequação e ela não apresentar soluções nos reais, dizemos que ela é impossível e representaremos através da seguinte notação $S = \{\emptyset\}$, no qual o simbolo, $S = \{\emptyset\}$representa o conjunto vazio.

Para continuarmos aprofundando o objeto matemático é importante relembrarmos algumas notações importantes sobre conjuntos, intervalos e intervalos com representação geométrica.

Notação sobre conjuntos:

1 – A representação dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\}$$

2 - A representação dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$$

3 – A representação dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$$

4 – A representação dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\}$$

5 – A representação dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$$

A representação em forma de intervalos, que são subconjuntos dos números reais, se faz muito importante, pois as soluções das inequações podem ser representadas por meio dessa notação.

Podemos definir matematicamente intervalos numéricos como:

Definição 3:

Dados $a\ e\ b\ \in R\cdot$, com $a < b$, chama-se de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

I_1) Intervalo aberto: $]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

I_2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

I_3) Intervalo aberto à direita: $[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

I_4) Intervalo aberto à esquerda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

I_5) Semirreta de origem em: a: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$

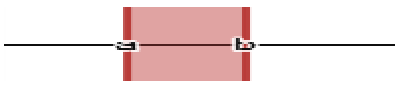
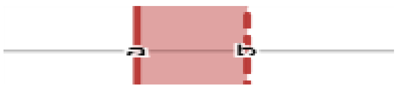
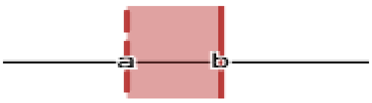
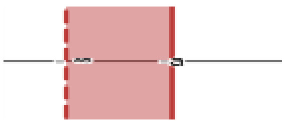
I_6) Semirreta aberta de origem em: a: $]-\infty, a[\ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

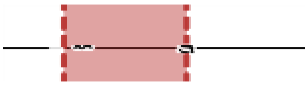
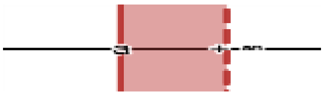
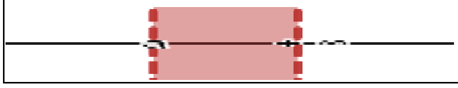
I_7) Semirreta de origem em: a: $[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$

I_8) Semirreta aberta de origem em: a: $]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$

A representação geométrica dos números reais é uma forma muito importante para que se compreendam as soluções reais de um inequação. Por isso se faz importante termos conhecimento sobre essa notação. A figura 3 ajuda a relembrarmos essa notação geométrica.

Quadro 2: Representação geométrica dos números reais.

Representação Geométrica	**Representação Algébrica**	**Descrição**
	$(a\ ,b)$	Intervalo aberto
	$[a\ ,b]$	Intervalo Fechado
	$[a\ ,b)$	Intervalo aberto à direita
	$(a\ ,b]$	Intervalo aberto a esquerda
	$(-\infty, a]$	Semirreta de origem em a

	$(-\infty, a)$	Semirreta aberta de origem em a
	$[\,a\,, +\infty)$	Semirreta de origem em a
	(a , +∞)	Semirreta aberta de origem em a

Fonte: Autor, 2023.

Algumas observações sobre a representação geométrica dos números reais é importante saber que:

- ❖ A bolinha branca indica que a solução da inequação não está definida naquele extremo, diferentemente da bolinha preta, onde a inequação está definida no extremo da reta numérica.
- ❖ Algumas notações na literatura trazem como intervalo aberto o símbolo (a, b).

Para interpretarmos graficamente as soluções de uma inequação polinomial de 1° e 2° grau, temos que relembrar alguns tópicos importantes, como o estudo de sinal dessas inequações. Para isso vamos relembrar primeiramente a definição matemática da função polinomial de 1º grau.

Definição 4:

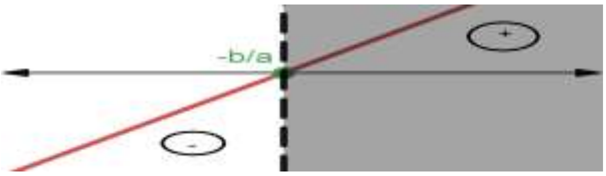
Uma função é classificada como polinomial de 1º grau, quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax + b) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e b é um número real dado.

Para fazermos o estudo de sinal da função polinomial de 1º grau temos que lembrar que o zero da função ou solução da função do tipo $f(x) = b + ax$ é calculado a partir da seguinte equação $x = -\frac{b}{a}$, ou seja, é o valor para que $f(x) = 0$, então devemos analisar os seguintes casos quando ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Para isso temos que analisar dois casos:

1° Caso, quando $a > 0$.

A taxa variável $a > 0$ indica que a função polinomial do 1° grau tem o gráfico crescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo:

Figura 4: Sinal da função crescente

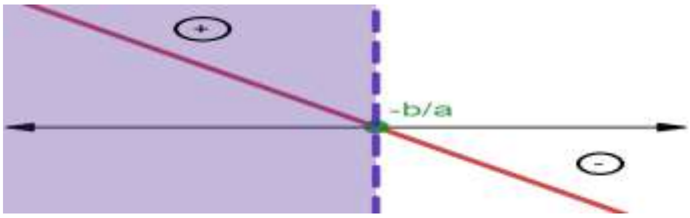


Fonte: Autor, 2023.

2° Caso, quando $a < 0$.

A taxa variável $a < 0$ indica que a função polinomial do 1º grau tem o gráfico decrescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo.

Figura 5: Sinal da função decrescente.



Fonte: Autor, 2023.

Agora, definido matematicamente a função polinomial de 2° grau, temos:

Definição 5:

Uma função é classificada como polinomial de 2º grau quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e a, b e c são números reais dado.

Para a nossa pesquisa, é importante o domínio do estudo de sinal de função polinomial de 2° grau. Para isso, é necessário o conhecimento do cálculo das raízes dessa função. Assim, dada uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ usaremos como fórmula resolutiva para obter suas raízes as seguinte equação:

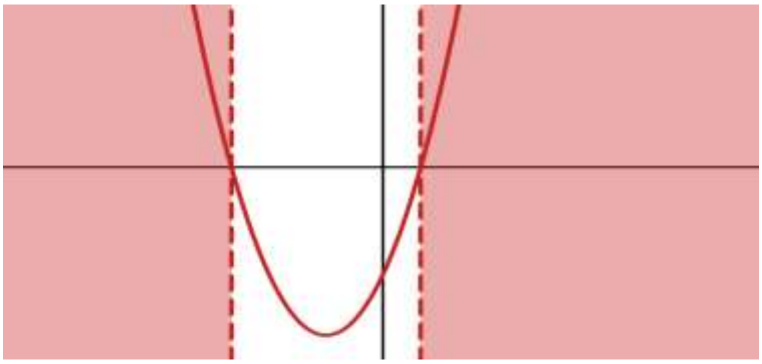
$$\Delta = b^2 - 4.a.c \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Com base no calculo das raízes de uma função polinomial de 2° grau, é importante analisar o comportamento dessa função quando:

- 1° Caso, quando $a > 0$ e $\Delta > 0$.

O coeficiente $a > 0$ indica que a função quadrática tem concavidade voltada para cima e o discriminante $\Delta > 0$, prescreve que o gráfico da função toca em dois pontos distintos no eixo das abscissas.

Figura 6: Estudo de Sinal da função quadrática.

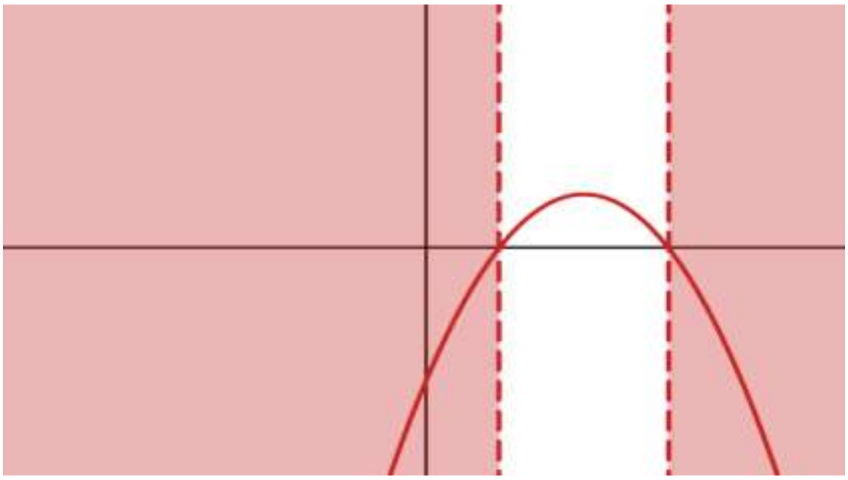


Fonte: Autor, 2023.

- 2° Caso, quando $a < 0\ e\ \Delta > 0$.

Agora o coeficiente $a < 0$ indica que a concavidade da parábola está voltada para baixo, permanecendo o gráfico da função a tocar em dois pontos distintos o eixo x.

Figura 7: Estudo de Sinal da função quadrática.



Fonte: Autor, 2023.

Passaremos a definir o produto das funções polinomiais de 1° e 2° grau.

Definição 6:

Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $f(x).g(x) > 0$, $f(x).g(x) < 0$, $f(x).g(x) \geq 0$ e $f(x).g(x) \leq 0$ São chamadas de inequação – produto.

O último tópico a ser trabalhado é a inequação – quociente que podemos defini-la como:

Definição 7:

Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\ e\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ são chamadas de inequação – quociente.

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE

A proposta de sequência de atividade abaixo inclui uma lista de 7 atividades de inequação polinomial de 1º e 2º grau aplica em uma grupo de alunos cursando o ensino médio da rede pública e privada de ensino. Essas atividades têm como objetivo verificar as relações descritas na Teoria Instrumental de Rabardel (1995). Queremos analisar a aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º grau mediada por um instrumento e, por conseguinte, examinar as interações existentes entre sujeito, objeto, instrumento e Sujeito-Objeto pela mediação do instrumento. Ademais, realizamos perguntas aos alunos para induzir a fala dos discentes sobre o instrumento de aprendizagem e sua assimilação do objeto matemático. Também registramos as interações entre os alunos, e entre alunos e pesquisador, no processo de compreensão do objeto matemático, bem como a apropriação dos instrumentos de aprendizagem em seu processo de instrumentação. Posteriormente, gravamos essas respostas com um gravador e, com esses dados, analisamos a experimentação, verificando indícios de aprendizagem e a conversão de linguagem. Muitas vezes, os alunos conseguem verbalizar bem, mas não conseguem escrever com a mesma qualidade.

Atividade 1 – Estudando $ax + b > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.

O que você observou no gráfico de $2x - 4 > 0$

Espaço dos comentários:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 1 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$ no Desmos.

2 – Digite $2x - 4 > 0$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

4 – Mande o aluno clicar no ponto $(2,0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 \geq 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

7 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 < 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

8 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com a seguinte inequação:

(a) $3x - 6 < 0$

(b) $5x + 4 \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a primeira atividade da experimentação

A realização para a primeira atividade exigirá um maior número de intervenção por parte do pesquisador, pois será a primeira vez que os alunos terão contato com o conteúdo de inequação polinomial de 1° e 2° graus e manipularão o *software* Desmos. Ressaltamos que o número de intervenções diminuirá à medida que as atividades avançarem, verificando se, no percurso da experimentação o aluno ganha autonomia e instrumentaliza o Desmos, conforme a teoria de Rabardel.

Ação do pesquisador: Ao iniciar a atividade o pesquisador se apresentará para a turma e distribuirá a primeira atividade, onde ele vai pedir para que os alunos resolvam a inequação $2x - 4 > 0$. Aguardará um momento e em seguida questionará os alunos se conseguiram resolver o problema, pedindo que socializem sua solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos façam uma relação básica, mais de forma oral, da escrita da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$.

Ação do pesquisador: A partir dos registros da socialização dos alunos, o pesquisador tomará o melhor exemplo, caso os alunos tenham apresentado soluções no quadro, e, se não houver partirá do exemplo apresentado na atividade, e fará a associação da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$, determinando a solução da inequação ($2x - 4 > 0$), após fazer a manipulação algébrica necessária.

Ação do pesquisador: após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador acessará o site do Desmos, apresentará a calculadora Desmos explicando um pouco da sua funcionalidade, e digitará a inequação $2x - 4 > 0$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador indagará os alunos sobre como eles interpretam o gráfico que está aparecendo na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a imagem apresentada no Desmos representa a solução algébrica, justificando sua resposta ao destacar que o gráfico tem uma coloração a partir do ponto 2 no eixo x. Espera-se também que observem a linha vertical tracejada que passa no ponto 2 no eixo x, representando que esse número não pertence à solução. Isto é, espera-se que façam uma relação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: em ato contínuo o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a seguinte inequação $2x - 4 \geq 0$, e que após resolverem algebricamente, digitem – na no Desmos. O pesquisador explicará como digitar o símbolo maior e igual (≥).

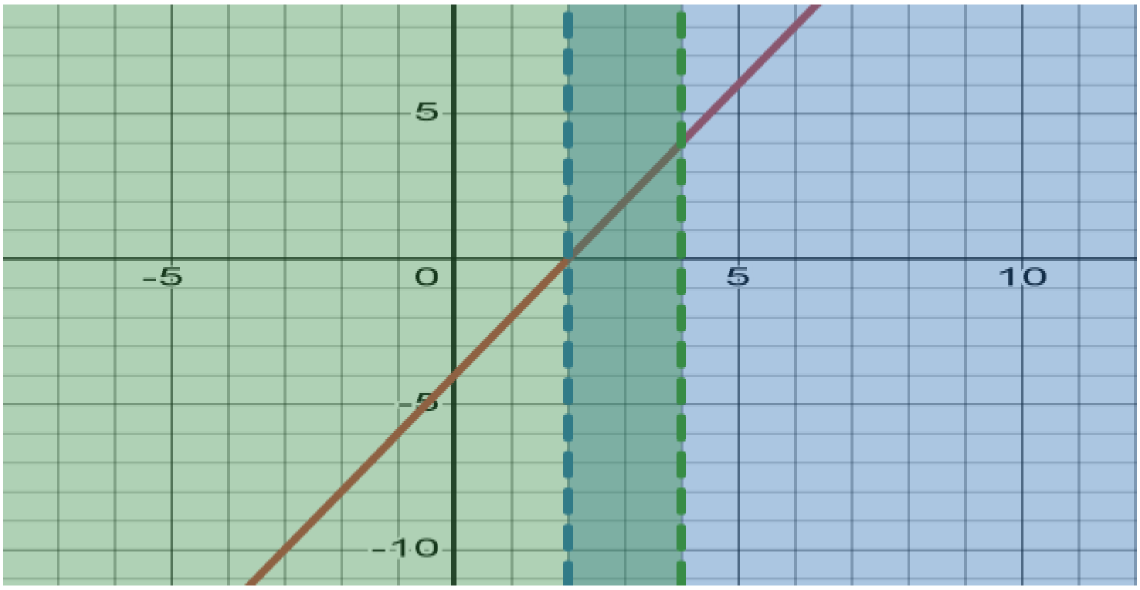
Comportamento esperado: após essa ação do pesquisador, espera-se que eu os alunos desenvolvam o mesmos procedimentos algébricos que foram utilizados na resolução da inequação $2x - 4 > 0$, e percebam que a igualdade na inequação alterou a solução. E que quando escreverem a desigualdade $2x - 4 \geq 0$ percebam a reta vertical ao eixo x no ponto 2 se tornar contínua, e façam referência deste fato com a presença do 2 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador vai pedir para que os alunos resolvam algebricamente as inequações $(3x - 6 < 0, 5x + 10 \geq 0, -2x - 4 > 0)$ e analisem os seus gráficos no Desmos e deem sua interpretação. Ressaltamos que nessa fase da evolução da atividade o pesquisador vai evitar intervenções.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos consigam resolver algebricamente as inequações sem muita dificuldade e consigam relacionar com as imagens apresentadas na tela quando digitadas as inequações do Desmos, e façam isso de forma correta.

Atividade 2 – Estudando $c < ax + b < d$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 < 2x - 4 < 4$

Espaço dos comentários:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 2 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$

2 – Digite $0 < 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 < 4$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

$2x - 4 < 4 \quad \Rightarrow \quad 2x < 4 + 4 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad x < 4$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $2 < x < 4$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(2,0)\ e\ (4,0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $0 \leq 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 \leq 4$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $0 < 6x - 3 \leq 9$

(b) $0 \leq -x - 4 < 2$

O comportamento do pesquisador durante a segunda atividade da experimentação

A partir da segunda atividade, espera – se que os alunos demonstrem alguma familiaridade ao se trabalhar no ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de 1° grau. É importante salientar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção diminuirá, permitindo que os alunos, conforme a teoria de Rabardel (1995), iniciem o processo de instrumentação do software Desmos.

Ação do pesquisador: Após recolher os dados escritos da 1° atividade, o pesquisador distribuirá a 2° atividade entre os alunos e solicitará que resolvam a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ no espaço próprio da atividade. Após aguarda um tempo para a resolução, o pesquisador indagará os alunos se conseguiram resolver a inequação, pedindo que expressem a solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos encontrem dificuldades em resolver esse tipo de inequação, uma vez que há dois símbolos de desigualdades.

Ação do pesquisador: Com base nos registros compartilhados pelos alunos, o pesquisador considerará a melhor reposta, caso seja apresentada no quadro; se não houver, partirá do exemplo apresentado na atividade para associar a inequação $0 < 2x - 4$ com a desigualdade $2x - 4 < 4$, determinando a solução de cada uma.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos acessem no site do Desmos, posteriormente a calculadora gráfica, e digitem a inequação $0 < 2x - 4 < 4$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre como interpretam o gráfico exposto.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a solução apresentada no gráfico gerado com o Desmos corresponde a solução da inequação, argumentando com base no gráfico que apresenta uma tonalidade mais escura a partir dos pontos 2 e 4 no eixo x. Além disso, espera-se que percebam que as retas verticais tracejadas que passam pelos pontos 2 e 4 indicam que esses números não pertencem à solução da inequação, estabelecendo, assim, uma ligação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$. Após a solução algébrica, o pesquisador solicitará que os alunos digitarem as inequações no Desmos.

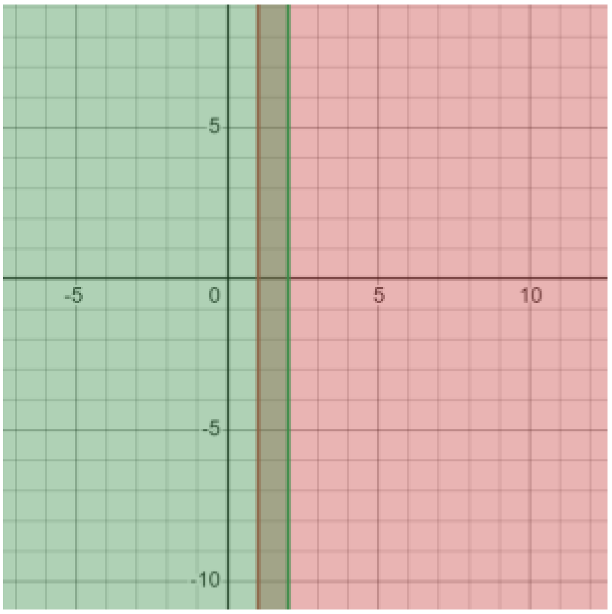
Comportamento esperado: Após essa ação, espera-se que os alunos sejam capazes de desenvolver todo o tratamento algébrico necessário para resolver a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ e percebam que o sinal de igualdade na inequação não altera os pontos 2 e 4 no eixo x. Ao digitarem a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$ no Desmos, espera – se que notem que as retas verticais que passa pelos pontos 2 e 4 se tornam contínuas, levando – os a deduzir que esses pontos 2 e 4 pertençam a solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em sequência, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam algebricamente as inequações ($0 < 6x - 3 \leq 9,\ 0 \leq -x - 4 < 2$),verifiquem seus gráficos no Desmos e expressem suas interpretações. Vale ressalta que, nessa fase da evolução da atividade, o pesquisador não interferirá.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos desenvolvam a solução algébrica das inequações corretamente e consigam relacioná-las com as representações gráficas geradas no Desmos ao digitarem as inequações nesse ambiente.

Atividade 3 – Estudando $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 3 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

2 – Digite $3 - 2x \leq 1$ e na outra linha $3x - 1 \leq 5$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$3 - 2x \leq 1 \;\Rightarrow\; -2x \leq -2 \;\Rightarrow\; x \geq \frac{2}{2} \;\Rightarrow\; x \geq 1$

$3x - 1 \leq 5 \;\Rightarrow\; 3x \leq 6 \;\Rightarrow\; x \leq \frac{6}{3} \;\Rightarrow\; x \leq 2$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $1 \leq x \leq 2$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(1,0)\ e\ (2,0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $3 - 2x \geq 1$ e na outra linha $3x - 1 \geq 5$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a)$y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$

(b) $y = \begin{cases} 5x + 10 \geq 15 \\ 4x - 3 \geq 5 \end{cases}$

O comportamento do pesquisador durante a terceira atividade da experimentação

Ao iniciar a terceira atividade, espera – se que os alunos estejam habituados com o ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de primeiro grau. É importante enfatizar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção será mínima e pontual, como, por exemplo, questionar os alunos sobre o que estão achando do Desmos e se ele está auxiliando na compreensão, a partir da análise gráfica, da solução da inequação. O objetivo é coletar informações sobre as relações entre objeto, sujeito e artefato, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: Após recolher as folhas da segunda atividade, o pesquisador distribuirá para os alunos a folha contendo a terceira atividade, na qual pedirá que os alunos resolvam o sistema de inequação polinomial de primeiro grau $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$. Após conceder um tempo necessário para os cálculos, o pesquisador solicitará que os alunos socializem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos consigam associar a solução do sistema de inequação polinomial de primeiro grau $= \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$ com a solução aprendida na primeira atividade para resolver cada inequação separadamente. Pressupõe – se também que alguns alunos possam ter dificuldades em fazer essa relação direta, por aparentar ser um objeto matemático novo.

Ação do pesquisador: A partir da socialização das soluções dos alunos no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo e indagará o aluno sobre como chegou a essa solução. Caso não haja solução correta, o pesquisador incentivará os alunos a tomarem como exemplo a primeira atividade para resolver cada inequação desse sistema de inequação polinomial de primeiro grau.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos limpem a calculadora do Desmos e digitem em uma aba a inequação $3\mathrm{x} - 2\mathrm{x} \leq 1$ e, em outra aba, a inequação $3 - 2\mathrm{x} \leq 5$. Quando o gráfico aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre a interpretação do gráfico exibido.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam que existem duas colorações, uma sobreposta à outra, e que, na interseção dessa sobreposição, há uma coloração mais escura entre os intervalos 1 e 2 no eixo x. Essa coloração mais escura representa a solução do sistema de inequação y, e as retas verticais contínuas que passam pelos pontos 1 e 2 no eixo x indicam que esses números pertencem à solução do sistema de inequação y.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \ \geq 1 \\ 3x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e, após resolverem algebricamente, digitarem esse sistema no ambiente Demos para relacionar as soluções algébricas com o gráfico gerado no Desmos.

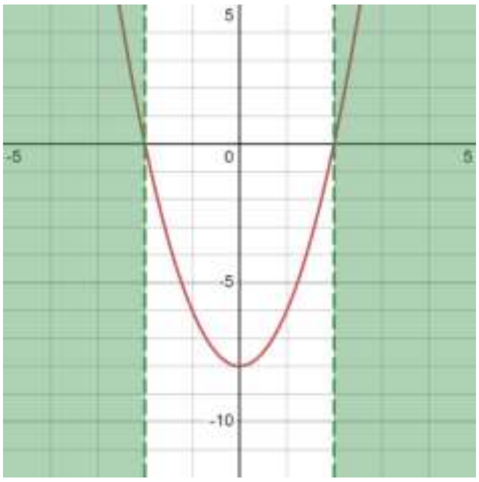
Comportamento esperado: O comportamento que esperamos, é que os alunos possam usar todos os procedimentos algébricos para resolverem o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \ \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$, e percebam que o sinal oposto da desigualdade não alterou os pontos pelos quais as retas verticais contínuas passam no eixo x (nos pontos 1 e 2). No entanto, também espera-se que notem que essa mudança eliminou a sobreposição de cores, levando-os a concluir que essa função não tem solução.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam os sistemas $y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e $y = \begin{cases} 5x + 10 \ \geq 15 \\ 4x \ \ - 3 \geq 5 \end{cases}$, analisem os seus gráficos no ambiente Desmos e exponham sua interpretação. É importante pontuar que, nessa fase da atividade não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos saibam resolver algebricamente esses sistemas de inequação polinomial de primeiro grau e consigam relacionar suas soluções algébricas com as soluções gráficas exibidas na tela ao digitá – las na calculadora do *software* Desmos.

Atividade 4 – Estudando $ax^2 + bx + c > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $2x^2 - 8 > 0$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 4 - Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 2$ no Desmos

2 – Digite $b = -8$ no Desmos

3 – Digite $c = 0$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad a = 6$ $\quad ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad a = 1$ $\quad ax^2 + bx + c \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a quarta atividade da experimentação.

A quarta atividade será utilizada para introduzir um novo objeto matemático: a inequação polinomial de segundo grau. Como os alunos ainda não estudaram esse conteúdo e novos comandos aparecerão no ambiente Desmos, haverá uma quantidade maior de intervenções do pesquisador nesse momento. Contudo, ressaltamos que essa intervenção diminuirá à medida que a atividade se desenvolve, a fim de se verificar a instrumentalização do software Desmos pelos alunos, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos excluam os dados no ambiente Desmos da questão anterior, e insira os parâmetros $a = 2$, $b = -8$ e $c = 0$. Em seguida, pedirá que insiram a equação $y = ax^2 + bx + c$ e a inequação $ax^2 + bx + c > 0$ no ambiente Desmos, explicando como inserir o expoente dois em ambos os casos. Depois, o pesquisador solicitará que os alunos resolvam a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e compartilhem a suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos reconheçam, ainda que de forma oral, que o cálculo das raízes da equação $2x^2 - 8x = 0$ é semelhante ao cálculo das raízes da inequação $2x^2 - 8x > 0$. No entanto, espera – se também que eles não saibam interpretar matematicamente a diferença entre ambas as respostas.

Ação do pesquisador: Após alguns minutos para a socialização das respostas no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo apresentado. Caso não haja, o pesquisador associará a inequação $2x^2 - 8x > 0$ com a equação $2x^2 - 8x = 0$, determinando a solução da inequação $2x^2 - 8x > 0$, após realizar as manipulações algébricas necessárias.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá para os alunos digitarem em uma aba no Desmos o comando $d = b^2 - 4ac$, na outra aba $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ e por fim o comando $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos relacionem os cálculos feitos algebricamente com aqueles realizados pelo Desmos e percebam que o expoente 0,5 representa o símbolo da raiz quadrada.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos relacionem a solução algébrica realizada anteriormente com o gráfico apresentado na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos respondam, ainda que de forma verbal, que a imagem apresentada no Desmos justifica a solução algébrica. Espera-se também que eles notem que o gráfico apresenta uma coloração diferente a partir dos pontos 0 e -4 no eixo x, destacando que a linha vertical tracejada que passa por esses pontos indica que esses números não pertencem à solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ de forma algébrica e, após isso, digitem a inequação no Desmos.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos utilizem o mesmo método algébrico aplicado para resolver a inequação $2x^2 - 8x > 0$ e percebam que o sinal de desigualdade não alterou as raízes encontradas anteriormente. Ao digitarem a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ no Desmos, notem que as retas verticais que passam pelos pontos 0 e – 4 no eixo x se torna contínuas, e façam referência a esse fato com a presença dos pontos 0 e – 4 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador irá pedir para os alunos resolvam algebricamente as inequações:

(a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6 \quad ax^2 + bx + c < 0$

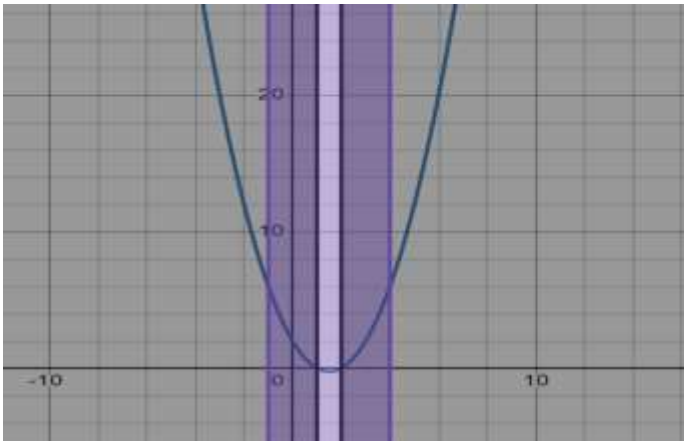
(b) $a = 1 \ b = 2 \ a = 1 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$

e analisem os gráficos correspondentes no software Desmos, além de fazerem as interpretações das soluções verbalmente. Nessa fase, não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos saibam manipular algebricamente cada inequação e consigam relacionar a solução com o gráfico apresentado no ambiente Desmos.

Atividade 5 – Estudando $d \leq ax^2 + bx + c \leq e$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 5 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = -3$ no Desmos

3 – Digite $c = 2$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite no Desmos $ax^2 + bx + c \geq 0$ em uma aba e na outra linha $ax^2 + bx + c \leq 6$

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_1 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 6$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad c = -4$ $\quad 4 < ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 2$ $\quad b = 6$ $\quad c = -8$ $\quad -4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

O comportamento do pesquisador durante a quinta atividade da experimentação

Essa atividade visa desenvolver a compreensão dos alunos sobre inequações quadráticas, incentivando-os a explorar visualmente esses conceitos usando o Desmos como ferramenta, conforme Rabardel (1995). Os alunos são desafiados a compreender profundamente tanto a teoria matemática quanto o funcionamento do instrumento tecnológico, ao mesmo tempo que praticam a habilidade de manipulação e interpretação de gráficos, de acordo com Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos substituam os valores dos coeficientes da atividade anterior pelos valores $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$ e que digitam em uma aba a inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2$, em outra aba a inequação $ax^2 + bx + c \leq 6$,e, por fim, a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos saibam desenvolver, de forma algébrica, as soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e comparem os valores encontrados com os valores expostos no Desmos para $d, x_1 e\ x_2$. Além disso, espera – se que eles deduzam que o Desmos determina os valores das variáveis $d, x_1 e\ x_2$ em função dos coeficientes a, b e c.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos determinem a solução da inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2 \leq 6$ de forma verbal e escrita.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam à pergunta com base no gráfico gerado pelo Desmos, percebendo que há duas regiões sobrepostas com cores mais escuras que as demais. Além disso, espera-se que eles notem quatro retas verticais contínuas passando pelos pontos $-1, 1, 2\ e\ 4$ no eixo x, contidas nessas regiões mais escuras, e que deduzam que o intervalo delimitado pelos dois pares de retas verticais determina a solução da inequação.

Ação do pesquisador: A seguir, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

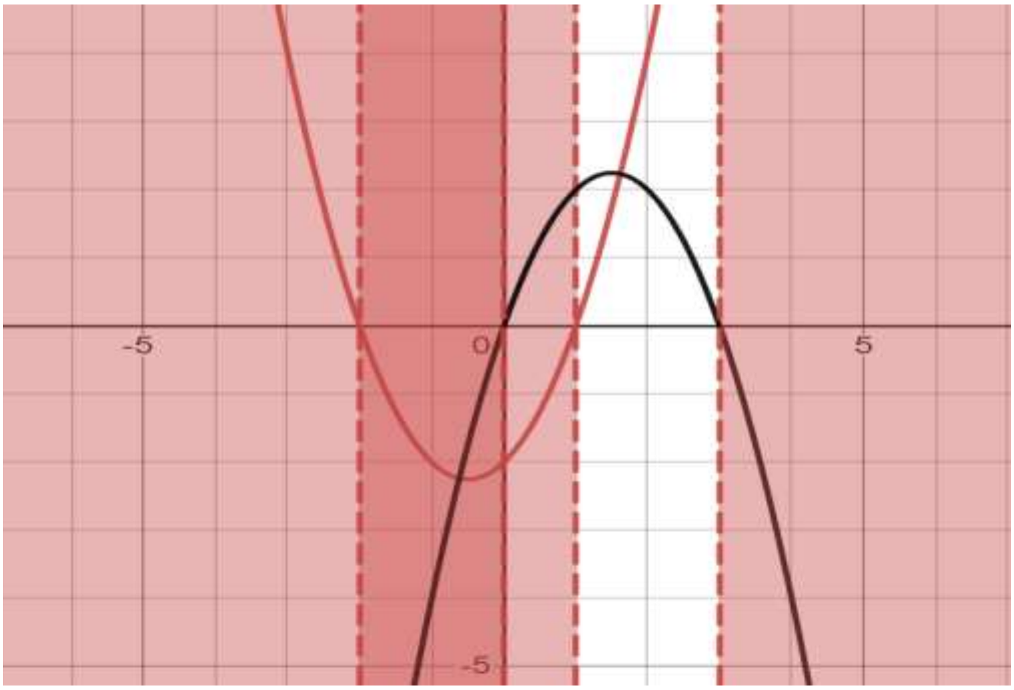
a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = -4 \quad 4 < ax^2 + bx + c < 0$
b) $a = 2 \quad b = 6 \quad c = -8 \quad -4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

e analisarem os gráficos correspondentes no Desmos, dando suas interpretações. Ressaltamos que não haverá intervenção do pesquisador nessa fase.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam entender a relação entre a representação simbólica da inequação e sua representação gráfica no Desmos, e que, posteriormente, traduzam essas representações como as soluções das inequações.

Atividade 6 – Estudando $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Espaço dos comentários

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 6 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = 3$ no Desmos

3 – Digite $c = -4$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Digite uma nova função $g = vx^2 + tx$

7 – Digite $v = -1$no Desmos

8 – Digite $t = 3$ no Desmos

9 – Peça para o aluno desenvolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

10 – Qual a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $b = -5$ $c = -20$ e $v = 1$ $t = -4$ $e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2$ $b = -1$ $c = 1$ e $v = 4$ $t = -8$ $e = 3$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

O comportamento do pesquisador durante a sexta atividade da experimentação

Nessa atividade, busca-se que os alunos sejam capazes de resolver sistemas de inequações quadráticas, identificar as regiões das soluções e utilizar o Desmos como instrumento para visualizar graficamente as soluções desses sistemas. Eles deverão identificar as regiões onde ambas as inequações são verdadeiras. Os alunos são desafiados a entender profundamente como manipular o Desmos para explorar e resolver sistemas de inequações quadráticas, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados, realizando, assim, a gênese instrumental proposta por Rabardel (1995). Além disso, são desafiados a traduzir essas representações simbólicas como sendo as soluções da inequação, segundo a semiótica de Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos inclua novos valores para os coeficientes $a, b\ e\ c$ e digitem os valores $a = 1, b = 1\ e\ c = -3$. Em seguida, deverão inserir em uma aba a função $y = ax^2 + bx + c$ e, em outra, a inequação $ax^2 + bx + c > 0$. Depois, o pesquisador solicitará que incluíam novos coeficientes, $v = -1\ e\ t = 3$, e que digitem em uma nova aba a função $g = vx^2 + tx$ e, em uma outra, a inequação $vx^2 + tx < 0$. Após isso, os alunos deverão resolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos demorem um pouco mais para absorver as informações, devido à maior quantidade de dados na atividade. Eles devem comparar os valores obtidos de forma algébrica com os apresentados no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos compartilharem a suas soluções no quadro e tomará como exemplo a melhor resposta. Caso não haja socialização das respostas, o pesquisador tomará o exemplo da atividade proposta e associará a solução do sistema de inequação quadrática $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, com a soluções das equações $x^2 + 3x - 4 = 0$ e $3x - x^2 = 0$, determinando a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, após realizar o procedimento algébrico necessário.

Ação do pesquisador: Após esse processo, o pesquisador pedirá aos alunos que observem a representação gráfica gerada no ambiente Desmos e responderem qual a solução da inequação $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos respondam de forma verbal que a solução representa a parte sombreada, no intervalo dos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x , além de perceberem que a reta vertical tracejada que passa pelos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x, indica que esses pontos não pertencem a solução.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

(a) $a = 1$ $b = -5$ $c = -20$ e $v = 1$ $t = -4$ $e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2$ $b = -1$ $c = 1$ e $v = 4$ $t = -8$ $e = 3$

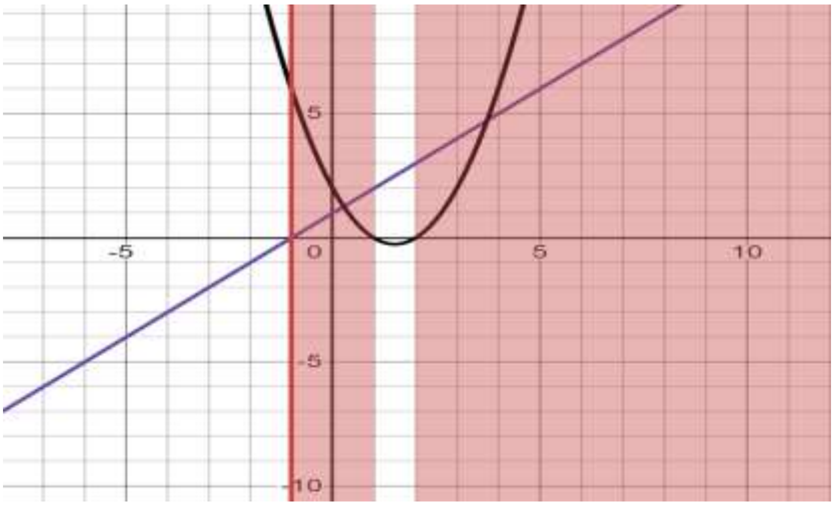
$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

Usando os mesmos procedimentos da atividade anterior.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas questões de forma algébrica, além de observar as relações entre as inequações e interpretá-las em termos do que representam graficamente. Suas observações devem refletir sua compreensão dos conceitos matemáticos, bem como sua capacidade de interpretar e analisar representações gráficas de problemas matemáticos.

Atividade 7 – Estudando $\frac{ax+b}{ax^2+bx+x} \geq 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

Espaço dos comentários

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 7 – Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $f = x + 1$ no Desmos

2 – Faça o gráfico de uma nova função $g = x^2 - 3x + 2$ no Desmos

3 – Digite $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

4 – Peça para o aluno clicar no ponto $(-1,0)$ e descrever o que observou

5 – Peça para o aluno desenvolver as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$

6 – Peça para o aluno interpretar a solução da inequação $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$ no gráfico

7 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

8 – Peça para o aluno repetir os mesmos processos nas inequações abaixo:

a) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

b) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

O comportamento do pesquisador durante a 7º Atividade da experimentação

A última atividade proposta tem como objetivo desafiar os alunos a compreender profundamente como usar o Desmos para explorar e resolver inequações racionais, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados. Os alunos aprenderão a utilizar o Desmos para visualizar expressões racionais e experimentar com diferentes configurações de gráficos e ajustes de parâmetros para identificar as regiões de solução, realizando o que Rabardel (1995) denominou de instrumentalização. Além disso, eles entenderão a relação entre a representação simbólica da expressão racional e sua representação gráfica no Desmos, sendo desafiados a traduzir entre essas representações e interpretar as regiões onde a expressão é não negativa, conforme a teoria da representação semiótica de Duval (2003).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá aos alunos que digitem no ambiente Desmos, em abas separadas, as funções $f = x + 1$ e $g = x^2 - 3x + 2$. Em seguida, solicitará que insiram a inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, podendo orientar sobre como fazer a representação da divisão entre funções no Desmos, se necessário.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos já tenham facilidade em inserir essas informações corretamente no Desmos, precisando de orientação apenas quanto ao símbolo de divisão entre funções.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos que cliquem no ponto de coordenada $(-1{,}0)$, e perguntar o que eles observaram.

Comportamento esperado: Espera – se que eles respondam que, por esse ponto, passa uma reta vertical contínua, indicando que ele pertence à solução da inequação, assim como todos os pontos á direita de -1 no eixo x, excluindo os pontos entre as coordenadas $(1{,}0)$ e $(2{,}0)$. Os alunos devem perceber que essas coordenas não pertencem á solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador solicitará que os alunos resolvam as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$, em que compartilhem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos não tenham dificuldades em resolver esse tipo de equações, associando a solução das equações com atividades passadas.

Ação do pesquisador: Após aguardar o tempo para resolução, o pesquisador tomará como exemplo a melhor resposta apresentada no quadro. Caso não haja socialização das respostas, ele associará a resolução dessas equações com equações de atividades anteriores, para que, a partir dessa associação, os alunos possam desenvolver de forma segura a álgebra envolvida.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá que os alunos interpretem a resolução da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, explicando-a de forma verbal, com base no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos interpretem o gráfico, admitindo que a parte colorida que aparece representa todas as soluções da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$. Eles devem perceber também que as coordenas $(1{,}0)$ e $(2{,}0)$ não pertencerem à solução da inequação, pelo fato que não pode haver divisão por zero, e que, em toda a divisão, o denominador tem que ser maior que zero.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

a) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

b) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

Comparando a solução algébrica com a solução gráfica apresentada pelo Desmos.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas inequações corretamente e saibam interpretar a solução algébrica em comparação com a solução gráfica apresentada no ambiente Desmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O produto educacional apresentado é resultado de uma dissertação desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves. Este material tem como objetivo oferecer aos professores uma sequência de atividades focada no objeto matemático inequação polinomial de 1º e 2º grau, voltada para turmas de 1º ano do ensino médio. A sequência foi elaborada com base nas teorias de Rabardel (1995) e Duval (1993), explorando os processos de instrumentalização e instrumentação do software Desmos, além da conversão de registros de representação semiótica.

A validação experimental da sequência mostrou que o uso do Desmos como instrumento de ensino facilitou significativamente a conversão entre registros algébricos e gráficos. Isso permitiu que os alunos desenvolvessem uma compreensão mais profunda das inequações polinomiais de 1º e 2º graus, conforme a Teoria das Representações Semióticas de Duval. Durante o processo, o software Desmos evoluiu de um simples artefato para um instrumento cognitivo, mediando a aprendizagem e promovendo uma atividade intelectual mais rica e interativa.

Esperamos que este produto educacional contribua de forma significativa para as aulas de matemática, promovendo um aprendizado mais colaborativo e ativo entre alunos e professores. A incorporação do Desmos na sequência de atividades facilita não apenas o tratamento e a conversão de diferentes registros de representação, mas também promove uma interação mais dinâmica no ambiente de sala de aula.

Estamos abertos a sugestões e críticas para o aprimoramento contínuo deste produto educacional, com o objetivo de alcançar um número maior de alunos e professores, potencializando a eficácia do ensino das inequações polinomiais de 1º e 2º graus.

REFERENCIA

ALVARENGA, Karly Barbosa. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 03 março. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília 2002.

DICETTI, Tanara da Silva; BISOGININ, Eleni; PRETTO, Valdir. **Ensino e aprendizagem de inequações: uma revisão bibliográfica de pesquisas cientificas**. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03028997/document. Acesso em: 26 jan. 2022.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática ***In: Aprendizagem em matemárica: registro de representação semiótica***. 1 ed. Campinas: Papirus, 2003, v.1, p.11-33.

MINEIRO, Renato Mendes**. ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE INEQUAÇÕES**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo,2019.

RABADEL,P.. ***Les hommes et les Technologies: approche cognitive des instruments contemporains.*** Paris. Armand Colin. 1995.

AUTORES

Maicon Michael Trindade de Cristo, é Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará, possui Especialização em Fundamentos de Matemática Elementar pela Universidade Estadual do Pará (UEPA), atualmente é aluno de mestrado do programa de Pós-Graduação no Ensino de Matemática, UEPA.

Fábio José da Costa Alves, possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e Professor Titular da Universidade da Amazônia. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: de convolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.