Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia Para Ensino de Matemática no Nível Médio

MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO

ENSINO DE INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE* DESMOS

BELÉM/PA
2024

MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO

ENSINO DE INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 1° E 2° GRAU COM O AUXILIO DO *SOFTWARE* DESMOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática no Programa de Pós – Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia Para Ensino de Matemática no Nível Médio. Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

BELÉM/PA
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

Cristo, Maicon Michael trindade de
Ensino de Inequação Polinomial de 1° e 2° grau com o Auxilio do Software Desmos / Maicon Michael trindade de Cristo, 2024.
87 p.

Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Belém, 2024.

1. Matemática. 2. Aprendizagem de Matemática. 3. inequação polinomial de 1° e 2° grau. 4. Analise Microgenética. I. Costa, Fábio José da Costa. II.Título.

CDD 23 ed.512.5

Bibliotecária Priscila Melo CRB-2 / 1345

MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO

ENSINO DE INEQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAU COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE DESMOS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Data de aprovação: 26/06/2024

Banca examinadora

Fabio Alves ______________________. Orientador
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

______________________. Examinador Interno
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Doutora em Bio Informática – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará

Talita Almeida ______________________. Examinador Externo
Profa. Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida
Doutora em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP
Universidade Federal do Pará

Belém – PA
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade, sabedoria e saúde necessárias para poder concluir essa fase da minha vida.

Agradeço aos meus queridos pais Manoel Roque de Cristo e Tânia Maria Trindade de Cristo pela oportunidade que me deram ao longo da vida de estudar.

À minha amada esposa Carla Denize de Sousa Soares que sempre me incentivou a buscar objetivos maiores e com muita paciência soube compreender minhas ausências no laço familiar.

Ao meu filho querido Thalles Rafael de Soares de Cristo que com muito amor soube compreender as minhas ausências.

Ao meu irmão, Fabricio Trindade de Cristo, que sempre torceu pelo meu sucesso.

Ao meu tio querido José Heron Freitas Trindade (*in memorian*), que nos deixou em 2022.

À Universidade do Estado do Pará (UEPA) pelo programa de pós - graduação em ensino de matemática.

Aos coordenadores do curso de mestrado profissional em ensino de matemática da UEPA.

Aos professores do curso de mestrado da UEPA que sempre com muito entusiasmo e sabedoria transmitiam seus conhecimentos para a turma.

Aos meus amigos da turma de mestrado de 2022.

À banca examinadora pelas contribuições e correções.

Ao meu Orientador de Mestrado o Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves pelo apoio e orientação deste trabalho.

“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces.” *Aristóteles, filósofo grego.*

RESUMO

CRISTO, Maicon Michael Trindade de. **Aprendizagem sobre Inequação Polinomial de 1° e 2° Grau com o Auxilio do *Software* Desmos.** Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2024.

A presente pesquisa buscou investigar a potencialidade de uma sequência de atividades para o ensino de inequações simultâneas polinomiais de 1º e 2º graus; sistema de inequações polinomiais de 1º e 2º graus e inequação produto/quociente polinomial de 1º e 2º graus, aplicada a um grupo de estudantes do ensino médio, cursando em sua maioria o 1° ano do ensino médio em uma escola pública estadual localizada na cidade de Belém – Pa, com o auxílio do *software* Desmos. O objetivo principal desse trabalho foi estudar, por meio da Gênese Instrumental, o efeito de uma sequência de atividades no ensino de inequação polinomial de 1º e 2º graus tendo como instrumento o *software* Desmos sob a ótica de Rabardel e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. A metodologia utilizada consistiu em gravar os áudios dos alunos no momento da interação da resolução das questões propostas na sequência de atividades, disponível no produto educacional acessível pelo link http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/870385, com o auxílio do *software* Desmos e verificar, por meio da análise microgenética, os possíveis indícios de aprendizagem que possam surgir na interação entre aluno – aluno ou aluno – pesquisador. Concluímos que a sequência de atividades é potencialmente favorável e recomendada para o uso no processo de aprendizagem de inequação polinomial de 1º e 2º grau com o auxilio do *software* Desmos.

Palavras-chave: Aprendizagem de Matemática. Gêneses Instrumental. Registro de Representação Semiótica. Analise Microgenética. Ensino de inequação polinomial de 1º e 2° grau. Inequação polinomial de 1° e 2° grau. Sequência de Atividade.

ABSTRACT

This research sought to investigate the potential of a sequence of activities for teaching simultaneous polynomial inequalities of 1st and 2nd degrees; system of polynomial inequalities of 1st and 2nd degrees and polynomial product/quotient inequality of 1st and 2nd degrees, applied to a group of high school students, mostly attending the 1st year of high school at a state public school located in the city of Belém – Pa, with the help of Desmos software. The main objective of this work was to study, through Instrumental Genesis, the effect of a sequence of activities in teaching 1st and 2nd degree polynomial inequality using the Desmos software as an instrument from the perspective of Rabardel and the Theory of Semiotic Representation Records by Duval. The methodology used consisted of recording students' audio at the time of interacting to resolve the questions proposed in the sequence of activities, available in the educational product accessible via the link http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/870385, with the help of the Desmos software and verify, through microgenetic analysis, the possible signs of learning that may arise in the interaction between student – student or student – researcher. We conclude that the sequence of activities is potentially favorable and recommended for use in the process of learning 1st and 2nd degree polynomial inequality with the help of Desmos software..

Keywords: Mathematics Learning. Instrumental Genesis. Semiotic Representation Record. Microgenetic Analysis. Teaching of 1st and 2nd degree polynomial inequality. 1st and 2nd degree polynomial inequality. Activity Sequence.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Modelo da SAI.

Figura 2 – SAI proposta na pesquisa.

Figura 3 – Tela inicial do *software* Desmos.

Figura 4 – Calculadora gráfica.

Figura 5 – Comportamento da inequação $ax + b > 0$.

Figura 6: Estudo de Sinal da função quadrática.

Figura 7: Estudo de Sinal da função quadrática

Figura 8 – Sinal da função crescente.

Figura 9 – Sinal da função decrescente.

Figura 10 – Representação geométrica dos números reais.

Figura 11 – Atividade desenvolvida pelo aluno C.

Figura 12 – Atividade desenvolvida pelo aluno I.

Figura 13 – Atividade desenvolvida pela aluna F.

Figura 14 – Atividade desenvolvida pelo aluno B.

Figura 15 – Atividade desenvolvida pelo aluno C.

.

.

Sumário

INTRODUÇÃO **11**
1. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO **16**
2. REFERENCIAL TEORICO **26**
2.1. Teoria de Instrumentação de Rabardel 25
2.2. Semiótica de Duval 28
2.3. Análise Microgenética 30
3. SOFTWARE DESMOS **33**
4. METODOLOGIA **36**
5. OBJETO MATEMÁTICO **38**
6. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE **46**
7. ANÁLISE DOS RESULTADOS **75**
CONSIDERAÇÕES FINAIS **83**
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA **85**
APÊNDICE **87**

INTRODUÇÃO

O sonho de cursar mestrado e posteriormente o doutorado é um desejo que cultivei após concluir o curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal do Pará (UFPA) campus Belém em 2015. Ao ingressar no curso de licenciatura em matemática, tivemos uma disciplina chamada de cálculo I, e dentro dessa matéria havia um tópico chamado funções e limites. Para termos um melhor entendimento do assunto, era necessário que tivéssemos conhecimento, no mínimo, de inequação polinomial de 1° e 2° graus, pois utilizamos esse conteúdo para fazer manipulações algébricas e gráficas ao estudar funções e limites.

A dificuldade, como discente, que esse assunto trazia para a maioria dos alunos, era entender a álgebra e posteriormente a interpretação gráfica de sua solução. Para sanar essa dificuldade, busquei auxilio junto aos livros recomendos como referência para o estudo, como, por exemplo, “Um Curso de Cálculo Volume I” do autor Guidorrizi e “Calculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração” dos autores Flemming e Gonçalves. Mas ao estudar por esses livros, percebir que eles traziam interpretações não detalhadas do conteúdo de inequação polinomial de 1° e 2° graus, pois os autores se limitavam apenas em realizar os cálculos algébricos e posteriormente fazer as soluções gráficas das raízes não dando ênfase nos resultados e não explicando o porquê certo intervalo satisfaz a inequação e determinado intervalo não satisfaz.

Finalizando meu percusso acadêmico, no ano de 2016 tive a oportunidade de trabalhar como professor em uma rede pública de ensino em turmas de 1° ano do ensino médio, e quando eu ministrava esse assunto percebir que havia uma limitação, como professor de matemática, de fazer com que os alunos entendessem as soluções algébricas e posteriomente as soluções gráficas do objeto matemático inequação polinomial de 1° e 2° graus, utilizando como ferramenta pedagógica o quadro e pincel. Para tentar contornar essa limitação, comecei a recorrer a outras ferramentas pedagógicas, por exemplo, o *software* de acesso livre chamado Desmos para mostrar as soluções das inequações de forma gráfica.

E, para a minha surpresa, os alunos começaram a compreender os resultados a partir das manipulações que podemos fazer nas inequações polinomiais de 1° e 2°

graus através do software Desmos. A partir disso, comecei a pesquisar trabalhos ou artigos acadêmicos que tinham como foco o ensino de inequações polinomiais de 1° e 2° graus com o auxílio de softwares livres para melhorar a minha prática de ensino. No entanto, a falta de orientação correta para melhorar minha prática de ensino me fez recorrer ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA) em 2022, no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Nível Médio.

Recorri ao programa, pois ele é centrado no desenvolvimento metodológico dos conteúdos, ou seja, desenvolve metodologias de aprendizagens centradas no aluno, instrumentalizando para isso o professor. Através do programa, tivemos contatos com professores que nos apresentaram novas metodologias de ensino que até então eram desconhecidas para a maioria dos alunos. No decorrer do curso, foi proposto que escolhêssemos um objeto matemático do nosso interesse para trabalharmos posteriormente na defesa de dissertação do programa. O objeto matemático escolhido foi a inequação polinomial de 1º e 2º graus e sua abordagem gráfica. A escolha desse objeto matemático se deu devido às limitações e barreiras encontradas, enquanto professor de matemática, no ensino e aprendizagem desse conteúdo em turmas do ensino médio.

Posso citar como exemplo dessas limitações e barreiras a falta de aproveitamento escolar dos alunos ao resolverem questões relacionadas ao tema e ao presenciar os alunos comentando que não havia lógica em aprender esse conteúdo, pois não o utilizariam em seu dia a dia. Outro exemplo é que, ao abordar o ensino de inequação polinomial de 1º e 2º graus e sua abordagem gráfica, os alunos e eu acabávamos perdendo tempo desenhando os gráficos, o que comprometia a explicação e o entendimento do objeto matemático. No entanto, ao pesquisar sobre o tema de ensino e aprendizagem de inequação polinomial, pude perceber que essa limitação e barreira não é exclusividade da minha prática docente.

Pois na pesquisa realizada por Mineiro (2019) em sua tese de doutorado, verificou-se que “tanto os processos associados ao ensino como os que se relacionam à aprendizagem desse tema representam áreas problemáticas para a Educação Matemática, independentemente do nível escolar e da região” (MINEIRO, 2019, p.15)

Essa problemática verificada por Mineiro (2019) é importante e deve ser tratada, uma vez que os documentos oficiais da educação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ratificam a importância de se ter conhecimento sobre inequações polinomiais de 1º e 2º graus. O PCN do ensino fundamental trata a aprendizagem de inequações como importante para os alunos, porque espera - se que, ao final dessa fase de conhecimento, eles tenham a habilidade de:

> produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas; resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p.81).

No ensino médio, esse conteúdo deve ser aprofundado, pois, de acordo com a BNCC, a área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 527). A BNCC ainda enfatiza a importância do ensino de inequações, uma vez que afirma que o aluno deverá "resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados" (BRASIL, 2017, p. 270).

Apesar de sua grande importância, devido às suas variadas aplicações no ramo das ciências exatas, como, por exemplo, para o cálculo do valor intermediário, para o cálculo de pontos máximos e mínimos utilizando o teorema de Weierstrass, e ainda para determinar se uma função é limitada, pode-se constatar que o número de pesquisas sobre o tema ensino e aprendizagem de inequações polinomiais do 1º e 2º graus é mínimo. Como afirmam Dicetti, Bisoginin e Pretto (2020) em seu artigo, no qual verificaram que, dos trabalhos pesquisados sobre esse tema nos bancos de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal (CAPES), no período de 2015 a 2020, foram encontrados 28 trabalhos relacionados ao tema de inequações e apenas cinco estavam voltados para o ensino do mesmo.

Esses dados mostrados pelos pesquisadores Dicetti, Bisoginin e Pretto, (2020) são preocupantes, pois os estudos das inequações estão presentes em vários conteúdos no ensino de matemática desde o ensino fundamental, a partir do

7° ano, passando pelo nível médio e abordado também em cursos de ciências exatas, em nível superior, nos cursos introdutório de cálculo, como afirma Alvarenga (2013). A partir desse cenário e buscando abordar o ensino de forma a acrescentar o que foi ministrado em sala de aula sobre o objeto matemático, inequação polinomial de 1° e 2° grau e sua abordagem gráfica, surgiu a seguinte questão de pesquisa.

Qual a potencialidade de uma sequência de atividade que utiliza *software* de calculadora gráfica no ensino de inequação polinomial de 1° e 2° grau?

Para responder à pergunta acima, traçamos os seguintes objetivos:

I. **Objetivo Geral**:

Verificar a potencialidade de uma sequência de atividades que utilize ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de inequações simultâneas polinomiais de 1° e 2° grau; sistema de inequações polinomiais de 1°e 2° grau e inequação produto/quociente polinomial de 1° e 2° grau.

Objetivos Específicos:

- Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre desigualdade e inequações simultâneas polinomiais de 1° e 2° grau; sistema de inequações polinomiais de 1°e 2° grau e inequação produto/quociente polinomial de 1°e 2° grau.
- Analisar a contribuição do software Desmos na compreensão dos alunos acerca da interpretação gráficas das soluções das inequações simultâneas polinomiais de 1° e 2° grau; sistema de inequações polinomiais de 1° e 2° grau e inequação quociente polinomial de 1° e 2°grau.
- Propor uma sequência de atividade tendo como base a teoria da semiótica de Duval (2003) e a teoria da instrumentação de Rabardel (1995).
- Avaliar a sequência de atividades enfatizando suas potencialidades e limitações.
- Avaliar a experimentação didática.

A fim de alcançar o que foi proposto nos objetivos gerais e específicos, estruturamos a nossa dissertação de mestrado em sete capítulos, além de dois outros que serão reservados para a introdução e para as considerações finais sobre a pesquisa.

O primeiro capítulo trata do levantamento bibliográfico que realizamos para verificar o que já foi pesquisado sobre o ensino e a aprendizagem de inequações polinomiais de 1° e 2° grau, a fim de identificar como a nossa pesquisa se diferencia das citadas no levantamento bibliográfico.

No segundo capítulo, apresentaremos os referenciais teóricos usados para fundamentar a nossa pesquisa e as nossas justificativas.

No terceiro capítulo, apresentaremos o software Desmos, que será usado como instrumento no processo de aprendizagem de inequações polinomiais de 1° e 2° grau e sua abordagem funcional gráfica, assim como suas funcionalidades e interface.

No quarto capítulo, abordaremos a metodologia usada para realizarmos a nossa pesquisa de cunho qualitativo, assim como todo o processo metodológico que utilizaremos para aplicar a nossa sequência de atividades.

No quinto capítulo, discutiremos o objeto matemático das inequações polinomiais de 1° e 2° grau e sua abordagem funcional gráfica, assim como o contexto histórico no qual ele surgiu, o tratamento epistemológico e as definições matemáticas que fundamentam esse objeto matemático.

No sexto capítulo, apresentaremos a nossa proposta de sequência de atividades a ser aplicada para a turma de 1° ano do ensino médio, assim como a orientação de como devemos nos comportar enquanto pesquisadores no momento da aplicação da sequência de atividades com os alunos.

No sétimo capítulo, traremos a análise dos resultados da pesquisa, assim como os resultados obtidos com a sequência de atividades.

1. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

O levantamento bibliográfico dessa dissertação de mestrado foi realizado em duas etapas. A primeira foi feita no dia 11/01/2023 usando a palavra – chave “dissertação inequação polinomial” e estabelecendo um intervalo de pesquisa de 2006 a 2023 no buscador www.google.com.br, no qual foram encontrados sete trabalhos referentes ao tema. A segunda etapa foi realizada no dia 31/01/2023, usando a palavra – chave “inequação polinomial” e novamente estabelecendo um intervalo de busca de 2006 a 2023 no site https://scholar.google.com.br/?hl=pt, onde encontramos 11 trabalhos entre teses, dissertações de mestrado e artigos científicos.

A partir disso, selecionamos teses, dissertações ou artigos científicos apresentados em revistas qualificadas para verificar o que já foi pesquisado sobre o tema de inequação polinomial e organizamos no quadro I abaixo, dividida em tipo de publicação, autor/ano da publicação e titulo.

Quadro I: Levantamento Bibliográfico.

TIPO	AUTOR (ano)	TITULO
Dissertação	Coelho (2016)	INEQUAÇÃO POLINOMIAL: UM MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO
Artigo	Dicetti, Bisoginin e Pretto (2020)	ENSINO E APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE PESQUISAS CIENTÍFICAS
Dissertação	Branco (2020)	UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD
Dissertação	Magalhães (2013)	ESTUDO DAS INEQUAÇÕES: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DO

		PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA LICENCIATURA
Dissertação	Queiroz (2021)	AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO
Artigo	Chaves (2018)	CONCEPÇÕES E ENSINO DE INEQUAÇÕES: EMPREGO DAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU OU POR MEIO DO ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM?
Dissertação	Fontalva (2006)	UM ESTUDO SOBRE INEQUAÇÕES: ENTRE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO
Artigo	Travassos e Proença (2022)	ENSINO E APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES NA ESCOLA: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO A PARTIR DE DISSERTAÇÕES E TESES.
Dissertação	Junior (2021)	ENSINO DE INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS USANDO GEOGEBRA
Artigo	Travassos e Proença (2021)	INEQUAÇÃO DE 1º GRAU E SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA
Tese	Alvarenga (2013)	O QUE DIZEM AS

		PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES
Artigo	Beltrão (2010)	DIFICULDADES DOS ALUNOS PARA RESOLVER PROBLEMAS COM INEQUAÇÕES
Tese	Mineiro (2019)	ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE INEQUAÇÕES
Dissertação	Junior (2011)	UMA ABORDAGEM FUNCIONAL PARA O ENSINO DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO
Dissertação	Melo (2007)	O ENSINO DE DESIGUALDADES E INEQUAÇÕES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Dissertação	Saldanha (2007)	ANÁLISE DE UMA INTERVENÇÃO DIDÁTICA SOBRE DESIGUALDADES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO

Fonte: Autor, 2023.

Após essa organização, comentaremos todas as pesquisas que se encontram no Quadro I, para verificar: quais os principais resultados obtidos por cada uma delas, qual tipo de pesquisa foi realizada, qual a metodologia adotada, qual o sujeito de experimentação, qual a sugestão do autor e, posteriormente, comparar com os resultados que desejamos alcançar com a nossa pesquisa.

Começaremos comentando a pesquisa de Coelho (2016), na qual ele trata do tema “Inequação Polinomial: Um método alternativo de resolução”. O objetivo do estudo é buscar métodos alternativos mais simples para a resolução de inequações polinomiais do que os encontrados nos livros didáticos. A pesquisa de Coelho (2016) pode ser classificada como uma revisão de literatura, uma vez que o autor recorreu a uma análise de livros que abordavam os métodos de resolução de inequações polinomiais para compará-los com o método alternativo por ele estudado. Coelho (2016) concluiu que o uso do método alternativo pode reduzir os erros dos alunos ao resolverem inequações polinomiais; contudo, ele ressalta a possibilidade de que, após utilizar o método algumas vezes, os alunos percebam um padrão de resolução e passem a aplicá-lo de forma mecânica."

A próxima pesquisa que iremos comentar é dos pesquisadores Dicetti, Bisogini e Pretto (2020), na qual elaboraram um artigo cujo tema é o ensino e a aprendizagem de inequações, por meio de uma revisão bibliográfica de pesquisas científicas. A pesquisa dos autores pode ser classificada como qualitativa, utilizando a revisão bibliográfica como metodologia, com o objetivo de verificar os debates atuais em torno do ensino e da aprendizagem de inequações. O estudo revelou que o ensino de inequações é frequentemente centrado em técnicas de resolução e nas dificuldades dos alunos em compreender o conceito de inequação, que muitas vezes é tratado por eles como se fosse uma equação.

Comentaremos a seguir a pesquisa de Branco (2020), na qual, em uma abordagem qualitativa, ele buscou desenvolver uma sequência didática que incentivasse os alunos a pensarem matematicamente sobre as soluções, utilizando a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e os estudos de Vygotsky. Ele verificou que, embora a sequência didática ainda não estivesse consolidada, os estudantes conseguiram compreender o conteúdo ensinado a partir da aplicação dessa sequência.

Na sequência dos comentários, abordaremos a pesquisa de Magalhães (2013), na qual ele discutiu o tema das inequações sob a ótica da formação de professores em cursos de licenciatura em matemática. A pesquisa de Magalhães (2013) é de natureza qualitativa e propôs uma sequência de atividades com o objetivo de contribuir para a formação do pensamento algébrico e funcional dos estudantes de licenciatura em matemática. A pesquisa mostrou que houve uma evolução na maneira como as inequações foram abordadas pelos discentes; entretanto, cabe ressaltar que essa evolução foi apenas parcial, uma vez que outros aspectos da aprendizagem não apresentaram um desenvolvimento satisfatório.

Seguindo com os comentários, abordaremos a pesquisa de Queiroz (2021), apresentada em sua dissertação de mestrado, cujo tema é “As Representações Semióticas no Estudo de Inequações no Ensino Médio”. O objetivo da pesquisa foi analisar o desempenho dos alunos do 1º ano do ensino médio ao trabalharem com inequações do 1º grau, no contexto do ensino remoto. A dissertação de Queiroz (2021) é de natureza metodológica qualitativa, na qual o pesquisador analisou a conversão de registros de representações semióticas durante a resolução das tarefas propostas aos alunos.

O principal resultado da pesquisa de Queiroz (2021) foi a constatação da importância de se trabalhar com diferentes representações semióticas junto aos alunos. No entanto, devido ao processo de coleta de dados ter ocorrido no ensino remoto, houve pouca interação e produção escrita por parte dos alunos. Além disso, o estudo apontou que os registros realizados com base nas representações semióticas necessitam de aprimoramento, o que poderia ser alcançado por meio de aulas de matemática voltadas para a definição do objeto matemático em questão, permitindo que os alunos construam significados mais sólidos sobre o conceito de inequação.

O artigo de Chaves (2018) pode ser classificado como uma revisão de literatura, pois traz à luz o ensino de inequações polinomiais de 1º grau por meio de um estudo teórico sobre a função polinomial de 1º grau. No artigo, ele apresenta definições matemáticas do que seria uma função polinomial de 1º grau, suas denominações e características, focando exclusivamente no ensino. O pesquisador Chaves (2018) concluiu que, provavelmente, o aluno terá uma melhor compreensão da função polinomial de 1º grau se tiver uma base teórica fundamentada em definições matemáticas.

Comentaremos a seguir a pesquisa de Fontalva (2006), que pode ser classificada como de natureza qualitativa e teve como sujeitos alunos do 3º ano do ensino médio. A pesquisa procurou analisar como os participantes resolvem inequações, quais técnicas utilizam, quais justificativas fornecem para as etapas das resoluções e quais os tipos de erros mais comuns nessas resoluções.A pesquisa de Fontalva (2006) revelou um cenário preocupante, pois os alunos cometeram erros como: estabelecer relações sem sentido com raízes quadradas, não dominar as regras algébricas relacionadas ao produto de fatores ou quocientes de números reais negativos, e fazer deduções incorretas sobre os sinais dos fatores a partir do sinal do produto ou quociente. A autora sugere que esses resultados provavelmente surgiram devido ao processo de ensino-aprendizagem das inequações, que privilegiou técnicas de resolução em detrimento dos conceitos e propriedades matemáticas.

Comentaremos posteriormente as pesquisas realizadas por Travassos e Proença (2022), intitulada “Ensino e Aprendizagem de Inequações na Escola: *um estudo exploratório a partir de dissertações e teses”*. Essa pesquisa teve como objetivo investigar, analisar e sintetizar o que as pesquisas acadêmicas brasileiras de mestrado e doutorado vêm apurando sobre o ensino e/ou aprendizagem de inequações e os processos metodológicos/teóricos utilizados nas pesquisas. Podemos classificar a pesquisa de Travassos e Proença (2022) como uma revisão bibliográfica, uma vez que procuraram verificar os debates em torno do ensino e da aprendizagem de inequações, o que resultou no levantamento bibliográfico de 14 trabalhos. Destes, apenas duas pesquisas tinham como foco o ensino, três a aprendizagem, e nove o ensino-aprendizagem. Eles verificaram que o campo de pesquisa sobre inequações polinomiais ainda é vasto e aberto para novas investigações acadêmicas.

A seguir, comentaremos o trabalho do pesquisador Junior (2021), cujo objetivo foi investigar a potencialidade de uma sequência didática para o ensino de inequações logarítmicas aplicada a um grupo de estudantes do 2º e 3º ano do ensino médio de uma escola pública, utilizando o software Geogebra sob a ótica de Rabardel e Duval. Para alcançar tal objetivo, Junior (2021) adotou uma metodologia que incluiu a gravação de vídeos e áudios dos alunos, por meio do aplicativo *Meet*, no momento da resolução das atividades propostas na sequência didática. A pesquisa de Junior (2021) verificou que o uso do software Geogebra no ensino de inequações logarítmicas é eficaz, pois os estudantes mostraram um melhor aproveitamento na aprendizagem em comparação com aulas que não utilizaram o software. Ele sugeriu que sua pesquisa poderia ser adaptada para tratar de outros tipos de funções, com as devidas modificações necessárias.

O trabalho de Travassos e Proença (2022) também teve como objetivo investigar as dificuldades dos licenciados do curso de matemática em resolver atividades envolvendo inequações em diferentes registros de representação semiótica. A dissertação pode ser classificada como exploratória, com 16 alunos de graduação em matemática de uma universidade pública do Estado do Paraná como sujeitos da pesquisa. Como instrumento de coleta de dados, foram utilizados três tipos diferentes de exercícios: linguagem natural, problemas contextualizados e exercícios com diferentes representações semióticas. Após a análise dos dados, Travassos e Proença (2022) verificaram que os acadêmicos apresentam dificuldades tanto no processo de tratamento, envolvendo operações matemáticas e propriedades do conceito de inequação, quanto no processo de conversão, especialmente na representação de inequações na reta numérica.

Continuando com os comentários, vamos discutir o trabalho da pesquisadora Alvarenga (2013), que elaborou uma tese de doutorado com o objetivo de fazer um levantamento bibliográfico sobre a produção acadêmica relacionada ao tema: Ensino e Aprendizagem de Inequações. A pesquisa de Alvarenga (2013) pode ser classificada como bibliográfica, e teve como finalidade mapear eventos, artigos e pesquisas sobre o tema, tanto no âmbito nacional quanto internacional. A pesquisa mostrou que as investigações sobre o tema precisam ser ampliadas e aprofundadas pela comunidade de pesquisadores em educação matemática, pois Alvarenga (2013) constatou que as investigações sobre o ensino e a aprendizagem de inequações estão espalhadas por todos os continentes, indicando que este é um tema que inquieta a comunidade de pesquisadores.

A seguir, comentaremos a pesquisa de Beltrão (2010), que abordou as dificuldades dos alunos do ensino fundamental (8º e 9º ano) da rede pública de Pernambuco em manipular inequações e como a falta de significado desse objeto matemático pode interferir ao longo do ano, quando os alunos chegam ao ensino médio. A pesquisa pode ser classificada como uma análise de conteúdo, e seus resultados indicaram que o ensino-aprendizagem de inequações não pode ser desprovido de significado. O professor deve apresentar outras abordagens sobre o tema, como o tratamento algébrico e geométrico.

Posteriormente, comentaremos a tese do pesquisador Mineiro (2019), que busca estabelecer uma relação entre a falta de compreensão dos alunos sobre desigualdades e inequações polinomiais e aspectos ligados às dimensões epistemológica, econômico-institucional e ecológica do problema didático relativo às inequações. Ele investiga como a intervenção nesses aspectos pode contribuir para o desenvolvimento de um modelo didático de referência, servindo de base para a proposição de percursos de estudo e pesquisa para o ensino de desigualdades e inequações na Educação Básica. A pesquisa de Mineiro (2019), de natureza qualitativa-exploratória, revelou que existem restrições na aprendizagem de inequações nos diferentes níveis de ensino, mas que esse cenário pode ser modificado pela ação do professor e por políticas governamentais, como diretrizes curriculares e programas de formação de professores. Ele também propôs que futuras pesquisas investiguem qual deve ser a base de conhecimento necessária para o ensino de inequações, ou quais são as concepções dos professores da Educação Básica sobre desigualdades e inequações (MINEIRO, 2019, p.15).

A seguir, comentaremos o trabalho do pesquisador Junior (2011), que elaborou uma pesquisa qualitativa com o objetivo de verificar se o ensino de inequações, via uma abordagem funcional gráfica que envolve o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica com o auxílio do software Geogebra, pode favorecer o entendimento dos alunos de uma turma do 2º ano do ensino médio. Para a coleta de dados, Junior (2011) utilizou uma sequência de atividades, elaborada com base em sua experiência docente, aplicada em dois momentos: no primeiro, os alunos utilizaram o software Geogebra; no segundo, apenas lápis e papel. Os resultados apontaram que a abordagem proposta na pesquisa pode ser positiva para a resolução de inequações, uma vez que foram identificados avanços nos conhecimentos matemáticos dos alunos ao relacionarem a resolução gráfica com a resolução algébrica, com o auxílio do software Geogebra. Contudo, os alunos apresentaram dificuldades em explicar oralmente os procedimentos adotados na resolução dos problemas.

Prosseguindo com os comentários das pesquisas, analisaremos a da pesquisadora Melo (2007), cujo objetivo foi verificar como os professores que atuam no ensino superior abordam o tema das inequações com seus alunos. Os sujeitos da pesquisa foram quatro professores que lecionavam, pelo menos, no 1º ano do curso de licenciatura em matemática em uma universidade pública. A pesquisa buscou verificar, com os sujeitos da pesquisa, questões voltadas ao tema das inequações e suas práticas pedagógicas. Para tanto, Melo (2007) elaborou um procedimento metodológico composto por entrevistas semiestruturadas contendo seis perguntas para cada professor. Os resultados indicaram que os professores utilizam diferentes registros de representações semióticas para o ensino de inequações e constataram que os alunos de graduação, segundo os professores, apresentam dificuldade em reconhecer uma inequação por meio da análise e interpretação de dados, utilizando livros ou apostilas.

Por fim, comentaremos o trabalho da pesquisadora Saldanha (2007), que elaborou uma pesquisa qualitativa sobre o ensino e a aprendizagem de desigualdades e inequações logarítmicas. Em sua pesquisa, Saldanha (2007) procurou verificar o nível de aprendizagem dos alunos do 2º ano do ensino médio sobre o tema das desigualdades e inequações logarítmicas. Para tanto, desenvolveu um percurso metodológico apoiado em uma sequência de atividades com seis questões de inequações, além de realizar a gravação de vídeos no momento da experimentação, para capturar os possíveis indícios de aprendizagem dos alunos durante a resolução dessas questões. A conclusão foi que a abordagem desenvolvida pela sequência de atividades proposta favoreceu a aprendizagem das desigualdades e inequações logarítmicas, além de proporcionar uma reflexão sobre a prática de ensino da professora-pesquisadora.

Podemos perceber que a maioria das pesquisas citadas tem como objetivo realizar uma pesquisa qualitativa e tiveram como sujeitos, em sua maioria, alunos do ensino médio. Essas pesquisas procuraram verificar o aprendizado dos alunos sobre o ensino de inequações polinomiais de 1º e 2º graus, bem como inequações logarítmicas, por meio da aplicação de uma sequência didática ou uma sequência de atividades. Constatamos que, entre essas pesquisas qualitativas, apenas os pesquisadores Junior (2021) e Junior (2011) utilizaram como instrumento algum recurso computacional, como o software Geogebra. É importante ressaltar que, até o momento da pesquisa, não foi encontrado nenhum artigo, dissertação ou tese que tenha empregado o software Desmos como instrumento auxiliador para o ensino e aprendizagem de inequação polinomial de 1° e 2° grau.

Apuramos também que a maioria das pesquisas utilizou exercícios de verificação de aprendizagem como recurso para a coleta de dados. Essa metodologia foi aplicada nas pesquisas de Queiroz (2021), Fontalva (2006), Travassos e Proença (2022) e Melo (2007). Entre as pesquisas que utilizaram sequências de atividades como recurso, destacam-se as de Magalhães (2013), Saldanha (2007) e Junior (2011). Já as pesquisas que empregaram sequências didáticas como metodologia para a coleta de dados incluem as de Branco (2020) e Junior (2021).

Após esse breve levantamento de dados, conseguimos identificar o diferencial de nossa pesquisa. Realizaremos uma investigação de cunho qualitativo, tendo como sujeitos alunos do ensino médio. Utilizaremos como metodologia a aplicação de uma sequência de atividades desenvolvida sob a ótica da Teoria de Instrumentação de Rabardel (1995) e da Teoria da Semiótica de Duval (2003). As atividades serão respondidas pelos alunos com o auxílio do software Desmos e, durante a resolução dessas atividades, faremos a gravação dos áudios dos alunos para verificar os possíveis indícios de aprendizagem que possam surgir durante a interação entre os alunos ou entre os alunos e o pesquisador.

No capítulo a seguir, apresentaremos os teóricos que nos permitirão desenvolver a pesquisa.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O capítulo em questão abordará a base teórica de nossa pesquisa, buscando fundamenta-la de acordo com as teorias de instrumentação de Rabardel, Teoria da Semiótica de Duval e Analise Microgenética.

2.1 Teoria de Instrumentação de Rabardel

O referencial teórico que nos permite explorar sobre a influência de um instrumento no ambiente de aprendizagem, segundo Salazar (2009) , é a Teoria Instrumental de Rabardel[1] (1995). Esta teoria consiste em reanalisar sobre as praticidades dos instrumentos técnicos chamados de artefatos, a praticidade dos instrumentos técnicos, chamados de artefatos, que podem ser materiais ou simbólicos, utilizados pela sociedade. Exemplos incluem o computador, a calculadora, o datashow, uma faca, um prego ou um martelo.

Rabardel (1995), conforme discutido por Bittar (2015), investigou a ação do sujeito mediada por um instrumento. Embora essa ação possa não estar necessariamente relacionada à educação, ela tem sido frequentemente aplicada em pesquisas focadas no uso da tecnologia em ambientes escolares, segundo Bittar (2015). Para compreender a relação entre o sujeito, o artefato e a transformação deste em instrumento, é essencial entender o que Rabardel (1995) define como artefato. Segundo as pesquisadoras Bittar (2015) e Salazar (2009), Rabardel (1995) categoriza os artefatos em dois tipos:

- **Artefato técnico:** Resultado da transformação de matéria em um objeto, como uma caneta, lápis, apagador ou pincel.
- **Artefato do ponto de vista de suas funções:** Um objeto ao qual o homem atribui finalidades além das originalmente previstas, como um computador que, inicialmente criado para calcular dados, evolui para os computadores atuais através do processo de aperfeiçoamento humano, chamado por Rabardel (1995) de relação instrumental.

[1] Pierre Rabardel (1945-2021), foi professor de psicologia e ergonomia cognitiva da Universidade de Paris VIII e propôs a "Teoria da Ação Instrumental".

Assim, Rabardel (1995) utiliza o termo "artefato" para definir um instrumento como o artefato acrescido de esquemas de utilização (RABARDEL, 1995 apud BITTAR, 2015, p. 9). O conceito de "esquema de utilização", conforme Bittar (2015) e Salazar (2009), refere-se ao domínio do homem sobre o artefato, atribuindo conhecimento à manipulação do artefato e transformando-o em um instrumento. Por exemplo, o software Desmos, inicialmente, pode não ter significado para os alunos. Porém, quando os alunos aprendem a utilizá-lo como auxílio na aprendizagem de matemática, ele deixa de ser apenas um artefato e se torna um instrumento, graças à aplicação de esquemas de utilização.

Conforme Bittar (2015), o processo de transformar um artefato em instrumento é dinâmico. À medida que o homem interage com o instrumento, novos esquemas de uso são agregados, transformando-o em um novo instrumento. Ao trabalhar com o software Desmos, podemos começar com conhecimentos básicos para resolver problemas. Entretanto, à medida que adquirimos novos conhecimentos, geramos novos esquemas de utilização, criando, segundo Bittar (2015), um novo instrumento a partir da instrumentalização do objeto.

Rabardel (1995) denomina esse processo de "gênese instrumental". A gênese instrumental visa à apropriação das características do artefato, com todas as suas potencialidades e limitações, pelo sujeito, integrando-o à sua atividade. Essa integração pode ocorrer de duas maneiras segundo Rabardel (2005, apud BITTAR, 2015):

I. **Na direção externa do artefato (instrumentalização):** O artefato passa por evolução ou aperfeiçoamento.

II. **Na direção interna do sujeito (instrumentação):** O artefato passa pela gênese instrumental, permitindo a extração de suas potencialidades e limitações.

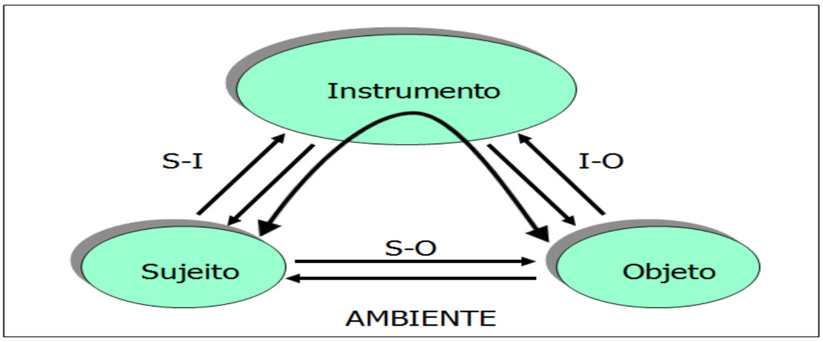
Rabardel (1995) desenvolveu um esquema teórico para a manipulação do artefato, permitindo sua transformação em instrumento através da "gênese instrumental". Esse esquema foi denominado Situações de Atividades Instrumentadas (S.A.I), cujo objetivo é destacar as várias interações que podem ocorrer no ambiente durante atividades instrumentais e orientar as relações entre o sujeito e o objeto sobre o qual ele age, como, por exemplo:

- Sujeito – Objeto [S-O]
- Sujeito – Instrumento [S-i]
- Instrumento – Objeto [i-O]

- Sujeito – Objeto pela mediação do Instrumento [S(i)-O]

A Figura 1 abaixo mostra como essas relações podem ser feitas:

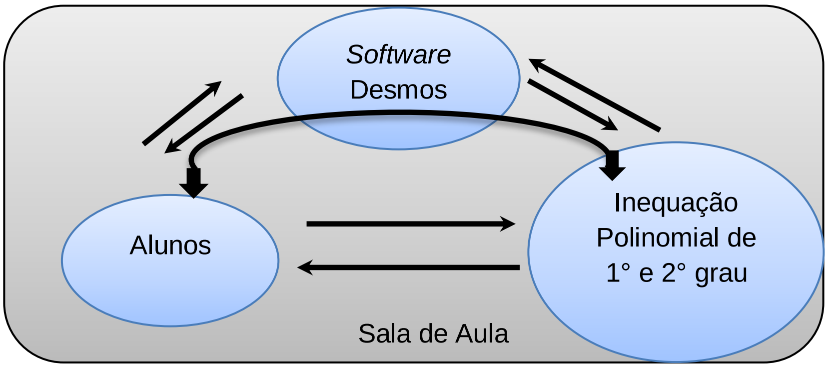
Figura 1: Modelo da SAI.



Fonte: Rabardel (1995, p.53).

Para a nossa pesquisa desenvolvemos a SAI, baseado em Rabardel (1995), de acordo com a Figura 2 abaixo:

Figura 2: SAI proposta na pesquisa.



Fonte: Autor, 2023.

A Figura 2 representa a SAI que será objeto de estudo em nossa pesquisa, destacando as relações entre o aluno, o software Desmos e o objeto matemático. Essas relações foram exploradas e observadas durante nossa experimentação didática, e analisamos como essas interações se comunicam entre si. Para verificar essas comunicações, dedicamos o capítulo de análise de dados a essa abordagem. É importante notar que, no ambiente desenvolvido por Rabardel (1995), o professor não é contemplado na relação de instrumentação do software Desmos pelos alunos, uma vez que essa teoria se concentra na aprendizagem.

Ao comparar a SAI elaborada por Rabardel (1995) com a SAI proposta em nossa pesquisa, identificamos que o Sujeito será representado pelos alunos do ensino médio da rede estadual e particular, o *software* Desmos funcionará como o artefato, e o objeto será a inequação polinomial de 1º e 2º grau.

As interações entre [S – O] referem-se à aprendizagem dos alunos sem o uso do instrumento. As mediações [i – O] dizem respeito às interações entre o artefato (software Desmos) e o objeto matemático, visando estabelecer possíveis conexões entre eles. Finalmente, [S(i) – O] representa o processo em que ocorre a gênese instrumental, no qual o artefato se transforma em instrumento durante o processo de aprendizagem. Dessa forma, Rabardel (1995) propôs uma teoria de aprendizagem na qual o instrumento desempenha um papel intermediador. Um artefato, sem uso, é apenas um objeto, mas se torna um instrumento quando adquire funcionalidade no processo de aprendizagem. À medida que os alunos se apropriam desse instrumento, o processo de instrumentalização do objeto se consolida. No próximo tópico, discutiremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993).

2.2 Semiótica de Duval

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993) foi desenvolvida a partir dos estudos sobre a semiótica de Charles Sanders Peirce (1839–1914). Seu objetivo é demonstrar a importância das representações para o funcionamento cognitivo do pensamento, pois, segundo Duval, as representações semióticas dependem do objeto matemático que está sendo manipulado. Dessa forma, o estudo de funções, cálculos algébricos e figuras geométricas requer representações próprias, uma vez que elas apresentam “inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 1993, p. 269). Utilizamos a teoria semiótica de Duval para orientar a coleta de dados e analisar tanto os registros escritos quanto os registros orais, em busca de indícios de aprendizagem dos alunos. Isso é necessário porque a teoria da instrumentação de Rabardel não especifica como coletar e analisar os dados, apenas sugere que a experimentação seja analisada a partir das relações entre sujeito-instrumento, instrumento-objeto e o ensino do objeto intermediado pelo instrumento.

É importante ressaltar que o objeto matemático e suas representações semióticas são conceitos distintos, pois “é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis” (DUVAL, 1993, p. 270). Para diferenciar essas situações, é essencial definir o que são o objeto matemático e suas representações semióticas.

Podemos definir o objeto matemático, em nossa pesquisa, como a inequação polinomial de 1º e 2º grau. As manipulações algébricas, geométricas e os registros de voz dos alunos, coletados durante a experimentação, são consideradas representações semióticas. Contudo, Duval (1993) adverte que, para que um registro seja reconhecido como uma representação semiótica, ele deve apresentar três características importantes:

I. **Formação de uma Representação Identificável**: A representação deve ser compreensível ao estudante, como um texto claro, uma expressão matemática ou um desenho geométrico.

II. **Tratamento**: Segundo Duval (2003), o tratamento refere-se às manipulações de um registro dentro da mesma linguagem. Isso ocorre na álgebra, por exemplo, quando usamos o processo de demonstração de um teorema; no gráfico, quando manipulamos seus coeficientes para analisar suas características; ou na linguagem verbal, ao descrevermos um processo de transformação de um objeto matemático.

III. **Conversão**: A conversão é a mudança de um objeto de uma linguagem para outra, como a transição de uma linguagem algébrica para uma linguagem gráfica, ou a análise de um gráfico de função e a descrição de suas características usando a linguagem verbal.

A conversão permite ao aluno perceber que um tratamento pode ser convertido para facilitar a resolução de problemas. Para Duval (2003), a conversão é um procedimento matemático utilizado para simplificar o registro em que o tratamento é aplicado ou "para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro" (DUVAL, 2003, p. 16). Assim, as representações semióticas desempenham um papel crucial no ambiente de ensino-aprendizagem, pois permitem que os alunos, segundo Duval (2003), exponham seus pensamentos e materializem o objeto matemático por meio de suas representações, visto que o objeto matemático é abstrato. No entanto, a tentativa de realizar múltiplas representações semióticas de um mesmo objeto matemático pode, para Duval (2003), resultar em uma experiência negativa ou até mesmo inválida.

Na sequência, abordaremos o próximo tópico, que trata da análise microgenética e sua importância no processo de coleta de dados na experimentação didática.

2.3 Análise Microgenética

A realização de uma atividade matemática ou educativa, na visão da pesquisadora Góes (2000), exige dos alunos uma interação que pode incluir tirar dúvidas com outros alunos sobre conteúdos que não foram compreendidos ou até mesmo a elaboração de estratégias para a solução da atividade. Essa interação pode conter informações valiosas sobre como os alunos pensam e agem em relação a um determinado tema, ou seja, pode conter indícios de aprendizagem, que podem ser detectados por meio da análise microgenética. A análise microgenética, segundo Góes (2000), é uma metodologia utilizada por pesquisadores nos campos da educação e da psicologia para buscar respostas nas investigações, focando nas interações que ocorrem durante a realização de uma atividade educativa.

Dessa forma, a análise microgenética requer um relato detalhado da construção dos dados coletados e dos recortes dos acontecimentos ocorridos durante as interações. Para Góes (2000), essa análise é totalmente focada no sujeito e nas relações que ocorrem entre:

- Sujeito e sujeito;
- Sujeito e objeto;
- Condições sociais e a situação proposta.

Para realizar essa análise, a autora recomenda o uso de equipamentos eletrônicos capazes de capturar essas interações, como câmeras de vídeo, gravadores de voz e estratégias para filmagem e transcrição de falas interativas. Após capturar essas transcrições de falas interativas, recomenda-se um acompanhamento cuidadoso e minucioso da formação do processo, “detalhando as ações dos sujeitos e as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo. Essa duração corresponde a uma ou poucas sessões, em delineamento planejado ou a curtos segmentos interativos em situações reais” (CABRAL, 2004, p. 105).

Em nossa pesquisa, utilizamos a análise microgenética para nos inserirmos no processo, realizando questionamentos pertinentes sobre o objeto matemático, o instrumento utilizado pelos alunos para a resolução da sequência de atividades e verificando se o instrumento usado auxilia ou não na compreensão e domínio do objeto matemático, como suas propriedades e definições. Utilizando um gravador de voz como ferramenta, registramos as interações dos alunos a partir dos questionamentos pertinentes ao tema, pois esses questionamentos servem para induzir a fala dos alunos sobre o processo em andamento e verificar como estão ocorrendo as relações entre o Sujeito, Objeto e Instrumento, conforme estabelecido na teoria da instrumentação de Rabardel (1995).

Isso inclui verificar como o aluno está se relacionando com o artefato ou instrumento de aprendizagem, se está dominando o objeto matemático sem utilizar o instrumento, entre outros questionamentos que possam surgir ao longo da experimentação. A partir das respostas dos alunos, tanto nos registros escritos quanto nos registros de áudio, analisaremos os dados coletados na experimentação didática com base na teoria semiótica de Duval (2003), buscando possíveis indícios de aprendizagem que possam surgir durante a interação entre aluno-aluno ou aluno-pesquisador.

Em síntese, segundo Cabral (2004, p. 107), a análise microgenética constitui uma ferramenta didática capaz de captar, no ambiente de sala de aula, “palco de grandes interações didáticas”, apurações sobre a construção do conhecimento, proporcionando ao pesquisador um ambiente propício para investigações pedagógicas.

No próximo capítulo, trataremos do software Desmos, sua interface, um pouco sobre sua funcionalidade básica e explicaremos por que optamos por usá-lo em nossa pesquisa.

3. SOFTWARE DESMOS

O *software* Desmos é uma avançada calculadora gráfica que pode ser acessada gratuitamente através de um endereço na web tanto por computadores ou por *smartphone.* Atualmente, segundo os dados fornecidos pela Desmos *Studio,* mais de 75 milhões de pessoas no mundo usam o *software* Desmos anualmente para os mais devidos fins como: realizar conjecturas, conectar diferentes representações dinamicamente e realizarem artes a partir do conhecimento matemático. O *software* Desmos apresenta uma interface simples de se manipular e entender, pois não precisa ser instalado no computador para funcionar, basta estar conectado a uma rede de internet para acessar suas ferramentas.

Ao acessar o site https://www.desmos.com/?lang=pt-BR seremos orientados a uma tela, no qual podemos explorar os mais diversos recursos, mas para a finalidade dessa dissertação iremos explorar a sua calculadora gráfica.

A Figura 3 ajuda a entendermos a interface inicial do *software* Desmos.

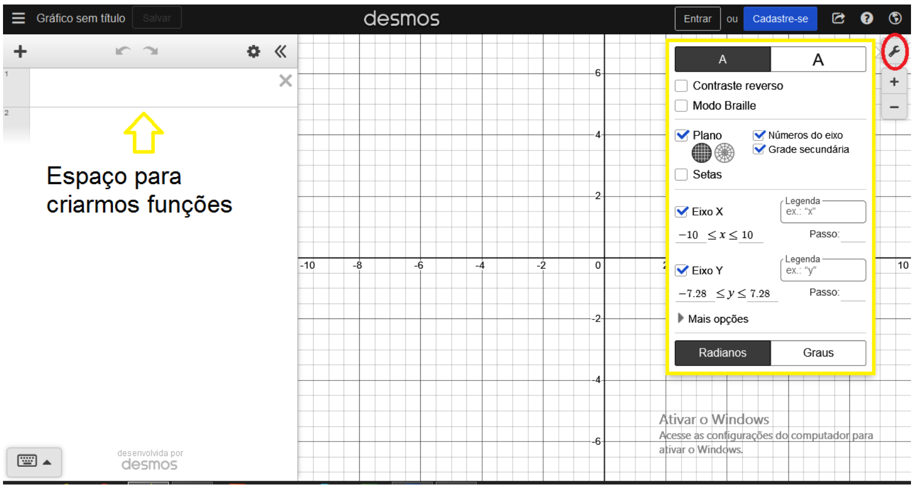
Figura 3: Tela inicial do *software* Desmos.

Fonte: Autor, 2024.

Ao clica na calculadora gráfica, iremos ser direcionado para uma nova tela, no qual teremos acesso às ferramentas gráficas disponíveis para os usuários como: aba para calculadora, configuração no qual podemos modificar o tamanho da fonte da imagem e do gráfico além de ter as opções de incluir ou tirar o plano cartesiano. Podemos também, nomear os eixos X ou Y de acordo como o problema que desejamos criar, delimitar os intervalos numéricos entre esses eixos e criar os “passos” que a opção de quanto em quanto o eixo X ou o Y irá crescer.

A Figura 4 mostra todas essas opções que foi citada anteriormente para guiar o novo usuário.

Figura 4: Calculadora gráfica.

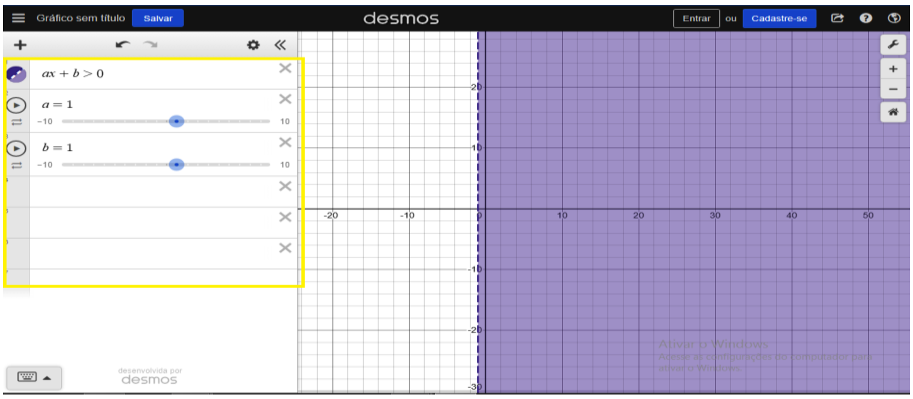


Fonte: Autor, 2024.

Como o software Desmos é totalmente dinâmico, ao realizar uma função geral como $ax + b > 0$, ele cria automaticamente o controle deslizante a e b, no qual podemos delimitar o intervalo que a função pode variar, proporcionando o araste para modificarmos a função dentro do intervalo delimitado. E ao inserir o símbolo de inequação, ele cria automaticamente uma faixa vertical simbolizando as possíveis soluções da inequação inserida.

A Figura 5 mostra como a função de inequação $ax + b > 0$, se comporta ao ser inserido no Desmos.

Figura 5: Comportamento da inequação $ax + b > 0$.



Fonte: Autor, 2024.

Para a nossa pesquisa, escolhemos o *software* Desmos por apresentar uma funcionalidade simples, sendo acessíveis para as pessoas que tem conhecimento mínimo de informática e devido ao seu dinamismo, pois é possível verificar o comportamento gráfico das funções de inequações polinomiais de 1° e 2° grau a partir da função araste.

No próximo capitulo abordaremos a metodologia da nossa pesquisa, ou seja, o caminho necessário que precisamos percorrer para alcançar os objetivos da pesquisa.

4. METODOLOGIA

A pesquisa que será desenvolvida é de natureza qualitativa e será realizada em uma sala de aula com 10 alunos do ensino médio da rede pública e privada, com idades entre 15 e 17 anos, cursando o 1º, 2º e 3º ano. Esses alunos nunca tiveram contato prévio com o conteúdo de inequações polinomiais de 1º e 2º grau. No capítulo de análise de dados, caracterizaremos os alunos que participaram da experimentação. Todos os participantes assinaram um termo de consentimento, no qual está assegurada a confidencialidade de seus dados e imagens. A pesquisa envolverá a aplicação de uma sequência de atividades sobre o objeto matemático das inequações polinomiais de 1º e 2º graus e suas abordagens gráficas, distribuída entre os grupos de alunos.

Durante o processo de resolução das atividades, faremos perguntas adicionais relacionadas ao objeto matemático, com o objetivo de coletar registros escritos e de áudio. Na aplicação da sequência de atividades, analisaremos as relações existentes entre Sujeito–Instrumento, Instrumento–Objeto e Ensino do Objeto intermediado pelo Instrumento, a fim de verificar a potencialidade ou limitação da sequência proposta. Para isso, utilizaremos os dados escritos e de áudio dos alunos, avaliando a metodologia de ensino das inequações polinomiais de 1º e 2º graus com o auxílio do software Desmos. Cada grupo de alunos receberá a mesma sequência de atividades, identificada com os nomes dos respectivos participantes.

No decorrer a coleta de dados, questionaremos os alunos sobre o comportamento das inequações polinomiais de 1º e 2º graus quando seus parâmetros são alterados. As respostas serão registradas nos espaços apropriados em cada atividade. É importante ressaltar que, durante a coleta, circularemos entre os grupos para identificar, registrar e coletar informações sobre o que eles compreendem acerca das relações algébricas e gráficas das inequações polinomiais, com o auxílio do software Desmos, no contexto da pesquisa didática. Além disso, investigaremos a influência do software Desmos no processo de aprendizagem e como a Situação de Aprendizagem Instrumentada (SAI), proposta na experimentação didática, baseada em Rabardel (1995), intervém nesse processo.

Ademais, prestaremos auxílio aos alunos, quando necessário, durante a realização das atividades, e analisaremos, por meio da análise microgenética, se houve alteração na compreensão dos alunos a partir das intervenções realizadas. Os dados coletados na pesquisa serão analisados em duas etapas:

I. Na primeira etapa, analisaremos os dados escritos à luz da semiótica de Duval (2003), buscando identificar indícios de aprendizagem.

II. Na segunda etapa, analisaremos os registros de voz, com o intuito de detectar indícios de aprendizagem na interação dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, com base na teoria de Rabardel (1995).

O próximo capítulo abordará o objeto matemático da pesquisa, apresentando suas definições e propriedades.

5. OBJETO MATEMÁTICO

O objeto matemático que será abordado nesta dissertação de mestrado é a inequação polinomial de 1º e 2º grau e sua abordagem funcional gráfica. A fundamentação teórica deste capítulo baseia-se na tese de doutorado do pesquisador Mineiro (2019). Para o desenvolvimento do tema, é de extrema importância que, primeiramente, realizemos um estudo epistemológico sobre o objeto matemático, abordando desde o surgimento das equações polinomiais de 1º e 2º graus até o desenvolvimento das desigualdades e inequações. Isso porque, conforme o período histórico e a realidade de cada civilização, "existem diferentes formas de interpretar a matemática, ou seja, diferentes modelos epistemológicos, compostos de diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias" (MINEIRO, 2019, p. 57).

Os primeiros registros sobre equações polinomiais de 1º grau surgiram nos papiros de Rhind, desenvolvidos pelos antigos egípcios por volta de 1650 a.C., segundo Eves (2011). Os babilônios, por sua vez, desenvolveram equações polinomiais de grau maior ou igual a dois; esses registros podem ser encontrados, de acordo com Eves (2011), na Universidade de Yale, nos Estados Unidos, em uma coleção datada de aproximadamente 1600 a.C., contendo centenas de problemas com equações simultâneas, resolvidos por meio de equações do tipo biquadrada. Segundo Mineiro (2019), esses registros escritos de equações polinomiais de 1º e 2º grau provavelmente surgiram a partir das necessidades humanas, quando o homem deixou de ser nômade e passou a se fixar em um determinado território. Era importante para ele reconhecer a regularidade dos ciclos da natureza, como as estações do ano, a duração dos dias, as técnicas de cultivo e o manejo do solo.

Ainda segundo Mineiro (2019), a partir do momento em que os seres humanos começaram a mensurar seus bens, como a quantidade de animais, frutas, terrenos, etc., o conhecimento numérico básico (um, dois, três,...) tornou-se insuficiente. Eles passaram a sentir a necessidade de comparar seus bens, o que fez surgir a noção de grandeza e de comparação, como a de igualdade e desigualdade. Deste modo:

> tão importante quanto expressar que a quantidade a de elementos de uma coleção era igual à quantidade b de elementos de outra (a=b) (como ocorria por exemplo ao relacionar de forma biunívoca a quantidade de objetos de uma coleção com a quantidade de marcas feitas em um pedaço de madeira), ou que tinham quantidade diferentes (a≠b), existiam situações em que se tornava necessário expressar a relação de ordem que existia entre essas quantidades, recorrendo às desigualdades por meio da indicação explícita de qual era a coleção que tinha mais elementos e qual a que tinha menos, ou em outros termos, qual era a maior e qual era a menor, nos casos em que não possuíam a mesma quantidade. (MINEIRO, 2019, p.58).

Os primeiros registros escritos sobre igualdade e desigualdade surgiram provavelmente, segundo Mineiro (2019), com os postulados criados por Euclides em seu livro *Elementos de Euclides*. Em um deles, afirma-se que "duas retas paralelas cortadas por duas retas transversais formam ângulos alternos, externos e internos congruentes". Em outro postulado, referente à desigualdade, ele afirma: “para qualquer triângulo, a soma do comprimento de dois lados é maior do que o comprimento do lado remanescente, quaisquer que sejam os lados considerados” (EUCLIDES, 2007, p. 23, apud MINEIRO, 2019, p. 62).

Mineiro (2019) cita, em sua pesquisa, outras situações históricas envolvendo inequações e desigualdades, como o trabalho de Fermat para calcular o valor aproximado de $\sqrt{3}$, e o de Newton, que foi um dos primeiros a provar teoremas utilizando a noção de desigualdade para demonstrar séries infinitas. Ele também menciona a pesquisa de Harriot, que demonstrou, por meio de desigualdades, o teorema da desigualdade entre as médias. Ainda em sua pesquisa, Mineiro (2019) apresenta situações envolvendo desigualdades e inequações, diferenciando os dois termos apresentados. No entanto, o objetivo da nossa pesquisa não é realizar um levantamento histórico detalhado, sugerindo ao leitor que consulte as referências para acessar o trabalho do pesquisador Mineiro (2019).

Como podemos perceber, o uso de equações e inequações polinomiais é inerente ao desenvolvimento da matemática, contribuindo significativamente para a resolução dos mais diversos problemas, como, por exemplo, em situações econômicas em que se busca o maior lucro ou o menor prejuízo. A partir do exposto, podemos afirmar que a razão de ser das inequações polinomiais está associada às necessidades humanas, como demonstrado nesse breve levantamento histórico. Após esse levantamento sobre o surgimento das equações, desigualdades e inequações, faz-se necessário definir matematicamente as inequações polinomiais, a fim de diferenciá-las das equações polinomiais e das desigualdades, uma vez que se tratam de objetos matemáticos distintos.

Segundo Houaiss (2001, apud Mineiro, 2019), é comum associarmos a palavra "desigualdade" com "inequação", uma vez que desigualdade é usada para comparar expressões que apresentam quantidades desiguais, enquanto a inequação é usada para comparar duas expressões matemáticas contendo os símbolos (<, >, ≤, ≥), cujo objetivo é determinar o valor da variável que satisfaça a desigualdade. Antes de prosseguir, vamos definir o que são funções polinomiais, uma vez que seu uso será de extrema importância na resolução das inequações polinomiais de 1º e 2º grau, especialmente através das interpretações gráficas de suas raízes. . Desta forma, definimos funções polinomiais de modo que sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que seus domínios são respectivamente, $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$, contidos nos números reais. Denominamos de inequação na incógnita x qualquer uma das sentenças abaixo:

$f(x) > g(x)$, leia-se $f(x)$ maior que $g(x)$.

$f(x) < g(x)$, leia-se $f(x)$ menor que $g(x)$.

$f(x) \geq g(x)$, leia-se $f(x)$ maior ou igual a $g(x)$.

$f(x) \leq g(x)$, leia-se $f(x)$ menor ou igual a $g(x)$.

É importante observar que as soluções de uma inequação são intervalos que podem ser abertos ou fechados. Portanto, o intervalo representará o domínio de validade, que, para essa dissertação, consideramos como sendo a solução da inequação polinomial. Desta forma, considere $f(x)$ e $g(x)$ como sendo funções polinomiais. E $f(x) > g(x)$. Assim, considere D_1 e D_2, como sendo o domínio da função $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Chamaremos o conjunto D de validade se, $D = D_1 \cap D_2$ e somente se, para todo $x_1 \in D$, temos que $x_1 \in D_1$ e $x_1 \in D_2$. Portanto, a solução da inequação $f(x) > g(x)$ é $D = D_1 \cap D_2$. As soluções dos outros casos seguem de maneira análoga a do primeiro caso.

Sendo assim, podemos definir a solução de uma inequação polinomial da seguinte forma:

Definição 1:

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, dizemos que ele é a solução da inequação $f(x) < g(x)$, se e somente se, $f(x_0) < g(x_0)$.

A partir dessa definição, podemos definir o conjunto solução de uma inequação, que denominaram de conjunto S, para todo número real.

Definição 2:

Chamamos de S o conjunto solução de toda inequação definida nos reais, tal que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, são verdadeiras as seguintes sentenças:

$$f(x_0) > g(x_0),\ S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x > x_0\}$$

$$f(x_0) < g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x < x_0\}$$
$$f(x_0) \geq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x \geq x_0\}$$
$$f(x_0) \leq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x \leq x_0\}$$

Dada a inequação e ela não apresentar soluções nos reais, dizemos que ela é impossível e representaremos através da seguinte notação $S = \{\emptyset\}$, no qual o simbolo, $S = \{\emptyset\}$representa o conjunto vazio.

Para continuarmos aprofundando o objeto matemático é importante relembrarmos algumas notações importantes sobre conjuntos, intervalos e intervalos com representação geométrica.

Notação sobre conjuntos:

1 – A representação dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\}$$

2 - A representação dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$$

3 – A representação dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$$

4 – A representação dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\}$$

5 – A representação dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$$

A representação em forma de intervalos, que são subconjuntos dos números reais, se faz muito importante, pois as soluções das inequações podem ser representadas por meio dessa notação.

Podemos definir matematicamente intervalos numéricos como:

Definição 3:

Dados $a \ e \ b \ \in \ R\cdot$, com $a < b$, chama-se de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

I_1) Intervalo aberto: $]a, b[\ = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ a < \ x \ < b\}$

I_2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ a \leq \ x \ \leq b\}$

I_3) Intervalo aberto à direita: $[a, b[\ = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ a \leq \ x \ < b\}$

I_4) Intervalo aberto à esquerda: $]a, b] = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ a < \ x \ \leq b\}$

I_5) Semirreta de origem em: a: $]-\infty, a] = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ x \ \leq a\}$

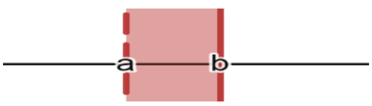
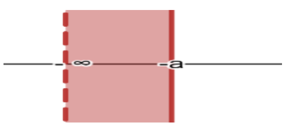
I_6) Semirreta aberta de origem em: a: $]-\infty, a[\ = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ x \ < a\}$

I_7) Semirreta de origem em: a: $[a, +\infty[\ = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ x \ \geq a\}$

I_8) Semirreta aberta de origem em: a: $]a, +\infty[\ = \{x \ \in \ \mathbb{R} \ / \ x \ > a\}$

A representação geométrica dos números reais é uma forma muito importante para que se compreendam as soluções reais de um inequação. Por isso se faz importante termos conhecimento sobre essa notação. A figura 3 ajuda a relembrarmos essa notação geométrica.

Quadro 2: Representação geométrica dos números reais.

Representação Geométrica	**Representação Algébrica**	**Descrição**
	$(a\ ,b)$	Intervalo aberto
	$[a\ ,b]$	Intervalo Fechado
	$[a\ ,b)$	Intervalo aberto à direita
	$(a\ ,b]$	Intervalo aberto a esquerda
	$(-\infty, a]$	Semirreta de origem em a

	$(-\infty, a)$	Semirreta aberta de origem em a
	$[\,a\,, +\infty)$	Semirreta de origem em a
	(a , +∞)	Semirreta aberta de origem em a

Fonte: Autor, 2023.

Algumas observações sobre a representação geométrica dos números reais é importante saber que:

- ❖ A bolinha branca indica que a solução da inequação não está definida naquele extremo, diferentemente da bolinha preta, onde a inequação está definida no extremo da reta numérica.
- ❖ Algumas notações na literatura trazem como intervalo aberto o símbolo (a, b).

Para interpretarmos graficamente as soluções de uma inequação polinomial de 1° e 2° grau, temos que relembrar alguns tópicos importantes, como o estudo de sinal dessas inequações. Para isso vamos relembrar primeiramente a definição matemática da função polinomial de 1º grau.

Definição 4:

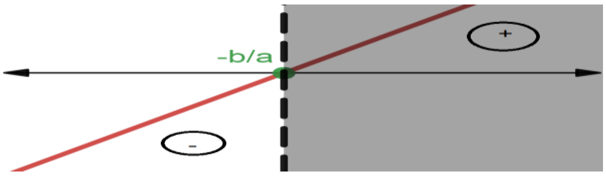
Uma função é classificada como polinomial de 1º grau, quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax + b) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e b é um número real dado.

Para fazermos o estudo de sinal da função polinomial de 1º grau temos que lembrar que o zero da função ou solução da função do tipo $f(x) = b + ax$ é calculado a partir da seguinte equação $x = -\frac{b}{a}$, ou seja, é o valor para que $f(x) = 0$, então devemos analisar os seguintes casos quando ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Para isso temos que analisar dois casos:

1° Caso, quando $a > 0$.

A taxa variável $a > 0$ indica que a função polinomial do 1° grau tem o gráfico crescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo:

Figura 4: Sinal da função crescente

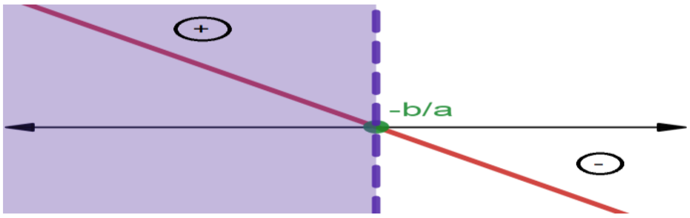


Fonte: Autor, 2023.

2° Caso, quando $a < 0$.

A taxa variável $a < 0$ indica que a função polinomial do 1º grau tem o gráfico decrescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo.

Figura 5: Sinal da função decrescente.



Fonte: Autor, 2023.

Agora, definido matematicamente a função polinomial de 2° grau, temos:

Definição 5:

Uma função é classificada como polinomial de 2º grau quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e $a, b\ e\ c$ são números reais dado.

Para a nossa pesquisa, é importante o domínio do estudo de sinal de função polinomial de 2° grau. Para isso, é necessário o conhecimento do cálculo das raízes dessa função. Assim, dada uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ usaremos como fórmula resolutiva para obter suas raízes as seguinte equação:

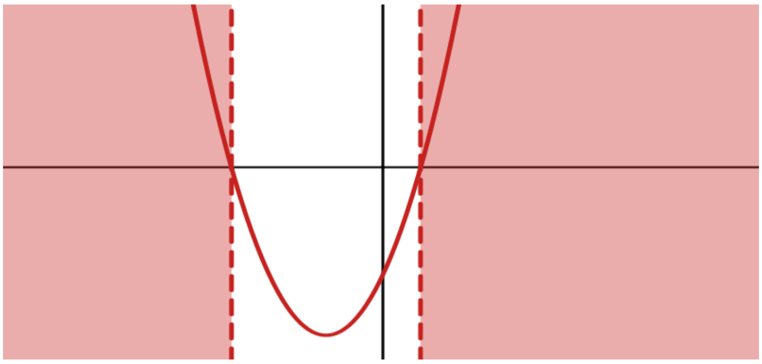
$$\Delta = b^2 - 4.a.c \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Com base no calculo das raízes de uma função polinomial de 2° grau, é importante analisar o comportamento dessa função quando:

- 1° Caso, quando $a > 0\ e\ \Delta > 0$.

O coeficiente $a > 0$ indica que a função quadrática tem concavidade voltada para cima e o discriminante $\Delta > 0$, prescreve que o gráfico da função toca em dois pontos distintos no eixo das abscissas.

Figura 6: Estudo de Sinal da função quadrática.

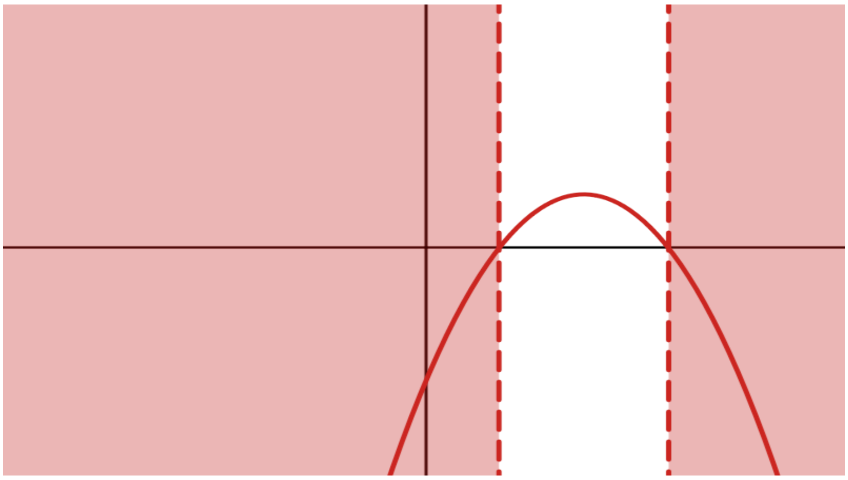


Fonte: Autor, 2023.

- 2° Caso, quando $a < 0 \; e \; \Delta > 0$.

Agora o coeficiente $a < 0$ indica que a concavidade da parábola está voltada para baixo, permanecendo o gráfico da função a tocar em dois pontos distintos o eixo x.

Figura 7: Estudo de Sinal da função quadrática.



Fonte: Autor, 2023.

Passaremos a definir o produto das funções polinomiais de 1° e 2° grau.

Definição 6:

Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $f(x).g(x) > 0$, $f(x).g(x) < 0$, $f(x).g(x) \geq 0$ e $f(x).g(x) \leq 0$ São chamadas de inequação – produto.

O último tópico a ser trabalhado é a inequação – quociente que podemos defini-la como:

Definição 7:

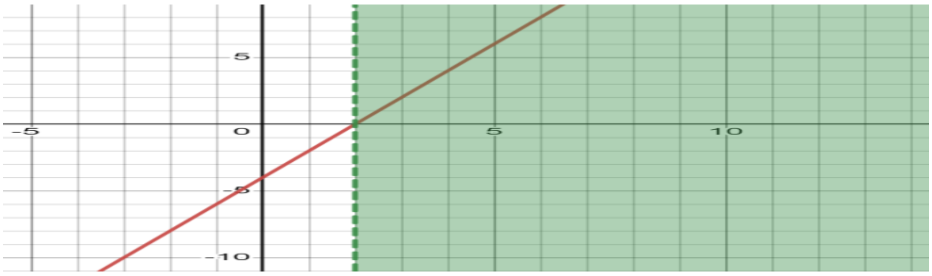
Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \; e \; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ são chamadas de inequação – quociente.

6. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE

A proposta de sequência de atividade abaixo inclui uma lista de 7 atividades de inequação polinomial de 1º e 2º grau aplica em uma grupo de alunos cursando o ensino médio da rede pública e privada de ensino. Essas atividades têm como objetivo verificar as relações descritas na Teoria Instrumental de Rabardel (1995). Queremos analisar a aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º grau mediada por um instrumento e, por conseguinte, examinar as interações existentes entre sujeito, objeto, instrumento e Sujeito-Objeto pela mediação do instrumento. Ademais, realizamos perguntas aos alunos para induzir a fala dos discentes sobre o instrumento de aprendizagem e sua assimilação do objeto matemático. Também registramos as interações entre os alunos, e entre alunos e pesquisador, no processo de compreensão do objeto matemático, bem como a apropriação dos instrumentos de aprendizagem em seu processo de instrumentação. Posteriormente, gravamos essas respostas com um gravador e, com esses dados, analisamos a experimentação, verificando indícios de aprendizagem e a conversão de linguagem. Muitas vezes, os alunos conseguem verbalizar bem, mas não conseguem escrever com a mesma qualidade.

Atividade 1 – Estudando $ax + b > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $2x - 4 > 0$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 1 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$ no Desmos.

2 – Digite $2x - 4 > 0$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

4 – Mande o aluno clicar no ponto $(2{,}0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 \geq 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

7 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 < 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

8 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com a seguinte inequação:

(a) $3x - 6 < 0$

(b) $5x + 4 \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a primeira atividade da experimentação

A realização para a primeira atividade exigirá um maior número de intervenção por parte do pesquisador, pois será a primeira vez que os alunos terão contato com o conteúdo de inequação polinomial de 1° e 2° graus e manipularão o *software* Desmos. Ressaltamos que o número de intervenções diminuirá à medida que as atividades avançarem, verificando se, no percurso da experimentação o aluno ganha autonomia e instrumentaliza o Desmos, conforme a teoria de Rabardel.

Ação do pesquisador: Ao iniciar a atividade o pesquisador se apresentará para a turma e distribuirá a primeira atividade, onde ele vai pedir para que os alunos resolvam a inequação $2x - 4 > 0$. Aguardará um momento e em seguida questionará os alunos se conseguiram resolver o problema, pedindo que socializem sua solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos façam uma relação básica, mais de forma oral, da escrita da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$.

Ação do pesquisador: A partir dos registros da socialização dos alunos, o pesquisador tomará o melhor exemplo, caso os alunos tenham apresentado soluções no quadro, e, se não houver partirá do exemplo apresentado na atividade, e fará a associação da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$, determinando a solução da inequação ($2x - 4 > 0$), após fazer a manipulação algébrica necessária.

Ação do pesquisador: após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador acessará o site do Desmos, apresentará a calculadora Desmos explicando um pouco da sua funcionalidade, e digitará a inequação $2x - 4 > 0$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador indagará os alunos sobre como eles interpretam o gráfico que está aparecendo na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a imagem apresentada no Desmos representa a solução algébrica, justificando sua resposta ao destacar que o gráfico tem uma coloração a partir do ponto 2 no eixo x. Espera-se também que observem a linha vertical tracejada que passa no ponto 2 no eixo x, representando que esse número não pertence à solução. Isto é, espera-se que façam uma relação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: em ato contínuo o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a seguinte inequação $2x - 4 \geq 0$, e que após resolverem algebricamente, digitem – na no Desmos. O pesquisador explicará como digitar o símbolo maior e igual (≥).

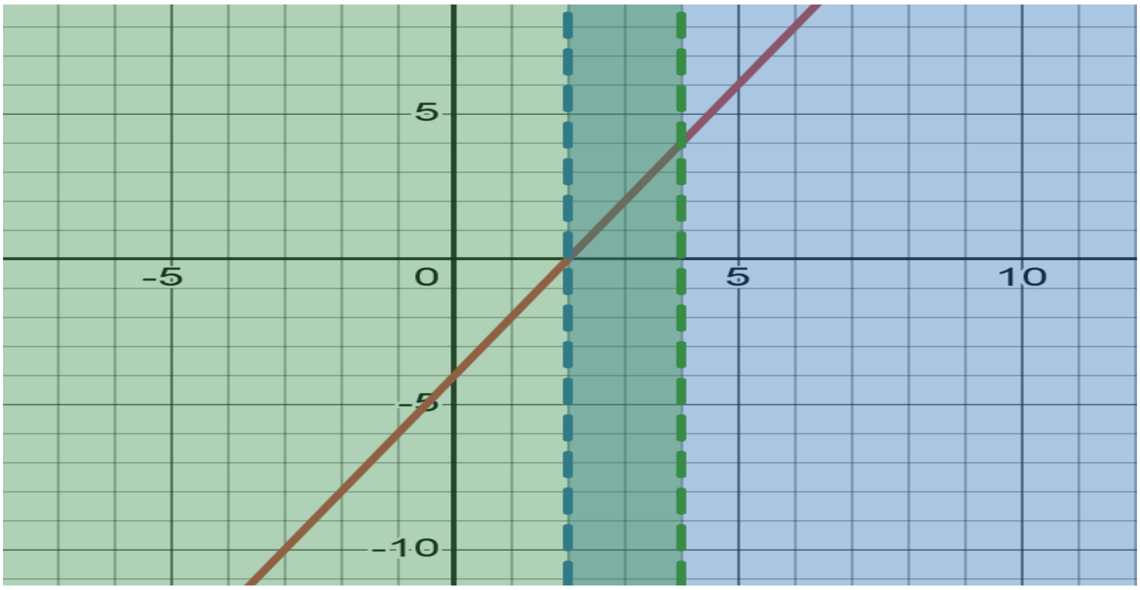
Comportamento esperado: após essa ação do pesquisador, espera-se que eu os alunos desenvolvam o mesmos procedimentos algébricos que foram utilizados na resolução da inequação $2x - 4 > 0$, e percebam que a igualdade na inequação alterou a solução. E que quando escreverem a desigualdade $2x - 4 \geq 0$ percebam a reta vertical ao eixo x no ponto 2 se tornar contínua, e façam referência deste fato com a presença do 2 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador vai pedir para que os alunos resolvam algebricamente as inequações $(3x - 6 < 0, 5x + 10 \geq 0, -2x - 4 > 0)$ e analisem os seus gráficos no Desmos e deem sua interpretação. Ressaltamos que nessa fase da evolução da atividade o pesquisador vai evitar intervenções.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos consigam resolver algebricamente as inequações sem muita dificuldade e consigam relacionar com as imagens apresentadas na tela quando digitadas as inequações do Desmos, e façam isso de forma correta.

Atividade 2 – Estudando $c < ax + b < d$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 < 2x - 4 < 4$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 2 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$

2 – Digite $0 < 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 < 4$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

$2x - 4 < 4 \quad \Rightarrow \quad 2x < 4 + 4 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad x < 4$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $2 < x < 4$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(2{,}0)\ e\ (4{,}0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $0 \leq 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 \leq 4$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $0 < 6x - 3 \leq 9$

(b) $0 \leq -x - 4 < 2$

O comportamento do pesquisador durante a segunda atividade da experimentação

A partir da segunda atividade, espera – se que os alunos demonstrem alguma familiaridade ao se trabalhar no ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de 1° grau. É importante salientar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção diminuirá, permitindo que os alunos, conforme a teoria de Rabardel (1995), iniciem o processo de instrumentação do software Desmos.

Ação do pesquisador: Após recolher os dados escritos da 1° atividade, o pesquisador distribuirá a 2° atividade entre os alunos e solicitará que resolvam a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ no espaço próprio da atividade. Após aguarda um tempo para a resolução, o pesquisador indagará os alunos se conseguiram resolver a inequação, pedindo que expressem a solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos encontrem dificuldades em resolver esse tipo de inequação, uma vez que há dois símbolos de desigualdades.

Ação do pesquisador: Com base nos registros compartilhados pelos alunos, o pesquisador considerará a melhor reposta, caso seja apresentada no quadro; se não houver, partirá do exemplo apresentado na atividade para associar a inequação $0 < 2x - 4$ com a desigualdade $2x - 4 < 4$, determinando a solução de cada uma.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos acessem no site do Desmos, posteriormente a calculadora gráfica, e digitem a inequação $0 < 2x - 4 < 4$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre como interpretam o gráfico exposto.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a solução apresentada no gráfico gerado com o Desmos corresponde a solução da inequação, argumentando com base no gráfico que apresenta uma tonalidade mais escura a partir dos pontos 2 e 4 no eixo x. Além disso, espera-se que percebam que as retas verticais tracejadas que passam pelos pontos 2 e 4 indicam que esses números não pertencem à solução da inequação, estabelecendo, assim, uma ligação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$. Após a solução algébrica, o pesquisador solicitará que os alunos digitarem as inequações no Desmos.

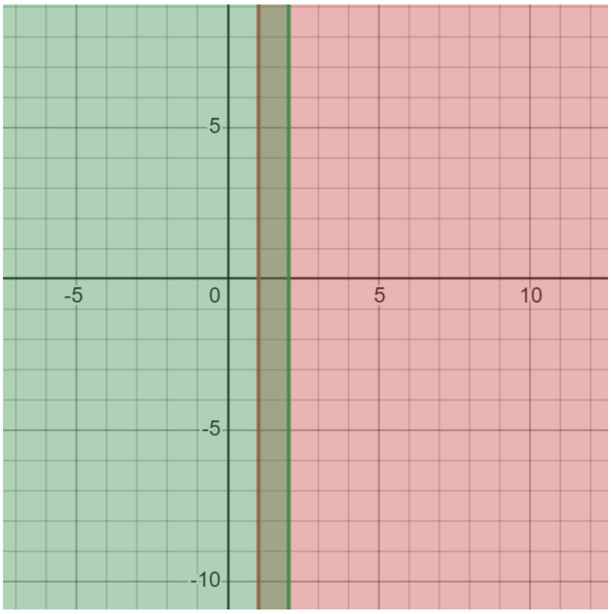
Comportamento esperado: Após essa ação, espera-se que os alunos sejam capazes de desenvolver todo o tratamento algébrico necessário para resolver a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ e percebam que o sinal de igualdade na inequação não altera os pontos 2 e 4 no eixo x. Ao digitarem a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$ no Desmos, espera – se que notem que as retas verticais que passa pelos pontos 2 e 4 se tornam contínuas, levando – os a deduzir que esses pontos 2 e 4 pertençam a solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em sequência, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam algebricamente as inequações ($0 < 6x - 3 \leq 9$, $0 \leq -x - 4 < 2$),verifiquem seus gráficos no Desmos e expressem suas interpretações. Vale ressalta que, nessa fase da evolução da atividade, o pesquisador não interferirá.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos desenvolvam a solução algébrica das inequações corretamente e consigam relacioná-las com as representações gráficas geradas no Desmos ao digitarem as inequações nesse ambiente.

Atividade 3 – Estudando $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 3 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

2 – Digite $3 - 2x \leq 1$ e na outra linha $3x - 1 \leq 5$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$3 - 2x \leq 1 \;\Rightarrow\; -2x \leq -2 \;\Rightarrow\; x \geq \frac{2}{2} \;\Rightarrow\; x \geq 1$

$3x - 1 \leq 5 \;\Rightarrow\; 3x \leq 6 \;\Rightarrow\; x \leq \frac{6}{3} \;\Rightarrow\; x \leq 2$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $1 \leq x \leq 2$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(1{,}0)\ e\ (2{,}0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $3 - 2x \geq 1$ e na outra linha $3x - 1 \geq 5$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a)$y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$

(b) $y = \begin{cases} 5x + 10 \geq 15 \\ 4x - 3 \geq 5 \end{cases}$

O comportamento do pesquisador durante a terceira atividade da experimentação

Ao iniciar a terceira atividade, espera – se que os alunos estejam habituados com o ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de primeiro grau. É importante enfatizar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção será mínima e pontual, como, por exemplo, questionar os alunos sobre o que estão achando do Desmos e se ele está auxiliando na compreensão, a partir da análise gráfica, da solução da inequação. O objetivo é coletar informações sobre as relações entre objeto, sujeito e artefato, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: Após recolher as folhas da segunda atividade, o pesquisador distribuirá para os alunos a folha contendo a terceira atividade, na qual pedirá que os alunos resolvam o sistema de inequação polinomial de primeiro grau $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$. Após conceder um tempo necessário para os cálculos, o pesquisador solicitará que os alunos socializem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos consigam associar a solução do sistema de inequação polinomial de primeiro grau $= \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$ com a solução aprendida na primeira atividade para resolver cada inequação separadamente. Pressupõe – se também que alguns alunos possam ter dificuldades em fazer essa relação direta, por aparentar ser um objeto matemático novo.

Ação do pesquisador: A partir da socialização das soluções dos alunos no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo e indagará o aluno sobre como chegou a essa solução. Caso não haja solução correta, o pesquisador incentivará os alunos a tomarem como exemplo a primeira atividade para resolver cada inequação desse sistema de inequação polinomial de primeiro grau.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos limpem a calculadora do Desmos e digitem em uma aba a inequação $3\mathrm{x} - 2\mathrm{x} \leq 1$ e, em outra aba, a inequação $3 - 2\mathrm{x} \leq 5$. Quando o gráfico aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre a interpretação do gráfico exibido.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam que existem duas colorações, uma sobreposta à outra, e que, na interseção dessa sobreposição, há uma coloração mais escura entre os intervalos 1 e 2 no eixo x. Essa coloração mais escura representa a solução do sistema de inequação y, e as retas verticais contínuas que passam pelos pontos 1 e 2 no eixo x indicam que esses números pertencem à solução do sistema de inequação y.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \geq 1 \\ 3x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e, após resolverem algebricamente, digitarem esse sistema no ambiente Demos para relacionar as soluções algébricas com o gráfico gerado no Desmos.

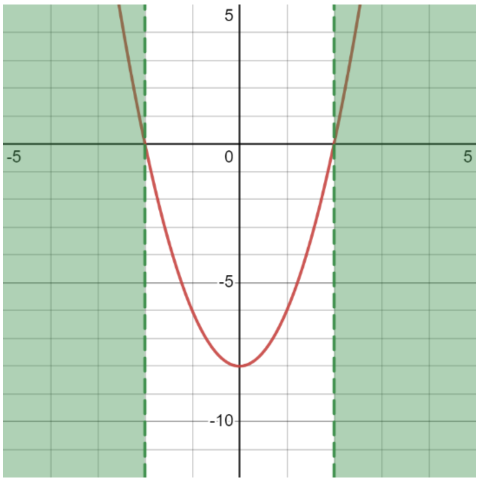
Comportamento esperado: O comportamento que esperamos, é que os alunos possam usar todos os procedimentos algébricos para resolverem o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$, e percebam que o sinal oposto da desigualdade não alterou os pontos pelos quais as retas verticais contínuas passam no eixo x (nos pontos 1 e 2). No entanto, também espera-se que notem que essa mudança eliminou a sobreposição de cores, levando-os a concluir que essa função não tem solução.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam os sistemas $y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e $y = \begin{cases} 5x + 10 \geq 15 \\ 4x - 3 \geq 5 \end{cases}$, analisem os seus gráficos no ambiente Desmos e exponham sua interpretação. É importante pontuar que, nessa fase da atividade não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos saibam resolver algebricamente esses sistemas de inequação polinomial de primeiro grau e consigam relacionar suas soluções algébricas com as soluções gráficas exibidas na tela ao digitá – las na calculadora do *software* Desmos.

Atividade 4 – Estudando $ax^2 + bx + c > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $2x^2 - 8 > 0$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 4 - Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 2$ no Desmos

2 – Digite $b = -8$ no Desmos

3 – Digite $c = 0$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $b = -5$ $a = 6$ $ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 1$ $b = 2$ $a = 1$ $ax^2 + bx + c \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a quarta atividade da experimentação.

A quarta atividade será utilizada para introduzir um novo objeto matemático: a inequação polinomial de segundo grau. Como os alunos ainda não estudaram esse conteúdo e novos comandos aparecerão no ambiente Desmos, haverá uma quantidade maior de intervenções do pesquisador nesse momento. Contudo, ressaltamos que essa intervenção diminuirá à medida que a atividade se desenvolve, a fim de se verificar a instrumentalização do software Desmos pelos alunos, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos excluam os dados no ambiente Desmos da questão anterior, e insira os parâmetros $a = 2$, $b = -8$ e $c = 0$. Em seguida, pedirá que insiram a equação $y = ax^2 + bx + c$ e a inequação $ax^2 + bx + c > 0$ no ambiente Desmos, explicando como inserir o expoente dois em ambos os casos. Depois, o pesquisador solicitará que os alunos resolvam a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e compartilhem a suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos reconheçam, ainda que de forma oral, que o cálculo das raízes da equação $2x^2 - 8x = 0$ é semelhante ao cálculo das raízes da inequação $2x^2 - 8x > 0$. No entanto, espera – se também que eles não saibam interpretar matematicamente a diferença entre ambas as respostas.

Ação do pesquisador: Após alguns minutos para a socialização das respostas no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo apresentado. Caso não haja, o pesquisador associará a inequação $2x^2 - 8x > 0$ com a equação $2x^2 - 8x = 0$, determinando a solução da inequação $2x^2 - 8x > 0$, após realizar as manipulações algébricas necessárias.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá para os alunos digitarem em uma aba no Desmos o comando $d = b^2 - 4ac$, na outra aba $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ e por fim o comando $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos relacionem os cálculos feitos algebricamente com aqueles realizados pelo Desmos e percebam que o expoente 0,5 representa o símbolo da raiz quadrada.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos relacionem a solução algébrica realizada anteriormente com o gráfico apresentado na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos respondam, ainda que de forma verbal, que a imagem apresentada no Desmos justifica a solução algébrica. Espera-se também que eles notem que o gráfico apresenta uma coloração diferente a partir dos pontos 0 e -4 no eixo $x,$ destacando que a linha vertical tracejada que passa por esses pontos indica que esses números não pertencem à solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ de forma algébrica e, após isso, digitem a inequação no Desmos.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos utilizem o mesmo método algébrico aplicado para resolver a inequação $2x^2 - 8x > 0$ e percebam que o sinal de desigualdade não alterou as raízes encontradas anteriormente. Ao digitarem a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ no Desmos, notem que as retas verticais que passam pelos pontos 0 e – 4 no eixo x se torna contínuas, e façam referência a esse fato com a presença dos pontos 0 e – 4 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador irá pedir para os alunos resolvam algebricamente as inequações:

(a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6 \quad ax^2 + bx + c < 0$

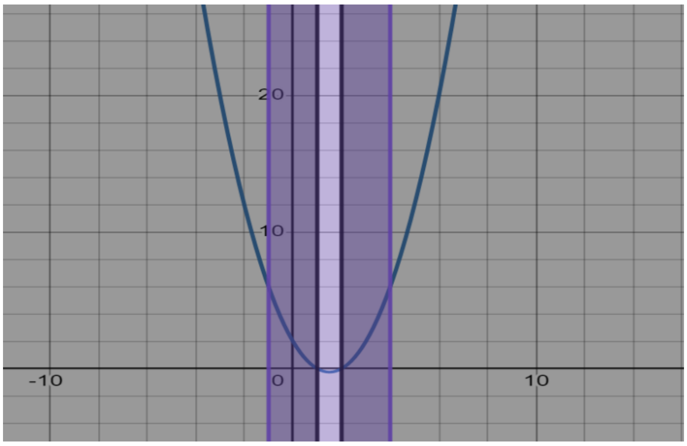
(b) $a = 1 \; b = 2 \; a = 1 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$

e analisem os gráficos correspondentes no software Desmos, além de fazerem as interpretações das soluções verbalmente. Nessa fase, não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos saibam manipular algebricamente cada inequação e consigam relacionar a solução com o gráfico apresentado no ambiente Desmos.

Atividade 5 – Estudando $d \leq ax^2 + bx + c \leq e$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 5 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = -3$ no Desmos

3 – Digite $c = 2$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite no Desmos $ax^2 + bx + c \geq 0$ em uma aba e na outra linha $ax^2 + bx + c \leq 6$

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_1 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 6$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad c = -4$ $\quad 4 < ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 2$ $\quad b = 6$ $\quad c = -8$ $\quad -4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

O comportamento do pesquisador durante a quinta atividade da experimentação

Essa atividade visa desenvolver a compreensão dos alunos sobre inequações quadráticas, incentivando-os a explorar visualmente esses conceitos usando o Desmos como ferramenta, conforme Rabardel (1995). Os alunos são desafiados a compreender profundamente tanto a teoria matemática quanto o funcionamento do instrumento tecnológico, ao mesmo tempo que praticam a habilidade de manipulação e interpretação de gráficos, de acordo com Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos substituam os valores dos coeficientes da atividade anterior pelos valores $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$ e que digitam em uma aba a inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2$, em outra aba a inequação $ax^2 + bx + c \leq 6$,e, por fim, a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos saibam desenvolver, de forma algébrica, as soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e comparem os valores encontrados com os valores expostos no Desmos para $d, x_1 e\ x_2$. Além disso, espera – se que eles deduzam que o Desmos determina os valores das variáveis $d, x_1 e\ x_2$ em função dos coeficientes a, b e c.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos determinem a solução da inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2 \leq 6$ de forma verbal e escrita.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam à pergunta com base no gráfico gerado pelo Desmos, percebendo que há duas regiões sobrepostas com cores mais escuras que as demais. Além disso, espera-se que eles notem quatro retas verticais contínuas passando pelos pontos $-1, 1, 2\ e\ 4$ no eixo x, contidas nessas regiões mais escuras, e que deduzam que o intervalo delimitado pelos dois pares de retas verticais determina a solução da inequação.

Ação do pesquisador: A seguir, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

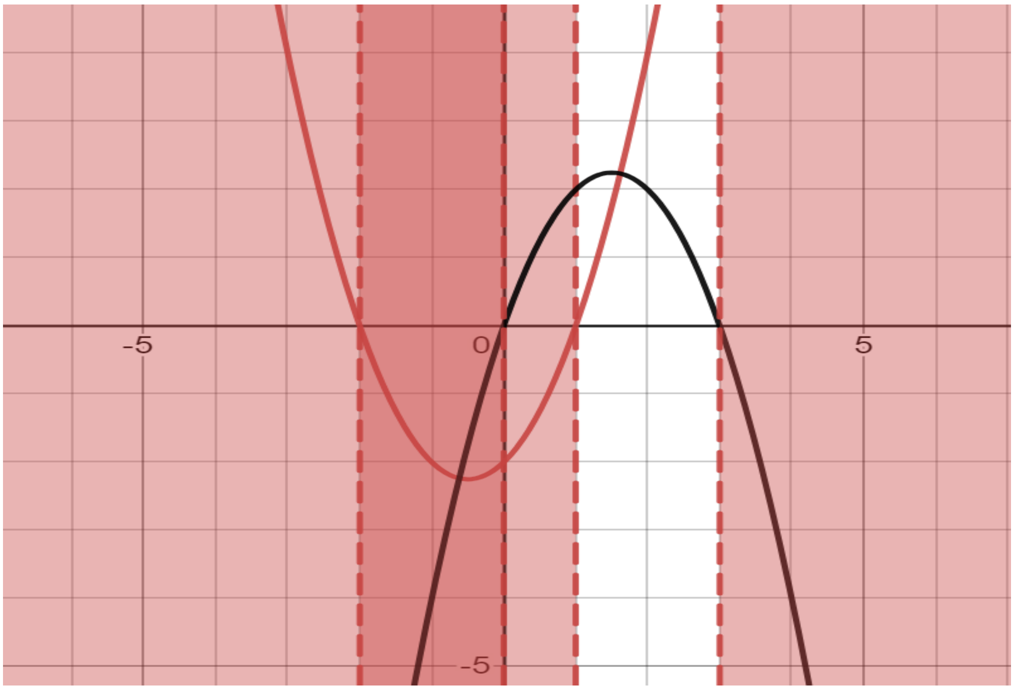
a) $a = 1$ $b = -5$ $c = -4$ $4 < ax^2 + bx + c < 0$
b) $a = 2$ $b = 6$ $c = -8$ $-4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

e analisarem os gráficos correspondentes no Desmos, dando suas interpretações. Ressaltamos que não haverá intervenção do pesquisador nessa fase.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam entender a relação entre a representação simbólica da inequação e sua representação gráfica no Desmos, e que, posteriormente, traduzam essas representações como as soluções das inequações.

Atividade 6 – Estudando $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Espaço dos comentários

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 6 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = 3$ no Desmos

3 – Digite $c = -4$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Digite uma nova função $g = vx^2 + tx$

7 – Digite $v = -1$no Desmos

8 – Digite $t = 3$ no Desmos

9 – Peça para o aluno desenvolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

10 – Qual a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $b = -5$ $c = -20$ e $v = 1$ $t = -4$ $e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2$ $b = -1$ $c = 1$ e $v = 4$ $t = -8$ $e = 3$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

O comportamento do pesquisador durante a sexta atividade da experimentação

Nessa atividade, busca-se que os alunos sejam capazes de resolver sistemas de inequações quadráticas, identificar as regiões das soluções e utilizar o Desmos como instrumento para visualizar graficamente as soluções desses sistemas. Eles deverão identificar as regiões onde ambas as inequações são verdadeiras. Os alunos são desafiados a entender profundamente como manipular o Desmos para explorar e resolver sistemas de inequações quadráticas, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados, realizando, assim, a gênese instrumental proposta por Rabardel (1995). Além disso, são desafiados a traduzir essas representações simbólicas como sendo as soluções da inequação, segundo a semiótica de Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos inclua novos valores para os coeficientes $a, b\ e\ c$ e digitem os valores $a = 1, b = 1\ e\ c = -3$. Em seguida, deverão inserir em uma aba a função $y = ax^2 + bx + c$ e, em outra, a inequação $ax^2 + bx + c > 0$. Depois, o pesquisador solicitará que incluíam novos coeficientes, $v = -1\ e\ t = 3$, e que digitem em uma nova aba a função $g = vx^2 + tx$ e, em uma outra, a inequação $vx^2 + tx < 0$. Após isso, os alunos deverão resolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos demorem um pouco mais para absorver as informações, devido à maior quantidade de dados na atividade. Eles devem comparar os valores obtidos de forma algébrica com os apresentados no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos compartilharem a suas soluções no quadro e tomará como exemplo a melhor resposta. Caso não haja socialização das respostas, o pesquisador tomará o exemplo da atividade proposta e associará a solução do sistema de inequação quadrática $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, com a soluções das equações $x^2 + 3x - 4 = 0$ e $3x - x^2 = 0$, determinando a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, após realizar o procedimento algébrico necessário.

Ação do pesquisador: Após esse processo, o pesquisador pedirá aos alunos que observem a representação gráfica gerada no ambiente Desmos e responderem qual a solução da inequação $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos respondam de forma verbal que a solução representa a parte sombreada, no intervalo dos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x , além de perceberem que a reta vertical tracejada que passa pelos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x, indica que esses pontos não pertencem a solução.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

(a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = -20$ e $v = 1 \quad t = -4 \quad e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2 \quad b = -1 \quad c = 1$ e $v = 4 \quad t = -8 \quad e = 3$

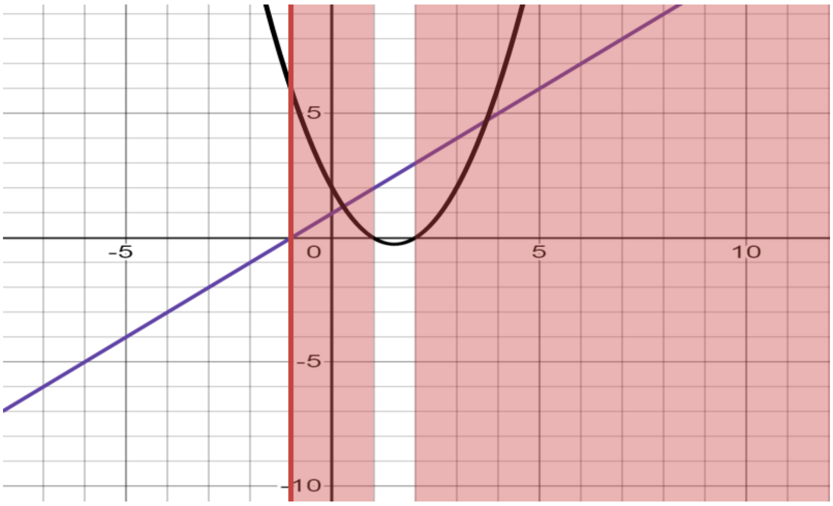
$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

Usando os mesmos procedimentos da atividade anterior.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas questões de forma algébrica, além de observar as relações entre as inequações e interpretá-las em termos do que representam graficamente. Suas observações devem refletir sua compreensão dos conceitos matemáticos, bem como sua capacidade de interpretar e analisar representações gráficas de problemas matemáticos.

Atividade 7 – Estudando $\frac{ax+b}{ax^2+bx+x} \geq 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

Espaço dos comentários

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 7 – Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $f = x + 1$ no Desmos

2 – Faça o gráfico de uma nova função $g = x^2 - 3x + 2$ no Desmos

3 – Digite $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

4 – Peça para o aluno clicar no ponto $(-1,0)$ e descrever o que observou

5 – Peça para o aluno desenvolver as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$

6 – Peça para o aluno interpretar a solução da inequação $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$ no gráfico

7 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

8 – Peça para o aluno repetir os mesmos processos nas inequações abaixo:

a) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

b) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

O comportamento do pesquisador durante a 7º Atividade da experimentação

A última atividade proposta tem como objetivo desafiar os alunos a compreender profundamente como usar o Desmos para explorar e resolver inequações racionais, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados. Os alunos aprenderão a utilizar o Desmos para visualizar expressões racionais e experimentar com diferentes configurações de gráficos e ajustes de parâmetros para identificar as regiões de solução, realizando o que Rabardel (1995) denominou de instrumentalização. Além disso, eles entenderão a relação entre a representação simbólica da expressão racional e sua representação gráfica no Desmos, sendo desafiados a traduzir entre essas representações e interpretar as regiões onde a expressão é não negativa, conforme a teoria da representação semiótica de Duval (2003).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá aos alunos que digitem no ambiente Desmos, em abas separadas, as funções $f = x + 1$ e $g = x^2 - 3x + 2$. Em seguida, solicitará que insiram a inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, podendo orientar sobre como fazer a representação da divisão entre funções no Desmos, se necessário.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos já tenham facilidade em inserir essas informações corretamente no Desmos, precisando de orientação apenas quanto ao símbolo de divisão entre funções.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos que cliquem no ponto de coordenada $(-1,0)$, e perguntar o que eles observaram.

Comportamento esperado: Espera – se que eles respondam que, por esse ponto, passa uma reta vertical contínua, indicando que ele pertence à solução da inequação, assim como todos os pontos á direita de -1 no eixo x, excluindo os pontos entre as coordenadas $(1,0)$ e $(2,0)$. Os alunos devem perceber que essas coordenas não pertencem á solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador solicitará que os alunos resolvam as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$, em que compartilhem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos não tenham dificuldades em resolver esse tipo de equações, associando a solução das equações com atividades passadas.

Ação do pesquisador: Após aguardar o tempo para resolução, o pesquisador tomará como exemplo a melhor resposta apresentada no quadro. Caso não haja socialização das respostas, ele associará a resolução dessas equações com equações de atividades anteriores, para que, a partir dessa associação, os alunos possam desenvolver de forma segura a álgebra envolvida.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá que os alunos interpretem a resolução da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, explicando-a de forma verbal, com base no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos interpretem o gráfico, admitindo que a parte colorida que aparece representa todas as soluções da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$. Eles devem perceber também que as coordenas $(1{,}0)$ e $(2{,}0)$ não pertencerem à solução da inequação, pelo fato que não pode haver divisão por zero, e que, em toda a divisão, o denominador tem que ser maior que zero.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

a) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

b) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

Comparando a solução algébrica com a solução gráfica apresentada pelo Desmos.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas inequações corretamente e saibam interpretar a solução algébrica em comparação com a solução gráfica apresentada no ambiente Desmos.

7. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, analisaremos os dados obtidos na experimentação didática a partir das respostas dos alunos identificados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J, com idades entre 15 e 17 anos. A maioria desses alunos cursa o 1º ano do ensino médio em escolas da rede pública, embora também haja alunos da rede particular cursando o 1º ou o 3º ano. É relevante destacar que, devido à pandemia de COVID-19, os alunos do 3º ano não tiveram aulas regulares quando cursavam o 1º ano do ensino médio, o que comprometeu a cobertura completa do conteúdo programático, incluindo o estudo das inequações polinomiais de 1º e 2º graus.

Para a análise, adotaremos as perspectivas teóricas de Rabardel (1995) e Duval (2003). Inicialmente, conforme a Teoria Instrumental de Rabardel, examinaremos as relações entre sujeito-objeto e instrumento-objeto durante a experimentação didática, observando como os alunos interagiram com os instrumentos disponibilizados para a resolução das atividades. Constatou-se que, nas primeiras tarefas, a maioria dos alunos não conseguiu desenvolver os tratamentos adequados, enfrentando dificuldades tanto na manipulação simbólica quanto na transposição entre registros de representação semiótica, como propõe Duval. Muitos relataram não se lembrar dos procedimentos corretos e confundiram frequentemente inequações com equações. O relato da aluna E ilustra essa dificuldade: “Não entendi e não lembro como se faz a inequação.”

Contudo, à medida que as atividades progrediram, observou-se um desenvolvimento instrumental e uma maior competência na coordenação de registros de representação semiótica. A maioria dos alunos começou a dominar as técnicas para resolver inequações polinomiais de 1º e 2º graus, fazendo analogias com equações de 1º e 2º graus, mas ajustando o sinal de igualdade para o de desigualdade, o que resultou em uma interpretação adequada das raízes encontradas. Esse progresso decorreu não apenas das interações mediadas pelos instrumentos, mas também do compartilhamento de soluções por alunos que compreenderam o processo, bem como das interações entre os próprios alunos e das intervenções planejadas ao longo da sequência didática, favorecendo a conversão e articulação entre diferentes registros, conforme Duval.

A transcrição do diálogo entre a aluna F e os alunos E, G e H demonstra esse resultado:

Aluna F: “ aqui temos uma equação, como aprendemos no 9º ano, mas só muda esse símbolo e a interpretação, porque se fosse equação o resultado seria 2 como é uma inequação e o sinal fala que é maior, então a gente ler maior que 2, então a resposta não pode ser 2 tem que ser maior 2,1;2,2 e assim vai”.

Observei que os alunos demonstraram insegurança em situações onde a inequação exigia a mudança de sinal e quando não compreendiam o motivo pelo qual o discriminante Δ (delta) era elevado ao expoente decimal 0,5, especialmente ao inserir a equação no ambiente Desmos. A dúvida em relação à troca de sinal da inequação foi sanada com o uso da função de arraste no Desmos, permitindo aos alunos observar interativamente a justificativa para essa mudança. Quanto ao expoente do discriminante, foram necessárias intervenções que ajudassem os alunos a relembrar as propriedades das potências aprendidas no 9º ano do ensino fundamental.

Em seguida, realizamos uma análise da relação entre o objeto e o instrumento, conforme a perspectiva de Rabardel (1995). Nas primeiras atividades, percebemos que os alunos enfrentaram dificuldades em realizar a conversão adequada entre a expressão algébrica e sua representação gráfica, gerada pelas inequações polinomiais de 1º e 2º graus no ambiente Desmos. Quando questionados sobre o que observavam no gráfico e qual a relação entre o gráfico e a solução algebricamente encontrada, muitos responderam que perceberam apenas que uma parte do plano cartesiano ficava colorida ou sombreada, enquanto outra parte permanecia em branco. Contudo, não conseguiram relacionar, nas atividades iniciais, que essa coloração indicava os intervalos pertencentes à solução das inequações.

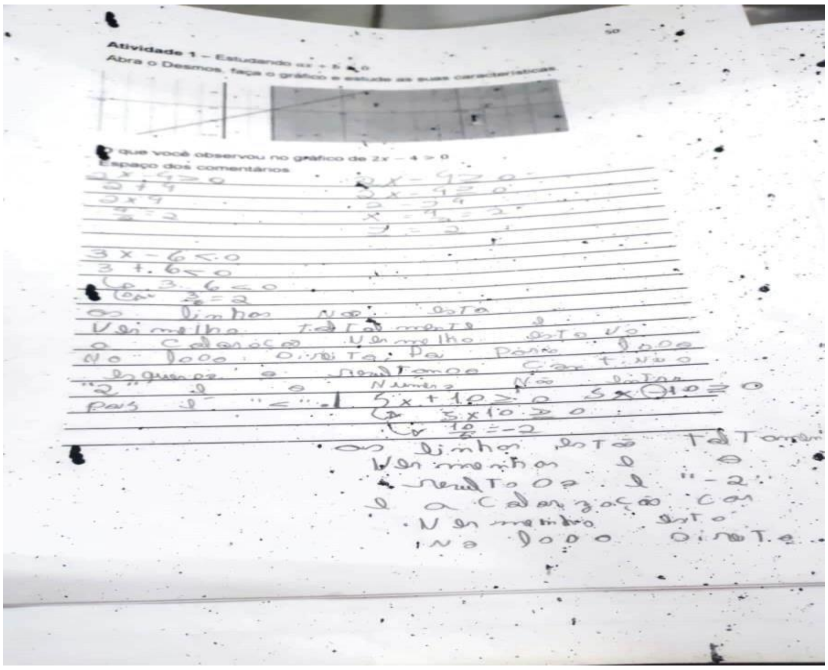
A transcrição feita pelo aluno C exemplifica como a maioria dos alunos interpretava a solução no ambiente Desmos: “O gráfico fez uma movimentação e duas partes ficaram vermelhas e uma em branco, e há uma reta pontilhada passando pela solução que encontrei; ela é pontilhada.” No entanto, ao longo das atividades, observamos um maior domínio na interpretação gráfica, com os alunos começando a relacionar o que a reta contínua ou pontilhada expressava ao cruzar as raízes das inequações polinomiais de 1º e 2º graus, bem como os intervalos das soluções expressos no Desmos como a região colorida.

A resposta do aluno A à indagação sobre o que ele observava no gráfico e sua relação com as raízes encontradas algebricamente demonstra como a maioria dos alunos compreendeu a solução gráfica gerada no Desmos: "Olha, a região colorida indica os números da solução da inequação. Essa parte branca não faz parte da solução; essa reta pontilhada na solução indica que o -2 não entra na resposta, mas como essa reta aqui está contínua no ponto 3, indica que ele entra na solução." Assim, o Desmos contribuiu significativamente para o entendimento das soluções das inequações polinomiais de 1º e 2º graus. Através de seu dinamismo, foi possível alterar os parâmetros das inequações propostas, o que modificava as regiões coloridas e permitia aos alunos perceber que as variações dos coeficientes levavam a diferentes soluções. No entanto, durante o uso do Desmos, os alunos enfrentaram maior dificuldade na manipulação das inequações polinomiais de 2º grau, devido ao maior número de coeficientes e equações a serem inseridos no ambiente.

Superamos esses obstáculos por meio de interações entre os próprios alunos, onde aqueles que dominavam o uso do Desmos auxiliaram os colegas com dificuldades, resultando em uma colaboração mútua. Com esse obstáculo superado, foi possível verificar a última relação: a relação entre o sujeito e o objeto, intermediada pelo instrumento. De acordo com Rabardel (1995), essa relação indica se os alunos conseguiram instrumentalizar o software Desmos para aprender o objeto matemático das inequações polinomiais de 1º e 2º graus. É importante destacar que, ao analisar essa relação, utilizamos também a Teoria da Representação Semiótica de Duval (2003), que enfatiza a importância das representações no funcionamento racional do pensamento humano. Nessa análise, consideramos o tratamento algébrico realizado pelos estudantes e a conversão resultante das interpretações feitas ao analisarem os gráficos das inequações polinomiais de 1º e 2º graus no Desmos.

Com base na primeira atividade desenvolvida, notamos que a maioria dos alunos relacionou o tratamento algébrico da inequação ao de uma equação, demonstrando que ainda não compreendiam a diferença entre os dois tratamentos. A figura a seguir representa a maioria das respostas dos estudantes que não conseguiram desenvolver a inequação utilizando o tratamento algébrico correto.

Figura 6: Atividade desenvolvida pelo aluno C.



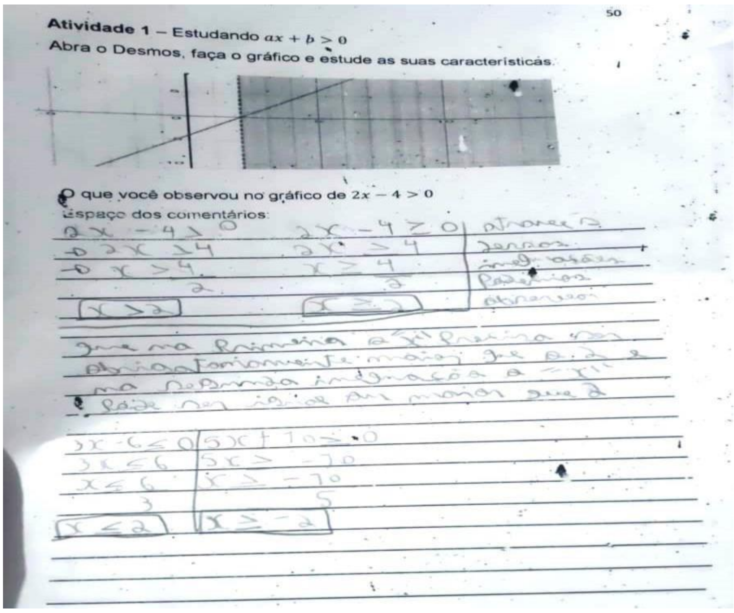
Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

Uma das possíveis causas para a dificuldade dos alunos em realizar o tratamento correto das inequações pode estar relacionada a um entendimento insuficiente do conteúdo quando a inequação polinomial de 1º grau foi apresentada no ensino fundamental. Essa deficiência no processo de instrumentalização, conforme descrito por Rabardel (1995), indica que os alunos não desenvolveram adequadamente os esquemas de uso necessários para manipular as inequações de forma eficiente. A maioria dos alunos que apresentou dificuldades relatou não se lembrar de como resolver inequações, o que sugere que eles não conseguiram converter e articular adequadamente os diferentes registros de representação semiótica envolvidos na resolução das inequações, conforme proposto por Duval (2003). A transcrição da aluna E exemplifica essa dificuldade: "Não entendi e não lembro como se faz a inequação".

No entanto, uma minoria dos alunos conseguiu realizar o tratamento algébrico adequado ao manipular as inequações, demonstrando que esses estudantes conseguiram estabelecer uma relação mais sólida entre o sujeito e o objeto, mediada pelo instrumento, conforme a perspectiva de Rabardel, além de uma melhor coordenação dos registros de representação semiótica, como sugere Duval.

A figura a seguir apresenta a resposta do aluno I, representando esse grupo de alunos que conseguiu realizar o tratamento correto das inequações.

Figura 7: Atividade desenvolvida pelo aluno I.

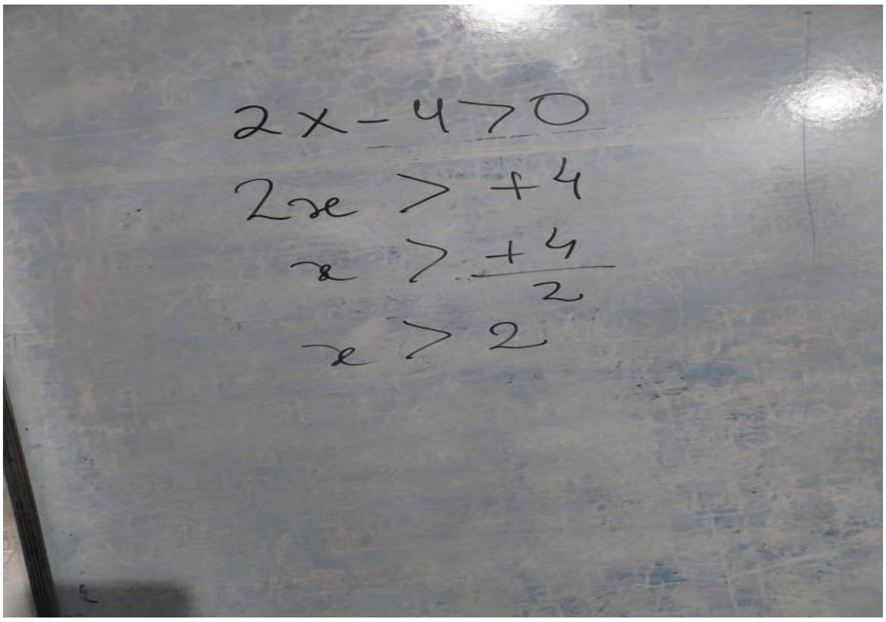


Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

Após a introdução do software Desmos, foi solicitado aos alunos que digitassem as inequações no ambiente e interpretassem a representação gráfica resultante. Como respostas, observamos que a maioria dos alunos percebeu que, ao inserir a inequação no Desmos, uma parte do plano cartesiano ficava colorida, e, quando havia interseção entre essas partes, elas apareciam sombreadas. Além disso, notaram a existência de uma reta vertical que passava pelas raízes da inequação, podendo ser contínua ou pontilhada. A transcrição da aluna I exemplifica as observações feitas por esse grupo de alunos: "Antes de eu digitar, a tela do meu celular estava toda branca. Depois que digitei a inequação, uma parte ficou vermelha, não toda a tela, apenas a metade a partir do ponto (2,0), e tem uma reta pontilhada no ponto (2,0)."

Dessa forma, percebemos que a conversão de registros de representação semiótica, conforme Duval (2003), foi parcialmente satisfatória. A maioria dos alunos não percebeu que a parte colorida da representação gráfica da inequação estava diretamente relacionada à sua solução. Além disso, a reta vertical que passa pela raiz da inequação, sendo pontilhada ou contínua, indica se a coordenada pertence ou não à solução. Esse detalhe passou despercebido por muitos, sugerindo que a instrumentalização do Desmos (Rabardel, 1995) não foi completamente eficaz em mediar essa compreensão. Por outro lado, uma minoria dos alunos conseguiu fazer essa conversão com sucesso, interpretando corretamente a relação entre a representação gráfica e o tratamento algébrico. A resposta da aluna F ilustra essa compreensão: "Tá cortando no 2, ela não corta no y, só tem uma linha vertical cortando no eixo x, tem uma parte pintada, e toda a galera pintada maior que o ponto (2,0) é que tá valendo." Ao serem induzidos a resolver algebricamente outras inequações e alterar o sinal dessas inequações no Desmos, os alunos foram desafiados a descrever o que o gráfico representava com essas mudanças. Como resultado, a maioria dos alunos conseguiu desenvolver o tratamento adequado para resolver as inequações propostas. Acredito que uma das causas dessa mudança de comportamento foi o compartilhamento da solução no quadro pela aluna F, o que ajudou os demais a relembrar e aplicar corretamente o tratamento algébrico na resolução das inequações.

Figura 8: Atividade compartilhada pela aluna F.



Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

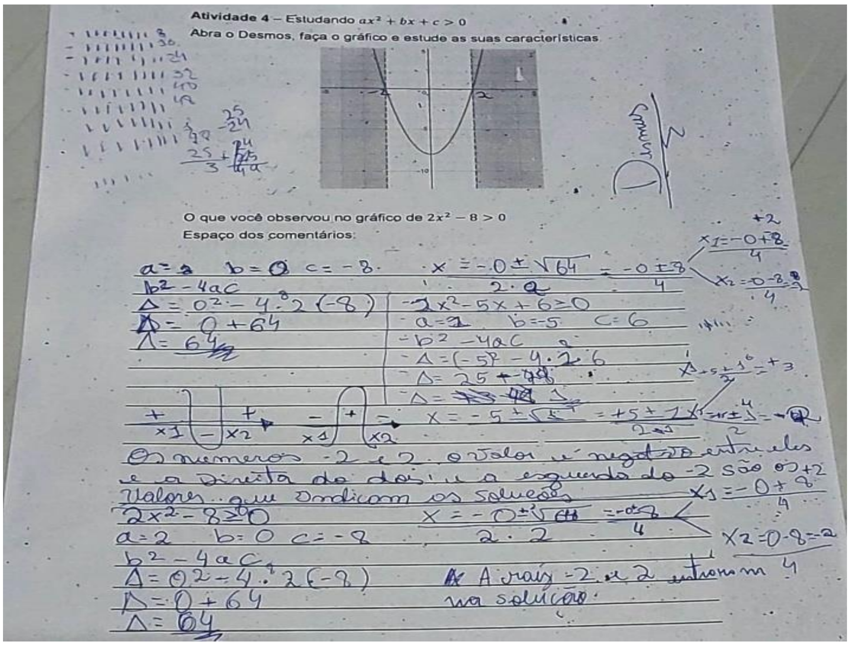
No entanto, a maioria dos alunos ainda não conseguiu realizar a conversão adequada dos dados gráficos para o tratamento algébrico, o que reflete uma dificuldade na transição entre diferentes registros de representação, como descrito por Duval (2003). Muitos alunos não perceberam o significado da delimitação de uma região colorida e outra não no gráfico gerado pelo Desmos, nem justificaram corretamente o motivo pelo qual a reta vertical que passa pelas raízes é pontilhada ou contínua. A transcrição do aluno B ao tentar justificar essas mudanças ilustra essa dificuldade: 'Tem uma parte pintada de vermelho, antes era verde, à direita do ponto (2,0), e agora a reta é contínua que passa no ponto (2,0).'

Por outro lado, uma minoria dos alunos conseguiu captar essas nuances e realizar a conversão correta da linguagem gráfica para a linguagem algébrica, evidenciando um processo de instrumentalização eficaz, conforme discutido por Rabardel (1995). O diálogo do aluno D representa bem a compreensão desse grupo: 'Uma parte à direita do ponto (2,0) ficou colorida, e a esquerda ficou em branco, e tem uma reta pontilhada passando pelo ponto (2,0), indicando que esse ponto não pertence à solução da inequação.'

À medida que o desenvolvimento da sequência de atividades progrediu, observamos que a maioria dos alunos começou a se adaptar, realizando não apenas o tratamento algébrico de forma correta, mas também a conversão adequada entre as representações gráfica e algébrica. Um dos fatores que contribuiu para essa mudança de comportamento foi a possibilidade de verificar, por meio da análise gráfica, se o tratamento algébrico estava correto ou não. Este processo de verificação gráfica pode ser visto como uma etapa crucial na instrumentalização do software Desmos, conforme Rabardel, ao permitir que os alunos explorassem e validassem suas soluções matemáticas.

O relato do aluno B comprova essa observação: 'O Desmos me ajudou a ver se minha conta estava certa ou errada, porque o resultado que eu encontrei não tem nesse gráfico, então refiz a conta e agora bateu.' A figura abaixo representa o tratamento algébrico realizado pelo aluno B.

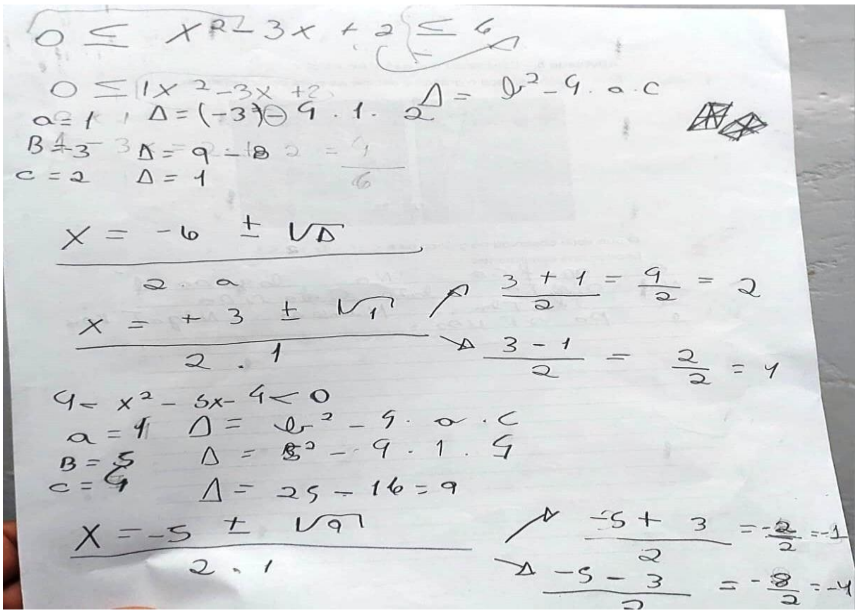
Figura 9: Atividade compartilhada pela aluno B.



Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

O tratamento realizado pelo aluno C na atividade 5 corrobora a observação do estudante B, uma vez que, nas primeiras atividades, o aluno C realizava o tratamento de uma inequação como se fosse uma equação, evidenciando dificuldades na conversão entre registros de representação, conforme descrito por Duval (2003). No entanto, com o desenvolvimento das atividades, foi possível constatar a evolução da aprendizagem do aluno C e dos demais alunos que apresentavam os mesmos erros, à medida que começaram a compreender e diferenciar adequadamente os registros algébrico e gráfico.

Figura 10: Atividade compartilhada pela aluno C.



Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

Dessa forma, podemos perceber a importância do Desmos na aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º graus. Além de atuar como um instrumento mediador no processo de aprendizagem, conforme descrito por Rabardel (1995), o Desmos permite aos alunos verificar a correção do tratamento algébrico. Ele também facilita a conversão de representações, um aspecto crucial segundo a Teoria de Representação Semiótica de Duval (2003), ao auxiliar os alunos na interpretação geométrica das raízes e na transição entre as representações algébrica e gráfica de forma mais eficaz.

No próximo capítulo, apresentaremos as considerações finais, onde discutiremos os resultados obtidos e as expectativas geradas pela pesquisa.

Considerações Finais

Nesta pesquisa, buscamos explorar novas possibilidades para o ensino de inequações polinomiais de 1º e 2º graus, utilizando o software Desmos como instrumento mediador. A questão central que nos motivou foi: Qual é a potencialidade de uma sequência de atividades que utiliza um software de calculadora gráfica no ensino de inequações polinomiais de 1º e 2º graus? Para responder a essa pergunta, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, guiada pelo referencial teórico da Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), pela Teoria das Representações Semióticas de Duval (2003) e pela Análise Microgenética. Dessa forma, elaboramos uma sequência de atividades, fundamentadas nas perspectivas de Rabardel (1995) e Duval (2003), composta por sete atividades que abordam o objeto matemático das inequações polinomiais de 1º e 2º graus.

Para responder a essas atividades, selecionamos 10 alunos do ensino médio, sendo a maioria do 1º ano de uma escola pública. Durante as primeiras atividades, os alunos demonstraram insegurança tanto no tratamento algébrico quanto na conversão da linguagem algébrica para a linguagem gráfica. Frequentemente, eles confundiam o conceito de equação com o de inequação, sem conseguir estabelecer a correspondência adequada entre os intervalos das inequações e suas representações gráficas no ambiente Desmos. No entanto, ao longo das atividades, e por meio das intervenções do pesquisador, bem como das interações entre os próprios alunos ao compartilharem suas resoluções, observou-se um processo de instrumentalização e instrumentação, conforme proposto por Rabardel (1995). Os alunos que inicialmente tinham dificuldades começaram a transformar o Desmos de um simples artefato em um verdadeiro instrumento, desenvolvendo um tratamento algébrico mais satisfatório das inequações polinomiais de 1º e 2º graus.

Apesar disso, é importante destacar que a alguns alunos tiveram dificuldades em relacionar as soluções algébricas com as representações gráficas no Desmos. Ou seja, encontraram desafios na conversão de registros de representação semiótica, um conceito central na teoria de Duval (2003). A conversão entre o registro algébrico e o gráfico foi inicialmente insatisfatória, e os alunos não conseguiam conectar as soluções algébricas com as representações gráficas correspondentes. Essas dificuldades foram gradualmente superadas através das interações entre alunos e pesquisador, e entre os próprios alunos, especialmente por meio da manipulação interativa do ambiente Desmos, utilizando a função 'arraste'. Essa ferramenta permitiu que os alunos explorassem a variação dos coeficientes das inequações polinomiais de 1º e 2º graus e observassem como as soluções gráficas se modificavam. Esse processo interativo auxiliou os alunos a estabelecer uma correspondência mais clara entre as mudanças nos coeficientes e as soluções gráficas, facilitando a conversão de registros de forma mais eficaz.

A função 'arraste' no Desmos, ao permitir a variação dinâmica dos coeficientes, funcionou como um meio de potencialização cognitiva, ampliando a percepção dos alunos sobre a relação entre as formas algébrica e gráfica das inequações. Ao longo das atividades, os alunos demonstraram um domínio crescente das inequações polinomiais de 1º e 2º graus, com o Desmos se revelando um instrumento essencial para essa aprendizagem, ajudando-os a interpretar as soluções graficamente e a realizar conversões entre registros de forma mais satisfatória. No entanto, é crucial mencionar as limitações encontradas ao longo da pesquisa, tais como as dificuldades iniciais dos alunos em familiarizar-se com o ambiente Desmos, indicando a necessidade de um período de adaptação. Também enfrentamos desafios na condução da aprendizagem colaborativa, exigindo intervenções do pesquisador para manter o engajamento dos alunos. Além disso, as conclusões desta pesquisa estão limitadas ao contexto específico de um grupo de estudantes do ensino médio de uma escola pública, o que pode não refletir a realidade de outras instituições.

Em resumo, esperamos que a sequência de atividades apresentada possa servir como uma ferramenta útil para professores interessados em utilizar o Desmos no ensino de inequações polinomiais de 1º e 2º graus. Futuramente, esperamos que outros professores possam contribuir para o aprimoramento desta pesquisa, destacando aspectos que podem ser melhorados e potencializados, sempre com o objetivo de proporcionar uma educação de qualidade aos nossos alunos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

ALVARENGA, Karly Barbosa. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 03 março. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília 2002.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras,** Dissertação de Mestrado – Pará, 2004.

CHAVES, A. P. Concepções e ensino de inequações: emprego das técnicas de resolução de equações do 1º grau ou por meio do estudo de funções afim? **Horizontes - Revista de Educação ISSN 2318-1540**, *[S. l.]*, v. 6, n. 11, p. 47–61, 2018. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/horizontes/article/view/8741. Acesso em: 6 abr. 2024.

DICETTI, Tanara da Silva; BISOGININ, Eleni; PRETTO, Valdir. **Ensino e aprendizagem de inequações: uma revisão bibliográfica de pesquisas cientificas**. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03028997/document. Acesso em: 26 jan. 2022.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática ***In: Aprendizagem em matemárica: registro de representação semiótica***. 1 ed. Campinas: Papirus, 2003, v.1, p.11-33.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. Ed. Campinas – SP. Editora da Unicamp. 2011, p. 57-71.

FONTES, Maurício de Moraes et. al. **O Computador como recurso facilitador da aprendizagem Matemática**. Atas do I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia/SNECT. Ponta Grossa-PR, 2009. Disponivel em: Acesso em: 15 mar. 2024.

GOÉS, M.C.R.de. **A abordagem microgenética matriz histórico – cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade.** V.20, Campinas: Caderno Cedes, 2000.

LEMOS JÚNIOR, José Alci Silva**. Estudo de funções afins e quadráticas com o auxílio do computador**. Dissertação de Mestrado – Paraíba, 2013.

PADILHA, Luís Cleber Soares ; BITTAR, Marilena. **O CICLO DE AÇÕES E A GÊNESE INSTRUMENTAL NA APROPRIAÇÃO DE UM SOFTWARE PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.** Disponível em:

https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/492/submission/director/492.pdf. Acesso em: 06 dez. 2023**.**

QUEIROZ, DIEGO DA SILVA. **AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO**. Dissertação de Mestrado – São Paulo – 2021.

RABADEL,P.. ***Les hommes et les Technologies: approche cognitive des instruments contemporains.*** Paris. Armand Colin. 1995.

TRAVASSOS, Wilian Barbosa; PROENÇA, Marcelo Carlos de. Ensino e Aprendizagem de Inequações na Escola: um estudo exploratório a partir de dissertações e teses. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 13, n. 4, p. 1–21, 2022. DOI: 10.26843/rencima.v13n4a14. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/3528. Acesso em: 6 abr. 2024.

TRAVASSOS, Wilian Barbosa; PROENÇA, Marcelo Carlos de. INEQUAÇÃO DE 1º GRAU E SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Revista Valore**, [S.l.], v. 6, p. 1802-1820, jul. 2021. ISSN 2526-043X. Disponível em: https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/932. Acesso em: 06 abr. 2024.

JUNIOR, Fernando da Silva Conceição. Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 13, n. 2, 2011.

MELO, M. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de Licenciatura em Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação) – São Paulo, 2007.

MINEIRO, Renato Mendes**. ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE INEQUAÇÕES**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo,2019

SALDANHA, Maria Sueli Gomes. **Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – São Paulo, 2007.

SALAZAR, Jesus Victoria Flores. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço**. Doutorado em Educação Matemática – São Paulo, 2009.

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO POLINOMIAL DE 1° E 2° GRAU USANDO COMO INSTRUMENTO O SOFTWARE DESMOS

MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES

Diagramação e Capa: Os autores

Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

Cristo, Maicon Michel Trindade de
Uma proposta para o ensino de inequação polinominal de 1° e 2° grau usando como recurso o software Desmos/ Maicon Michel Trindade de Cristo, 2024.
49 p.

Produto educacional vinculado à Dissertação "Ensino de Inequação Polinomial de 1° e 2° grau com o Auxilio do Software Desmos" do Mestrado profissional em Ensino da Matemática da Universidade do Estado do Pará. Belém, 2024.

1. Matemática. 2. inequação polinominal. 3. software Desmos. I. Alves, Fábio José Costa. II Título.

CDD 23 ed.512.5

Bibliotecária Priscila Melo CRB-2 / 1345

Comitê de Avaliação

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Prof. Drª. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Prof. Drª. Talita de Carvalho Silva de Almeida

CRISTO; Maicon Michael Trindade de, ALVES; Fábio José Costa.
Uma Proposta para o Ensino de Inequação Polinomial de 1° e 2° grau Usando como Recurso o Software Desmos. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, (PPGEM/UEPA), 2024.
ISBN:

Aprendizagem de Matemática. Gêneses Instrumental. Registro de Representação Semiótica. Analise Microgenética. Ensino de inequação polinomial de 1º e 2° grau. Inequação polinomial de 1° e 2° grau.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE INEQUAÇÃO POLINOMIAL DE 1º E 2º GRAU USANDO COMO RECURSO O SOFTWARE DESMOS".**

Mestrando: **MAICON MICHAEL TRINDADE DE CRISTO**

Data da avaliação: **26/06/2024**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ______

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Escola Estadual Ensino Médio

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: com alunos de graduação

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: com alunos do ensino médio

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(X) na escola, como um curso extra

( ) outro: ____

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(X) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____

( ) outros membros da comunidade, tais como ____

O produto educacional foi considerado:

( ) APROVADO (X) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA	Assinaturas
Profº. Fábio José da Costa Alves (Presidente) Doutor em Geofísica IES de Obtenção do Título: UFPA	
Profª. Cinthia Cunha Maradei Pereira (Membro Interno) Doutora em Bioinformática IES de Obtenção do Título: UFPA	
Profª. Talita Carvalho Silva de Almeida (Membro Externo2) Doutora em Educação Matemática IES de Obtenção do Título: PUC/SP	Talita Almeida

Sumário

APRESENTAÇÃO 7

INTRODUÇÃO 9

SOFTWARE DESMOS 11

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE 22

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 24

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 27

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 32

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 36

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 40

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 44

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação 48

CONSIDERAÇÕES FINAIS51

REFERENCIA 52

AUTORES 53

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a),

Apresento-lhe um produto educacional desenvolvido a partir de uma pesquisa de mestrado, (no qual pode ser acessado no link .....) realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará, sob a supervisão do Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves. Este produto foi criado para auxiliar professores que desejam incorporar uma nova abordagem no ensino do objeto matemático "inequação polinomial de 1º e 2º graus", utilizando o software Desmos como ferramenta em suas turmas de ensino médio. A sequência de atividades foi elaborada com base na Teoria Instrumental de Rabardel (1995) e na Teoria das Representações Semióticas de Duval (1993), com o objetivo de transformar o Desmos em um instrumento cognitivo eficaz para a aprendizagem.

A sequência de atividades foi validada experimentalmente, demonstrando grande potencial para a aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º graus. No decorrer das atividades, os alunos passaram por um processo de instrumentalização e instrumentação, conforme descrito por Rabardel, no qual o Desmos deixou de ser apenas um artefato e se tornou um instrumento didático essencial, permitindo que os alunos realizassem conversões entre registros algébricos e gráficos, de acordo com a Teoria das Representações Semióticas de Duval. Para alcançar esses resultados, desenvolvemos uma sequência de sete atividades que exploram a potencialidade do ambiente de geometria dinâmica do Desmos na aprendizagem de inequações simultâneas polinomiais de 1º e 2º graus, sistemas de inequações polinomiais de 1º e 2º graus, e inequações produto/quociente polinomial de 1º e 2º graus.

Após a aplicação dessa sequência, os resultados mostraram-se promissores. O uso do Desmos facilitou a visualização gráfica das inequações polinomiais, promovendo não apenas uma compreensão mais dinâmica e visual dos conceitos matemáticos, mas também estimulando a aprendizagem interativa entre os alunos. Essa interação favoreceu a superação de obstáculos na conversão de registros semióticos, conforme proposto por Duval (1993), e contribuiu para a construção de um conhecimento mais profundo. É importante destacar que, para que os alunos se apropriem do Desmos como um instrumento eficaz, há um período de adaptação necessário. Durante esse tempo, as intervenções propostas na sequência de atividades são cruciais para apoiar o processo de aprendizagem, auxiliando os alunos a dominar tanto o tratamento algébrico quanto a conversão entre diferentes registros de representação.

INTRODUÇÃO

As inequações são um tema recorrente em diversos níveis de ensino na matemática, começando no ensino fundamental a partir do 7º ano, passando pelo ensino médio e chegando até os cursos de ciências exatas no nível superior, especialmente em aulas introdutórias de cálculo. O estudo das inequações ajuda os alunos a realizarem manipulações algébricas e gráficas importantes para a compreensão de funções e limites, conforme destacado pela pesquisadora Alvarenga (2013). Os documentos oficiais de educação no Brasil enfatizam a importância de aprender sobre inequações. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino fundamental afirmam que, ao final dessa etapa, os alunos devem ser capazes de produzir e interpretar diferentes expressões algébricas, reconhecer igualdades e desigualdades, identificar equações e inequações, e resolver problemas que envolvam equações e inequações de primeiro grau (BRASIL, 1998, p. 81).

Da mesma forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino médio reforça a importância desse tema ao afirmar que os alunos devem ser capazes de "resolver problemas por meio de equações e inequações, compreendendo os procedimentos utilizados" (BRASIL, 2017, p. 270). Apesar da relevância das inequações, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, especialmente sobre inequações polinomiais do 1º e 2º graus, ainda são escassas. Segundo Dicetti, Bisognin e Pretto (2020), nos últimos cinco anos, foram encontrados apenas 28 trabalhos relacionados ao tema, e apenas cinco desses estavam focados no ensino de inequações.

Para contribuir com essa área de pesquisa e oferecer uma proposta prática para os professores do ensino médio, foi desenvolvida uma sequência de atividades baseada nas teorias de Rabardel (1995) e Duval (1993). A partir da perspectiva de Rabardel sobre instrumentos cognitivos, o software Desmos foi escolhido como ferramenta pedagógica para ajudar os alunos a interagirem de maneira mais dinâmica com os conceitos matemáticos. Já com base nas abordagens de Duval, as atividades foram elaboradas para explorar diferentes formas de representação, como gráficos e expressões algébricas, ajudando os alunos a fazerem conexões entre essas formas e, assim, compreenderem melhor as inequações.

No próximo capítulo, será apresentada uma introdução ao software Desmos, explicando suas funcionalidades básicas. Essa introdução tem como objetivo ajudar os professores a se familiarizarem com o Desmos e integrá-lo em suas aulas, seguindo as abordagens teóricas mencionadas.

SOFTWARE DESMOS

O *software* Desmos é uma avançada calculadora gráfica que pode ser acessada gratuitamente através de um endereço na web tanto por computadores ou por *smartphone.* Atualmente, segundo os dados fornecidos pela Desmos *Studio,* mais de 75 milhões de pessoas no mundo usam o *software* Desmos anualmente para os mais devidos fins como: realizar conjecturas, conectar diferentes representações dinamicamente e realizarem artes a partir do conhecimento matemático. O *software* Desmos apresenta uma interface simples de se manipular e entender, pois não precisa ser instalado no computador para funcionar, basta estar conectado a uma rede de internet para acessar suas ferramentas.

Ao acessar o site https://www.desmos.com/?lang=pt-BR seremos orientados a uma tela, no qual podemos explorar os mais diversos recursos, mas para a finalidade dessa dissertação iremos explorar a sua calculadora gráfica.

A Figura 3 ajuda a entendermos a interface inicial do *software* Desmos.

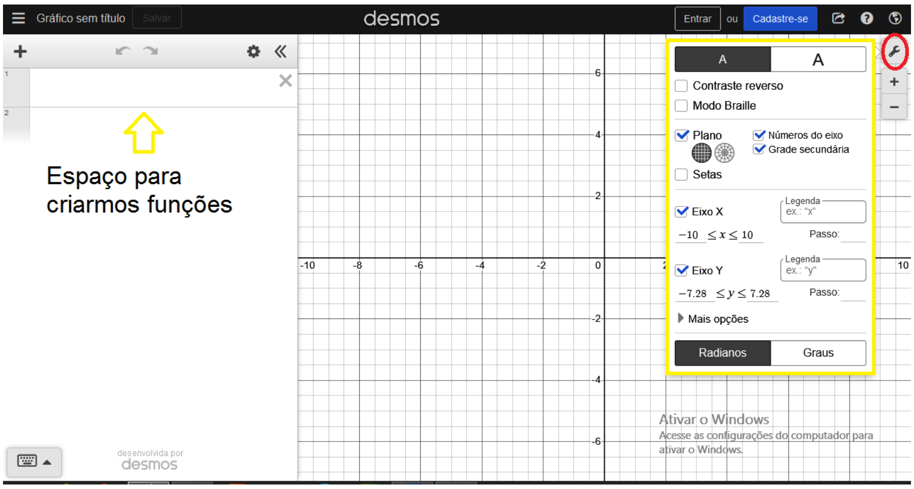
Figura 3: Tela inicial do *software* Desmos.

Fonte: Autor, 2024.

Ao clica na calculadora gráfica, iremos ser direcionado para uma nova tela, no qual teremos acesso às ferramentas gráficas disponíveis para os usuários como: aba para calculadora, configuração no qual podemos modificar o tamanho da fonte da imagem e do gráfico além de ter as opções de incluir ou tirar o plano cartesiano. Podemos também, nomear os eixos X ou Y de acordo como o problema que desejamos criar, delimitar os intervalos numéricos entre esses eixos e criar os "passos" que a opção de quanto em quanto o eixo X ou o Y irá crescer.

A Figura 4 mostra todas essas opções que foi citada anteriormente para guiar o novo usuário.

Figura 4: Calculadora gráfica.

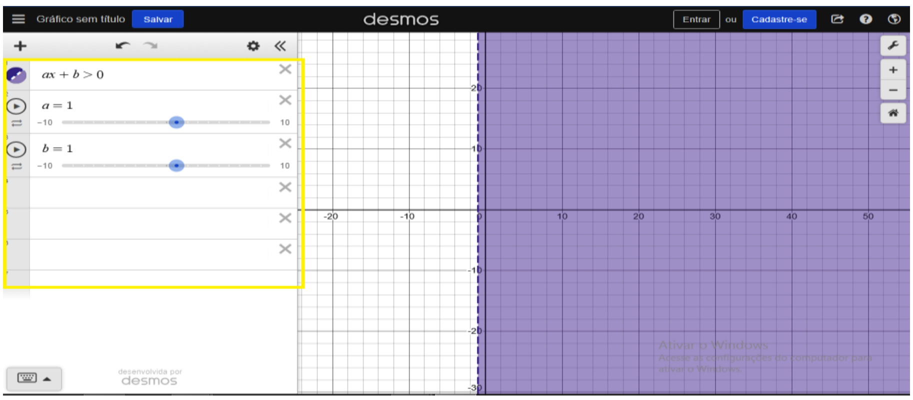


Fonte: Autor, 2024.

Como o software Desmos é totalmente dinâmico, ao realizar uma função geral como $ax + b > 0$, ele cria automaticamente o controle deslizante a e b, no qual podemos delimitar o intervalo que a função pode variar, proporcionando o araste para modificarmos a função dentro do intervalo delimitado. E ao inserir o símbolo de inequação, ele cria automaticamente uma faixa vertical simbolizando as possíveis soluções da inequação inserida.

A Figura 5 mostra como a função de inequação $ax + b > 0$, se comporta ao ser inserido no Desmos.

Figura 5: Comportamento da inequação $ax + b > 0$.



Fonte: Autor, 2024.

Para a nossa pesquisa, escolhemos o *software* Desmos por apresentar uma funcionalidade simples, sendo acessíveis para as pessoas que tem conhecimento mínimo de informática e devido ao seu dinamismo, pois é possível verificar o comportamento gráfico das funções de inequações polinomiais de 1° e 2° grau a partir da função araste.

OBJETO MATEMÁTICO

O objeto matemático que será abordado nesta dissertação de mestrado é a inequação polinomial de 1º e 2º grau e sua abordagem funcional gráfica. A fundamentação teórica deste capítulo baseia-se na tese de doutorado do pesquisador Mineiro (2019). Para o desenvolvimento do tema, é de extrema importância que, primeiramente, realizemos um estudo epistemológico sobre o objeto matemático, abordando desde o surgimento das equações polinomiais de 1º e 2º graus até o desenvolvimento das desigualdades e inequações. Isso porque, conforme o período histórico e a realidade de cada civilização, "existem diferentes formas de interpretar a matemática, ou seja, diferentes modelos epistemológicos, compostos de diferentes tarefas, técnicas, tecnologias e teorias" (MINEIRO, 2019, p. 57).

Os primeiros registros sobre equações polinomiais de 1º grau surgiram nos papiros de Rhind, desenvolvidos pelos antigos egípcios por volta de 1650 a.C., segundo Eves (2011). Os babilônios, por sua vez, desenvolveram equações polinomiais de grau maior ou igual a dois; esses registros podem ser encontrados, de acordo com Eves (2011), na Universidade de Yale, nos Estados Unidos, em uma coleção datada de aproximadamente 1600 a.C., contendo centenas de problemas com equações simultâneas, resolvidos por meio de equações do tipo biquadrada. Segundo Mineiro (2019), esses registros escritos de equações polinomiais de 1º e 2º grau provavelmente surgiram a partir das necessidades humanas, quando o homem deixou de ser nômade e passou a se fixar em um determinado território. Era importante para ele reconhecer a regularidade dos ciclos da natureza, como as estações do ano, a duração dos dias, as técnicas de cultivo e o manejo do solo.

Ainda segundo Mineiro (2019), a partir do momento em que os seres humanos começaram a mensurar seus bens, como a quantidade de animais, frutas, terrenos, etc., o conhecimento numérico básico (um, dois, três,...) tornou-se insuficiente. Eles passaram a sentir a necessidade de comparar seus bens, o que fez surgir a noção de grandeza e de comparação, como a de igualdade e desigualdade. Deste modo:

> tão importante quanto expressar que a quantidade a de elementos de uma coleção era igual à quantidade b de elementos de outra (a=b) (como ocorria por exemplo ao relacionar de forma biunívoca a quantidade de objetos de uma coleção com a quantidade de marcas feitas em um pedaço de madeira), ou que tinham quantidade diferentes (a≠b), existiam situações em que se tornava necessário expressar a relação de ordem que existia entre essas quantidades, recorrendo às desigualdades por meio da indicação explícita de qual era a coleção que tinha mais elementos e qual a que tinha menos, ou em outros termos, qual era a maior e qual era a menor, nos casos em que não possuíam a mesma quantidade. (MINEIRO, 2019, p.58).

Os primeiros registros escritos sobre igualdade e desigualdade surgiram provavelmente, segundo Mineiro (2019), com os postulados criados por Euclides em seu livro *Elementos de Euclides*. Em um deles, afirma-se que "duas retas paralelas cortadas por duas retas transversais formam ângulos alternos, externos e internos congruentes". Em outro postulado, referente à desigualdade, ele afirma: “para qualquer triângulo, a soma do comprimento de dois lados é maior do que o comprimento do lado remanescente, quaisquer que sejam os lados considerados” (EUCLIDES, 2007, p. 23, apud MINEIRO, 2019, p. 62).

Mineiro (2019) cita, em sua pesquisa, outras situações históricas envolvendo inequações e desigualdades, como o trabalho de Fermat para calcular o valor aproximado de $\sqrt{3}$, e o de Newton, que foi um dos primeiros a provar teoremas utilizando a noção de desigualdade para demonstrar séries infinitas. Ele também menciona a pesquisa de Harriot, que demonstrou, por meio de desigualdades, o teorema da desigualdade entre as médias. Ainda em sua pesquisa, Mineiro (2019) apresenta situações envolvendo desigualdades e inequações, diferenciando os dois termos apresentados. No entanto, o objetivo da nossa pesquisa não é realizar um levantamento histórico detalhado, sugerindo ao leitor que consulte as referências para acessar o trabalho do pesquisador Mineiro (2019).

Como podemos perceber, o uso de equações e inequações polinomiais é inerente ao desenvolvimento da matemática, contribuindo significativamente para a resolução dos mais diversos problemas, como, por exemplo, em situações econômicas em que se busca o maior lucro ou o menor prejuízo. A partir do exposto, podemos afirmar que a razão de ser das inequações polinomiais está associada às necessidades humanas, como demonstrado nesse breve levantamento histórico. Após esse levantamento sobre o surgimento das equações, desigualdades e inequações, faz-se necessário definir matematicamente as inequações polinomiais, a fim de diferenciá-las das equações polinomiais e das desigualdades, uma vez que se tratam de objetos matemáticos distintos.

Segundo Houaiss (2001, apud Mineiro, 2019), é comum associarmos a palavra "desigualdade" com "inequação", uma vez que desigualdade é usada para comparar expressões que apresentam quantidades desiguais, enquanto a inequação é usada para comparar duas expressões matemáticas contendo os símbolos (<, >, ≤, ≥), cujo objetivo é determinar o valor da variável que satisfaça a desigualdade. Antes de prosseguir, vamos definir o que são funções polinomiais, uma vez que seu uso será de extrema importância na resolução das inequações polinomiais de 1º e 2º grau, especialmente através das interpretações gráficas de suas raízes. . Desta forma, definimos funções polinomiais de modo que sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que seus domínios são respectivamente, $D_1 \subset \mathbb{R}\ e\ D_2 \subset \mathbb{R}$, contidos nos números reais. Denominamos de inequação na incógnita x qualquer uma das sentenças abaixo:

$f(x) > g(x)$, leia-se $f(x)$ maior que $g(x)$.

$f(x) < g(x)$, leia-se $f(x)$ menor que $g(x)$.

$f(x) \geq g(x)$, leia-se $f(x)$ maior ou igual a $g(x)$.

$f(x) \leq g(x)$, leia-se $f(x)$ menor ou igual a $g(x)$.

É importante observar que as soluções de uma inequação são intervalos que podem ser abertos ou fechados. Portanto, o intervalo representará o domínio de validade, que, para essa dissertação, consideramos como sendo a solução da inequação polinomial. Desta forma, considere $f(x)$ e $g(x)$ como sendo funções polinomiais. E $f(x) > g(x)$. Assim, considere D_1 e D_2, como sendo o domínio da função $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Chamaremos o conjunto D de validade se, $D = D_1 \cap D_2$ e somente se, para todo $x_1 \in D$, temos que $x_1 \in D_1$ e $x_1 \in D_2$. Portanto, a solução da inequação $f(x) > g(x)$ é $D = D_1 \cap D_2$. As soluções dos outros casos seguem de maneira análoga a do primeiro caso.

Sendo assim, podemos definir a solução de uma inequação polinomial da seguinte forma:

Definição 1:

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, dizemos que ele é a solução da inequação $f(x) < g(x)$, se e somente se, $f(x_0) < g(x_0)$.

A partir dessa definição, podemos definir o conjunto solução de uma inequação, que denominaram de conjunto S, para todo número real.

Definição 2:

Chamamos de S o conjunto solução de toda inequação definida nos reais, tal que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, são verdadeiras as seguintes sentenças:

$$f(x_0) > g(x_0),\ S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x > x_0\}$$
$$f(x_0) < g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x < x_0\}$$
$$f(x_0) \geq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x \geq x_0\}$$
$$f(x_0) \leq g(x_0), S = \{x_0 \in \mathbb{R},/\ x \leq x_0\}$$

Dada a inequação e ela não apresentar soluções nos reais, dizemos que ela é impossível e representaremos através da seguinte notação $S = \{\emptyset\}$, no qual o simbolo, $S = \{\emptyset\}$representa o conjunto vazio.

Para continuarmos aprofundando o objeto matemático é importante relembrarmos algumas notações importantes sobre conjuntos, intervalos e intervalos com representação geométrica.

Notação sobre conjuntos:

1 – A representação dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\}$$

2 - A representação dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$$

3 – A representação dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$$

4 – A representação dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\}$$

5 – A representação dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$$

A representação em forma de intervalos, que são subconjuntos dos números reais, se faz muito importante, pois as soluções das inequações podem ser representadas por meio dessa notação.

Podemos definir matematicamente intervalos numéricos como:

Definição 3:

Dados $a\ e\ b \in R\cdot$, com $a < b$, chama-se de intervalos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

I_1) Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

I_2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

I_3) Intervalo aberto à direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$

I_4) Intervalo aberto à esquerda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

I_5) Semirreta de origem em: a: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$

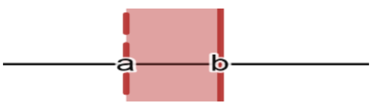
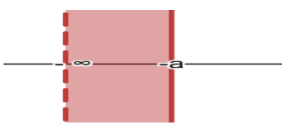
I_6) Semirreta aberta de origem em: a: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

I_7) Semirreta de origem em: a: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$

I_8) Semirreta aberta de origem em: a: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$

A representação geométrica dos números reais é uma forma muito importante para que se compreendam as soluções reais de um inequação. Por isso se faz importante termos conhecimento sobre essa notação. A figura 3 ajuda a relembrarmos essa notação geométrica.

Quadro 2: Representação geométrica dos números reais.

Representação Geométrica	**Representação Algébrica**	**Descrição**
	$(a\,,b)$	Intervalo aberto
	$[a\,,b]$	Intervalo Fechado
	$[a\,,b)$	Intervalo aberto à direita
	$(a\,,b]$	Intervalo aberto a esquerda
	$(-\infty, a]$	Semirreta de origem em a

	$(-\infty, a)$	Semirreta aberta de origem em a
	$[\, a\, , +\infty)$	Semirreta de origem em a
	(a , +∞)	Semirreta aberta de origem em a

Fonte: Autor, 2023.

Algumas observações sobre a representação geométrica dos números reais é importante saber que:

- ❖ A bolinha branca indica que a solução da inequação não está definida naquele extremo, diferentemente da bolinha preta, onde a inequação está definida no extremo da reta numérica.
- ❖ Algumas notações na literatura trazem como intervalo aberto o símbolo (a, b).

Para interpretarmos graficamente as soluções de uma inequação polinomial de 1° e 2° grau, temos que relembrar alguns tópicos importantes, como o estudo de sinal dessas inequações. Para isso vamos relembrar primeiramente a definição matemática da função polinomial de 1º grau.

Definição 4:

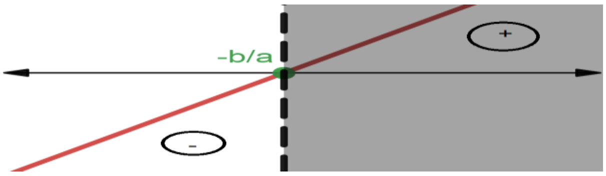
Uma função é classificada como polinomial de 1º grau, quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax + b) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e b é um número real dado.

Para fazermos o estudo de sinal da função polinomial de 1º grau temos que lembrar que o zero da função ou solução da função do tipo $f(x) = b + ax$ é calculado a partir da seguinte equação $x = -\frac{b}{a}$, ou seja, é o valor para que $f(x) = 0$, então devemos analisar os seguintes casos quando ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Para isso temos que analisar dois casos:

1° Caso, quando $a > 0$.

A taxa variável $a > 0$ indica que a função polinomial do 1° grau tem o gráfico crescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo:

Figura 4: Sinal da função crescente

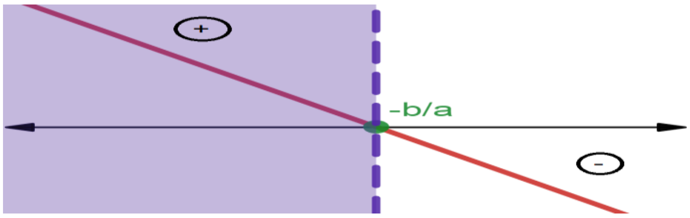


Fonte: Autor, 2023.

2° Caso, quando $a < 0$.

A taxa variável $a < 0$ indica que a função polinomial do 1º grau tem o gráfico decrescente, assim a solução é apresentada pelo gráfico abaixo.

Figura 5: Sinal da função decrescente.



Fonte: Autor, 2023.

Agora, definido matematicamente a função polinomial de 2° grau, temos:

Definição 5:

Uma função é classificada como polinomial de 2º grau quando existe uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e dado um $x \in \mathbb{R}$ associa a um único elemento do tipo $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e a, b e c são números reais dado.

Para a nossa pesquisa, é importante o domínio do estudo de sinal de função polinomial de 2° grau. Para isso, é necessário o conhecimento do cálculo das raízes dessa função. Assim, dada uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ usaremos como fórmula resolutiva para obter suas raízes as seguinte equação:

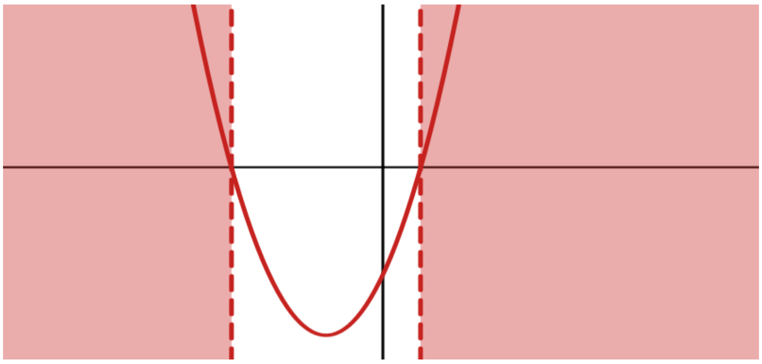
$$\Delta = b^2 - 4.a.c \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Com base no calculo das raízes de uma função polinomial de 2° grau, é importante analisar o comportamento dessa função quando:

- 1° Caso, quando $a > 0$ e $\Delta > 0$.

O coeficiente $a > 0$ indica que a função quadrática tem concavidade voltada para cima e o discriminante $\Delta > 0$, prescreve que o gráfico da função toca em dois pontos distintos no eixo das abscissas.

Figura 6: Estudo de Sinal da função quadrática.

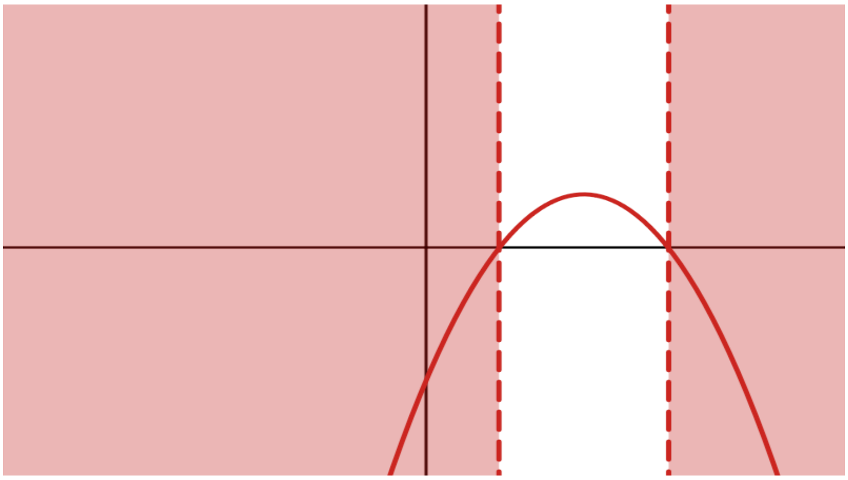


Fonte: Autor, 2023.

- 2° Caso, quando $a < 0 \; e \; \Delta > 0$.

Agora o coeficiente $a < 0$ indica que a concavidade da parábola está voltada para baixo, permanecendo o gráfico da função a tocar em dois pontos distintos o eixo x.

Figura 7: Estudo de Sinal da função quadrática.



Fonte: Autor, 2023.

Passaremos a definir o produto das funções polinomiais de 1° e 2° grau.

Definição 6:

Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $f(x).g(x) > 0$, $f(x).g(x) < 0$, $f(x).g(x) \geq 0$ e $f(x).g(x) \leq 0$ São chamadas de inequação – produto.

O último tópico a ser trabalhado é a inequação – quociente que podemos defini-la como:

Definição 7:

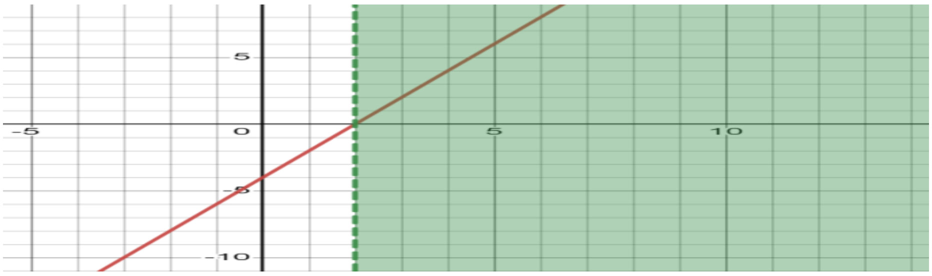
Considerando $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações do tipo: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \; e \; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ são chamadas de inequação – quociente.

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE

A proposta de sequência de atividade abaixo inclui uma lista de 7 atividades de inequação polinomial de 1º e 2º grau aplica em uma grupo de alunos cursando o ensino médio da rede pública e privada de ensino. Essas atividades têm como objetivo verificar as relações descritas na Teoria Instrumental de Rabardel (1995). Queremos analisar a aprendizagem de inequações polinomiais de 1º e 2º grau mediada por um instrumento e, por conseguinte, examinar as interações existentes entre sujeito, objeto, instrumento e Sujeito-Objeto pela mediação do instrumento. Ademais, realizamos perguntas aos alunos para induzir a fala dos discentes sobre o instrumento de aprendizagem e sua assimilação do objeto matemático. Também registramos as interações entre os alunos, e entre alunos e pesquisador, no processo de compreensão do objeto matemático, bem como a apropriação dos instrumentos de aprendizagem em seu processo de instrumentação. Posteriormente, gravamos essas respostas com um gravador e, com esses dados, analisamos a experimentação, verificando indícios de aprendizagem e a conversão de linguagem. Muitas vezes, os alunos conseguem verbalizar bem, mas não conseguem escrever com a mesma qualidade.

Atividade 1 – Estudando $ax + b > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $2x - 4 > 0$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 1 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$ no Desmos.

2 – Digite $2x - 4 > 0$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

4 – Mande o aluno clicar no ponto $(2{,}0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 \geq 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

7 – Altere a expressão $2x - 4 > 0$ para $2x - 4 < 0$, e pergunte ao aluno o que ele observou no gráfico e como ficaria a nova resposta

8 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com a seguinte inequação:

(a) $3x - 6 < 0$

(b) $5x + 4 \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a primeira atividade da experimentação

A realização para a primeira atividade exigirá um maior número de intervenção por parte do pesquisador, pois será a primeira vez que os alunos terão contato com o conteúdo de inequação polinomial de 1° e 2° graus e manipularão o *software* Desmos. Ressaltamos que o número de intervenções diminuirá à medida que as atividades avançarem, verificando se, no percurso da experimentação o aluno ganha autonomia e instrumentaliza o Desmos, conforme a teoria de Rabardel.

Ação do pesquisador: Ao iniciar a atividade o pesquisador se apresentará para a turma e distribuirá a primeira atividade, onde ele vai pedir para que os alunos resolvam a inequação $2x - 4 > 0$. Aguardará um momento e em seguida questionará os alunos se conseguiram resolver o problema, pedindo que socializem sua solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos façam uma relação básica, mais de forma oral, da escrita da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$.

Ação do pesquisador: A partir dos registros da socialização dos alunos, o pesquisador tomará o melhor exemplo, caso os alunos tenham apresentado soluções no quadro, e, se não houver partirá do exemplo apresentado na atividade, e fará a associação da inequação $2x - 4 > 0$ com a equação $2x - 4 = 0$, determinando a solução da inequação ($2x - 4 > 0$), após fazer a manipulação algébrica necessária.

Ação do pesquisador: após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador acessará o site do Desmos, apresentará a calculadora Desmos explicando um pouco da sua funcionalidade, e digitará a inequação $2x - 4 > 0$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador indagará os alunos sobre como eles interpretam o gráfico que está aparecendo na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a imagem apresentada no Desmos representa a solução algébrica, justificando sua resposta ao destacar que o gráfico tem uma coloração a partir do ponto 2 no eixo x. Espera-se também que observem a linha vertical tracejada que passa no ponto 2 no eixo x, representando que esse número não pertence à solução. Isto é, espera-se que façam uma relação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: em ato contínuo o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a seguinte inequação $2x - 4 \geq 0$, e que após resolverem algebricamente, digitem – na no Desmos. O pesquisador explicará como digitar o símbolo maior e igual (≥).

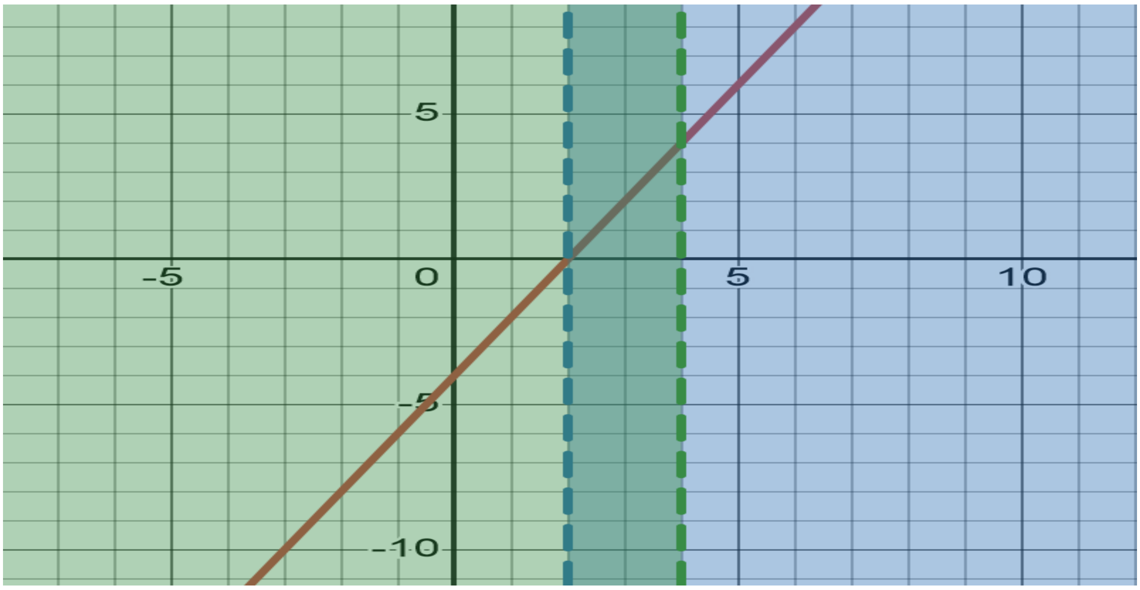
Comportamento esperado: após essa ação do pesquisador, espera-se que eu os alunos desenvolvam o mesmos procedimentos algébricos que foram utilizados na resolução da inequação $2x - 4 > 0$, e percebam que a igualdade na inequação alterou a solução. E que quando escreverem a desigualdade $2x - 4 \geq 0$ percebam a reta vertical ao eixo x no ponto 2 se tornar contínua, e façam referência deste fato com a presença do 2 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador vai pedir para que os alunos resolvam algebricamente as inequações $(3x - 6 < 0, 5x + 10 \geq 0, -2x - 4 > 0)$ e analisem os seus gráficos no Desmos e deem sua interpretação. Ressaltamos que nessa fase da evolução da atividade o pesquisador vai evitar intervenções.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos consigam resolver algebricamente as inequações sem muita dificuldade e consigam relacionar com as imagens apresentadas na tela quando digitadas as inequações do Desmos, e façam isso de forma correta.

Atividade 2 – Estudando $c < ax + b < d$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 < 2x - 4 < 4$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 2 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = 2x - 4$

2 – Digite $0 < 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 < 4$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x > 2$

$2x - 4 < 4 \quad \Rightarrow \quad 2x < 4 + 4 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad x < 4$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $2 < x < 4$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(2,0)\ e\ (4,0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $0 \leq 2x - 4$ e na outra linha $2x - 4 \leq 4$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $0 < 6x - 3 \leq 9$

(b) $0 \leq -x - 4 < 2$

O comportamento do pesquisador durante a segunda atividade da experimentação

A partir da segunda atividade, espera – se que os alunos demonstrem alguma familiaridade ao se trabalhar no ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de 1° grau. É importante salientar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção diminuirá, permitindo que os alunos, conforme a teoria de Rabardel (1995), iniciem o processo de instrumentação do software Desmos.

Ação do pesquisador: Após recolher os dados escritos da 1° atividade, o pesquisador distribuirá a 2° atividade entre os alunos e solicitará que resolvam a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ no espaço próprio da atividade. Após aguarda um tempo para a resolução, o pesquisador indagará os alunos se conseguiram resolver a inequação, pedindo que expressem a solução no quadro.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos encontrem dificuldades em resolver esse tipo de inequação, uma vez que há dois símbolos de desigualdades.

Ação do pesquisador: Com base nos registros compartilhados pelos alunos, o pesquisador considerará a melhor reposta, caso seja apresentada no quadro; se não houver, partirá do exemplo apresentado na atividade para associar a inequação $0 < 2x - 4$ com a desigualdade $2x - 4 < 4$, determinando a solução de cada uma.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos acessem no site do Desmos, posteriormente a calculadora gráfica, e digitem a inequação $0 < 2x - 4 < 4$. Após a imagem aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre como interpretam o gráfico exposto.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos expressem verbalmente que a solução apresentada no gráfico gerado com o Desmos corresponde a solução da inequação, argumentando com base no gráfico que apresenta uma tonalidade mais escura a partir dos pontos 2 e 4 no eixo x. Além disso, espera-se que percebam que as retas verticais tracejadas que passam pelos pontos 2 e 4 indicam que esses números não pertencem à solução da inequação, estabelecendo, assim, uma ligação direta entre a solução algébrica e a representação gráfica.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$. Após a solução algébrica, o pesquisador solicitará que os alunos digitarem as inequações no Desmos.

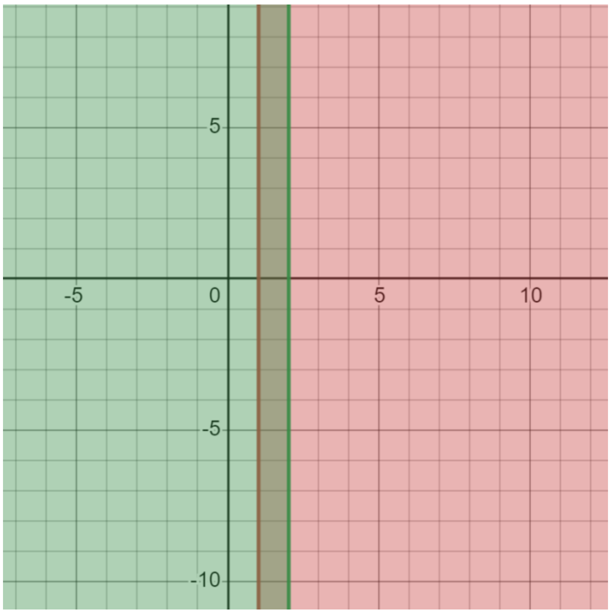
Comportamento esperado: Após essa ação, espera-se que os alunos sejam capazes de desenvolver todo o tratamento algébrico necessário para resolver a inequação $0 < 2x - 4 < 4$ e percebam que o sinal de igualdade na inequação não altera os pontos 2 e 4 no eixo x. Ao digitarem a inequação $0 \leq 2x - 4 \leq 4$ no Desmos, espera – se que notem que as retas verticais que passa pelos pontos 2 e 4 se tornam contínuas, levando – os a deduzir que esses pontos 2 e 4 pertençam a solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em sequência, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam algebricamente as inequações ($0 < 6x - 3 \leq 9$, $0 \leq -x - 4 < 2$),verifiquem seus gráficos no Desmos e expressem suas interpretações. Vale ressalta que, nessa fase da evolução da atividade, o pesquisador não interferirá.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos desenvolvam a solução algébrica das inequações corretamente e consigam relacioná-las com as representações gráficas geradas no Desmos ao digitarem as inequações nesse ambiente.

Atividade 3 – Estudando $\begin{cases} 3-2x \leq 1 \\ 3x-1 \leq 5 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} 3-2x \leq 1 \\ 3x-1 \leq 5 \end{cases}$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 3 - Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

2 – Digite $3 - 2x \leq 1$ e na outra linha $3x - 1 \leq 5$ no Desmos

3 – Peça para o aluno desenvolver a desigualdade no papel

$3 - 2x \leq 1 \;\; \Rightarrow \;\; -2x \leq -2 \;\; \Rightarrow \;\; x \geq \frac{2}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x \geq 1$

$3x - 1 \leq 5 \;\; \Rightarrow \;\; 3x \leq 6 \;\; \Rightarrow \;\; x \leq \frac{6}{3} \;\; \Rightarrow \;\; x \leq 2$

Qual a solução dessa desigualdade? O aluno deve observar que a solução é $1 \leq x \leq 2$

4 –Mande o aluno clicar no ponto $(1{,}0)\ e\ (2{,}0)$

5 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

6 – Altere a expressão para $3 - 2x \geq 1$ e na outra linha $3x - 1 \geq 5$, e pergunte ao aluno o que ele observou e como ficaria a nova resposta

7 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a)$y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$

(b) $y = \begin{cases} 5x + 10 \geq 15 \\ 4x - 3 \geq 5 \end{cases}$

O comportamento do pesquisador durante a terceira atividade da experimentação

Ao iniciar a terceira atividade, espera – se que os alunos estejam habituados com o ambiente Desmos e tenham domínio das manipulações algébricas da inequação polinomial de primeiro grau. É importante enfatizar que, nessa atividade, a quantidade de intervenção será mínima e pontual, como, por exemplo, questionar os alunos sobre o que estão achando do Desmos e se ele está auxiliando na compreensão, a partir da análise gráfica, da solução da inequação. O objetivo é coletar informações sobre as relações entre objeto, sujeito e artefato, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: Após recolher as folhas da segunda atividade, o pesquisador distribuirá para os alunos a folha contendo a terceira atividade, na qual pedirá que os alunos resolvam o sistema de inequação polinomial de primeiro grau $y = \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$. Após conceder um tempo necessário para os cálculos, o pesquisador solicitará que os alunos socializem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos consigam associar a solução do sistema de inequação polinomial de primeiro grau $= \begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$ com a solução aprendida na primeira atividade para resolver cada inequação separadamente. Pressupõe – se também que alguns alunos possam ter dificuldades em fazer essa relação direta, por aparentar ser um objeto matemático novo.

Ação do pesquisador: A partir da socialização das soluções dos alunos no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo e indagará o aluno sobre como chegou a essa solução. Caso não haja solução correta, o pesquisador incentivará os alunos a tomarem como exemplo a primeira atividade para resolver cada inequação desse sistema de inequação polinomial de primeiro grau.

Ação do pesquisador: Após a apresentação da solução da inequação, o pesquisador pedirá que os alunos limpem a calculadora do Desmos e digitem em uma aba a inequação $3\mathrm{x} - 2\mathrm{x} \leq 1$ e, em outra aba, a inequação $3 - 2\mathrm{x} \leq 5$. Quando o gráfico aparecer na tela, o pesquisador questionará os alunos sobre a interpretação do gráfico exibido.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam que existem duas colorações, uma sobreposta à outra, e que, na interseção dessa sobreposição, há uma coloração mais escura entre os intervalos 1 e 2 no eixo x. Essa coloração mais escura representa a solução do sistema de inequação y, e as retas verticais contínuas que passam pelos pontos 1 e 2 no eixo x indicam que esses números pertencem à solução do sistema de inequação y.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \ \geq 1 \\ 3x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e, após resolverem algebricamente, digitarem esse sistema no ambiente Demos para relacionar as soluções algébricas com o gráfico gerado no Desmos.

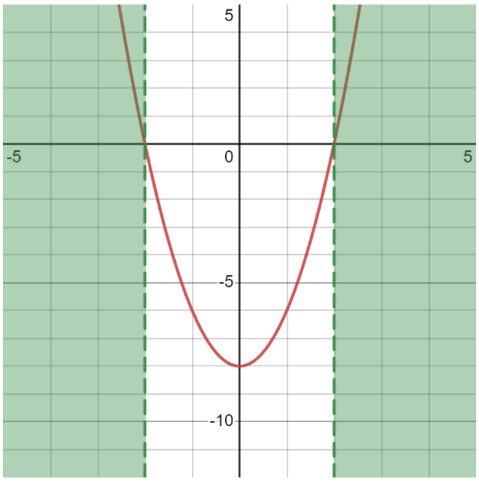
Comportamento esperado: O comportamento que esperamos, é que os alunos possam usar todos os procedimentos algébricos para resolverem o sistema $y = \begin{cases} 3 - 2x \ \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$, e percebam que o sinal oposto da desigualdade não alterou os pontos pelos quais as retas verticais contínuas passam no eixo x (nos pontos 1 e 2). No entanto, também espera-se que notem que essa mudança eliminou a sobreposição de cores, levando-os a concluir que essa função não tem solução.

Ação do pesquisador: Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolvam os sistemas $y = \begin{cases} 5 - 3x \leq 1 \\ 2x - 1 \geq 5 \end{cases}$ e $y = \begin{cases} 5x + 10 \ \geq 15 \\ 4x \ \ - 3 \geq 5 \end{cases}$, analisem os seus gráficos no ambiente Desmos e exponham sua interpretação. É importante pontuar que, nessa fase da atividade não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos saibam resolver algebricamente esses sistemas de inequação polinomial de primeiro grau e consigam relacionar suas soluções algébricas com as soluções gráficas exibidas na tela ao digitá – las na calculadora do *software* Desmos.

Atividade 4 – Estudando $ax^2 + bx + c > 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $2x^2 - 8 > 0$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 4 - Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 2$ no Desmos

2 – Digite $b = -8$ no Desmos

3 – Digite $c = 0$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad a = 6$ $\quad ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad a = 1$ $\quad ax^2 + bx + c \geq 0$

O comportamento do pesquisador durante a quarta atividade da experimentação.

A quarta atividade será utilizada para introduzir um novo objeto matemático: a inequação polinomial de segundo grau. Como os alunos ainda não estudaram esse conteúdo e novos comandos aparecerão no ambiente Desmos, haverá uma quantidade maior de intervenções do pesquisador nesse momento. Contudo, ressaltamos que essa intervenção diminuirá à medida que a atividade se desenvolve, a fim de se verificar a instrumentalização do software Desmos pelos alunos, conforme a teoria instrumental de Rabardel (1995).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos excluam os dados no ambiente Desmos da questão anterior, e insira os parâmetros $a = 2$, $b = -8$ e $c = 0$. Em seguida, pedirá que insiram a equação $y = ax^2 + bx + c$ e a inequação $ax^2 + bx + c > 0$ no ambiente Desmos, explicando como inserir o expoente dois em ambos os casos. Depois, o pesquisador solicitará que os alunos resolvam a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e compartilhem a suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos reconheçam, ainda que de forma oral, que o cálculo das raízes da equação $2x^2 - 8x = 0$ é semelhante ao cálculo das raízes da inequação $2x^2 - 8x > 0$. No entanto, espera – se também que eles não saibam interpretar matematicamente a diferença entre ambas as respostas.

Ação do pesquisador: Após alguns minutos para a socialização das respostas no quadro, o pesquisador escolherá o melhor exemplo apresentado. Caso não haja, o pesquisador associará a inequação $2x^2 - 8x > 0$ com a equação $2x^2 - 8x = 0$, determinando a solução da inequação $2x^2 - 8x > 0$, após realizar as manipulações algébricas necessárias.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá para os alunos digitarem em uma aba no Desmos o comando $d = b^2 - 4ac$, na outra aba $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ e por fim o comando $x_2 = (-b - d^{0.5})/(2a)$.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos relacionem os cálculos feitos algebricamente com aqueles realizados pelo Desmos e percebam que o expoente 0,5 representa o símbolo da raiz quadrada.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos relacionem a solução algébrica realizada anteriormente com o gráfico apresentado na tela.

Comportamento esperado: Espera-se que, nesse momento, os alunos respondam, ainda que de forma verbal, que a imagem apresentada no Desmos justifica a solução algébrica. Espera-se também que eles notem que o gráfico apresenta uma coloração diferente a partir dos pontos 0 e -4 no eixo x, destacando que a linha vertical tracejada que passa por esses pontos indica que esses números não pertencem à solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá que os alunos resolvam a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ de forma algébrica e, após isso, digitem a inequação no Desmos.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos utilizem o mesmo método algébrico aplicado para resolver a inequação $2x^2 - 8x > 0$ e percebam que o sinal de desigualdade não alterou as raízes encontradas anteriormente. Ao digitarem a inequação $2x^2 - 8x \geq 0$ no Desmos, notem que as retas verticais que passam pelos pontos 0 e – 4 no eixo x se torna contínuas, e façam referência a esse fato com a presença dos pontos 0 e – 4 na solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador irá pedir para os alunos resolvam algebricamente as inequações:

(a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6 \quad ax^2 + bx + c < 0$

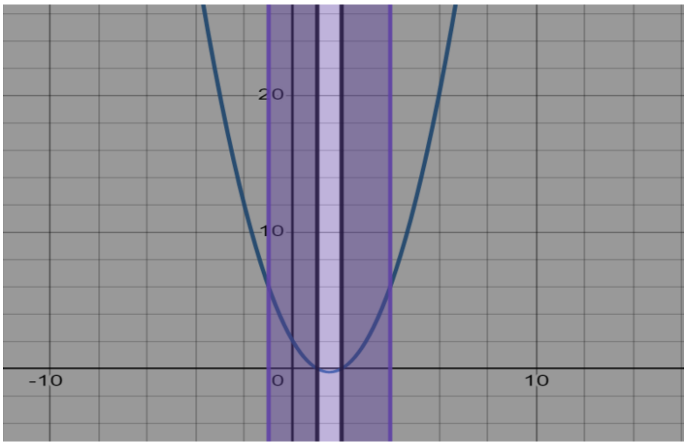
(b) $a = 1 \; b = 2 \; a = 1 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$

e analisem os gráficos correspondentes no software Desmos, além de fazerem as interpretações das soluções verbalmente. Nessa fase, não haverá intervenção do pesquisador.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos saibam manipular algebricamente cada inequação e consigam relacionar a solução com o gráfico apresentado no ambiente Desmos.

Atividade 5 – Estudando $d \leq ax^2 + bx + c \leq e$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$

Espaço dos comentários:

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 5 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = -3$ no Desmos

3 – Digite $c = 2$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite no Desmos $ax^2 + bx + c \geq 0$ em uma aba e na outra linha $ax^2 + bx + c \leq 6$

6 – Peça para o aluno desenvolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

7 – Digite $d = b^2 - 4ac$ no Desmos

8 – Digite $x_1 = (-b + d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

9 – Digite $x_1 = (-b - d^{0.5})/(2a)$ no Desmos

10 – Qual a solução dessa desigualdade $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 6$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad c = -4$ $\quad 4 < ax^2 + bx + c < 0$

(b) $a = 2$ $\quad b = 6$ $\quad c = -8$ $\quad -4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

O comportamento do pesquisador durante a quinta atividade da experimentação

Essa atividade visa desenvolver a compreensão dos alunos sobre inequações quadráticas, incentivando-os a explorar visualmente esses conceitos usando o Desmos como ferramenta, conforme Rabardel (1995). Os alunos são desafiados a compreender profundamente tanto a teoria matemática quanto o funcionamento do instrumento tecnológico, ao mesmo tempo que praticam a habilidade de manipulação e interpretação de gráficos, de acordo com Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador solicitará que os alunos substituam os valores dos coeficientes da atividade anterior pelos valores $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$ e que digitam em uma aba a inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2$, em outra aba a inequação $ax^2 + bx + c \leq 6$,e, por fim, a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Posteriormente, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos saibam desenvolver, de forma algébrica, as soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e comparem os valores encontrados com os valores expostos no Desmos para $d, x_1 e\ x_2$. Além disso, espera – se que eles deduzam que o Desmos determina os valores das variáveis $d, x_1 e\ x_2$ em função dos coeficientes a, b e c.

Ação do pesquisador: Em seguida, o pesquisador pedirá que os alunos determinem a solução da inequação $0 \leq ax^2 - 3x + 2 \leq 6$ de forma verbal e escrita.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos respondam à pergunta com base no gráfico gerado pelo Desmos, percebendo que há duas regiões sobrepostas com cores mais escuras que as demais. Além disso, espera-se que eles notem quatro retas verticais contínuas passando pelos pontos $-1, 1, 2\ e\ 4$ no eixo x, contidas nessas regiões mais escuras, e que deduzam que o intervalo delimitado pelos dois pares de retas verticais determina a solução da inequação.

Ação do pesquisador: A seguir, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

c) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = -4 \quad 4 < ax^2 + bx + c < 0$

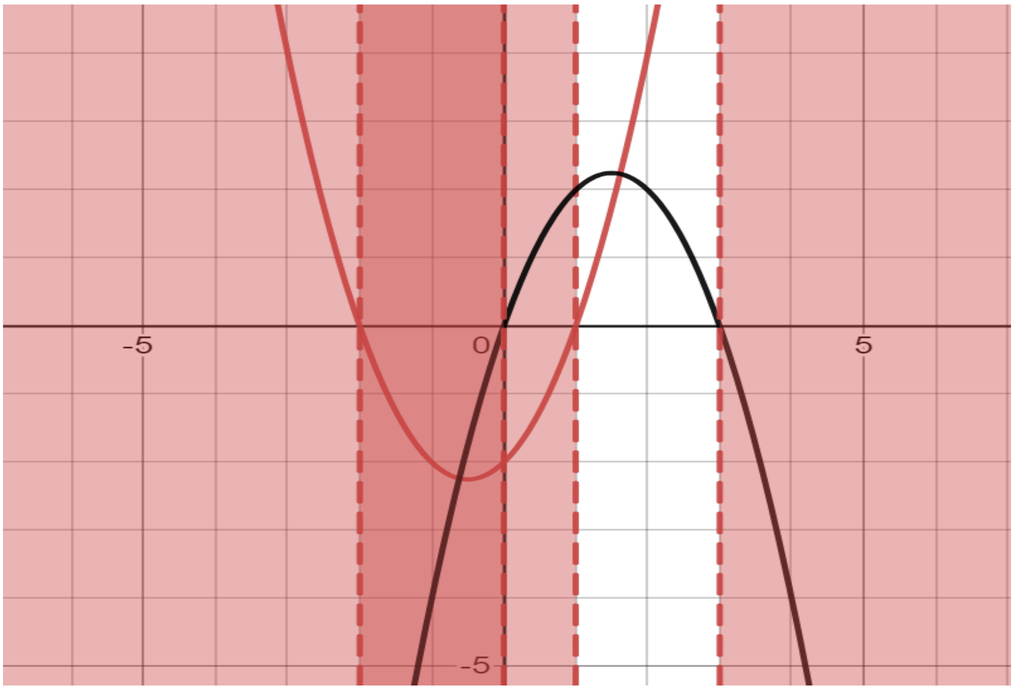
d) $a = 2$ $b = 6$ $c = -8$ $-4 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$

e analisarem os gráficos correspondentes no Desmos, dando suas interpretações. Ressaltamos que não haverá intervenção do pesquisador nessa fase.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam entender a relação entre a representação simbólica da inequação e sua representação gráfica no Desmos, e que, posteriormente, traduzam essas representações como as soluções das inequações.

Atividade 6 – Estudando $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Espaço dos comentários

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 6 – Siga a sequência a seguir:

1 – Digite $a = 1$ no Desmos

2 – Digite $b = 3$ no Desmos

3 – Digite $c = -4$ no Desmos

4 – Faça o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$

5 – Digite $ax^2 + bx + c > 0$ no Desmos

6 – Digite uma nova função $g = vx^2 + tx$

7 – Digite $v = -1$no Desmos

8 – Digite $t = 3$ no Desmos

9 – Peça para o aluno desenvolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

10 – Qual a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$? O aluno deve observar a solução no gráfico

11 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

12 – Peça para o aluno repetir a mesma análise com as seguintes inequações

(a) $a = 1$ $b = -5$ $c = -20$ e $v = 1$ $t = -4$ $e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2$ $b = -1$ $c = 1$ e $v = 4$ $t = -8$ $e = 3$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

O comportamento do pesquisador durante a sexta atividade da experimentação

Nessa atividade, busca-se que os alunos sejam capazes de resolver sistemas de inequações quadráticas, identificar as regiões das soluções e utilizar o Desmos como instrumento para visualizar graficamente as soluções desses sistemas. Eles deverão identificar as regiões onde ambas as inequações são verdadeiras. Os alunos são desafiados a entender profundamente como manipular o Desmos para explorar e resolver sistemas de inequações quadráticas, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados, realizando, assim, a gênese instrumental proposta por Rabardel (1995). Além disso, são desafiados a traduzir essas representações simbólicas como sendo as soluções da inequação, segundo a semiótica de Duval (1993).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos inclua novos valores para os coeficientes $a, b\ e\ c$ e digitem os valores $a = 1, b = 1\ e\ c = -3$. Em seguida, deverão inserir em uma aba a função $y = ax^2 + bx + c$ e, em outra, a inequação $ax^2 + bx + c > 0$. Depois, o pesquisador solicitará que incluíam novos coeficientes, $v = -1\ e\ t = 3$, e que digitem em uma nova aba a função $g = vx^2 + tx$ e, em uma outra, a inequação $vx^2 + tx < 0$. Após isso, os alunos deverão resolver as equações $ax^2 + bx + c = 0$ e $vx^2 + tx = 0$

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos demorem um pouco mais para absorver as informações, devido à maior quantidade de dados na atividade. Eles devem comparar os valores obtidos de forma algébrica com os apresentados no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos compartilharem a suas soluções no quadro e tomará como exemplo a melhor resposta. Caso não haja socialização das respostas, o pesquisador tomará o exemplo da atividade proposta e associará a solução do sistema de inequação quadrática $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, com a soluções das equações $x^2 + 3x - 4 = 0$ e $3x - x^2 = 0$, determinando a solução do sistema $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$, após realizar o procedimento algébrico necessário.

Ação do pesquisador: Após esse processo, o pesquisador pedirá aos alunos que observem a representação gráfica gerada no ambiente Desmos e responderem qual a solução da inequação $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos respondam de forma verbal que a solução representa a parte sombreada, no intervalo dos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x , além de perceberem que a reta vertical tracejada que passa pelos pontos $-4\ e\ 0$ no eixo x, indica que esses pontos não pertencem a solução.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

(a) $a = 1 \quad b = -5 \quad c = -20$ e $v = 1 \quad t = -4 \quad e = -21$

$$\begin{cases} a^2 + bx + c \leq 3 \\ vx^2 + tx + e > 2 \end{cases}$$

(b) $a = -2 \quad b = -1 \quad c = 1$ e $v = 4 \quad t = -8 \quad e = 3$

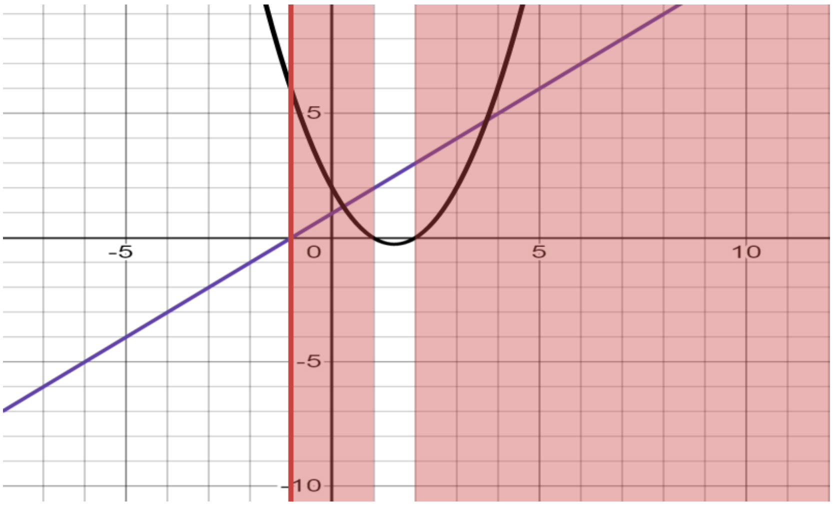
$$\begin{cases} a^2 + bx + c < -2 \\ vx^2 + tx + e > 4 \end{cases}$$

Usando os mesmos procedimentos da atividade anterior.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas questões de forma algébrica, além de observar as relações entre as inequações e interpretá-las em termos do que representam graficamente. Suas observações devem refletir sua compreensão dos conceitos matemáticos, bem como sua capacidade de interpretar e analisar representações gráficas de problemas matemáticos.

Atividade 7 – Estudando $\frac{ax+b}{ax^2+bx+x} \geq 0$

Abra o Desmos, faça o gráfico e estude as suas características.



O que você observou no gráfico de $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

Espaço dos comentários

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

Orientações do pesquisador aos alunos durante a experimentação

Atividade 7 – Siga a sequência a seguir:

1 – Faça o gráfico da função $f = x + 1$ no Desmos

2 – Faça o gráfico de uma nova função $g = x^2 - 3x + 2$ no Desmos

3 – Digite $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

4 – Peça para o aluno clicar no ponto $(-1,0)$ e descrever o que observou

5 – Peça para o aluno desenvolver as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$

6 – Peça para o aluno interpretar a solução da inequação $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$ no gráfico

7 – Peça para o aluno descrever o que ele observou

8 – Peça para o aluno repetir os mesmos processos nas inequações abaixo:

c) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

d) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

O comportamento do pesquisador durante a 7º Atividade da experimentação

A última atividade proposta tem como objetivo desafiar os alunos a compreender profundamente como usar o Desmos para explorar e resolver inequações racionais, adaptando-o para diferentes configurações e interpretando os resultados. Os alunos aprenderão a utilizar o Desmos para visualizar expressões racionais e experimentar com diferentes configurações de gráficos e ajustes de parâmetros para identificar as regiões de solução, realizando o que Rabardel (1995) denominou de instrumentalização. Além disso, eles entenderão a relação entre a representação simbólica da expressão racional e sua representação gráfica no Desmos, sendo desafiados a traduzir entre essas representações e interpretar as regiões onde a expressão é não negativa, conforme a teoria da representação semiótica de Duval (2003).

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá aos alunos que digitem no ambiente Desmos, em abas separadas, as funções $f = x + 1$ e $g = x^2 - 3x + 2$. Em seguida, solicitará que insiram a inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, podendo orientar sobre como fazer a representação da divisão entre funções no Desmos, se necessário.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos já tenham facilidade em inserir essas informações corretamente no Desmos, precisando de orientação apenas quanto ao símbolo de divisão entre funções.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá para os alunos que cliquem no ponto de coordenada $(-1{,}0)$, e perguntar o que eles observaram.

Comportamento esperado: Espera – se que eles respondam que, por esse ponto, passa uma reta vertical contínua, indicando que ele pertence à solução da inequação, assim como todos os pontos á direita de -1 no eixo x, excluindo os pontos entre as coordenadas $(1{,}0)$ e $(2{,}0)$. Os alunos devem perceber que essas coordenas não pertencem á solução da inequação.

Ação do pesquisador: Em seguida o pesquisador solicitará que os alunos resolvam as equações $x + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$, em que compartilhem suas soluções no quadro.

Comportamento esperado: Esperamos que os alunos não tenham dificuldades em resolver esse tipo de equações, associando a solução das equações com atividades passadas.

Ação do pesquisador: Após aguardar o tempo para resolução, o pesquisador tomará como exemplo a melhor resposta apresentada no quadro. Caso não haja socialização das respostas, ele associará a resolução dessas equações com equações de atividades anteriores, para que, a partir dessa associação, os alunos possam desenvolver de forma segura a álgebra envolvida.

Ação do pesquisador: O pesquisador pedirá que os alunos interpretem a resolução da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$, explicando-a de forma verbal, com base no gráfico gerado no ambiente Desmos.

Comportamento esperado: Espera – se que os alunos interpretem o gráfico, admitindo que a parte colorida que aparece representa todas as soluções da inequação $\frac{f}{g} \geq 0$. Eles devem perceber também que as coordenas $(1{,}0)$ e $(2{,}0)$ não pertencerem à solução da inequação, pelo fato que não pode haver divisão por zero, e que, em toda a divisão, o denominador tem que ser maior que zero.

Ação do pesquisador: Em ato contínuo, o pesquisador pedirá para os alunos resolverem as inequações:

c) $\frac{(2x^2+x-1)}{2x-1} \leq 0$

d) $\frac{3x+9}{2x^2+6x-8} < 0$

Comparando a solução algébrica com a solução gráfica apresentada pelo Desmos.

Comportamento esperado: Espera-se que os alunos consigam resolver essas inequações corretamente e saibam interpretar a solução algébrica em comparação com a solução gráfica apresentada no ambiente Desmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O produto educacional apresentado é resultado de uma dissertação desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves. Este material tem como objetivo oferecer aos professores uma sequência de atividades focada no objeto matemático inequação polinomial de 1º e 2º grau, voltada para turmas de 1º ano do ensino médio. A sequência foi elaborada com base nas teorias de Rabardel (1995) e Duval (1993), explorando os processos de instrumentalização e instrumentação do software Desmos, além da conversão de registros de representação semiótica.

A validação experimental da sequência mostrou que o uso do Desmos como instrumento de ensino facilitou significativamente a conversão entre registros algébricos e gráficos. Isso permitiu que os alunos desenvolvessem uma compreensão mais profunda das inequações polinomiais de 1º e 2º graus, conforme a Teoria das Representações Semióticas de Duval. Durante o processo, o software Desmos evoluiu de um simples artefato para um instrumento cognitivo, mediando a aprendizagem e promovendo uma atividade intelectual mais rica e interativa.

Esperamos que este produto educacional contribua de forma significativa para as aulas de matemática, promovendo um aprendizado mais colaborativo e ativo entre alunos e professores. A incorporação do Desmos na sequência de atividades facilita não apenas o tratamento e a conversão de diferentes registros de representação, mas também promove uma interação mais dinâmica no ambiente de sala de aula.

Estamos abertos a sugestões e críticas para o aprimoramento contínuo deste produto educacional, com o objetivo de alcançar um número maior de alunos e professores, potencializando a eficácia do ensino das inequações polinomiais de 1º e 2º graus.

REFERENCIA

ALVARENGA, Karly Barbosa. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 03 março. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília 2002.

DICETTI, Tanara da Silva; BISOGININ, Eleni; PRETTO, Valdir. **Ensino e aprendizagem de inequações: uma revisão bibliográfica de pesquisas cientificas**. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03028997/document. Acesso em: 26 jan. 2022.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática ***In: Aprendizagem em matemárica: registro de representação semiótica***. 1 ed. Campinas: Papirus, 2003, v.1, p.11-33.

MINEIRO, Renato Mendes**. ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DO PROBLEMA DIDÁTICO DE INEQUAÇÕES**, Doutorado em Educação Matemática – São Paulo,2019.

RABADEL,P.. ***Les hommes et les Technologies: approche cognitive des instruments contemporains.*** Paris. Armand Colin. 1995.

AUTORES

Maicon Michael Trindade de Cristo, é Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará, possui Especialização em Fundamentos de Matemática Elementar pela Universidade Estadual do Pará (UEPA), atualmente é aluno de mestrado do programa de Pós-Graduação no Ensino de Matemática, UEPA.

Fábio José da Costa Alves, possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e Professor Titular da Universidade da Amazônia. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: de convolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem