Programação Linear no ensino médio

Rosa, J.V.B. CEEP - W. Joffre-Cascavel
Conejo, P. - UNIOESTE-Cascavel
Vicente, A. - UNIOESTE-Cascavel

Resumo: Focamos a utilização da Programação Linear para trabalhar problemas relacionados aos sistemas de equações e inequações lineares. Trazemos uma proposta de apresentar os Problemas de Programação Linear (PPL) a partir da modificação no enunciado de um problema sobre sistemas de equações proposto no ensino médio. Como parte de um plano de aula, analisamos no espaço $\mathbb{R}^2$ os métodos de resolução gráfica e por exaustão de um PPL, e apresentamos um tutorial para uma ferramenta livre disponível no *OpenOffice Calc*, denominada *Solver*, para os casos onde há a impossibilidade de solução gráfica.

Palavras-chave: Ensino médio; Programação Linear.

1 Introdução

Os sistemas de equações e desigualdades são ferramentas muito utilizadas dentro da Matemática, e são apresentados aos alunos inicialmente no ensino fundamental II, mais precisamente no oitavo ano [1] e em seguida no ensino médio [8]. No primeiro ano o foco é o estudo das desigualdades e no segundo ano os sistemas de equações. Segundo [2],

> "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

As orientações curriculares colocam a Modelagem Matemática como um caminho para se trabalhar a Matemática na escola. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [11] abordam o papel da modelagem matemática na metodologia de ensino, enfatizando situação-problema ligada ao denominado mundo real, despertando assim, maior interesse e abordagem mais crítica em relação à Matemática como uma ciência aplicável.

Quando fala do pensamento científico, crítico e criativo, a BNCC [1] diz sobre

> "Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas."

Neste sentido, um aspecto importante de problemas envolvendo decisões é o de Programação Linear, quando se procura estabelecer quais as maneiras mais eficientes de utilizar os recursos disponíveis para atingir certos objetivos. Logo, a Modelagem Matemática pode se fazer presente neste processo.

Embora haja uma relação direta com diversos conteúdos da área de Matemática no ensino médio, a Programação Linear não é trabalhada, ficando restrita à academia superior. Desta forma, com base nas propostas curriculares para o ensino [1, 11], tomando a BNCC, podemos apresentar aos discentes as ideias básicas da Programação Linear (PL), com o objetivo de ambientá-los aos problemas desta área que tem forte apelo geométrico e à modelagem matemática.

De fato, há alguns trabalhos na literatura com o propósito de tratar os Problemas de Programação Linear (PPL) no ensino médio. Como principal referência para este trabalho temos a dissertação [12]. Podemos citar ainda [3], que explora o conteúdo de inequações de primeiro grau nos livros didáticos e introduz a Programação Linear com foco no método gráfico, relacionando a PL com inequações lineares. Já [9] aborda a teoria básica de otimização linear e o método *Simplex*, propondo um material direcionado aos professores do terceiro ano do ensino médio, utilizando a resolução gráfica e um *Solver* para os casos com dimensões maiores ou iguais a 3. Sobre [4] é proposto incentivar os próprios estudantes do ensino médio conhecer a PL com a resolução por sistemas lineares e apoio de *Softwares* nos casos com mais de duas variáveis. E [13] foca na aplicabilidade dos conteúdos estudados em Matemática no ensino médio, contextualizando o estudo de equações e inequações, mostrando a possibilidade de apresentar a PL à educação básica, utilizando um *Software* para a resolução gráfica de PPL.

Neste trabalho argumentamos uma forma de associar os PPL ao ensino médio. Apresentamos alguns problemas de otimização como, por exemplo, o problema da dieta [5, 8], que nos expõe conceitos e processos estudados dentro do ensino médio. Sugerimos uma apresentação dos PPL com solução gráfica, pelo método da exaustão e com o auxílio do software Solver. Um plano de aula é elaborado no sentido de orientar o que se deseja obter como resultado do processo.

Dados um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, a forma canônica de um Problema de Programação Linear é

$$\begin{array}{cc} \text{otimizar (max ou min)} & f(x) = cx \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

É possível mostrar [6, 7, 10] que se a função f em um PPL possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima do problema (1) é um ponto extremo (vértice ou canto) do conjunto convexo C formado pelas restrições $Ax \leq b$ e $x \geq 0$. Da parte teórica sobre PPL, o que precisamos saber é que a solução, quando existir, estará em um vértice, cujo conceito geométrico é de fácil compreensão.

2 Atividade do ensino médio com relação à Programação Linear

Nesta seção, apresentamos uma proposta de atividade, onde temos o objetivo de inserir o leitor na aplicabilidade da teoria de Programação Linear. A ideia foi de retirar um problema já abordado em livros didáticos do ensino médio, onde o problema é introduzido como um sistema linear, e adaptarmos para se tornar um problema de Programação Linear. As informações foram retiradas do livro [8] página 196 (adaptada). Desejamos a elaboração de uma dieta alimentar usando sistemas lineares. A dimensão do problema impede a visualização gráfica, no entanto, o problema será resolvido utilizando o Solver. O objetivo com esta atividade é apresentar ao Professor e discentes o potencial da teoria para resolver problemas práticos.

Exemplo 1. Neste exemplo mostramos que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.

O leitor já deve ter reparado que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético e as quantidades de carboidratos, gorduras, sódio, proteínas, etc., contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência - VDR - para uma alimentação adequada.

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos a tabela a seguir, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão *in natura*, peito de frango empanado congelado, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

	Arroz (50g)	Feijão (30g)	Frango (80g)	Suco (200ml)	Pão (50g)	Margarina (14g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55

Tabela 1: Principais nutrientes de alguns alimentos. Fonte: os autores.

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades $x_1, \cdots, x_6$ (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 190x_1 & + 100x_2 & + 150x_3 & + 120x_4 & + 130x_5 & + 45x_6 & = 2000 \\ 37x_1 & + 16x_2 & + 8x_3 & + 30x_4 & + 28x_5 & + 0x_6 & = 300 \\ 3x_1 & + 7x_2 & + 13x_3 & + 1x_4 & + 4x_5 & + 0x_6 & = 75 \\ 0x_1 & + 0x_2 & + 6x_3 & + 0x_4 & + 1{,}5x_5 & + 5x_6 & = 55. \end{cases}$$

Observe que o sistema possui quatro equações, correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. Uma maneira de resolver o sistema é por escalonamento. Aplicando as três operações elementares previamente e transformando o sistema na forma escalonada reduzida obtemos

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0,19 \\ \quad x_2 \quad\quad\quad + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8,05 \\ \quad\quad x_3 \quad\quad + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9,16 \\ \quad\quad\quad x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11,60. \end{cases}$$

Vemos em sua forma escalonada que o sistema é possível e indeterminado. Assim, tomando $x_5 = \alpha$ e $x_6 = \beta$, teremos então: $x_1 = 0,19 + 0,33\alpha - 0,17\beta$, $x_2 = -8,05 - 0,07\alpha + 1,68\beta$, $x_3 = 9,16 - 0,25\alpha - 0,83\beta$ e $x_4 = 11,60 - 1,24\alpha - 0,45\beta$. Temos então o conjunto solução.

$S = \{0,19+0,33\alpha-0,17\beta; -8,05-0,07\alpha+1,68\beta; 9,16-0,25\alpha-0,83\beta; 11,60-1,24\alpha-0,45\beta; \alpha; \beta\}$, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Porém, como nos referimos a um problema de dieta, temos que $x_5, x_6 \geq 0$. Assim, se tomarmos, como exemplo, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, teremos, $x_2 = -8,05 - 0,07\alpha + 1,68\beta = -8,05 - 0,07 \cdot 1 + 1,68 \cdot 1 = -6,44$.

Logo, nem toda solução matemática é utilizável na situação prática, já que numa dieta é necessário escolher $x_5 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geq 0, \cdots, x_4 \geq 0$.

Faremos uma apresentação para alunos do ensino médio desta atividade, introduzindo desigualdades e uma função custo, ou seja, deixando o problema na forma de um Problema de Programação Linear.

A seguir, apresentamos o *Solver* como ferramenta tecnológica para a resolução de Problemas de Programação Linear.

3 Resolução com o *Solver*

Para os alunos, a ferramenta gráfica para a resolução de Problemas de Programação Linear, quando no $\mathbb{R}^2$, é um bom instrumento pois permite visualizar como encontrar as possíveis soluções ótimas (faremos isto mais adiante). Porém, os alunos não têm em sua grade o estudo de Geometria Analítica no $\mathbb{R}^3$ e a resolução de sistemas de equações quando a quantidade de variáveis n for maior que 3 [1]. Sendo assim, podemos utilizar ferramentas dentro da computação para a resolução de Problemas de Programação Linear com qualquer número de variáveis, considerando, desta forma, a inclusão de *softwares* como possibilidade de auxiliar na construção do conhecimento.

Nesta seção apresentamos o *Solver*, uma ferramenta que faz parte do pacote *OpenOffice Calc*, como material para solucionar Problemas de Programação Linear. A escolha de tal instrumento é pelo fato de ser um *software* livre que pode ser utilizado nas escolas públicas.

Contudo, a intenção é estabelecer um vínculo do estudo de sistemas lineares [8] com os Problemas de Programação Linear [6]. Para tanto, é necessário o docente introduzir o funcionamento do *Solver* para os discentes. Então, este trabalho sugere e apresenta um tutorial de como utilizar o *Solver* para tal. É importante destacar que, o Algoritmo

Simplex [6] é um dos algoritmos utilizados dentro do *software Solver*.

Como Utilizar o *Solver* (passo-a-passo)

Este tutorial tem como base o uso do Sistema Operacional *Windows*.

Localizar o *Solver* no *OpenOffice Calc*

1. Abra o *OpenOffice Calc*;
2. Busque na barra principal por *Ferramentas* e selecione o *Solver* como mostra a Figura 1.

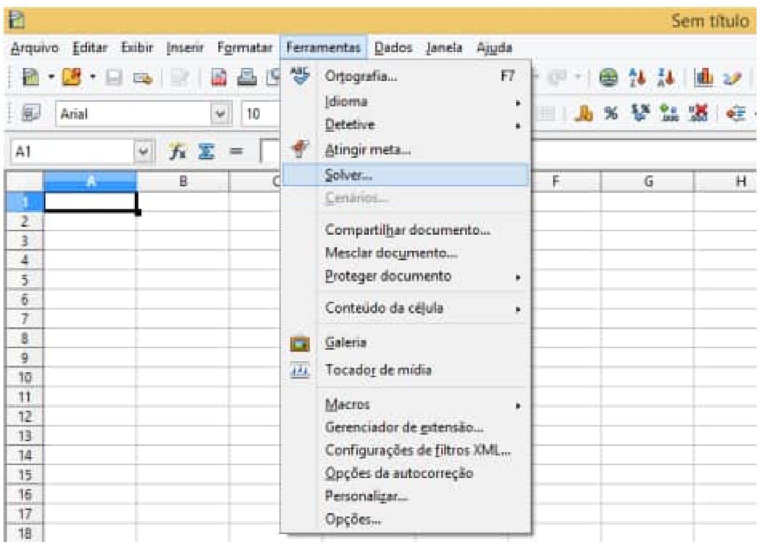


Figura 1: Localizando o *Solver*. Fonte: os autores

3.1 Utilizando o *Solver* como ferramenta para resolução de problemas

Problema da Dieta: Proposta de atividade para o ensino médio

Considere o problema da dieta com todas as variáveis e, juntamente com os custos de cada porção, como na Tabela 2.

	Arroz (50g)	Feijão (30g)	Frango (80g)	Suco (200ml)	Pão (50g)	Margarina (14g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55
Custos	0,3	0,24	0,48	0,3	0,5	0,2	

Tabela 2: Tabela de custos. Fonte: os autores

Neste problema, o modelo a ser resolvido é dado por

$$\text{minimizar } f(x_1, \cdots, x_6) = 0,3x_1 + 0,24x_2 + 0,48x_3 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,2x_6. \quad (2)$$

Com as restrições,

$$190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 \geq 2000 \quad (3)$$

$$37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 + 0x_6 \geq 300 \quad (4)$$

$$3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 1x_4 + 4x_5 + 0x_6 \geq 75 \quad (5)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 1,5x_5 + 5x_6 \geq 55 \quad (6)$$

$$\text{Com } x_1, \cdots, x_6 \geq 0. \quad (7)$$

1. Digite no *OpenOffice Calc* a Tabela 2 conforme o enunciado do problema. Ver resultado na Figura 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Arroz (50g)	Feijão (30g)	Frango (80g)	Suco (200ml)	Pão (50g)	Margarina (14g)	VDR	
2	Energia	190	100	150	120	130	45	2000	
3	Carboidratos	37	16	8	30	28	0	300	
4	Proteínas	3	7	13	1	4	0	75	
5	Gorduras Totais	0	0	6	0	1,5	5	55	
6	Custos	0,3	0,24	0,48	0,3	0,5	0,2		
7									

Figura 2: Tabela conforme enunciado do problema. Fonte: os autores

2. Escolha as células onde conterão as fórmulas para a função objetivo, as restrições e as variáveis (Figura 3).

   (a) A célula **B17** contém a função objetivo.

   (b) As células **E9, E10, E11, E12 e E13** as restrições.

   (c) As células **B9, B10, B11, B12, B13 e B14**, contém as variáveis $x_1, \cdots, x_6$.

   (d) As informações que foram colocadas em cada célula:

      i. Para a restrição (3) na célula **E9** escreva a fórmula; "=B2*B9+C2*B10+D2*B11+E2*B12+F2*B13+G2*B14";

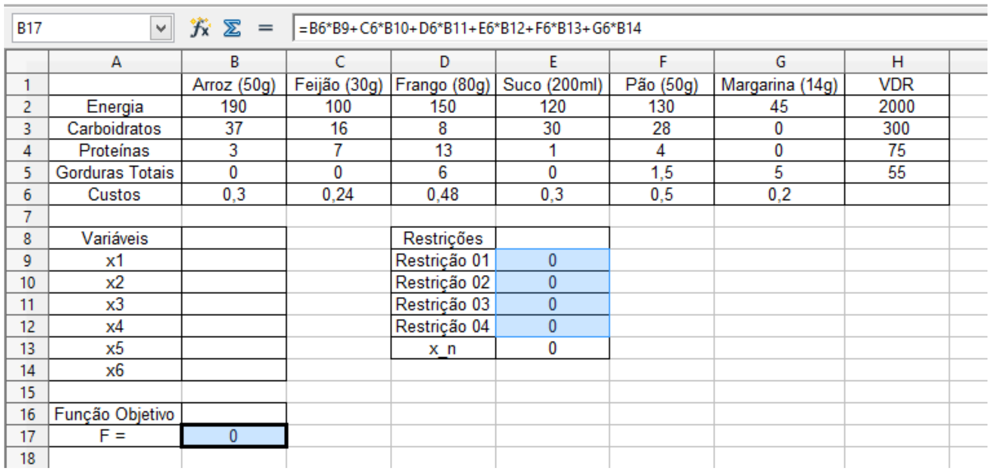
      ii. Para a restrição (4) na célula **E10** escreva a fórmula; "=B3*B9+C3*B10+D3*B11+E3*B12+F3*B13+G3*B14";

      iii. Para a restrição (5) na célula **E11** escreva a fórmula; "=B4*B9+C4*B10+D4*B11+E4*B12+F4*B13+G4*B14";

      iv. Para a restrição (6) na célula **E12** escreva a fórmula; "=B5*B9+C5*B10+D5*B11+E5*B12+F5*B13+G5*B14";

      v. Para a restrição (7) na célula **E13**, deve ter valor zero pois $x_1, \cdots, x_6 \geq 0$;

      vi. Para a função objetivo (2) na célula **B17** escreva a fórmula "=B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14".



B17 =B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Arroz (50g)	Feijão (30g)	Frango (80g)	Suco (200ml)	Pão (50g)	Margarina (14g)	VDR
2	Energia	190	100	150	120	130	45	2000
3	Carboidratos	37	16	8	30	28	0	300
4	Proteínas	3	7	13	1	4	0	75
5	Gorduras Totais	0	0	6	0	1,5	5	55
6	Custos	0,3	0,24	0,48	0,3	0,5	0,2	
7								
8	Variáveis			Restrições				
9	x1			Restrição 01	0			
10	x2			Restrição 02	0			
11	x3			Restrição 03	0			
12	x4			Restrição 04	0			
13	x5			x_n	0			
14	x6							
15								
16	Função Objetivo							
17	F =	0						
18								

Figura 3: Função objetivo e restrições dispostas na planilha. Fonte: os autores

3. Utilizando o *Solver*.

   Vá ao *Solver* abrindo assim uma nova janela como na Figura 4(a).

   (a) Em *Célula Objetivo*, selecione a célula **B17**, pois é nesta célula que está o valor da função objetivo;

   (b) Em *Otimizar para*, selecione **Mínimo**, pois neste problema desejamos minimizar;

   (c) Em *Células Variáveis* selecione o intervalo de células de **B9 a B14**, pois estas células apresentarão os valores das variáveis;

   (d) Como todas nossas restrições são da forma ($\geq$), em *Conjunto de restrições*, selecionamos da seguinte maneira nossas operações;

      i. Em *Referência de célula* selecione **E9**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H2**;

      ii. Em *Referência de célula* selecione **E10**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H3**;

      iii. Em *Referência de célula* selecione **E11**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H4**;

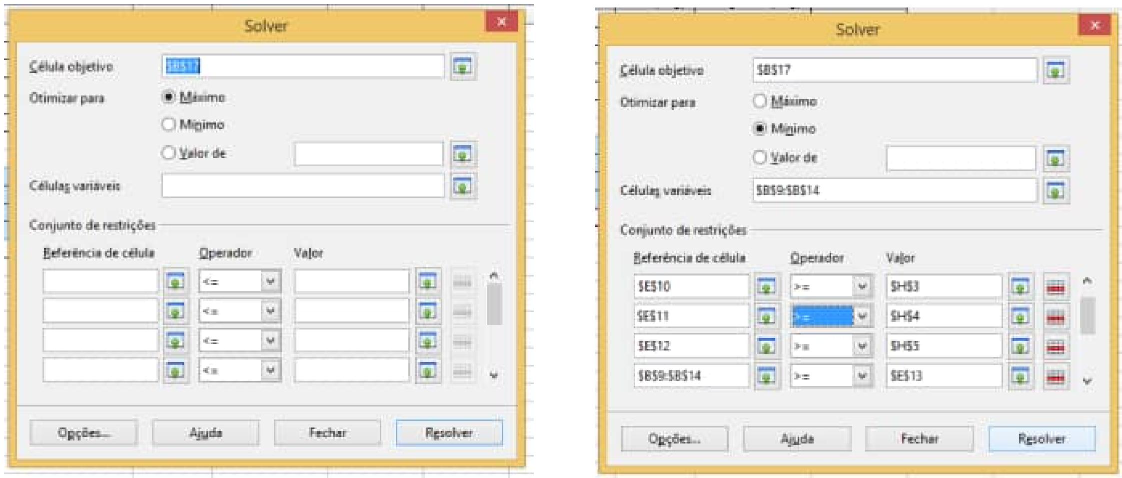
      iv. Em *Referência de célula* selecione **E12**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H5**;

      v. Em *Referência de célula* selecione o intervalo de células de **B9 a B14**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **E13**.

   (e) Clique em *Resolver*.

   As células **B9 a B14**, nos mostrarão os valores que as variáveis assumem, já na célula **B17** o valor que assumirá a nossa função objetivo (Figura: 5).

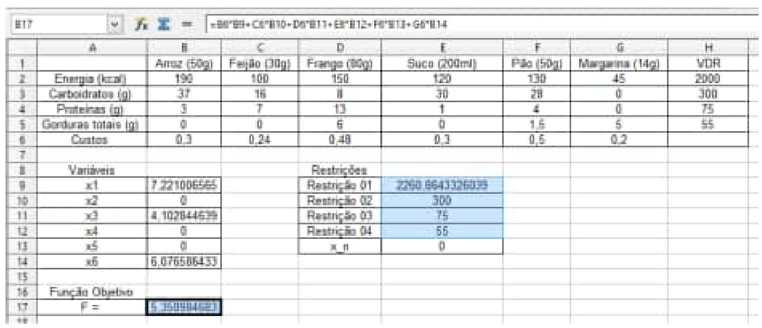
Portanto, para a dieta ter o menor custo, precisamos de $7,22$ porções de arroz, $4,10$ porções de frango e $6,08$ porções de margarina, tendo um custo de R$5,35.



(a) Janela de parâmetros do Solver

(b) Janela após adicionar as Operações. Fonte: os autores

Figura 4:



B17 =B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Arroz (50g)	Feijão (30g)	Frango (80g)	Suco (200ml)	Pão (50g)	Margarina (14g)	VDR
2	Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2000
3	Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
4	Proteinas (g)	3	7	13	1	4	0	75
5	Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55
6	Custos	0,3	0,24	0,48	0,3	0,5	0,2	
7								
8	Variáveis			Restrições				
9	x1	7,221006565		Restrição 01	2260,8643326039			
10	x2	0		Restrição 02	300			
11	x3	4,102844639		Restrição 03	75			
12	x4	0		Restrição 04	55			
13	x5	0		x_n	0			
14	x6	6,076586433						
15								
16	Função Objetivo							
17	F =	5,350984683						

Figura 5: Resultados. Fonte: os autores

4 Proposta de aplicação da Programação Linear no ensino médio

Esta seção tem como objetivo mostrar uma maneira de empregar os Problemas de Programação Linear no ensino médio. Não consiste em apresentar todas as definições do método *Simplex*, pois foge do escopo de aprendizagem aos discentes, já que não há nada previsto dentro da Base Nacional Comum Curricular [1], como a definição de Vetor Gradiente, por exemplo. Então, sugerimos uma abordagem simplificada da teoria, bem como a visualização gráfica, para que seja possível aplicar a Programação Linear com conteúdos do ensino médio.

Deste modo, este capítulo apresenta uma proposta de plano de aula que pode ser utilizada no ensino médio embasado nos procedimentos e conhecimentos dos estudantes. Este modelo é adequado aos alunos que estão estudando a partir do fim do segundo ano do ensino médio.

5 Plano de Aula

Tema: Problemas de Programação Linear para o ensino médio.

Objetivo: Apresentar aos alunos métodos de resolução de Problemas de Programação Linear utilizando as ferramentas já conhecidas por eles.

Público Alvo: Alunos do terceiro ano do ensino médio e alunos do segundo ano do ensino médio que já estudaram sistemas lineares.

Competências Específicas: Na BNCC [1] são apresentadas cinco competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio. Utilizamos duas delas para a construção do plano de aula.

- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Habilidades: Na BNCC [1] é relacionado um conjunto de habilidades que representam as aprendizagens essenciais a serem garantidas. Recorremos a três habilidades.

- Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Metodologia: Utilizaremos uma linguagem menos formal, para que o conteúdo possa ser apresentado ao ensino médio. Deixamos, em segundo plano, o formalismo teórico que envolve a Programação Linear, sem prejuízo nos resultados que a teoria oferece.

Introdução

Como podemos maximizar os lucros de uma empresa que deseja produzir algo a fim de que seu lucro seja o maior possível, ou também, como podemos minimizar os custos para a elaboração de uma dieta respeitando todos os valores nutricionais necessários básicos?

Sabemos que no ensino médio, pouco se fala sobre um problema onde pretendemos obter um lucro máximo ou ter um gasto mínimo para determinadas situações. Assim, apresentamos um material onde serão abordados os Problemas de Programação Linear que resolvem problemas desta natureza.

Mas, o que é um Problema de Programação Linear? Há algum modelo em algum livro do ensino médio? Antes de respondermos a estas perguntas, devemos verificar se já estudamos os conteúdos referentes a inequações, sistemas de equações lineares e esboço de gráficos de funções pois eles servem como base para a resolução destes problemas.

A fim de aprimorar o conteúdo, serão postos como verdadeiros aos estudantes, o fato da solução de um Problema de Programação Linear, após a construção das restrições, estar no vértice da região viável definida pelas restrições do problema. Como mostra a Figura 6

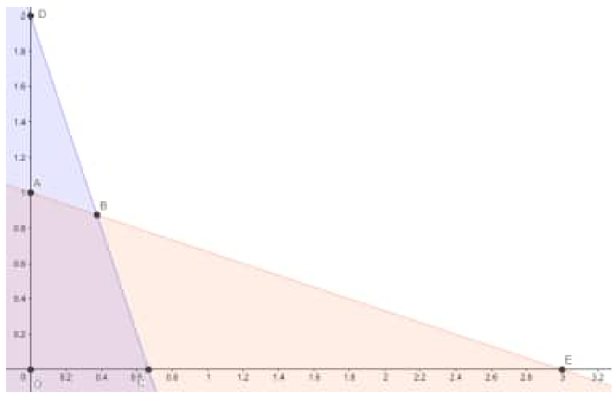


Figura 6: Região viável $ABCO$ formada pelas restrições. Fonte: os autores

Temos na Figura 6 a região $ABCO$. Este polígono contém os vértices A, B, C e O que analisamos no método de resolução gráfica. Os outros vértices, D e E, que a figura apresenta analisamos junto com os outros vértices na resolução por exaustão.

Utilizamos uma atividade sobre o problema da dieta que está apresentada na página 196 do livro [8]. Fazemos uma modifição no enunciado, com o objetivo de transformá-lo em um Problema de Programação Linear e o deixando mais realista.

Atividade

O enunciado original nos apresentava uma tabela com seis alimentos sem as informações dos custos para eles, como mostra a Tabela 1.

Desta forma, faremos algumas alterações para facilitar a compreensão dos conteúdos propostos. Suprimos alguns alimentos para termos apenas duas variáveis no exercício e acrescentamos custos a estes alimentos a fim de torná-lo um Problema de Programação Linear. Transpomos o problema da seguinte maneira, modificando valores também por questões didáticas.

Exemplo 2. As embalagens de alimentos trazem informações sobre os carboidratos e proteínas contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência - VDR - para uma alimentação adequada. Montamos a tabela a seguir, que mostra os valores nutricionais do arroz e do feijão *in natura* e os custos de cada produto proporcional a quantidade das porções. Queremos determinar qual a melhor forma de montar uma dieta com o menor custo possível.

Nutrientes

	Arroz (50g)	Feijão (30g)	VDR
Carboidratos (g)	30	15	300
Proteínas (g)	3	5	58
Custos (R$)	4,00	3,00	

Tabela 3: Informações do problema. Fonte: os autores

Neste exercício devemos encontrar uma maneira de fazer com que os gastos com esta dieta sejam mínimos mas nos dando a quantidade suficiente de nutrientes listados. Com isso, vamos analisar e modelar as informações.
As quantidades de porções de arroz e feijão denominamos x e y, respectivamente.
A quantidade mínima de carboidratos que devemos ter em nossa dieta obedece a inequação $30x + 15y \geq 300$.
A quantidade mínima de proteínas que devemos ter em nossa dieta obedece a inequação $3x + 5y \geq 58$.
Denominamos os custos como f, assim temos a equação que definirá nossos custos é dada por $f(x, y) = 4x + 3y$. As quantidades de porções não admitem valores negativos, assim temos $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Observamos que uma inequação é mais adequada aqui ao invés de uma equação, como sugerido no problema original. Pois como vimos na resolução do Exemplo 1 no resultado do problema obtínhamos valores negativos nas porções da dieta, tornando o uso das igualdades inviável.

Como queremos obter um gasto mínimo com a nossa dieta, então f deve ter o menor valor possível, ou seja, queremos minimizar estes valores. A função custo $f(x, y) = 4x + 3y$ é denominada função objetivo e queremos minimizar os custos. Já as desigualdades que temos aqui são denominadas restrições. Modelando, temos o Problema de Programação Linear

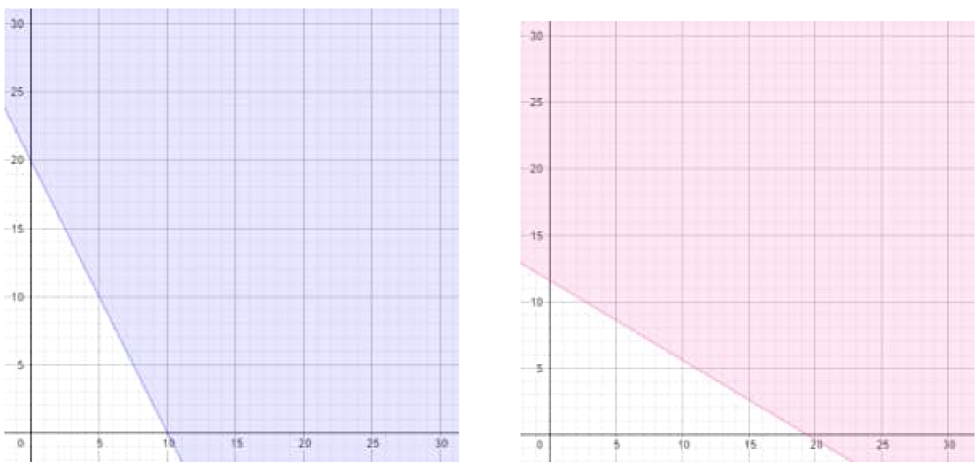
$$\textit{minimizar } f(x, y) = 4x + 3y \tag{8}$$
$$30x + 15y \geq 300 \tag{9}$$
$$3x + 5y \geq 58 \tag{10}$$
$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0. \tag{11}$$

Agora, apresentamos três métodos de resolução deste problema. Nos dois primeiros, podemos utilizar ferramentas tradicionais para a resolução, e no terceiro método utilizamos uma ferramenta tecnológica.

Resolução gráfica

O método gráfico consiste em observar os valores dos pares ordenados nos vértices da região viável obtida a partir da construção das restrições no plano cartesiano. O Professor pode escolhear, para construção dos gráficos, qualquer software. No entanto, o próprio OpenOffice é capaz de fazê-los. A ideia é visualizar, mesmo que aproximadamente, qual é a solução do problema.

Para analisarmos em qual dos vértices encontramos a solução ótima, faremos a construção gráfica da função objetivo quando $f(x,y) = 0$ e construímos retas paralelas a $f(x,y) = 0$, denominadas curvas de nível. As curvas que nos interessam são as que passam pelos vértices da região viável. Explicamos que todos os pontos de cada uma destas curvas de nível têm o mesmo valor de função f. Logo, como nosso objetivo é minimizar f, devemos tomar a reta paralela mais próxima da reta $f(x,y) = 0$. Plotemos então as restrições no plano cartesiano.



(a) Restrição $30x + 15y \geq 300$.

(b) Restrição $3x + 5y \geq 58$

Figura 7: Restrições. Fonte: os autores

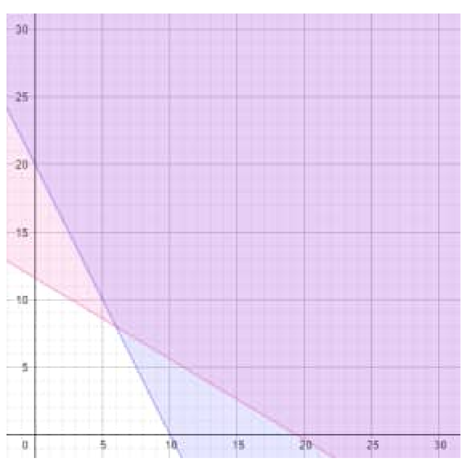
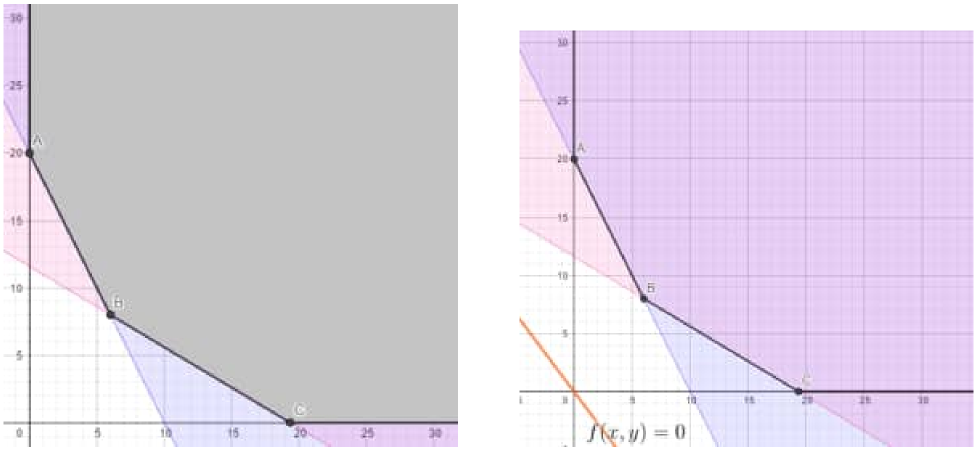


Figura 8: Restrições postas simultaneamente. Fonte: os autores



(a) Região com as Soluções Viáveis (b) A função objetivo com $f(x, y) = 0$

Figura 9: Conjunto viável e função objetivo. Fonte: os autores

As Figuras 7(a) e 7(b) apresentam as restrições separadamente. Já a Figura 8 apresenta mutualmente ambas as restrições. Ficamos restritos ao primeiro quadrante pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Note que na Figura 9(a), temos no plano cartesiano a região onde qualquer par ordenado contido nesta região é uma solução viável. Os vértices desta região são os pontos A, B e C, e basta analisarmos o que ocorre nestes vértices. Para isso, traçamos as retas paralelas a função objetivo quando $f(x, y) = 0$ passando por A, B e C, um a um, como mostra a Figura 10. Note que todo ponto em uma curva de nível tem o mesmo valor na função objetivo.

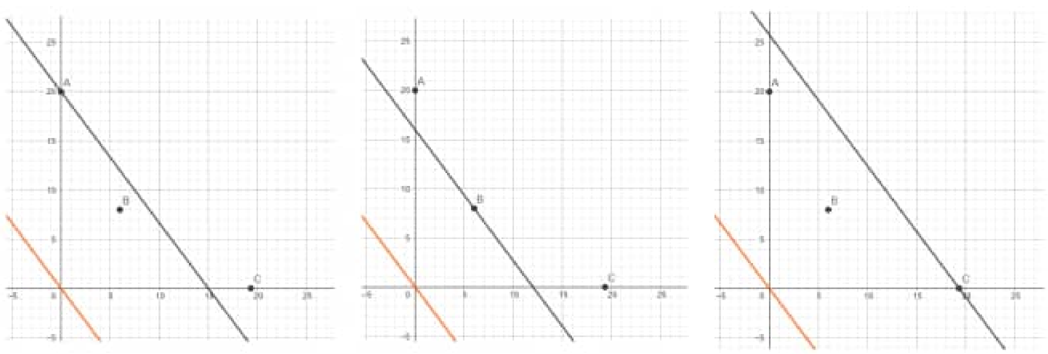


Figura 10: Curvas de nível da função objetivo que passam pelos ponto A, B e C. Fonte: os autores

Na Figura 11, observamos que a reta mais próxima a $f(x, y) = 0$ é a que nos interessa, que é no caso a que passa no ponto $B = (6, 8)$ (ou próxima), e assim o custo mínimo será de aproximadamente $f(6, 8) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 48$.

Portanto, precisamos de 6 porções de arroz e 8 de feijão para satisfazer a dieta com o menor custo possível que é de R$ 48,00.

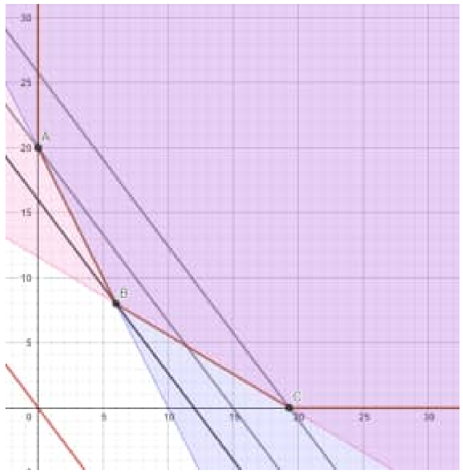


Figura 11: Resolução gráfica. Fonte: os autores

Resolução por exaustão

Outro método que podemos utilizar é o de exaustão. Este método consiste em testar todos os vértices oriundos das restrições de um Problema de Programação Linear. Significa que devemos calcular todas as soluções possíveis a partir dos sistemas lineares $n \times n$, até encontrarmos a solução ótima. Os possíveis sistemas lineares que devemos calcular dependem da quantidade de variáveis n e da quantidade de restrições m. O número binomial $\binom{m}{n}$ nos permite saber a quantidade de sistemas que precisamos resolver. Outro detalhe é que, todas as restrições devem ser substituídas por igualdades, uma vez que é onde estão os vértices.

Neste problema, a quantia possível de sistemas que podemos calcular é dada pela combinação $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ pois possuímos quatro restrições, $m = 4$, dadas em (9), (10), (11), e duas variáveis, $n = 2$. Substituindo os sinais de desigualdade por sinais de igualdade, temos os seguintes sistemas lineares para calcular, que podem ser resolvidos por escalonamento já que os alunos têm conhecimento desta técnica.

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (6, 8).$$

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = (0, 20).$$

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_3 = (10, 0).$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_4 = \left(0, \frac{58}{5}\right).$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_5 = \left(\frac{58}{3}, 0\right).$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_6 = (0, 0).$$

Substituindo as soluções S_i encontradas nas resoluções dos sistemas na função objetivo $f(x, y) = 4x + 3y$, em ordem crescente para as imagens, temos
$f(S_6) = f(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$
$f(S_4) = f\left(0, \frac{58}{5}\right) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{58}{5} = \frac{174}{5}.$
$f(S_3) = f(10, 0) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 40.$
$f(S_1) = f(6, 8) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 48.$
$f(S_2) = f(0, 20) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 60.$
$f(S_5) = f\left(\frac{58}{3}, 0\right) = 4 \cdot \frac{58}{3} + 3 \cdot 0 = \frac{232}{3}.$

Testando os menores custos, vemos que
S_6 é inviável pois $30 \cdot 0 + 15 \cdot 0 < 300$.
S_4 é inviável pois $30 \cdot 0 + 15 \cdot \frac{58}{5} < 300$.
S_3 é inviável pois $3 \cdot 10 + 5 \cdot 0 < 58$.

Testando o custo dado por S_1 vemos que ela é viável pois

$30 \cdot 6 + 15 \cdot 8 = 180 + 120 \geq 300,$

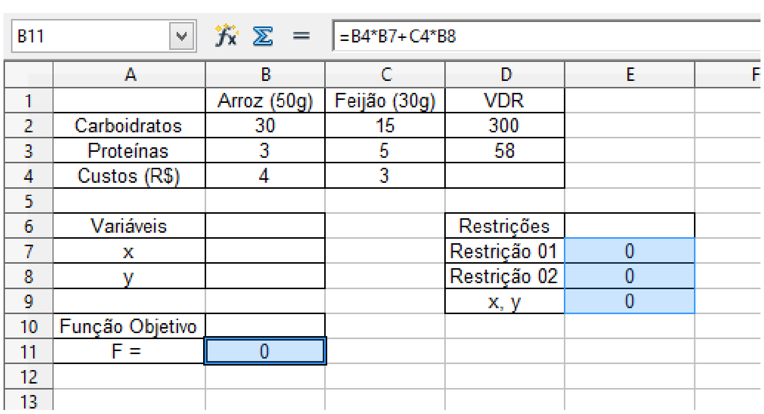
$3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 18 + 30 \geq 58,$

$6 \geq 0$ e $8 \geq 0$.

Assim, a solução ótima que minimiza a função objetivo f é $S_1 = (6, 8)$, pois além de respeitar todas as restrições é um extremo que tem menor valor na função objetivo. Devemos observar que, estas coordenadas são as mesmas encontradas na resolução gráfica no vértice $B = (6, 8)$ da região viável apresentada na Figura 9(a).

Resolução pelo ***Solver***

Utilizamos o tutorial do *Solver* apresentado na Seção 3 para resolver o Problema de Programação Linear. Como já temos a função objetivo (8) e as restrições (9), (10) e (11), construímos a tabela no *OpenOffice Calc* com as informações do Exemplo 2, juntamente com as células que contêm a função objetivo e as restrições, como mostra a Figura 12.


B11 =B4*B7+C4*B8

	A	B	C	D	E	F
1		Arroz (50g)	Feijão (30g)	VDR		
2	Carboidratos	30	15	300		
3	Proteínas	3	5	58		
4	Custos (R$)	4	3			
5						
6	Variáveis			Restrições		
7	x			Restrição 01	0	
8	y			Restrição 02	0	
9				x, y	0	
10	Função Objetivo					
11	F =	0				
12						
13						

Figura 12: Tabela com as informações do problema. Fonte: os autores

1. Na célula **B11** escrevemos a fórmula "=B4*B7+C4*B8". Esta célula contêm a

função objetivo (8), ela mostrará o valor mínimo da função objetivo após a resolução pelo *Solver*;

2. Na célula **E7** escrevemos a fórmula "=B2*B7+C2*B8". Esta célula contém a restrição (9);

3. Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B3*B7+C3*B8". Esta célula contém a restrição (10);

4. Na célula **E9** atribuímos o valor 0, pois esta célula contém a restrição (11) $x,\ y\ \geq 0$;

5. As células **B7** e **B8** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

6. Abrimos o *Solver* como mostra a Figura 13 e colocamos as seguintes informações.

   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B11**, pois esta célula possui o valor da função objetivo (8);

   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Mínimo*;

   (c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B7** e **B8**, pois estas são nossas variáveis x e y;

   (d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos:

      i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E7**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (9);

      ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (10);

      iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B7**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (11) para a variável x;

      iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B8**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (11) para a variável y;

7. Clique em *Resolver*.

Vemos que nas células **B7** e **B8**, os resultados são os mesmos encontrados na resolução gráfica e na resolução por exaustão, como mostra a Figura 14.

Portanto, precisamos de 6 porções de arroz e 8 de feijão para satisfazer a dieta com o menor custo possível que é de R$ 48,00.

Casos particulares

No entanto, caso desejamos minimizar, pode ocorrer na resolução gráfica uma reta (curva de nível) passando por dois vértices. Se esta reta for a mais próxima da função objetivo, quando $f(x, y) = 0$, implica em uma das arestas do polígono de solução estar

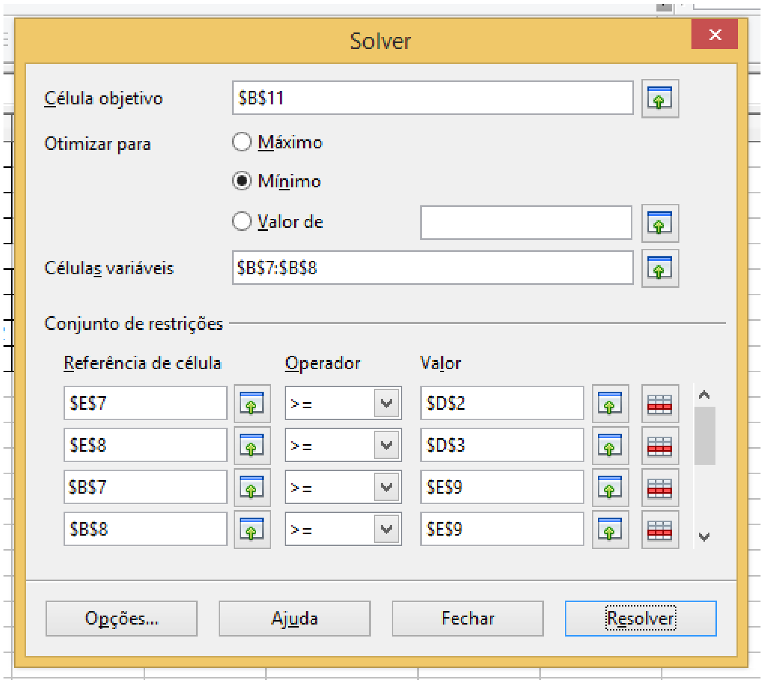
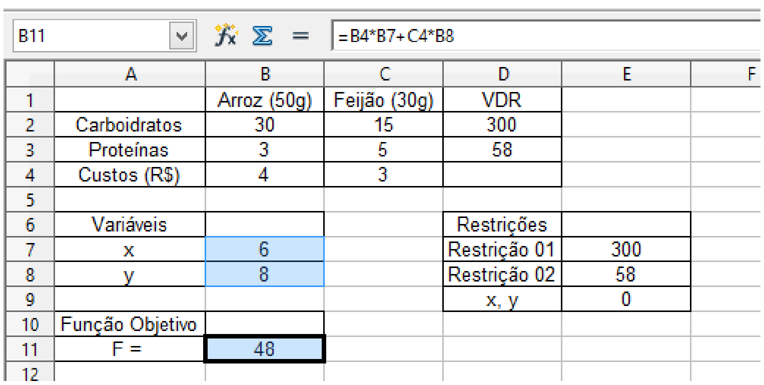


Figura 13: *Solver* com as informações do problema. Fonte: os autores



B11 =B4*B7+C4*B8

	A	B	C	D	E	F
1		Arroz (50g)	Feijão (30g)	VDR		
2	Carboidratos	30	15	300		
3	Proteínas	3	5	58		
4	Custos (R$)	4	3			
5						
6	Variáveis			Restrições		
7	x	6		Restrição 01	300	
8	y	8		Restrição 02	58	
9				x, y	0	
10	Função Objetivo					
11	F =	48				
12						

Figura 14: Resultados do problema. Fonte: os autores

contida nesta reta. Com isso, todos os pontos pertencentes a esta aresta são soluções ótimas da função objetivo conforme mostra a Figura 15, onde os vértice A e B minimizam a função, porém, quando construímos o gráfico, as retas que passam por A e B coincidem. Logo, todo o segmento $\overline{AB}$ minimiza a função objetivo.

Considerações

Caso tenhamos três variáveis, ainda é possível encontrar a solução ótima pela resolução gráfica trabalhando com três coordenadas, porém é mais difícil a visualização dos resultados. Na resolução por exaustão, trabalhando com sistemas de equações lineares 3×3, temos o incoveniente de que podemos ter uma quantidade de restrições muito grande, o que torna este cálculo maçante. Todavia, podemos utilizar um *Software* livre, o *Solver*,

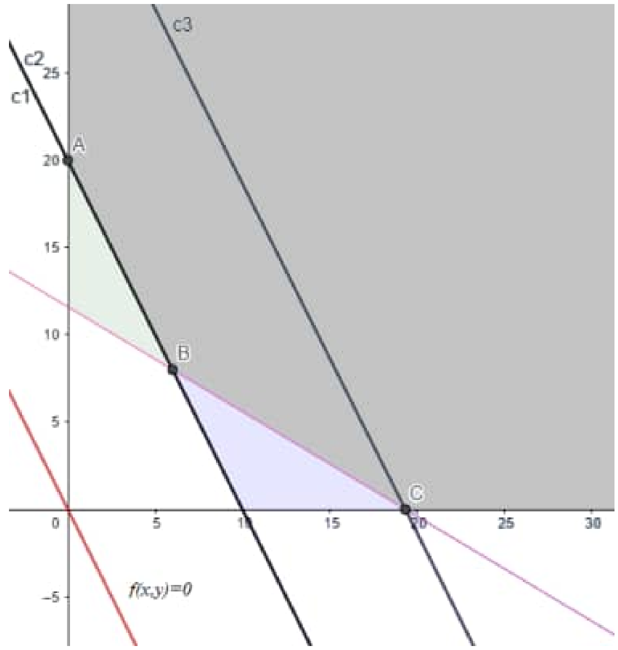


Figura 15: Aresta de soluções. Fonte: os autores

como ferramenta tecnológica, independente da quantidade de variáveis e restrições.

Apresentamos mais de uma maneira de resolver um Problema de Programação Linear, pois a BNCC nas competências específicas destaca que [1]

"para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário".

A seguir, apresentamos uma lista de exercícios que podemos aplicar aos estudantes do ensino médio com o intuito de avaliar o entendimento a respeito do conteúdo.

6 Exercícios propostos

Apresentamos alguns exercícios que podemos utilizar como forma de avaliação diagnóstica e formativa dos alunos, com o intuito de verificar o aprendizado dos estudantes sobre a proposta de trabalhar os Problemas de Programação Linear.

Exemplo 3. Otimize o Problema de Programação Linear

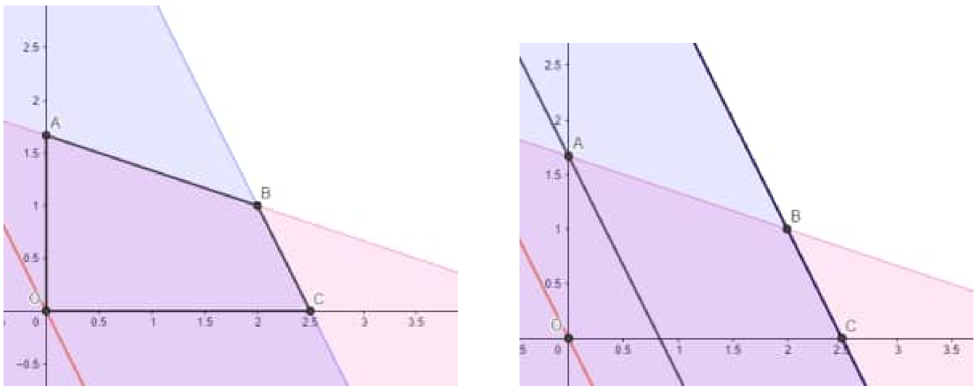
maximizar $f(x,y) = 8x + 4y$,

sujeito a $\begin{cases} x + 3y \leq 5 \\ 2x + y \leq 5. \end{cases}$

Com $x, \ y \ \geq 0$.

Resolução gráfica do Exemplo 3

Na resolução gráfica devemos observar os valores dos pares ordenados nos vértices da região de soluções. As restrições geram o polígono $ABCO$. Nos limitamos ao primeiro quadrante pois $x,\ y\ \geq 0$. Traçamos também a função objetivo quando $f(x,y)=0$, como mostra a Figura 16(a).



(a) Região viável (b) Curvas de nível

Figura 16: Região Viável e Curvas de nível. Fonte: os autores

Para encontrarmos a resposta do problema, devemos encontrar o vértice do polígono $ABCO$ que está mais distante da reta $f(x,y)=0$. Uma das maneiras que podemos fazer é traçando retas paralelas a $f(x,y)=0$, as curvas de nível, passando pelos vértices do polígono $ABCO$ como mostra a Figura 16(b).

Porém, observamos que as retas que passam por $B=(2,1)$ e $C=\left(\frac{5}{2},0\right)$ coincidem. Portanto, todo e qualquer ponto que pertence à aresta BC do polígono $ABCO$ maximiza nossa função objetivo. Tomaremos os vértices B, C e o ponto $D=\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$ pertencente à aresta para justificarmos este resultado.

Para $B=(2,1)$, substituindo na função objetivo obtemos
$f(2,1)=8\cdot 2+4\cdot 1=16+4=20$.

Para $C=\left(\frac{5}{2},0\right)$, substituindo na função objetivo obtemos
$f\left(\frac{5}{2},0\right)=8\cdot\frac{5}{2}+4\cdot 0=\frac{40}{2}+0=20$.

Para $D=\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$, substituindo na função objetivo obtemos
$f\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{9}{4}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{72}{4}+\frac{4}{2}=18+2=20$.

Portanto, qualquer ponto $P=(x_0,y_0)$ pertencente à aresta BC maximiza a função objetivo $f(x,y)=8x+4y$ e seu valor máximo é $f(x_0,y_0)=20$.

Resolução por exaustão do Exemplo 3

Substituindo os sinais de desigualdade pelos sinais de igualdade, temos as equações

$x+3y=5,$
$2x+y=5,$

$x = 0$ e
$y = 0$.

Assim, seguem os seis sistemas de equações com suas soluções.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Longrightarrow S_1 = (2, 1).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_2 = \left(0, \tfrac{5}{3}\right).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_3 = (5, 0).$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_4 = (0, 5).$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_5 = \left(\tfrac{5}{2}, 0\right).$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_6 = (0, 0).$$

Aplicando a função objetivo nas soluções dos sistemas, temos
$f(S_1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20$.
$f(S_2) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.
$f(S_3) = 8 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 40$.
$f(S_4) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20$.
$f(S_5) = 8 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot 0 = 20$.
$f(S_6) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$.

Percebemos que o maior resultado que encontramos foi com o par ordenado $S_3 = (5, 0)$, porém, note que este par não obedece a restrição $2x + y \leq 5$, pois $2 \cdot 5 + 0 = 10 > 5$.

Note que temos três pares ordenados com resultados iguais, porém o par ordenado $S_4 = (0, 5)$ não obedece a restrição $x + 3y \leq 5$, pois $0 + 3 \cdot 5 = 15 > 5$.

Assim, temos os pares ordenados $S_1 = (2, 1)$ e $S_5 = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ que são, respectivamente, os vértices $B = (2, 1)$ e $C = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ encontrados na resolução gráfica.

Uma observação pode ser feita aos alunos nessas situações onde encontramos duas soluções ótimas S_1 e S_2 na resolução por exaustão. Explicamos que neste caso há infinitas soluções de tal forma que, tomando uma solução P, utilizamos a combinação linear convexa para obtermos as outras soluções. Neste caso, a combinação linear convexa é dada por

$P = \alpha S_1 + (1 - \alpha) S_2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ e os vértices B e C da resolução gráfica temos

$P = \alpha B + (1 - \alpha) C$

$P = \frac{1}{2}(2,1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$P = \left(2 \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}, 0 \cdot \frac{1}{2}\right)$

$P = \left(1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{4}, 0\right)$

$P = \left(1 + \frac{5}{4}, \frac{1}{2} + 0\right)$

$P = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right).$

O par ordenado P possui as mesmas coordenadas de D da resolução gráfica.

Portanto, qualquer ponto $P = (x_0, y_0)$ oriundo da combinação linear entre B e C maximiza a função objetivo $f(x, y) = 8x + 4y$ e seu valor máximo é $f(x_0, y_0) = 20$.

Resolução pelo *Solver* do Exemplo 3

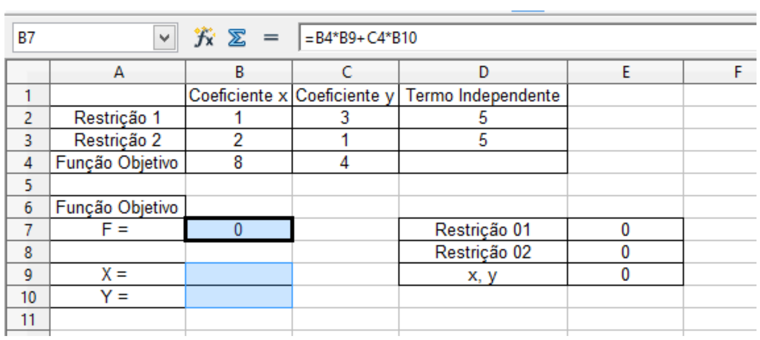
Utilizando o tutorial do *Solver*, construímos uma tabela com as informações do problema, além da função objetivo e das restrições, como mostra a Figura 17.

$$\text{maximizar } f(x, y) = 8x + 4y, \tag{12}$$

$$x + 3y \leq 5 \tag{13}$$

$$2x + y \leq 5 \tag{14}$$

$$x,\ y \geq 0. \tag{15}$$


B7 =B4*B9+C4*B10

	A	B	C	D	E	F
1		Coeficiente x	Coeficiente y	Termo Independente		
2	Restrição 1	1	3	5		
3	Restrição 2	2	1	5		
4	Função Objetivo	8	4			
5						
6	Função Objetivo					
7	F =	0		Restrição 01	0	
8				Restrição 02	0	
9	X =			x, y	0	
10	Y =					
11						

Figura 17: Tabela com as informações do problema. Fonte: os autores

1. Abrimos o *OpenOffice Calc* e colocamos as seguintes informações:
   (a) Na célula **B7** escrevemos a fórmula "=B4*B9+C4*B10". Esta célula se refere a função objetivo (12), ela mostrará o valor máximo da função objetivo após a resolução pelo *Solver*;
   (b) Na célula **E7** escrevemos a fórmula "=B2*B9+C2*B10". Esta célula contém a restrição (13);
   (c) Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B3*B9+C3*B10". Esta célula contém a restrição (14);

(d) Na célula **E9** escrevemos o valor 0, pois esta célula contém a restrição (15) $x, \ \ y \ \ \geq 0$;

(e) As células **B9** e **B10** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

2. Abrimos o *Solver* e colocamos as informações mostradas na Figura 18:

   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B7**, pois esta célula possui a função objetivo (12);

   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Máximo*;

   (c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B9** e **B10**, pois estas são nossas variáveis x e y;

   (d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos:

      i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E7**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (13);

      ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (14);

      iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B9**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (15) para a variável x;

      iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B10**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (15) para a variável y;

3. Clique em *Resolver*.

Vemos que as células **B9** e **B10** possuem os resultados encontrados na resolução gráfica e na resolução por exaustão, porém, mostra apenas o valor de um dos vértices, no caso o vértice $B = (2, 1)$, como mostra a Figura 19.

O *Solver* nos mostra as limitações da ferramenta tecnológica para a resolução de um Problema de Programação Linear, mas como verificamos na resolução gráfica e na resolução por exaustão, há infinitas soluções $P = (x_0, y_0)$ que maximizam a nossa função objetivo $f(x, y) = 8x + 4y$. E o valor máximo que a função objetivo tem é $f(x_0, y_0) = 20$.

Exemplo 4. Otimize o Problema de Programação Linear

$$\text{minimizar } f(x,y) = x + y,$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 2x + 2y \leq 7 \\ x + 3y \geq 12 \\ 2x + 3y \geq 15, \end{cases}$$

$$\text{com } \ x, y \geq 0.$$

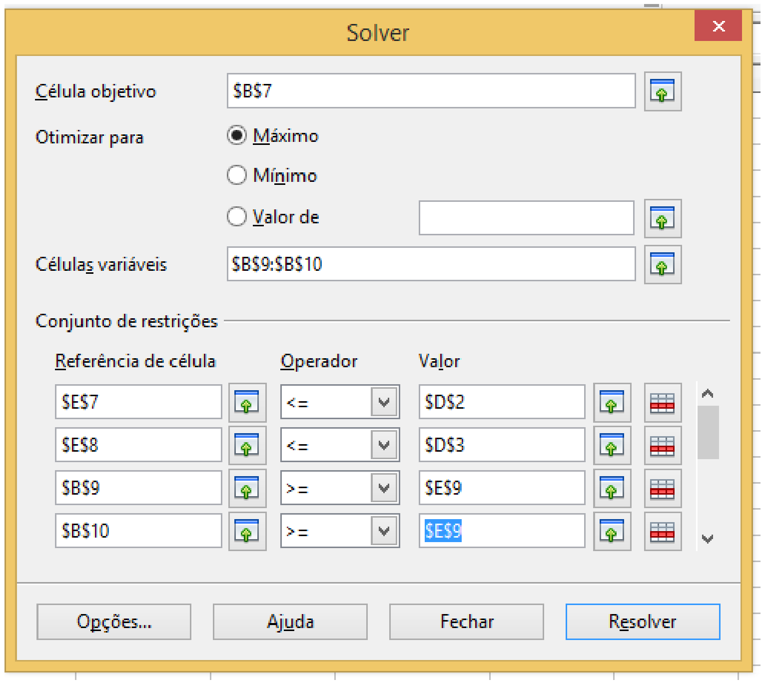
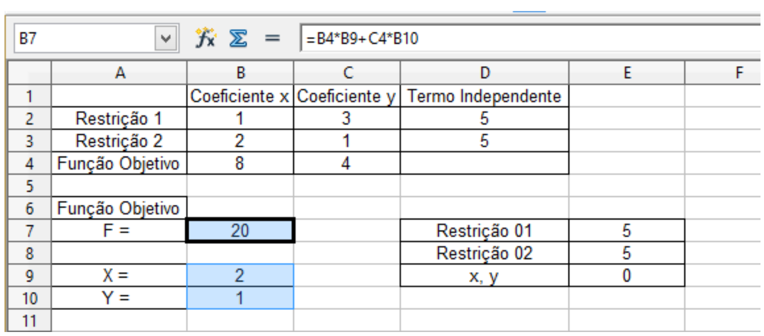


Figura 18: *Solver* com as informações do problema. Fonte: os autores



	A	B	C	D	E	F
1		Coeficiente x	Coeficiente y	Termo Independente		
2	Restrição 1	1	3	5		
3	Restrição 2	2	1	5		
4	Função Objetivo	8	4			
5						
6	Função Objetivo					
7	F =	20		Restrição 01	5	
8				Restrição 02	5	
9	X =	2		x, y	0	
10	Y =	1				
11						

Figura 19: Resultados do problema. Fonte: os autores

Resolução gráfica do Exemplo 4

Nesta situação temos um caso em que através da construção das restrições no plano cartesiano não há uma região viável, como mostra a Figura 20. Portanto, o problema não tem solução.

Resolução por exaustão do Exemplo 4

Substituindo os sinais de desigualdade pelos sinais de igualdade, temos as equações
$2x + 2y = 7$,
$x + 3y = 12$,
$2x + 3y = 15$,
$x = 0$ e $y = 0$.

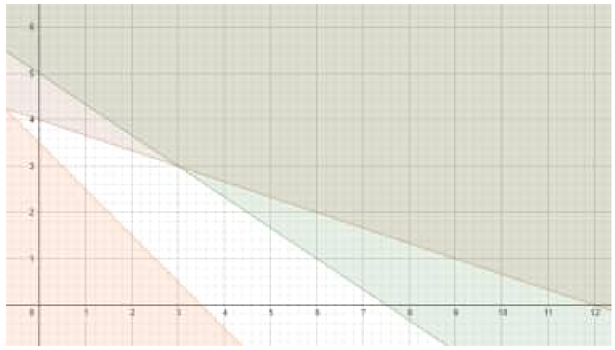


Figura 20: Restrições no espaço $\mathbb{R}^2$. Fonte: os autores

Assim, seguem os dez sistemas de equações com suas soluções.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ x + 3y = 12 \end{cases} \Longrightarrow S_1 = \left(-\tfrac{3}{4}, \tfrac{17}{4}\right).$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Longrightarrow S_2 = \left(-\tfrac{9}{2}, 8\right).$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_3 = \left(0, \tfrac{7}{2}\right).$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_4 = \left(\tfrac{7}{2}, 0\right).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Longrightarrow S_5 = (3, 3).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_6 = (0, 4).$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_7 = (12, 0).$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_8 = (0, 5).$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_9 = \left(\tfrac{15}{2}, 0\right).$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_{10} = (0, 0).$$

As soluções S_1 e S_2 são inviáveis pois $x < 0$.

A solução S_3 é inviável pois $0 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} < 12$ e $2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} < 15$.

A solução S_4 é inviável pois $\frac{7}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{7}{2} < 12$ e $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot 0 = 7 < 15$.

A solução S_5 é inviável pois $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 9 > 7$.

A solução S_6 é inviável pois $2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 < 15$ e $2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 > 7$.

A solução S_7 é inviável pois $2 \cdot 12 + 2 \cdot 0 = 24 > 7$.

A solução S_8 é inviável pois $2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 > 7$.

A solução S_9 é inviável pois $\frac{15}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{15}{2} < 12$ e $2 \cdot \frac{15}{2} + 2 \cdot 0 = 15 > 7$.

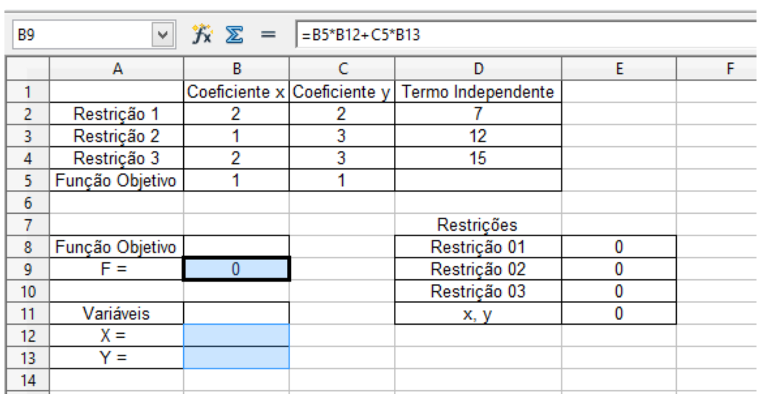
A solução S_{10} é inviável pois $0 + 3 \cdot 0 < 12$ e $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 15$.

Como nenhuma das soluções dos sistemas de equações respeita a todas as restrições, o problema não tem solução.

Resolução pelo *Solver* do Exemplo 4

Utilizando o tutorial do *Solver* construímos uma tabela com as informações do problema, além da função objetivo e das restrições, como mostra a Figura 21.

$$\text{minimizar } f(x, y) = x + y. \tag{16}$$
$$2x + 2y \leq 7. \tag{17}$$
$$x + 3y \geq 12. \tag{18}$$
$$2x + 3y \geq 15. \tag{19}$$
$$x,\ y \geq 0. \tag{20}$$



B9 =B5*B12+C5*B13

	A	B	C	D	E	F
1		Coeficiente x	Coeficiente y	Termo Independente		
2	Restrição 1	2	2	7		
3	Restrição 2	1	3	12		
4	Restrição 3	2	3	15		
5	Função Objetivo	1	1			
6						
7				Restrições		
8	Função Objetivo			Restrição 01	0	
9	F =	0		Restrição 02	0	
10				Restrição 03	0	
11	Variáveis			x, y	0	
12	X =					
13	Y =					
14						

Figura 21: Tabela com as informações do problema. Fonte: os autores

1. Abrimos o *OpenOffice Calc* e colocamos as seguintes informações:
   (a) Na célula **B9** escrevemos a fórmula "=B5*B12+C5*B13". Esta célula contém a função objetivo (16), ela mostrará o valor mínimo da função objetivo após a resolução pelo *Solver*;
   (b) Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B2*B12+C2*B13". Esta célula contém a restrição (17);
   (c) Na célula **E9** escrevemos a fórmula "=B3*B12+C3*B13". Esta célula contém a restrição (18);

   (d) Na célula **E10** escrevemos a fórmula "=B4*B12+C4*B13". Esta célula contém a restrição (19);
   (e) Na célula **E11** escrevemos o valor zero, pois esta célula contém a restrição (20) $x, \;\; y \;\; \geq 0$;
   (f) As células **B12** e **B13** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

2. Abrimos o *Solver* e colocamos as informações mostradas na Figura 22:
   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B9**, pois esta célula possui a função objetivo (16);
   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Mínimo*;
   (c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B12** e **B13**, pois estas são nossas variáveis x e y;
   (d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos:
      i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "$< =$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (17);
      ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E9**, com o *Operador* "$> =$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (18);
      iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "$< =$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (19);
      iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B12**, com o *Operador* "$> =$"e em *Valor* selecionamos a célula **E11**, para termos a restrição (20) para a variável x;
      v. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B13**, com o *Operador* "$> =$"e em *Valor* selecionamos a célula **E11**, para termos a restrição (20) para a variável y.

3. Clique em *Resolver*.

Vemos que as células **B12** e **B13** mostram um dos resultados encontrados na resolução por exaustão $S_8 = (0, 5)$, como mostra a Figura 23.

O *Solver* nos apresentou um resultado, porém, comparando os resultados da célula **E8** com a célula **D2** temos uma divergência da restrição do problema. Observe a restrição (17). $S_8 = (0, 5) \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 > 7$.

Este resultado obtido pelo *Solver* está incorreto, possivelmente o erro se deu pelo motivo dos parâmetros pré definidos no *Solver*. Isto mostra a importância de não nos fiarmos sempre aos resultados apresentados pelas ferramentas tecnológicas. Devemos analisar de maneira crítica o que a solução do problema nos mostra e por situações assim o ideal é termos mais de um método para a resolução de Problemas de Programação Linear.

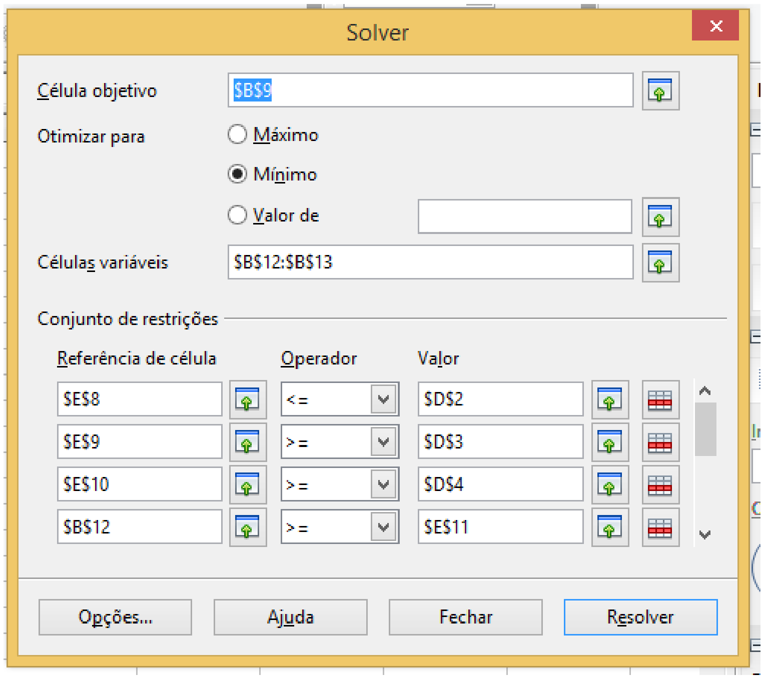
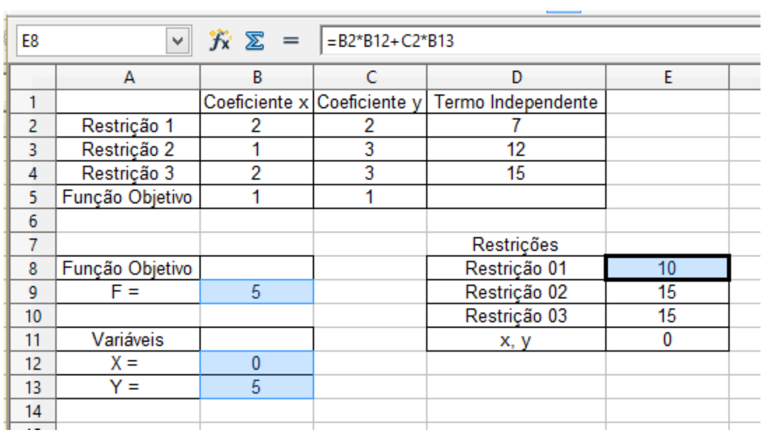


Figura 22: *Solver* com as informações do problema. Fonte: os autores



	A	B	C	D	E
1		Coeficiente x	Coeficiente y	Termo Independente	
2	Restrição 1	2	2	7	
3	Restrição 2	1	3	12	
4	Restrição 3	2	3	15	
5	Função Objetivo	1	1		
6					
7				Restrições	
8	Função Objetivo			Restrição 01	10
9	F =	5		Restrição 02	15
10				Restrição 03	15
11	Variáveis			x, y	0
12	X =	0			
13	Y =	5			
14					

Figura 23: Resultados do problema. Fonte: os autores

7 Considerações Finais

Observamos que a Programação Linear é uma ótima ferramenta que pode ser utilizada com a finalidade de referendar os conteúdos de sistemas de equações e inequações, a fim de contextualizar estas matérias do ensino médio, algo que sempre é pedido aos professores. O tema abordado neste trabalho é uma das formas de explicar algumas situações com as quais podemos trabalhar os assuntos abordados na escola, juntamente com os Problemas de Programação Linear, que é trabalhado no meio acadêmico.

Deste modo, propomos um meio de propiciar aos alunos os Problemas de Programação Linear, a partir de uma ideia que é proposta no livro didático [8], porém pouco aprofundada. No entanto, vemos que há a possibilidade do tema ser abordado, apesar de que, a carga horária para introdução de Problemas de Programação Linear no ensino médio é uma barreira com a qual devemos nos ater. Mesmo que não seja abordado, por exemplo, o Método *Simplex*, observamos que é necessário tempo para introduzir o tema proposto.

Entretanto, independentemente das limitações, vemos com otimismo adotar a Programação Linear, principalmente utilizando o *Solver*, como um instrumento para abordar e aproximar um conteúdo restrito à academia aos estudantes.

Referências

[1] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.* MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 2017.

[2] BERTONI, Ana M. A.; BASSANEZI, Rodney C.; JAFELICE, Rosana S. M. *Modelagem Matemática* Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

[3] CROCOLI, Osmar. *Programação Linear: Uma Abordagem Para o Ensino Médio.* Universidade Estadual de Maringá, 2016.

[4] DE LYRA, M. S., QUEIROZ, T. A. *Programação Linear: Uma Contextualização a partir de Sistemas Lineares,* 2015.

[5] DORNELLES FILHO, Adalberto A. *Montando uma dieta com sistemas lineares.* Revista do Professor de Matemática, nº 59, 2006.

[6] GOLDBARG, Marco C. *Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos.* 2 ed., Elsevier, Rio de Janeiro, 2005.

[7] HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional. Tradução: Ariovaldo Griesi; Revisão Técnica: João Chang Júnior.* McGraw-Hill, São Paulo, 2006.

[8] LEONARDO, F. M., et al. *Conexões com a Matemática - 1 e 2 Ensino Médio.* Editora Moderna, São Paulo, 2016.

[9] LOPES, André L. M. *Otimização Linear: Conceitos e Aplicação nas Aulas de Matemática para o Ensino Médio.* Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2017.

[10] MACULAN, Nelson., FAMPA, Marcia. H. C. *Otimização Linear.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

[11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros Curriculares Nacionais* MEC/SEF, Brasília, 1997.

[12] ROSA, J. V. B. *Uma Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio.* Dissertação de mestrado acadêmico - PROFMAT, 2021. UNIOESTE - Cascavel.

[13] SILVA, Gilmara A. *Programação Linear: uma possibilidade para o Ensino Médio*. Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, 2014.