UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Flávia Shirley Tavares Vieira

Produto Educacional

Explorando Determinantes Através da Teoria e Aplicações

Campina Grande - PB
21 de julho de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Flávia Shirley Tavares Vieira

Explorando Determinantes Através da Teoria e Aplicações

Produto Educacional vinculado ao Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
21 de julho de 2024

Resumo

Diante da ausência ou abordagem superficial dos determinantes nas salas de aula do ensino médio, devido também a sua não cobrança nas provas do ENEM, elaboramos uma proposta de eletiva sobre o tema de determinantes, sendo uma abordagem diferente da encontrada em livros didáticos. É uma eletiva desenvolvida para alunos do 3º ano do ensino médio que pretendem ingressar em cursos como engenharia elétrica, física, matemática, estatística ou em cursos que serão necessários os conhecimentos sobre determinantes. O curso irá contribuir com a compreensão desse conceito matemático e suas diversas aplicações em diferentes áreas.

Palavras-chave: Determinantes. Eletiva. Ensino Médio.

Abstract

Given the absence or superficial approach to determinants in high school classrooms, also due to their non-requirement in the ENEM tests, we developed an elective proposal on the topic of determinants, with an approach different from that found in textbooks. It is an elective developed for 3rd year high school students who intend to take courses such as electrical engineering, physics, mathematics, statistics or courses that require knowledge about determinants. The course will contribute to the understanding of this mathematical concept and its various applications in different areas.

Keywords: Determinants. Elective. High school.

1 Introdução

Diante das mudanças no currículo de matemática com a substituição dos vestibulares pelo ENEM, percebemos que alguns assuntos deixaram de ser abordados e consequentemente deixaram de ser ensinados ou sua abordagem é feita de forma superficial nas salas de aula e isso também é percebido nos livros didáticos. A ausência de alguns assuntos acabam causando prejuízo para aqueles que pretendem ingressar em cursos superiores em que esses conhecimentos são necessários, por exemplo os determinantes.

Assim, elaboramos essa eletiva para ser trabalhada o tema de determinantes, apresentando onde aparecem os determinantes , definição, propriedades, teoremas, resultados importantes e principalmente as aplicações que servem como motivação para o estudo desse tema.

Essa eletiva é um recorte da nossa dissertação de mestrado intitulada: Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do Enem e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes (PROFMAT-UFCG), podendo ser consultada para mais informações e respaldo sobre o que será abordado na eletiva.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Nosso trabalho possui como principal objetivo contribuir para o ensino e a aprendizagem dos determinantes de forma clara, objetiva e eficiente. Mostrando a sua importância e aplicações nas diversas áreas, contribuindo para professores e alunos que pretendem ingressar em alguns cursos universitários como matemática, engenharia elétrica, física e estatística.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar a definição dos determinantes por permutação;
- Apresentar as propriedades dos determinantes com suas respectivas demonstrações;
- Abordar teoremas como Laplace e Jacobi e também regras como Sarrus, Chió e Cramer.
- Apresentar aplicações sobre os determinantes como forma de motivar o seu estudo;

- Identificar se os determinantes são necessários em cursos de engenharia elétrica, estatística, física e matemática;
- Utilização do GeoGebra para o estudo de condição de alinhamento de três pontos.

1.2 Organização

No primeiro capítulo temos a introdução 1 onde é apresentado de forma detalhada o desenvolvimento da eletiva.

No capítulo 2 será apresentada uma breve apresentação sobre as etapas da eletiva.

No capítulo 3 teremos o desenvolvimento detalhado das etapas da eletiva.

No capítulo 4 será apresentado um exercício para fixação do conteúdo desenvolvido na eletiva.

No capítulo 5 teremos as considerações finais da eletiva.

2 Apresentação da Eletiva

Título: Explorando Determinantes Através da Teoria e Aplicações

Apresentação: Esse curso pretende proporcionar uma abordagem abrangente e prática para o estudo de determinantes, não encontrados na abordagem de livros didáticos, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida desse conceito matemático e suas diversas aplicações em diferentes áreas. Essa eletiva é um recorte da nossa dissertação de mestrado intitulada: Uma Análise Curricular do Ensino Médio Antes e Depois do Enem e uma Contribuição com Itinerários Formativos sobre Determinantes (PROFMAT-UFCG), podendo ser consultada para mais informações e respaldo sobre o que será abordado na eletiva.

Apresentaremos à seguir as etapas do curso, as quais serão abordadas os conteúdo sobre determinantes:

- **Etapa 1**: Discussão

  Inicialmente será organizado um momento de discussão com a intensão de identificar se os alunos estudaram determinantes no Ensino Médio e falar sobre sua importância em diversas áreas e cursos universitários como física, matemática, estatística e engenharia elétrica, tentando convencê-los a estudar esse tema devido a sua cobrança em diversas disciplinas dos cursos:

  - Estatística
    * Teoria das Matrizes e Aplicações;
    * Análise de Regressão;
    * Modelos Lineares;
    * Planejamento de Experimentos.
  - Engenharia Elétrica
    * Máquinas Elétricas;
    * Princípios de Comunicações;
    * Controle Analógico;
    * Controle Digital;
    * Sistemas Elétricos de Potência;
    * Análise de Sistemas Elétricos de Potência;
    * Cálculo Numérico; Eletrônica Analógica;
    * Circuitos Elétricos;

    * Dentre outros.

  - Física

    * Métodos Matemáticos;
    * Mecânica Quântica.

  - Matemática

    * Álgebra Linear;
    * Geometria Analítica;
    * Equações Diferenciais;
    * Teoria de Grupos;
    * Teoria de Anéis.

  Tópicos que consideramos importante destacar nessa etapa:

  - Falar sobre a ausência dos determinantes nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ver apêndice);
  - Destacar sua importância em algumas disciplinas de cursos como física, matemática, estatística, computação, engenharia elétrica e dentre outros;
  - Destacar que esse tema possui importantes aplicações;
  - Deixar claro que o apresentado durante o curso será uma abordagem diferente da encontrada em livros didáticos e consequentemente no que tem sido ensinado no ensino médio.

- **Etapa 2**: Aplicações

  Apresentaremos nessa etapa algumas aplicações sobre determinantes como forma de motivar os alunos que pretendem ingressar em alguns cursos universitários a estudarem sobre esse tema. Buscamos abordar aplicações acessíveis a esse nível de ensino e que serão úteis para estudos posteriores. São elas:

  - **Aplicação 1**: Condição de Alinhamento de Três Pontos;
  - **Aplicação 2**: Equação Geral da Reta;
  - **Aplicação 3**: Área de Triângulos;
  - **Aplicação 4**: Área do Paralelogramo;
  - **Aplicação 5**:

    Circuito Elétrico (Sugerimos que essa aplicação seja abordada por um professor de física, como uma forma de relacionar as disciplinas através da transdisciplinaridade).

- **Etapa 3**: Definição de determinantes por permutação

  Desenvolvemos uma construção da definição de determinantes para matrizes de ordem qualquer e por meio dela justificaremos as definições de determinantes para matrizes de ordem 1, 2 e 3 apresentada em livros didáticos.

  – Definição de determinantes de ordem 1, 2 e 3;
  – Regras de Sarrus e diagrama;
  – Definição de permutação e número de inversões;
  – Construção da definição de determinantes por permutação;
  – Definição de determinante para uma matriz de ordem qualquer usando permutação que não é encontrada em livros didáticos por ser mais geral.

- **Etapa 4**: Propriedades de determinantes

  Apresentaremos algumas propriedades cruciais para o determinante de matrizes grandes, inclusive as estudadas no ensino superior, em que o desenvolvimento do cálculo é realizado por computadores e ao aplicar alguma das propriedades, reduziremos o trabalho operacional do cálculo do determinante. As demonstrações dessas propriedades são encontradas em nossa dissertação.

  – Propriedade 1: Linha nula;
  – Propriedade 2: Matriz transposta;
  – Propriedade 3: Multiplicação de uma linha por uma constante;
  – Propriedade 4: Trocas de linhas paralelas;
  – Propriedade 5: Linhas paralelas iguais;
  – Propriedade 6: Soma de linhas;
  – Propriedade 7: O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante (Teorema de JACOBI);
  – Propriedade 8: Filas paralelas proporcionais.

- **Etapa 5**: Resultados importantes

  Os resultados apresentados serão úteis na redução da ordem do determinante em uma unidade e consequentemente do seu cálculo. O Teorema de Laplace também é utilizado em alguns livros como a definição de determinantes, onde na verdade é uma consequência da definição.

  – Teorema de Laplace;

  - Regra de Chió.

- **Etapa 6**: Regra de Cramer e Matriz inversa

  Apresentaremos a regra de Cramer e uma forma diferente para calcular a inversa de uma matriz, baseados em um teorema que trata do cálculo da matriz inversa através da adjunta da matriz.

  - Regra de Cramer;
  - Cálculo de matriz inversa por determinantes.

- **Etapa 7**: GEOGEBRA E ALINHAMENTO DE PONTOS

  Elaborar um produto final desenvolvido com os alunos, podendo utilizar umas das aplicações apresentadas durante o curso, uma sugestão é a condição de alinhamento de três pontos.

Finalidade: Apresentar os conhecimentos sobre determinantes, realizando a construção dos resultados, ajudando-os a compreender os conceitos e aplicações apresentados ao longo do curso e contribuindo para a formação daqueles que pretendem ingressar em cursos que sejam necessários os conhecimentos básicos sobre determinantes.

3 Abordagem detalhada da Eletiva

- **ETAPA 1**: DISCUSSÃO
  Duração: 50 minutos

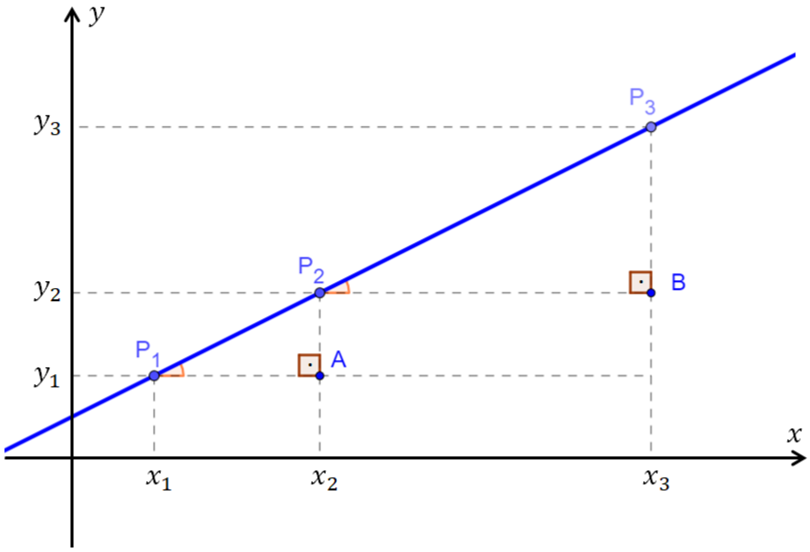
  Nessa etapa faremos um levantamento com os alunos para saber quais estudaram determinantes no ensino médio, se já ouviram falar em aplicações desse tema e quais os cursos superiores pretendem ingressar. Aproveitaremos a oportunidade para uma discussão sobre como tem sido trabalhado os determinantes nas salas de aula devido a sua não cobrança no Exame Nacional do Ensino Médio desde a sua criação. Destacaremos que muitos são os cursos universitários os quais são necessários o estudo sobre determinantes, por exemplo: física, matemática, estatística, computação, engenharia elétrica e dentre outros. Falar sobre qual o objetivo do curso e ressaltar que não é encontrado em livros didáticos o que será abordado na eletiva.

- **ETAPA 2**: APLICAÇÕES

  1. **Condição de Alinhamento de Três Pontos**
     Duração: 50 minutos

     Consideremos três pontos alinhados: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ representados acima. Consideremos também os pontos $A = (x_2, y_1)$ e $B = (x_3, y_2)$:

Figura 1 – Condição de Alinhamento de Três pontos



Fonte: Autores, 2024.

Percebamos que os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são retângulos em A e B, respectivamente.

Temos,

$$\angle A\hat{P}_1P_2 = \angle B\hat{P}_2P_3,$$

pois as retas suporte dos segmentos AP_1 e BP_2 são paralelas, desse modo, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$\angle P_1\hat{P}_2A = \angle P_2\hat{P}_3B.$$

Assim os triângulos AP_1P_2 e BP_2P_3 são semelhantes:

$$\begin{aligned}
& \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\
\Longrightarrow\ & (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_2) = (y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x_1) \\
\Longrightarrow\ & y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 = y_3x_2 - y_3x_1 - y_2x_2 + y_2x_1 \\
\Longrightarrow\ & y_2x_3 - y_2x_2 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 + y2x_2 - y2x_1 = 0 \\
\Longrightarrow\ & y_2x_3 - y_1x_3 + y_1x_2 - y_3x_2 + y_3x_1 - y_2x_1 = 0.
\end{aligned}$$

A expressão acima será o cálculo do determinante, que será visto posteriormente.

Observe:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \\ x3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = y_2x_1 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_3x_1 - y_1x_2 = 0.$$

Exemplo 1. *Sejam os pontos* $A = (0, 5)$*,* $B = (1, 3)$ *e* $C = (2, 1)$*. Verifique se os pontos dados são colineares.*

Solução: Para que os pontos A, B e C estejam alinhados:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 1 - (6 + 0 + 5) = 11 - 11 = 0.$$

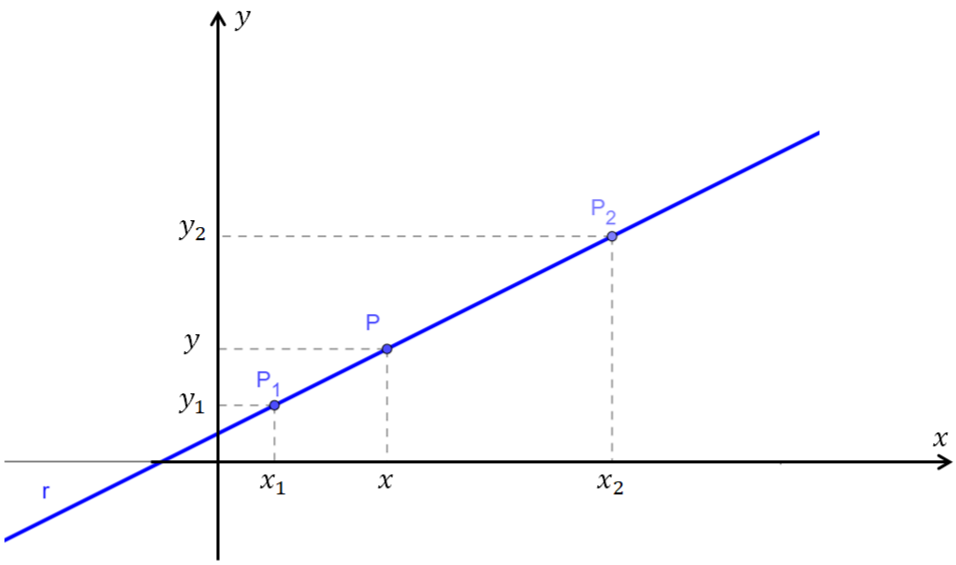
Portanto, podemos afirmar que os pontos A, B e C são colineares, pois $\det = 0$.

2. **Equação Geral da Reta**

   Duração: 50 minutos

   Sejam os pontos P_1, P e P_2 pertencentes a reta r, dessa forma, podemos afirmar que os mesmos estão alinhados e usando a condição de alinhamento de três pontos:

Figura 2 – Equação Geral da Reta



Fonte: Autores, 2024.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0$$

$$\Longrightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 = 0. \tag{3.1}$$

Consideremos $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2$, temos pela equação 3.1:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + c = 0.$$

Exemplo 2. *Dados os pontos* $A = (1, 5)$ *e* $B = (2, -2)$*, determinemos a equação da reta que passe por esses pontos.*

Solução: Para que a reta passe pelo ponto A e pelo ponto B, devemos ter

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 2y - 2 - (10 - 2x + y) = 7x + y - 12 = 0.$$

Logo, a equação procurada é

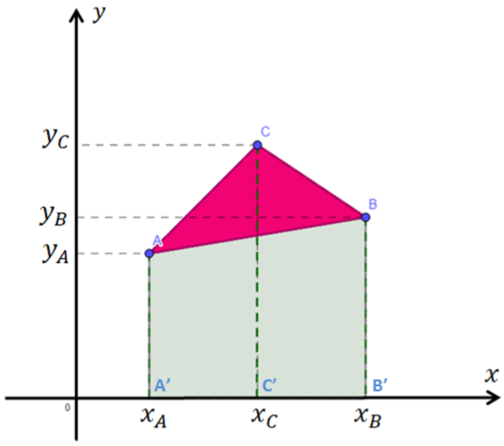
$$7x + y - 12 = 0.$$

3. **Área de Triângulos**

   Duração: 50 minutos

   Sejam $T_1 : ACC'A'$, $T_2 : BCC'B'$ e $T_3 : ABB'A'$ trapézios. Com A', B' e C' correspondendo a projeção ortogonal no eixo x dos pontos A, B e C, respectivamente.

Figura 3 – Área de Triângulos



Fonte: Autores, 2024.

Notemos que a área do triângulo ABC pode ser escrita por:

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= T_1 + T_2 - T_3 \\
&= \frac{(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A)}{2} + \frac{(y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C)}{2} - \frac{(y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(y_A + y_C)\cdot(x_C - x_A) + (y_B + y_C)\cdot(x_B - x_C) - (y_A + y_B)\cdot(x_B - x_A)\right] \\
&= \frac{1}{2}[y_A x_C - y_A x_A + y_C x_C - y_C x_A + y_B x_B - y_B x_C + y_C x_B - y_C x_C - y_A x_B \\
&+ \; y_A x_A - y_B x_B + y_B x_A] \\
&= \frac{1}{2}\left|y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A\right|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A|. \tag{3.2}$$

Notemos que a expressão da equação 3.2 equivale ao cálculo do determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Exemplo 3. *Dados os pontos $A = (2, 3)$, $B = (0, -1)$ e $C = (1, 4)$, qual a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C?*

Solução: De acordo com a equação 3.2, temos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(-2+3)-(-1+8)\right] = \frac{1}{2}(1-7) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3.$$

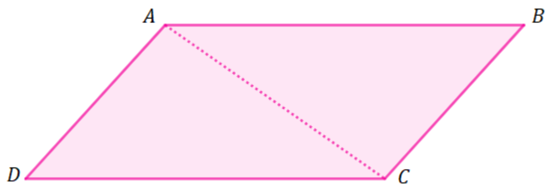
Portanto, $S_{ABC} = |-3| = 3$.

4. **Área do paralelogramo**

Duração: 50 minutos

Consideremos o paralelogramo $ABCD$ abaixo:

Figura 4 – Área do Paralelogramo



Fonte: Autores, 2024.

Percebamos que o paralelogramo é uma figura formada por 2 triângulos ACD e ABC, assim a área do paralelogramo será o dobro da área do triângulo. E de acordo com a equação 3.2, a área do trapézio será:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A\right] \quad (3.4)$$

$$S_{ABCD} = |y_A x_C - y_C x_A - y_B x_C + y_C x_B - y_A x_B + y_B x_A|. \quad (3.5)$$

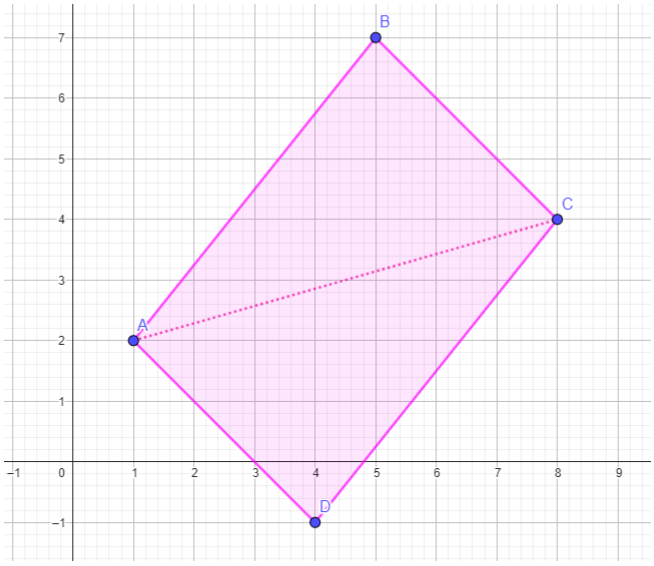
Exemplo 4. *Determine a área de do paralelogramo formado pelos vértices* $A = (1, 2)$*,* $B = (5, 7)$*,* $C = (8, 4)$ *e* $D = (4, -1)$*.*

Solução: Para determinar a área do paralelogramo, consideraremos inicialmente:

$$\begin{aligned} A &= (x_1, y_1) = (1, 2) \\ B &= (x_2, y_2) = (5, 7) \\ C &= (x_3, y_3) = (8, 4) \\ D &= (x_4, y_4) = (4, -1). \end{aligned}$$

Observe a imagem do paralelogramo representado abaixo:

Figura 5 – Área do Paralelogramo I



Fonte: Autores, 2024.

Consideremos a matriz formada pelos vértices do triângulo ABC:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

A área do triângulo formado pelos vértices A, B e C será metade do módulo do determinante da matriz 3.6:

$$\begin{aligned} S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\,|7+16+20-56-4-10| \\ &= \frac{1}{2}|43-70| \\ &= \frac{1}{2}|-27| \\ &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

A área do paralelogramo será o dobro de S_{ABC}, isto é,

$$S_{ABCD} = 27.$$

5. **Aplicação: circuito elétrico**

Duração: 1 hora e 40 minutos

– Fonte: Serve para levar energia para a placa mãe, processador placa de vídeo, disco rígido, unidades de CD e DVD.

– Processador: Também conhecida de CPU, essa peça é responsável por processar os dados e transformar em informação.

– Resistores: Componentes eletrônicos cuja função principal é limitar o fluxo de cargas elétricas por meio da conversão da energia elétrica em energia térmica.

– Capacitores: Sua principal função é armazenar cargas elétricas em seu interior durante cargas e descargas, essa peça pode fornecer grandes quantidades de energia elétrica.

No Ensino Médio são estudados circuitos mais simples e inclusive tem sido um conteúdo bastante presente no Enem. O circuito elétrico possui algumas grandezas, são elas:

– Tensão: é a energia necessária para deslocar uma carga unitária através de um elemento, medida em volts (V).

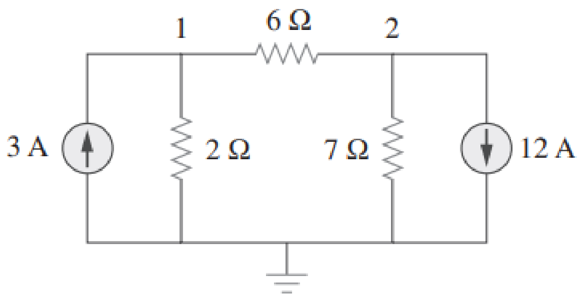
– Corrente: é o fluxo de carga por unidade de Duração, medido em ampères (A).

– Resistência (R): representa a capacidade de um elemento resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em ohms (V).

Um dos livros consultados e do qual apresentaremos um exemplo foi (ALEXANDER; SADIKU, 2013) e ainda (BOLDRINI, 1986) e vídeos do youtube como (PROENEM, 2019).

Exemplo 5. *Obtenhamos as tensões nodais no circuito da Figura abaixo:*

Figura 6 – Circuito Elétrico: Exemplo I



Sadiku, 2013

Para resolver esse problema será necessário conhecer algumas leis de Kirchhoff e de George OHM:

Leis de Kirchhoff

- A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual a soma das correntes que saem deste nó.
- A partir de um ponto qualquer de uma malha se percorrermos em um sentido qualquer ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

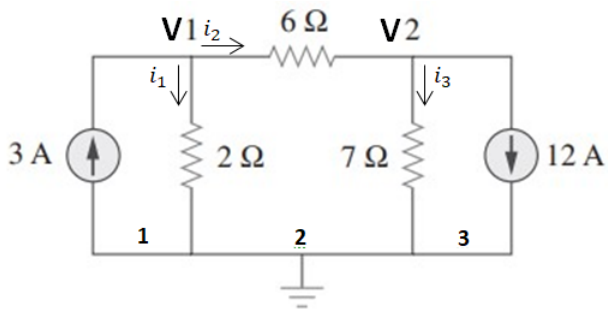
Lei de George OHM

- A tenção é proporcional a corrente elétrica e a constante de proporcionalidade é a resistência, isto é:

$$\frac{v}{i} = R.$$

Solução: Sejam V_1 e V_2 nós, i_1, i_2 e i_3 as correntes e 1, 2 e 3 as malhas do circuito. Adotaremos o sentido das correntes apresentados na imagem a seguir:

Figura 7 – Circuito Elétrico: Exemplo I



Sadiku, 2013

De acordo com as leis apresentadas, temos para o nó 1:

$$\begin{aligned} 3 &= i_1 + i_2 \\ 3 &= \frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_2}{6} \\ 18 &= 3V_1 + V_1 - V_2 \\ 4v_1 - V_2 &= 18. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Já para o nó 2:

$$\begin{aligned} i_2 &= i_3 + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} &= \frac{V_2}{7} + 12 \\ \frac{V_1 - V_2}{6} - \frac{V_2}{7} &= 12 \\ \frac{7V_1 - 7V_2 - 6V_2}{42} &= 12 \\ 7V_1 - 13V_2 &= 504. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Escrevendo as equações 3.7 e 3.8 na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 504 \end{bmatrix}.$$

Determinaremos inicialmente os denominadores de V_1 e V_2:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -52 + 7 = -45.$$

Denotaremos o numerador de V_1 por N_{V_1}, assim:

$$N_{V_1} = \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ 504 & -13 \end{vmatrix} = -234 + 504 = 270.$$

Denotaremos o numerador de V_2 por N_{V_2}, assim:

$$N_{V_2} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 7 & 504 \end{vmatrix} = 2016 - 126 = 1890.$$

Portanto, as soluções dos sistema são dadas por

$$V_1 = \frac{N_{V_1}}{-45} = \frac{270}{-45} = -6 \text{ volts}$$

e

$$V_2 = \frac{N_{V_2}}{-45} = \frac{1890}{-45} = -42 \text{ volts}.$$

- **ETAPA 3**: DEFINIÇÃO DE DETERMINANTES POR PERMUTAÇÃO

  Duração: 1 hora e 40 minutos

  1. Determinante de uma matriz de ordem 1:

  $$\det[a] = |a| = a.$$

2. Determinante de uma matriz de ordem 2:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Determinante de uma matriz de ordem 3:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{3.10}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3.11}$$

a) Regra de Sarrus

Consideramos importante apresentar essa regra por não ser fácil a memorização da definição de determinante para matrizes de ordem 3.

Consideremos uma matriz A de ordem 3:

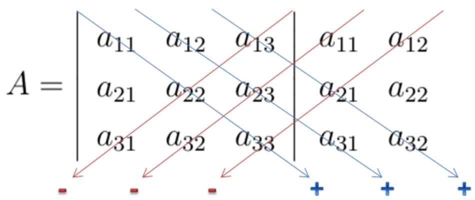
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Para aplicar a regra de Sarrus, desenvolveremos as etapas abaixo:

i. Repetiremos as duas primeiras colunas à direita da terceira coluna da matriz, ou as duas primeiras linhas abaixo da terceira linha da matriz.

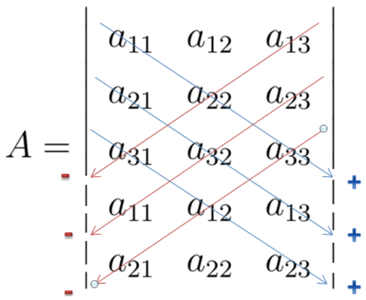
Observemos as representações abaixo:

Figura 8 – Regra Sarrus I



Fonte: Autores, 2024.

Figura 9 – Regra Sarrus II



Fonte: Autores, 2024.

ii. Os termos precedidos com o sinal positivos serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal (representadas em azul), isto é, $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$ e $a_{13}a_{21}a_{32}$.

iii. Os termos precedidos com o sinal negativo serão obtidos multiplicando os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária (representadas em vermelho), isto é, $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$ e $-a_{12}a_{21}a_{33}$.

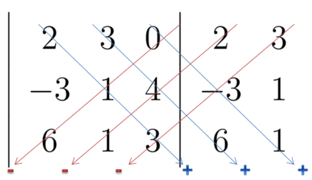
iv. Por fim, somam-se os 6 produtos encontrados nos itens 2 e 3 acima, dessa forma

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 6. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *determine o* $\det A$ *utilizando o método de Sarrus.*

Solução: Consideremos a imagem a seguir:

Figura 10 – Regra de Sarrus: Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

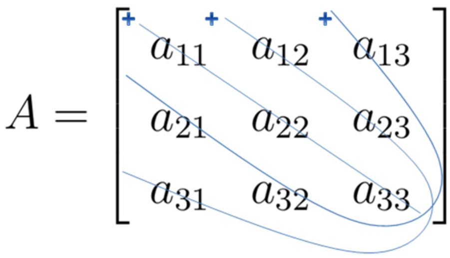
Temos,

$$\det A = 2{\cdot}1{\cdot}3+3{\cdot}4{\cdot}6+0{\cdot}(-3){\cdot}1-0{\cdot}1{\cdot}6-2{\cdot}4{\cdot}1-3{\cdot}(-3){\cdot}36+72-8+27 = 97.$$

b) Regra Através de Diagrama

Uma outra forma de memorizar a definição de determinantes para matrizes de ordem 3 é com o uso dos diagramas, observemos a representação abaixo:

Figura 11 – Regra de Diagrama I

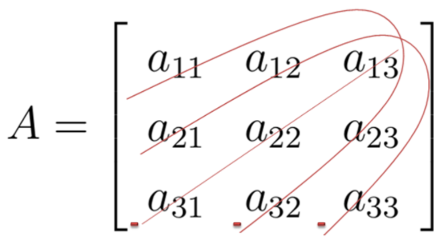


Fonte: Autores, 2024.

Para cada uma das três setas acima, teremos um produto e neste caso cada produto possui sinal positivo:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}; +a_{12}a_{23}a_{31} \text{ e } + a_{13}a_{21}a_{32}. \tag{3.12}$$

Figura 12 – Regra de Diagrama II



Fonte: Autores, 2024.

Para cada uma das três setas teremos um produto e, neste caso, cada produto possui sinal negativo:

$$-a_{13}a_{22}a_{31}; -a_{11}a_{23}a_{32} \text{ e } - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3.13}$$

O $\det A$ será soma das expressões 3.12 e 3.13 acima representadas:

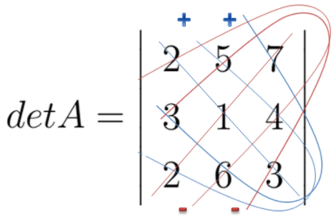
$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

Para mais detalhes sobre essa regra através de diagrama, consultar o livro do (IEZZI, 2006).

Exemplo 7. *Vamos calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ *através do método do diagrama.*

Solução: Consideremos a imagem abaixo:

Figura 13 – Regra de Diagrama: Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 6 + 40 + 126 - 14 - 45 - 48 \\ &= 65. \end{aligned}$$

4. Definições Preliminares

   Duração: 50 minutos

   Apresentaremos inicialmente algumas definições que serão base para a compreensão da definição de determinantes por permutação. Utilizamos nesta temática, referências como (MORGADO, 2015), (STEINBRUCH, 1987) e (MADEIRA, 2017).

   a) Permutação

      Definição 3.1. *Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots,$ a_n, uma Permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem. A escolha do primeiro objeto pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segunda posição pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará a terceira posição pode der feita de $n-2$ modos, etc …; a escolha do objeto que ocupará a última posição pode ser feita de 1 modo, isto é, $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$.*

Exemplo 8. *Sejam os números* $1, 2$ *e* 3. *Determine suas possíveis Permutações.*

Solução: Notemos que a quantidade de Permutações dos números $1, 2$ e 3 é dada por $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, são elas:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ e } (3, 2, 1).$$

b) Inversão

Definição 3.2. *Dada uma permutação de números inteiros* $1, 2, \ldots, n$*, dizemos que existe uma inversão quando um inteiros que não está em sua posição original precede outro menor que ele.*

Quando a permutação possuir um ***número par de inversões*** *o termo correspondente a essa permutação terá o* ***sinal positivo*** *e quando a permutação possuir um* ***número ímpar de inversões*** *o termo correspondente a essa permutação terá* ***sinal negativo****.*

Exemplo 9. *Consideremos as permutações dos números* $1, 2$ *e* 3. *Encontre o número de inversões de cada uma de suas permutações.*

Solução: observemos a tabela que criamos para facilitar o que abordamos anteriormente, constando as possíveis permutações e os respectivos números de inversões dos números $1, 2$ e 3:

Tabela 1 – Nome da tabela

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

Fonte: Autores, 2024.

5. Construção da definição de determinantes por permutação

   Duração: 50 minutos

   Nesta seção calcularemos o determinante de matrizes particulares (ordem 1, 2 e 3) através da definição de determinante que apresentaremos na sequência. Consideramos importante relembrar o conceito de diagonal principal de uma matriz.

Definição 3.3. *Dada uma matriz A de ordem n:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

os ***elementos da diagonal principal*** *da matriz A corresponde a sucessão dos elementos*

$$(a_{11},\, a_{22},\, a_{33},\, \cdots, a_{nn}),$$

cujos primeiros e segundos índices são todos iguais.

a) Determinantes para matrizes de Ordem 1

Consideremos a matriz $A = [a_{11}]$.

Notemos a diagonal principal é composta pelo único elemento que compõe a matriz, ou seja, o elemento a_{11} e ao realizar a permutação do segundo índice desse elemento, temos uma única forma de permutá-lo. Observe a tabela:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1)	0	+

Desse modo, o termo referente a essa permutação será o próprio a_{11} e pelo fato da permutação possuir zero inversões (par), o sinal desse termo será positivo, daí temos

$$\det A = |a_{11}| = +a_{11} = a_{11}.$$

Para matrizes de ordem superiores a 1, essa definição ficará mais clara. É o que veremos mais adiante,na seção 5.4.2.

b) Determinantes para matrizes de Ordem 2

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de A faremos a soma dos produtos dos elementos dessa matriz, obtidos permutando-se de todos os modos possíveis os segundos índices dos elementos da diagonal principal, estando fixados os primeiros índices.

No caso da matriz A a sua diagonal principal é dada por

$$a_{11}a_{22}.$$

Permutando-se de todas as formas possíveis os segundos índices do produto dos elementos da diagonal principal $(1, 2)$ apresentado acima, ficamos com:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1, 2)	0	$+$
(2, 1)	1	$-$

De acordo com o apresentado na tabela, os termos referentes ao produto dos elementos da diagonal principal da matriz permutando-se os segundos índices e fixando os primeiros são $a_{11}a_{22}$ e $-a_{12}a_{21}$. Fazendo soma algébrica para encontrar o determinante da matriz:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

c) Determinantes para matrizes de Ordem 3

Duração: 50 minutos.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Pelo que vimos na definição de determinantes de ordem 3,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Reparemos que os produtos que aparecem no determinante podem ser reescritos, de modo geral, como

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

onde $(j_1j_2j_3)$ corresponde às permutações dos números 1, 2 e 3.

Além disso, temos três termos com o sinal negativo, isso ocorre pelo fato de existirem três permutações correspondentes a esses produtos com um número ímpar de inversões.

De acordo com a tabela apresentada no Exemplo 1 teremos 6 permutações para os números 1, 2 e 3:

Permutações	Quantidade de Inversões	Sinal
(1,2,3)	0	$+$
(1,3,2)	1	$-$
(2,1,3)	1	$-$
(2,3,1)	2	$+$
(3,1,2)	2	$+$
(3,2,1)	1	$-$

Notemos que ao realizar o produto dos elementos da diagonal principal da matriz A, fixando os primeiros índices e os segundos índices correspondendo a permutação dos elementos 1, 2 e 3 destacado na tabela, ficamos com os seguintes produtos referente às permutações:

$$+a_{11}a_{22}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Efetuando a soma algébrica desses 6 termos, obteremos o $\det A$, isto é,

$$\det A = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{3.14}$$

Logo, a expressão **??** corresponde a definição de determinantes para matrizes de ordem 3, apresentada acima.

6. Determinantes para matrizes de Ordem n

   Apresentaremos a generalização da definição de determinantes que foi apresentada nas seções anteriores para matrizes de ordem até 3.

   É importante destacar que não é comum encontrar este tipo de definição em livros didáticos e há livros atuais em que a definição é apresentada apenas para determinantes de ordem até 3.

   Definição 3.4. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

   Dizemos que,

$$\det [a_{ij}] = \sum_p (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

onde $j = j(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *é o número de inversões da permutação* $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ *e* p *indica que a soma é feita considerando-se as parcelas referentes a cada uma das* $n!$ *permutações de* $(1, 2, 3, \cdots, n)$.

Essa definição é extremamente importante, pois abrange o determinante de matrizes com ordem qualquer, no entanto, acaba sendo trabalhosa para matrizes de ordem 4 ou superior.

- **ETAPA 4**: PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

Apresentaremos à seguir as propriedades de determinantes que irão facilitar e na maioria das vezes reduzir o cálculo do determinante de uma matriz. Os resultados podem ser verificados usando exemplos particulares.

1. Linha nula

   Duração: 50 minutos.

   Se todos os elementos de uma linha de uma matriz A são nulos, $\det A = 0$.

   Exemplo 10. *Calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Solução: Calculemos o $\det A$:

   $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-3){\cdot}0 + 4{\cdot}7{\cdot}0 + 5{\cdot}0{\cdot}5 - [5{\cdot}(-3){\cdot}0 + 7{\cdot}0{\cdot}1 + 5{\cdot}4{\cdot}0] = 0.$

   Exemplo 11. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

   Solução:

   Pela propriedade 1, apresentada: $\det A = \begin{vmatrix} 82 & 15 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -78 & 3 & 103 \\ 20 & 18 & 30 & 903 \end{vmatrix} = 0.$

2. Matriz transposta

   Se A é uma matriz de ordem n e A^t é sua transposta, então

$$\det A^t = \det A$$

.

Exemplo 12. *Seja* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Determinemos inicialmente o determinante da matriz A:
$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 7\cdot 8 + 3\cdot 2\cdot 0 + 6\cdot(-9)\cdot 5 - [5\cdot 7\cdot 0 + (-1)\cdot(-9)\cdot 2 + 6\cdot 3\cdot 8] = -56+0-270-[0+18+144] = -326-162 = -488.$

Note que a matriz B corresponde a transposta de A e pela propriedade 2 de determinantes, temos:
$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \det A = -488$

3. Multiplicação de uma linha por uma constante

   Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por uma constante.

Exemplo 13. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{bmatrix}$. *Calcular* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução: Perceba que de acordo com a propriedade 3:

Calculemos inicialmente o determinante da matriz A:
$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 7 & 12 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-4) + 1\cdot(-5)\cdot 7 + 2\cdot 12\cdot 9 - [9\cdot 0\cdot 7 + 3\cdot(-5)\cdot 12 + 2\cdot 1\cdot(-4)] = 0 - 35 + 216 - (0 - 180 - 8) = 181 + 188 = 369$

Notemos que a matriz B foi obtida a partir da matriz A, multiplicando a 3º linha de A por 3. Desse modo, pela 3ª propriedade de determinantes:

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -5 \\ 21 & 36 & -12. \end{vmatrix} = 3\cdot\det A = 3\cdot 369 = 1107.$$

Exemplo 14. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{bmatrix}$.

Solução: De acordo com a propriedade 3 de determinantes:

$$\det A = \begin{vmatrix} 546 & -273 & 819 \\ 4 & 6 & 12 \\ -100 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 273{\cdot}2{\cdot}5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2730{\cdot} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -20 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$2730 \cdot [30+120+6-(-18+12-10)] = 3730 \cdot (156+16) = 2730 \cdot 172 = 469560.$

4. Troca de linhas paralelas

   Duração: 50 minutos

   Uma vez trocada a posição de duas linhas o determinante troca de sinal.

Exemplo 15. *Considere* $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, *determine* $\det A$ *e* $\det B$.

Solução:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-3)\cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 - [7 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 2] \\ &= -6 - 15 + 56 - (35 + 36 + 4) = 35 - 75 = -40. \end{aligned}$$

Percebamos que a matriz B é obtida da matriz A trocando de posição as linhas 1 e 3 . Daí, pela propriedade 4 apresentada:

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= -\det A \\ &= -(-40) \\ &= 40. \end{aligned}$$

5. Linhas paralelas iguais

   Duração: 50 minutos

Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formada por elementos respectivamente iguais, estão

$$\det A = 0.$$

Exemplo 16. *Considere* $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, *Calcule* $\det A$.

Solução: Teremos que a matriz A possui as linhas 1 e 3 com elementos respectivamente iguais:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 9 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-7) \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 5 - [5 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot (-7) \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 5] \\ &= 180 - 126 + 10 - 180 + 126 - 10 \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Soma de linhas

   Consideremos uma matriz A de ordem n, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

   em que os elementos da j-ésima coluna são tais que:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} &= b_{2j} + c_{2j} \\ &\vdots \\ a_{nj} &= b_{nj} + c_{nj} \end{aligned}$$

   isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sejam

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então teremos

$$\det A = \det B + \det C,$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 17. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, *calcular* $\det A$.

Solução:

Podemos reescrever a matriz A da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & 9 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8+5 \\ 2 & 10 & 10-1 \\ 15 & 5 & 5+0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Pela última expressão, como as colunas 2 e 3 da matriz à seguir são iguais, teremos pela propriedade 5 de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} \det A &= 0 + \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 2 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot [0 - 24 + 10 - (150 - 6 + 0)] \\ &= 5 \cdot (-14 - 144) \\ &= 5 \cdot (-158) \\ &= -790. \end{aligned}$$

7. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante (Teorema de JACOBI).

   Duração: 50 minutos

   Adicionando a uma fila de uma matriz A, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz B, tal que

$$\det B = \det A.$$

Exemplo 18. *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$*, calcule o seu determinante.*

Solução: Adicionando, à 2^{a} linha da matriz A, a $1°$ linha multiplicada por (-1), obteremos uma uma nova matriz:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4+(-1) & 2+(-3) & 7+(-5) & 10+(-6) \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$\det A$.

Como a matriz B possui as linhas 2 e 4 iguais, então pela propriedade 5:

$$\det B = 0 = \det A.$$

Essa propriedade será bastante útil para introduzir zeros nos elementos das linhas de uma matriz, o que facilitará o calculo do determinante dessa matriz.

8. Filas paralelas proporcionais

   Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det A = 0.$$

Exemplo 19. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{bmatrix}$*, calcule o* $\det A$.

Solução: Note que de acordo com a propriedade 8, termos:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 7\cdot 1 & -6 & 11 \\ 2 & 7\cdot 2 & 9 & 22 \\ 3 & 7\cdot 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7\cdot 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\
&= 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 11 \\ 2 & 2 & 9 & 22 \\ 3 & 3 & 15 & 55 \\ 7 & 7 & 30 & 121 \end{vmatrix} \\
&= 7\cdot 0. \\
&= 0
\end{aligned}$$

- **ETAPA 5**: RESULTADOS IMPORTANTES

  1. Teorema de Laplace

     Duração: 1 hora e 50 minutos

     Ao realizar o cálculo do determinante para matrizes de ordem superior a 3 não existe um método específico como o apresentado para matrizes de ordem 1, 2 e 3. Assim, apresentaremos o Teorema de Laplace, sendo bastante útil para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz, reduzindo o seu desenvolvimento à determinantes de uma ordem inferior ao determinante da matriz original.

     Com o auxílio das propriedades de determinantes, os elementos das linhas ou colunas podem tornar-se zero ou um, daí teremos um cálculo ainda mais simplificado ao utilizar o teorema de Laplace.

     Baseados nos livros mais antigos do ensino médio, o Teorema de Laplace é usado para definir determinantes de ordem maior do que 3, já em nosso trabalho, apresentamos a definição geral determinantes.

     a) Definições Preliminares

        Definição 3.5. *Consideremos uma matriz quadrada de ordem n. Representemos por M_{ij} a* ***submatriz*** *quadrada de ordem $(n-1)$ de A, obtida suprimindo sua i-ésima linha e j-ésima coluna. O determinante $|M_{ij}|$ é chamado* ***menor*** *do elemento a_{ij} de A.*

Exemplo 20. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 9 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ *e determine o menor do elemento* a_{12}.

Solução: Iremos determinar inicialmente a submatriz M_{12}:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

O menor do elemento a_{ij} será $\det B$:

$$\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - [(-3) \cdot 5] = 54 + 15 = 69$$

Definição 3.6. *Chamamos* ***Co-fator*** *do elemento* a_{ij}*, denotado por* A_{ij}*, como o determinante da submatriz* M_{ij} *com sinal:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|.$$

Observe que os "sinais" $(-1)^{i+j}$ que acompanham os menores formam uma disposição quadriculada com os + na diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdot \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Exemplo 21. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$*. Determine o menor e o co-fator do elemento* a_{23}.

Solução: Para determinar o menor do elemento a_{23}, eliminaremos a linha 2 e a coluna 3 da matriz A, observemos:

Figura 14 – Cofator: Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autores, 2024.

Desse modo, a matriz obtida é

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e o menor do elemento a_{ij} será:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6.$$

Já para determinar o co- fator do elemento referido, fazemos

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |M_{23}|. \tag{3.15}$$

Teorema 3.1. *O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ é igual a soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores.*

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eliminando a linha i e a coluna j da matriz A, ficamos com a submatriz:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj},$$

Exemplo 22. *Calculemos o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *pelo Teorema de Laplace.*

Solução: Para resolver o determinante de A é necessário fazermos o cálculo pela linha ou coluna que possuir a maior quantidade de zeros, neste caso utilizaremos a linha 3 por possuir 2 zeros:

$$\begin{aligned}
\det A &= 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad +0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 0 - [-9 + 4 + 15 - (1 - 18 + 30)] + 0 - 2 \cdot [18 + 4 - (-4 + 60)] \\
&= -(10 - 13) - 2 \cdot (22 - 56) \\
&= 3 + 68 = 71.
\end{aligned}$$

Portanto, $\det A = 71$.

Como já falamos acima, o Teorema de Laplace é muito útil, no entanto, ao considerar matrizes com ordem superior a 4, há um esforço computacional de cálculos muito grandes.

2. Regra de Chió

Essa regra consiste em um modo de reduzir em uma unidade a ordem do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ com o objetivo de facilitar os cálculos. A regra também é importante, pois pode ser utilizada em um determinante de ordem qualquer, baixando a sua ordem em 1 unidade.

Essa regra acaba sendo uma consequência da $7^{\underline{a}}$ propriedade de determinantes **??**, também é conhecida como Teorema de Jacobi.

Para mais detalhes consultar (BOLDRINI, 1986) e (BEZERRA, 1977).

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

De acordo com a regra de Chió:

Duração: 50 minutos.

- Desde que M tenha $a_{11} = 1$, eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna de M.
- De cada elemento restante na matriz M subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares", traçada do elemento considerado à 1ª linha e à 1ª coluna.
- Através das diferenças obtidas, construímos uma nova matriz de ordem $n - 1$ onde o determinante é igual ao $\det M$.

Exemplo 23. *Consideremos a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *e calculemos o seu determinante pela Regra de Chió.*

Solução: Visto que nessa matriz o elemento $a_{11} = 1$, efetuando as operações indicadas na regra de Chió:

Figura 15 – Regra de Chió: Exemplo I

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 12 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \end{array}\right|$$

Fonte: Autores, 2024.

Pela Regra de Chió, o determinante acima é igual ao determinante que segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 3-3\cdot 1 & 2-2\cdot 1 \\ 4 & 5-2\cdot 4 & 7-3\cdot 4 & 3-2\cdot 4 \\ 3 & 10-2\cdot 3 & 12-3\cdot 3 & 9-2\cdot 3 \\ 3 & 8-2\cdot 3 & 2-3\cdot 3 & 6-2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante de ordem 4 pelo Teorema de Laplace usando a primeira linha, temos:

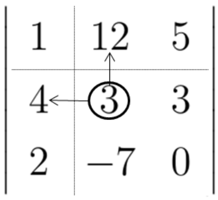
$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Percebamos que o determinante de ordem 3 acima, possui $a_{11} \neq 1$, daí utilizaremos a propriedade de determinante onde faremos o produto do número -1 pelos elementos da segunda linha e subtrairemos desse produto os respectivos elementos da 1ª linha do determinante da matriz A, sabendo que o determinante da A e o determinante da nova matriz será o mesmo, ficamos com:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2-(-3) & -(-7)-(-5) & -0-(-5) \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de Chió no determinante de ordem 3 encontrado, obteremos:

Figura 16 – Regra de Chió: Exemplo I



Fonte: De autoria própria.

O determinante de ordem 3 é igual a:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 12-12\cdot 1 & 5-5\cdot 1 \\ 4 & 3-12\cdot 4 & 3-5\cdot 4 \\ 2 & -7-12\cdot 2 & 0-5\cdot 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -45 & -17 \\ 2 & -31 & -10 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando a Regra de Chió no determinante de ordem 3 e eliminando a sua 1ª linha e 1ª coluna, esse determinante será:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -45 & -17 \\ -31 & -10 \end{vmatrix} \\
&= (-45)\cdot(-10) - [(-17)\dot{(}-31)] \\
&= 450 - 527 \\
&= -77.
\end{aligned}$$

- **ETAPA 6**: REGRA DE CRAMER E MATRIZ INVERSA

  1. Regra de Cramer

     Duração: 1 hora e 40 minutos.

     Apresentaremos a regra de Cramer que é usada na resolução de sistemas lineares, porém, quando consideramos um sistema com muitas equações e incógnitas, o procedimento de resolução acaba sendo muito longo, isso é o que afirma o professor Elon no vídeo (APLICADA, 2008).

     Considere um sistema com o número de equações e o número de incógnitas são iguais a n:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

     Esse sistema pode ser escrito na forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$A \cdot X = B, \tag{3.16}$$

donde a matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

a matriz dos termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

e a matriz dos coeficientes é dada por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Consideremos que $\det A \neq 0$ para a equação 3.16, desse modo, A admite inversa, denotaremos a sua inversa por A^{-1}. Então

$$\begin{aligned}
A \cdot X &= B \\
A^{-1}A \cdot X &= A^{-1}B \\
(A^{-1}A) \cdot X &= A^{-1}B \\
I_n \cdot X &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B.
\end{aligned}$$

Escrevendo na foma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Por outro lado,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

De modo análogo, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Percebamos que no denominador de x_i temos o determinante da matriz dos coeficientes do $\det A \neq 0$, já no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Esse método pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo e o número de equações do sistema for igual ao número de incógnitas.

Exemplo 24. *Consideremos o sistema*

$$3x + 2y - 5z = 8$$

$$2x - 4y - 2z = -4$$

$$x - 2y - 3z = -4$$

Inicialmente analisemos se o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é diferente de zero:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot(-4)\cdot(-3) + 2\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot(-5) - [(-5)\cdot(-4)\cdot 1 \\
&\quad +2\cdot 2\cdot(-3) + (-2)\cdot(-2)\cdot 3] \\
&= 36 - 4 + 20 - (20 + 12 - 12) \\
&= 52 - 20 \\
&= 32 \neq 0
\end{aligned}$$

Determinemos o valor do numerador de x, o qual denotaremos por N_x:

$$\begin{aligned}
N_x &= \begin{vmatrix} 8 & 2 & -5 \\ -4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 8\cdot(-4)\cdot(-3) + 2\cdot(-2)\cdot(-4) + (-4)\cdot(-2)\cdot(-5) \\
&\quad -[(-5)\cdot(-4)\cdot(-4) + 2\cdot(-4)\cdot(-3) + (-2)\cdot(-2)\cdot 8] \\
&= 96 + 16 - 40 - (-80 + 32 + 24) \\
&= 72 - (-24) \\
&= 72 + 24 \\
&= 96
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para x:

$$x = \frac{N_x}{\det A} = \frac{96}{32} = 3.$$

Determinemos o valor do numerador de y, o qual denotaremos por N_y:

$$\begin{aligned}
N_y &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-3) + 8 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) \cdot (-5) - [(-5) \cdot (-4) \cdot 1 \\
&\quad +(-2) \cdot (-4) \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot (-3)] \\
&= 36 - 16 + 40 - (20 + 24 - 48) \\
&= 60 - (-4) \\
&= 40 + 4 \\
&= 64
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para y:

$$y = \frac{N_y}{\det A} = \frac{64}{32} = 2.$$

Determinemos o valor do numerador de z, o qual denotaremos por N_z:

$$\begin{aligned}
N_z &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 8 - [8 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) \\
&\quad +(-4) \cdot (-2) \cdot 3] \\
&= 48 - 8 - 32 - (-32 - 16 + 24) \\
&= 8 - (-24) \\
&= 8 + 24 \\
&= 32
\end{aligned}$$

Daí, temos como solução para z:

$$z = \frac{N_z}{\det A} = \frac{32}{32} = 1.$$

Portanto, a solução do sistema é $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$.

2. Cálculo da Matriz Inversa por Determinantes

   a) Definições e Resultados Preliminares

      Duração: 50 minutos

      Definição 3.7. *Definimos a* ***Matriz Identidade*** *de ordem n como sendo a matriz na qual todos os elementos são nulos, exceto os elementos da diagonal principal, que são iguais a 1. Indicamos por* I_n*, ou* I *se não for especificar a ordem da matriz. Dessa forma,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

      Definição 3.8. *Uma* ***submatriz*** *de uma dada matriz A é uma matriz obtida de A eliminando alguma(s) das suas linhas e/ou colunas.*

      Exemplo 25. *Seja a matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 2 & 11 & 3 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$*, determine uma submatriz de A.*

      Solução: Um exemplo de submatriz é $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$

      Definição 3.9. *Dada uma matriz A, dizemos que o* ***cofator*** A_{ij} *do elemento* a_{ij} *da matriz é:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|,$$

      onde M_{ij} é a submatriz de A, obtida extraindo-se a i´-ésima linha e a j-ésima coluna. Com esses fatores formamos uma matriz $\bar{A}$, a qual chamaremos de matriz dos cofatores:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

      Definição 3.10. *Dada uma matriz A, chamaremos de* ***matriz adjunta*** *de A à transposta da matriz dos cofatores* ($\bar{A}$)*, representada por*

$$\bar{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.2. *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Definição 3.11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz inversível se existir uma matriz A^{-1}, tal que*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Vejamos agora uma condição necessária e também suficiente para que uma matriz A admita inversa.
Seja A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.
De acordo com a definição apresentada acima,

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Aplicando o determinante em ambos os membros, temos:

$$\det(A \cdot A^{-1}) \quad = \quad \det I_n.$$

Pelo de demonstramos no Teorema **??**

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Seja $\det A \neq 0$, daí

$$\frac{\det A}{\det A} \cdot \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Assim,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \ \textit{para} \det A \neq 0$$

Logo, para que a matriz A admita inversa, devemos ter $\det A \neq 0$.

b) Cálculo da Matriz Inversa
Duração: 50 minutos

Teorema 3.3. *Seja A uma matriz de ordem n e $\bar{A}'$ a matriz adjunta de A, então*

$$A \cdot \bar{A}' = A \cdot (AdjA) = (\det A) \cdot I_n.$$

Resultando após alguns cálculos:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (AdjA)$$

Exemplo 26. *Encontre a inversa da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ *através do cálculo do determinante.*

Solução: Inicialmente, calcularemos o determinante de A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 40 - (15 + 24) = 40 - 39 = 1.$$

Calculemos os cofatores de cada um dos elementos da matriz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 = -18$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Desse modo, a matriz dos cofatores é representada por

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$AdjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com 3.18:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado nos fornece uma outra forma de calcular o determinante de uma matriz.

Para mais detalhes sobre o cálculo do determinante através da matriz adjunta, consultar (RONCHI,) e (BEZERRA, 1977).

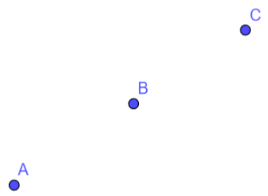
- **ETAPA 7**: GEOGEBRA E ALINHAMENTO DE PONTOS

  Duração: 1 hora e 50 minutos

  Buscamos por meio dessa etapa intensificar a importância do cálculo o determinante na condição de alinhamento de três pontos, onde sugerimos a utilização do software geogebra como uma importante ferramenta para agregar na parte analítica da identificação do alinhamento de três ponto.

  Observe os pontos A, B e C abaixo:

Figura 17 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo I



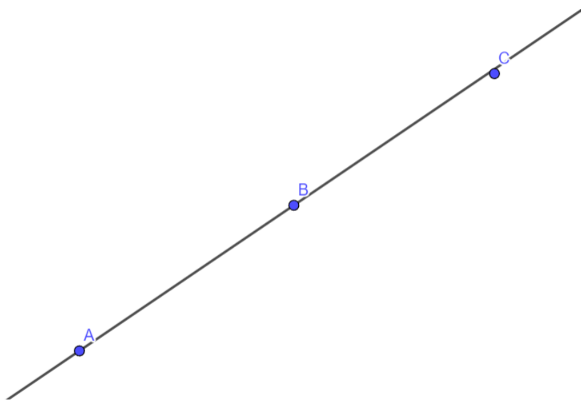
Fonte: Autores, 2024.

Podemos afirmar que esses pontos acima estão alinhados sabendo que suas coordenadas são $A = (1, 1)$, $B = (4.1, 3.1)$ e $C = (7, 5)$?

Não. Apesar dos pontos na imagem acima parecer que estão alinhados, eles não pertencem a uma mesma reta. Observe:

]

Figura 18 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo I



Fonte: Autores, 2024.

Isso também pode ser verificado calculando o determinante dos pontos dados:

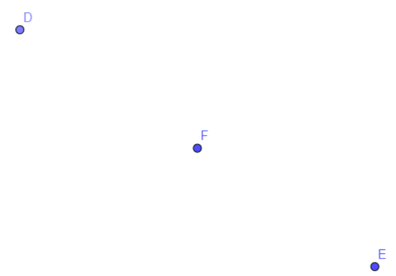
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4.1 & 3.1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3.1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 7 + 4.1 \cdot 5 \cdot 1 - (1 \cdot 3.1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4.1 \cdot 1) \\ &= 3.1 + 7 + 20,5 - 21,7 - 5 - 4.1 \\ &= -0.2\end{aligned}$$

Logo, concluímos mais uma vez que os pontos A, B e C não estão alinhados, pois seu det $\neq 0$.

Portanto, a utilização do Geogebra também servirá para reiterar que o cálculo do determinante é uma ferramenta eficaz na verificação do alinhamento dos pontos, pois apesar de muitas vezes os pontos parecerem alinhados geometricamente, nem sempre isso se confirma.

Considere agora os pontos $F = (-1, 4)$, $E = (2, 2)$ e $D = (-4, 6)$ representados abaixo:

Figura 19 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo II



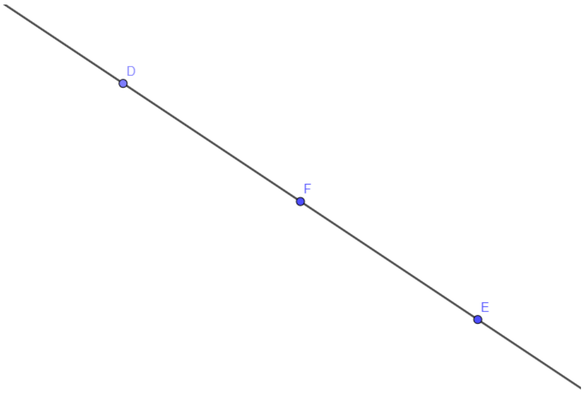
Fonte: Autores, 2024.

Solução: Para verificar se os pontos dados estão alinhados, calcularemos o seu determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -2 - 16 + 12 - (-8 - 6 + 8) \\ &= -6 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desse modo, teremos uma única reta passando pelos pontos D, F e E, observe a imagem a seguir:

Figura 20 – Condição de Alinhamento de Três Pontos (Eletiva): Exemplo II



Fonte: Autores, 2024.

4 Exercícios

1. Utilizando os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $(5, 6)$, calcule a área do triângulo cujos vértices são formados por esses pontos.

2. Verifique através do determinante se os pontos $(1, 2)$, $(4, 4)$ e $(8, 6)$ são colineares.

3. Determine o valor de y pata que os pontos $(3, 5)$, $(-1, -3)$ e $(4, 7)$ sejam colineares.

4. Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (1, -2)$ e $C = (5, 2)$. Determine a equação da reta que passa pelo ponto A e pelo ponto médio do segmento BC.

5. Determine o número de inversões das permutações de $1, 2, 3, 4$:
   - 1 3 4 2
   - 4 1 2 3
   - No determinante de ordem 4, qual sinal precederia os termos $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ e $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$

6. Calcule o $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
   - Pela definição
   - Por Laplace, usando a terceira coluna.

7. Calcule os determinantes, utilizando as propriedades estudadas.
   - $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 9 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \end{vmatrix}$
   - $\begin{vmatrix} 6 & 33 & 15 & 0 & 25 \\ 16 & 19 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 12 \\ -20 & 6 & 20 & 0 & -3 \\ 15 & 10 & 37 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a^2 & ab^3 & a \\ ab & a^3 & b \\ a^2 & b^2 & a \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log^2 3 & \log^2 30 & \log^2 300 & \log^2 3000 \\ \log^3 3 & \log^3 30 & \log^3 300 & \log^3 3000 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 & \log 3000 \end{vmatrix}$

8. Mostre pela regra de Chió que:

$$B = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

9. Dado o sistema abaixo, resolva-o usando determinantes:

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 4x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

10. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

- $Adj A$
- $\det A$
- A^{-1}

5 Conclusões

Realizamos uma abordagem sobre os determinantes, que não é encontrada em livros didáticos, pois os livros atuais do Ensino Médio se limitam a determinantes de matrizes de ordens até três. Na eletiva, destacamos a definição geral de determinantes por permutação, justificando inclusive as definições encontradas em livros didáticos, abordamos cuidadosamente a construção da definição de determinantes, como também suas propriedades, regras e teoremas que facilitam a resolução de alguns determinantes, como também suas respectivas demonstrações necessárias para o aprofundamento sobre o estudo desse tema.

Apresentamos também aplicações importantes sobre determinantes, as quais consideramos acessíveis aos alunos do Ensino Médio como uma forma de motivá-los a estudar essa temática. Constatamos que não existe uma receita para a resolução de um determinante, existem na verdade ferramentas que podem facilitar os cálculos de alguns determinantes, no entanto, dependendo da ordem da matriz considerada para o cálculo do determinante, sua resolução pode ser muito trabalhosa e talvez só realizada por computadores.

Tentamos trazer uma abordagem acessível aos alunos de modo que compreendam de forma clara e objetiva os conhecimentos sobre esse tema, buscando que o aluno obtenha a compreensão de conceitos, definições, exemplos e aplicações, tentando não focar nas demonstrações dos resultados.

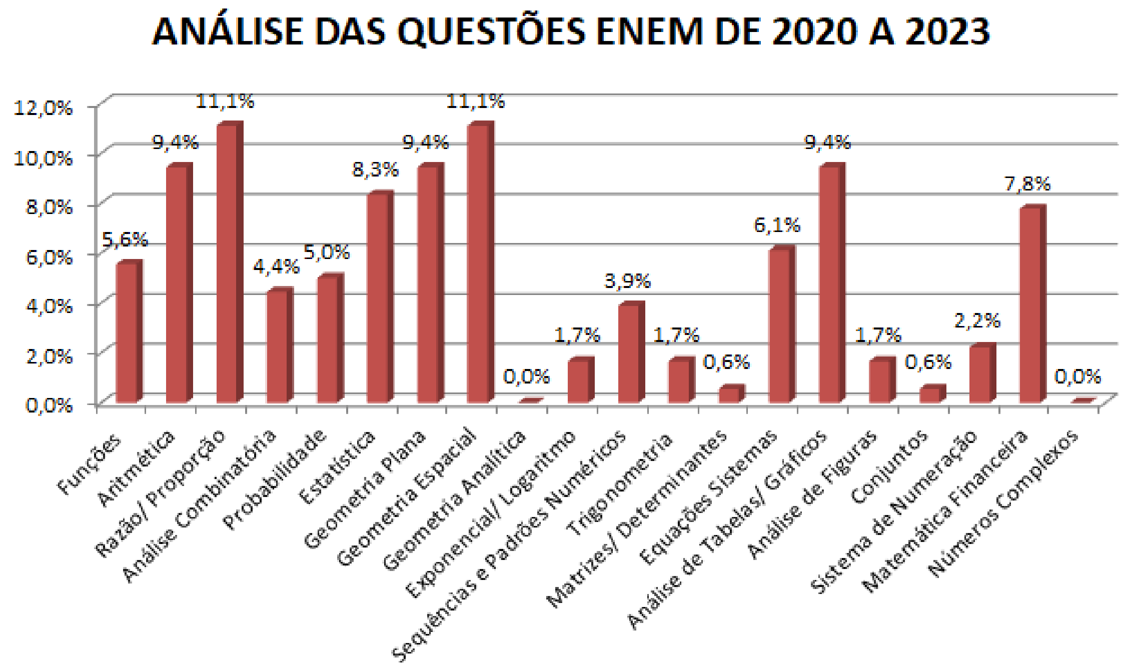
Quando tratamos sobre o ensino dos determinantes, percebemos que aos poucos esse tema tem saído do ensino médio, isso é percebido nos próprios livros didáticos, podemos justificar esse fato por sua não cobrança em questões do Enem, inclusive desde a sua criação, mas consideramos que essa mudança tem causado um desfalque no currículo, pois como faz um aluno do curso de engenharia elétrica que não possui conhecimentos sobre determinantes? Apesar de muitas vezes os conteúdos não possuírem uma aplicabilidade direta em nossas vidas, isso não significa que o conhecimento é inútil, podemos ressaltar a aplicação acima sobre os determinantes em circuito elétrico encontrados em equipamentos eletrônicos.

Apêndices

ANÁLISE GERAL DAS QUESTÕES DURANTE OS ANOS DE 2020 A 2023

TEMAS	2020	2021	2022	2023	TOTAL
Funções	1	1	5	3	10
Aritmética	5	2	5	5	17
Razão / Proporção	7	6	5	2	20
Análise Combinatória	2	1	4	1	8
Probabilidade	3	1	2	3	9
Estatística	2	5	4	4	15
Geometria Plana	3	5	2	7	17
Geometria Espacial	6	4	7	3	20
Geometria Analítica	0	0	0	0	0
Exponencial / Logaritmo	2	0	0	1	3
Sequências / Padrões Numéricos	2	1	1	3	7
Trigonometria	1	1	0	1	3
Matrizes / Determinantes	0	1	0	0	1
Equações / Sistemas	1	5	2	3	11
Análise de Tabelas/ Gráficos	6	5	1	5	17
Análise de Figuras	1	0	2	0	3
Conjuntos	1	0	0	0	1
Sistema de Numeração	0	2	1	1	4
Matemática Financeira	2	5	4	3	14
Números Complexos	0	0	0	0	0

Figura 21 – GRÁFICO (ENEM DE 2020 A 2023)



Fonte: Autores, 2024.

Referente aos gráficos acima apresentados, desconsideramos os assuntos que não foram cobrados no respectivo ano. Durante nossa pesquisa bibliográfica, encontramos duas dissertações do Profmat (MENEZES, 2021) e (FILGUEIRAS, 2019) as quais realizaram uma pesquisa referente aos conteúdos que caíram no Exame Nacional do Ensino Médio nos anos de 2009 a 2019 e referente ao conteúdo de matrizes e determinantes foram apresentadas tabelas que mostraram que esse tema foi cobrado apenas nos anos de 2012, 2018 e 2019. Ao ir em busca dessa questões, vimos que no ano de 2012 foi cobrado o produto de matrizes, em 2018 soma do elementos das linhas de uma matriz e em 2019 a soma dos elementos das colunas de uma matriz.

.0.1 Demonstração Regra de Chió

Para realizar essa prova, consideraremos 2 casos: quando o elemento $a_{11} = 1$ e $a_{11} \neq 1$.

Inicialmente, seja o elemento $a_{11} \neq 1$, aplicando a propriedades de determinantes na matriz M a qual substituímos uma linha por uma combinação linear de outra linha, obtemos uma matriz N, perceba que $\det M = \det N$.

Neste caso, para obtermos o elemento $a_{11} = 1$, escolhemos a j-ésima linha da matriz a qual multiplicaremos cada elemento dessa linha por uma constante K, por fim, adicionaremos a esse produto os respectivos elementos da linha 1, isto é,

$$a_{j1} \cdot A + a_{11} = 1 \Longrightarrow A = \frac{1 - a_{11}}{a_{j1}},$$

onde $a_{j1} \neq 0$.

Obtendo o elemento $a_{11} = 1$ ou para o caso em que a matriz já possuir o elemento $a_{11} = 1$, basta realizar as operações indicada nos itens abaixo.

- Adicionaremos, à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$.
- Adicionaremos, à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$.
- Adicionaremos, à 4ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{14}$.
  ....
- Adicionaremos, à j-ésima coluna , 1ª multiplicada por $-a_{1j}$.
  ....
- Adicionaremos, à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$.

Seja N a matriz obtida ao efetuar as operações acima e de acordo com a 7ª propriedade de determinantes, temos $\det N = \det M$.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Percebamos que os elementos da 1ª linha da matriz N são em sua maioria iguais a zero, aplicando o Teorema de Laplace, o mais recomendado em termos de cálculo, é encontrar o seu determinante pela 1ª linha, vejamos:

$$\begin{aligned} \det M &= \det N = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + \cdots + 0 \cdot A_{1n} \\ &= A_{11} \\ &= \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o $\det N$ corresponde a um determinante de ordem $(n-1)$.

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos [recurso eletrônico]*. [S.l.]: AMGH, 2013. Citado na página 17.

APLICADA, I. M. P. e. *PAPMEM - Julho de 2008 - Matrizes e Determinantes*. 2008. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OUF2NqPXC_I>. Citado na página 41.

BEZERRA, M. J. *Curso de Matemática*. [S.l.]: Companhia Nacional, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 49.

BOLDRINI, J. L. e. a. *Álgebra Linear*. [S.l.]: Harbra, 1986. ISBN 9788529402024. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 38.

FILGUEIRAS, C. W. S. *A Importância dos Conteúdos de Matemática Pouco Cobrados no enem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, 2019. Citado na página 58.

IEZZI, G. *Fundamentos de matematica elementar, 4 sequencias, matrizes, determinantes, sistemas*: seque ncias, matrizes, determinantes, sistemas. [S.l.]: Atual, 2006. 232 p. ISBN 9788535704587. Citado na página 23.

MADEIRA, R. *ITA 2022- Corridas de Bicicletas e o Teorema de Bézout*. 2017. Disponível em: <https://madematica.blogspot.com/2017/08/ita-2002-corrida-de-bicicletas-e-o.html#:~:text=UmapermutaÃğÃčomudadeclasse,doisquaisquerdeseuselementos>. Citado na página 23.

MENEZES, S. B. de. *Uma Análise dos Conteúdos de Matemática em Desuso nas Provas do Exame Nacional do Ensino (ENEM)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2021. Citado na página 58.

MORGADO, A. C. *Matemática Discreta*. [S.l.]: SBM, 2015. Citado na página 23.

PROENEM. *RESUMO DE FÍSICA: CIRCUITOS ELÉTRICOS | Prof. Bruno Rinaldi*. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tMGdMAtLWIY>. Citado na página 17.

RONCHI, S. *Enciclоplédia Ilustrativa para Educação básica*. [S.l.]: Tese. Citado na página 49.

STEINBRUCH, A. *Álgebra Linear e Geometria Analítica and Winterle, Paulo*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 1987. Citado na página 23.