



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



# **Recurso Educacional: o Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental e Médio**

por  
**Leonardo Vieira da Silva**

sob a orientação do  
**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto**

João Pessoa, maio de 2024.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Contagem para o 4<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental</b>	<b>5</b>
1.1 Plano de aula . . . . .	6
1.2 Atividade para o 4 <sup>o</sup> ano . . . . .	8
<b>2 Princípio Fundamental da Contagem para o 5<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental</b>	<b>9</b>
2.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas) . . . . .	10
2.2 Primeira atividade para o 5 <sup>o</sup> ano . . . . .	12
2.3 Plano de aula da segunda atividade (2 aulas) . . . . .	13
2.4 Segunda atividade para o 5 <sup>o</sup> ano . . . . .	15
<b>3 Princípio Fundamental da Contagem para o 8<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental</b>	<b>16</b>
3.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas) . . . . .	18
3.2 Primeira atividade para o 8 <sup>o</sup> ano . . . . .	20
3.3 Plano de aula da segunda atividade . . . . .	21
3.4 Segunda atividade para o 8 <sup>o</sup> ano . . . . .	23
<b>4 Princípio Fundamental da Contagem para o Ensino Médio</b>	<b>24</b>
4.1 Plano de aula da terceira atividade . . . . .	26
4.2 Terceira atividade para o Ensino Médio . . . . .	28
4.3 Plano de aula da quarta atividade . . . . .	29
4.4 Quarta atividade para o Ensino Médio . . . . .	31
<b>Referências</b>	<b>32</b>

## Introdução

Este recurso educacional é um produto criado a partir da dissertação de mestrado “Reflexões sobre o Princípio Fundamental da Contagem e suas consequências”, desenvolvida no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, e tem como objetivo apresentar atividades sobre o Princípio Fundamental da Contagem a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental e Médio, bem como sugestões a respeito de sua aplicação e discussão em sala de aula.

Um estudo criterioso sobre a Análise Combinatória se faz de grande importância ainda hoje devido às dificuldades encontradas por muitos professores e alunos em entendê-la corretamente. É comum alguém resolver um problema de contagem e ficar com dúvida se sua resposta está correta. Desse modo, a insegurança e a fuga de questões do tipo é frequente. Até mesmo professores passam por isso, ficando confusos em qual método de contagem utilizar para resolver algumas situações problemas.

Tal área, porém, é construída, principalmente, sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Como fala o saudoso Prof. Augusto César Morgado, em uma das edições do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), a “Contagem, ou seja, essa Análise Combinatória que ensinamos no Ensino Médio, gira em torno desse princípio” [3, 02:00].

Tendo como base esse pensamento e acreditando que o PFC precisa ser melhor entendido pelos professores e estudantes, desenvolvemos as atividades presentes neste recurso educacional. Queremos tornar claro o que ele produz e em quais situações pode ser utilizado, bem como ajudar na compreensão das outras técnicas de contagem estudadas no Ensino Básico a partir da sua aplicação. Os professores podem utilizar, reformular e, até mesmo, criar outras atividades que julgue necessárias para o bom entendimento do assunto, porém acreditamos que os principais pontos a serem explorados para um bom entendimento do PFC estão contemplados nas atividades aqui presentes.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1, p. 279], documento que determina o que deve ser ensinado no Ensino Fundamental e Médio do Brasil, encontramos o assunto da contagem a partir do 1º ano. Neste nível, ele é visto de modo introdutório, como podemos ver nas especificações do documento:

Nível	Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidade
1º ano	Números	Contagem de rotina; Contagem ascendente e descendente; e reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.

Porém é apenas no 4º ano que o assunto de contagem aborda a enumeração de combinações de elementos de dois conjuntos. Além deste ano escolar, a BNCC estabelece o estudo mais direto da Análise Combinatória no 5º e 8º ano do Ensino Fundamental, e no Ensino Médio.

A seguir, apresentaremos as atividades a serem aplicadas em sala de aula. Esperamos que elas contribuam para uma melhor compreensão da Análise Combinatória, fazendo vencer o medo que ainda paira sobre ela, e, ao contrário, estimulem os professores e alunos a conhecerem e se debruçarem sobre os diversos tipos de problemas presentes nessa área, muitas vezes bastante interessantes, compreensíveis e capazes de serem resolvidos.

# 1 Contagem para o 4º ano do Ensino Fundamental

No 4º ano do Ensino Fundamental, segundo a BNCC, o assunto de contagem a ser abordado é a enumeração de associações de elementos de dois conjuntos, como podemos ver no documento:

Nível	Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
4º ano	Números	Problemas de contagem	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

O documento orienta que os agrupamentos estudados sejam formados a partir da associação de cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção. Além disso, é interessante notar a indicação do uso de imagem e/ou material manipulável para tratar do assunto, o que é muito importante sobretudo para os alunos da faixa etária em questão. Esses materiais ajudam os alunos a formarem os agrupamentos de modo visual, auxiliando na contagem e na percepção de todos as associações possíveis. A indicação do documento é que o registro por parte do aluno seja feito de modo pessoal.

Por isso queremos propor uma atividade em que os estudantes possam utilizar desenhos criados por eles mesmos para montar os agrupamentos desejados. Esse recurso os ajudará a visualizarem os agrupamentos, perceberem todos possíveis, e contá-los adequadamente.

É importante o professor auxiliar o aluno no momento de montar os agrupamentos e perceber as associações possíveis. Seu auxílio será necessário sobretudo para que o estudante aprenda a fazer as associações de modo organizado, associando um elemento de uma coleção com todos os elementos da outra coleção, e só depois passar para o próximo elemento do primeiro conjunto a fim de fazer novas associações. Essa organização é fundamental para que o aluno aprenda a fazer contagens claras e sistemáticas, contribuindo para a sua habilidade de contagem. Nesse sentido, a própria atividade proposta contribui para a organização, pois cada item solicita a associação de apenas um elemento de um conjunto com todos os outros elementos do outro conjunto.

A seguir, consta a atividade proposta para este ano escolar. Outras atividades semelhantes podem ser propostas pelo professor, caso ele ache necessário, podendo incluir a manipulação de materiais concretos, figuras, entre outros, como propõe a BNCC.

## **1.1 Plano de aula**

### **Público-alvo**

Alunos do 4<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental.

### **Assunto**

Contagem de agrupamentos ordenados formados pela associação entre todos os elementos de duas coleções.

### **Habilidade**

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

### **Objetivos**

- Criar agrupamentos ordenados a partir da associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro conjunto e contabilizar o total de agrupamentos;
- Desenvolver a capacidade de fazer associações de elementos de dois conjuntos de modo organizado e sistemático;
- Elaborar registros escritos próprios de associações de elementos de dois conjuntos.

### **Materiais necessários**

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha, lápis de cor, folha de ofício ou de caderno, tesoura e caderno escolar.

### **Metodologia**

Primeiramente, o professor deve entregar a atividade proposta e apresentá-la. Ele precisará explicar a respeito dos desenhos, das associações entre eles e dos registros textuais, dando exemplos de como fazê-los.

Em seguida, ele poderá auxiliar os alunos na criação dos desenhos e das associações dos agrupamentos.

Por fim, ele deve encerrar o tempo de confecção e respostas, fazendo uma discussão com os alunos sobre quais foram os agrupamentos obtidos e a sua quantidade total. Ele ainda pode apresentar alguns exemplos de associações a partir dos desenhos feitos pelos alunos.

### **Avaliação**

A avaliação será realizada por meio da atividade proposta a seguir. A expectativa é que os alunos consigam fazer as associações necessárias entre o conjunto de blusas e o de calças e fazer a contagem correta das associações possíveis, que é igual a 12.

Além disso, será avaliada a sua capacidade de registro pessoal das combinações por meio de textos, ou, porventura, diagramas ou tabelas.

## 1.2 Atividade para o 4º ano

*Claudinha possui 4 blusas: uma amarela, uma branca, uma rosa e uma preta. E ela possui 3 calças: uma azul, uma caramelo e uma preta. Claudinha vai usar uma dessas calças e uma dessas blusas para se vestir.*

*a) Desenhe e pinte as calças e as blusas de Claudinha. Depois recorte cada peça de roupa.*

*b) Para a sua festa de aniversário Claudinha decidiu usar a calça azul. Monte as possíveis combinações de roupas de Claudinha, sabendo que ela pode usar qualquer uma das blusas, e escreva quais foram essas combinações.*

*c) Se Claudinha escolheu vestir a calça preta para a festa de aniversário de sua prima Rafaela, quais são as combinações de roupa que ela pode usar?*

*d) Sabendo que Claudinha escolheu a calça caramelo para passear no shopping, diga quantas são as combinações de roupa que ela pode montar com essa peça.*

*e) Quantas são todas as combinações de roupa que Claudinha pode utilizar com as peças que ela possui?*



## 2 Princípio Fundamental da Contagem para o 5º ano do Ensino Fundamental

É no 5º ano que o Princípio Fundamental da Contagem é apresentado ao aluno. Assim como no ano anterior, os agrupamentos contados são formados a partir da associação de cada elemento de um conjunto a todos os elementos de outro. Tais conjuntos geralmente são disjuntos. Outro conhecimento acrescentado nessa etapa é o registro dos agrupamentos por meio de tabelas e diagramas de árvore, como podemos ver na BNCC:

Nível	Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
5º ano	Números	Problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

No 5º ano, o aluno entrará em contato com o Princípio Fundamental da Contagem. É importante que o professor o apresente com exemplos simples, capazes de tornar claro o porquê de ele utilizar uma multiplicação para as situações problemas. Para isso, ele pode utilizar tabelas e diagramas de árvore.

Com o intuito de que o aluno desenvolva essa percepção através de exercícios e utilize o PFC de modo consciente, desenvolvemos duas atividades. Elas possibilitam uma boa discussão a respeito desse princípio por meio das perguntas que são feitas, ajudando os alunos a serem capazes de identificar uma situação em que o princípio pode ser utilizado, aplicá-lo corretamente e elaborarem sua resposta de modo descritivo e organizado, em tabela ou árvore de possibilidades.

## **2.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas)**

### **Público-alvo**

Alunos do 5<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental.

### **Assunto**

Contagem de agrupamentos ordenados por meio de tabela e do Princípio Fundamental da Contagem.

### **Habilidade**

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

### **Objetivos**

- Identificar situações de contagem onde possam ser definidas duas decisões;
- Definir duas decisões e uma ordem para elas numa situação de contagem;
- Relacionar as escolhas possíveis nas decisões definidas através de uma tabela;
- Fazer a contagem de agrupamentos formados pela associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro por meio de tabela e do PFC;
- Relacionar a contagem feita utilizando a tabela elaborada com a contagem realizada por meio do PFC.

### **Materiais necessários**

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

## **Metodologia**

### **1ª aula**

Na primeira aula, o professor deverá fazer uma explicação do assunto.

Primeiramente, por meio de um exemplo, o professor deve apresentar uma situação em que é necessário contar associações entre objetos de conjuntos distintos, como a escolha de uma vestimenta composta por calça e camiseta, de um lanche composto pela escolha de um sanduíche e de uma bebida, entre outros. O professor deverá apresentar essa associação por meio de uma tabela, e mostrar que a contagem pode ser feita enumerando as combinações ou por meio de uma multiplicação da quantidade de linhas pela quantidade de colunas da tabela.

Em seguida, o professor deve apresentar o Princípio Fundamental da Contagem por meio do exemplo tratado anteriormente. Ele deve associar a situação à tomada de duas decisões sucessivas e aplicar o PFC na resolução da questão. Devido à utilização de variáveis no enunciado, acreditamos que não é adequado apresentá-lo de modo formal, mas apenas por meio da situação problema.

É importante escrever os pares ordenados que estão sendo contados de acordo com a ordem definida das decisões, enfatizando essa relação. Depois disso, o professor deve apresentar mais um exemplo de aplicação do PFC sem ser necessário fazer a tabela.

### **2ª aula**

Na segunda aula o professor deve executar a atividade com os alunos, e corrigi-la após um tempo determinado.

## **Avaliação**

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação, esforço e respostas. O professor deve estar atento se o estudante compreendeu e atingiu os objetivos propostos na aula sobre a compreensão dos fundamentos do PFC e da capacidade de elaboração de uma tabela com as características solicitadas.

## 2.2 Primeira atividade para o 5º ano

*Luís vai fazer um lanche escolhendo uma tapioca recheada e um suco. Ele deve escolher apenas um dos quatro recheios disponíveis: queijo, frango, carne ou calabresa. E o suco deverá ser de: acerola, cajá, goiaba, maracujá ou uva.*

*a) Para fazer o seu lanche, Luís terá que tomar quantas decisões? Quais serão elas?*

*b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? E a segunda?*

*c) Faça uma tabela em que a primeira coluna contenha as escolhas possíveis da primeira decisão e a primeira linha contenha as escolhas possíveis da segunda. Em seguida, anote cada combinação possível de lanche no encontro das linhas com as colunas.*

*d) De acordo com a tabela formada, quantos lanches distintos Luís pode montar?*

*e) Qual conta podemos fazer para encontrar a resposta da questão anterior sem precisar enumerar um a um?*

*f) Calcule a quantidade de possibilidades de lanches utilizando o PFC e compare-a com o resultado obtido anteriormente.*

## **2.3 Plano de aula da segunda atividade (2 aulas)**

### **Público-alvo**

Alunos do 5<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental.

### **Assunto**

Contagem de agrupamentos ordenados por meio de diagrama de árvore e do PFC.

### **Habilidade**

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

### **Objetivos**

- Identificar situações de contagem onde possam ser definidas duas decisões e uma ordem para elas;
- Relacionar as escolhas possíveis nas decisões definidas através de um diagrama de árvores;
- Constatar que o número de escolhas para a segunda decisão definida independe da escolha feita na primeira decisão;
- Fazer a contagem de agrupamentos formados pela associação de cada elemento de um conjunto com todos os elementos de outro por meio de uma árvore de possibilidades e do PFC;
- Relacionar a contagem feita utilizando a árvore de possibilidades elaborada com a contagem realizada por meio do PFC.

### **Materiais necessários**

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

## **Metodologia**

### **1ª aula**

Nesta aula, o professor deverá apresentar uma situação de contagem de agrupamentos ordenados formados pela associação dos elementos de um conjunto com todos os elementos de outro. A diferença entre essa aula e a primeira aula teórica é que ele ensinará a fazer um diagrama de árvore, ou seja, uma árvore de possibilidades, e relacionará esse diagrama com os agrupamentos formados a partir das decisões definidas.

O professor deve reiterar a importância da definição das duas decisões para a aplicação do PFC, da relação que essa ordem possui com a ordem dos elementos no agrupamento formado, e da constância do número de escolhas possíveis para a segunda decisão independentemente da escolha feita na primeira.

### **2ª aula**

Esta aula consistirá na aplicação da atividade em anexo. O professor deve explicar a atividade, oferecer um tempo para que os estudantes respondam as questões e, posteriormente, corrija-la. É importante que o professor pergunte a eles qual foi a ordem das decisões escolhida por cada um e desenvolver as duas respostas possíveis, de acordo com a ordem escolhida. Isso ajudará a perceber a relação entre a ordem das decisões e a ordem dos elementos no agrupamento formado.

## **Avaliação**

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação, esforço e respostas. O professor deve estar atento se o estudante compreendeu e atingiu os objetivos propostos na aula sobre a compreensão dos fundamentos do PFC e da capacidade de elaboração de um diagrama de árvore com as características solicitadas.

## 2.4 Segunda atividade para o 5º ano

*Em um jogo eletrônico baseado na história de Mário Bros, o jogador deve escolher um tipo de Yoshi, dentre o verde, o amarelo, o vermelho e o azul, e um personagem para montá-lo, dentre Mário, Luigi, Princesa e Cogumelo.*

*a) Para escolher a dupla, o jogador terá que tomar quantas decisões? Quais serão elas?*

*b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? Após essa escolha, de quantas formas distintas a segunda decisão pode ser tomada?*

*c) O número de escolhas possíveis para a segunda decisão depende da escolha feita na primeira?*

*d) Utilizando o PFC responda quantas duplas podem ser formadas com os personagens indicados no enunciado.*

*e) Faça uma árvore de possibilidades para registrar todas as duplas possíveis do jogo. Esse número foi igual ao obtido no item (d)? Por quê?*

### 3 Princípio Fundamental da Contagem para o 8º ano do Ensino Fundamental

O documento da BNCC determina que o assunto da contagem seja visto uma última vez no Ensino Fundamental no 8º ano. Nessa etapa, deve-se trabalhar novamente o PFC aplicado em situações problemas, utilizando-o também de modo específico para a construção e enumeração de agrupamentos de um espaço amostral associado a uma situação em que se quer calcular a probabilidade de um evento.

Nível	Unidade Temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
8º ano	Números	O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Probabilidade e estatística	Princípio multiplicativo da contagem e soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Nessa etapa escolar, a BNCC não restringe a utilização do PFC a situações de associações de cada elemento de uma coleção a todos os elementos da outra. Por isso, nela é possível abordar situações em que nem todos os elementos da segunda coleção são associados com cada um dos elementos da primeira. É o caso de questões como “Encontre a quantidade de pódios (1º e 2º colocados) possíveis entre 8 corredores.”, ou “Com 6 cores disponíveis, de quantas formas pode-se pintar uma bandeira formada por 2 listras, sem que elas possuam a mesma cor?”. Problemas como esses são muito importantes para a expansão do entendimento do PFC, pois através deles os alunos podem observar que, para utilizar esse princípio, não é necessário que os elementos do primeiro conjunto sejam associados com todos os elementos do segundo conjunto, mas apenas que as quantidades de associações de cada um deles com os elementos do segundo sejam iguais. Para entender bem situações como essas vale à pena utilizar registros em tabelas, árvores de possibilidades ou *n-uplas*.



A BNCC também não restringe o uso do PFC a situações de associação de elementos de apenas dois conjuntos. Por isso, neste etapa, pode-se trabalhar, por exemplo, com problemas que envolvem permutações simples, ou arranjos, envolvendo mais de dois elementos, como em questões sobre filas, anagramas, pintura de bandeiras listradas, etc.

Portanto, neste ano escolar, o PFC é utilizado para calcular a quantidade de agrupamentos ordenados formados pela associação dos elementos de dois ou mais conjuntos consecutivos, de modo que um seja o primeiro e outro seja o último, e que todos os elementos de qualquer conjunto estejam associados, numa mesma quantidade, com os elementos do conjunto seguinte, o que pode variar de 1 até o número total de elementos deste. As restrições das associações de cada elemento de um conjunto com os elementos do conjunto seguinte são dadas em cada situação problema, e deve ser interpretada de modo adequado para uma utilização do PFC de modo correto para o resultado esperado.

Assim, nesta etapa dos estudos, é importante trabalhar situações onde o PFC será utilizado para fazer a contagem de agrupamentos ordenados contendo dois ou mais elementos. Por isso inserimos atividades que trabalham a associação entre dois ou mais conjuntos, ou, equivalentemente, em que sejam necessárias as tomadas de duas ou mais decisões consecutivas, diferentemente dos anos anteriores, nos quais as questões propunham apenas situações da tomada de duas decisões.

Além disso, as atividades buscam provocar no estudante o entendimento de que para o PFC ser utilizado é necessário que as quantidades de escolhas possíveis de uma decisão sejam independentes das escolhas feitas nas decisões anteriores, ao invés da exigência de que as decisões sejam independentes entre si. O professor deve discutir bem esse ponto, podendo, inclusive, apresentar exemplos em que essa propriedade não aconteça e o PFC não possa ser utilizado.

### **3.1 Plano de aula da primeira atividade (2 aulas)**

#### **Público-alvo**

Alunos do 8<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental.

#### **Assunto**

Contagem de agrupamentos ordenados através de diagrama de árvore e do Princípio Fundamental da Contagem.

#### **Habilidade**

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

#### **Objetivos**

- Conseguir definir duas decisões e uma ordem para elas numa situação de contagem;
- Entender que para o PFC ser utilizado numa situação de contagem é necessário que, na tomada de cada decisão, o número de escolhas possíveis seja independente das escolhas feitas nas decisões anteriores;
- Entender que duas ou mais decisões serem dependentes numa situação de contagem não é critério para impedir a aplicação do PFC;
- Formar e contar agrupamentos relacionados com a tomada de duas decisões consecutivas numa situação de contagem através do PFC e de um diagrama de árvore;
- Relacionar a contagem dos agrupamentos feita através da árvore de possibilidades com a contagem feita por meio do PFC.

#### **Materiais necessários**

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

## Metodologia

### 1ª aula

A primeira aula será teórica com o intuito de apresentar o Princípio Fundamental da Contagem como ferramenta capaz de auxiliar na contagem de agrupamentos ordenados criados a partir de uma associação específica de elementos de determinados conjuntos. É interessante que o professor aborde todos os pontos fundamentais nessa explicação: a necessidade de definir decisões sucessivas, o tipo de objeto que o PFC contará a partir dessa definição, a necessidade de o número de escolhas possíveis de cada decisão ser independente das escolhas feitas anteriormente e o cálculo a ser seguido.

Recomendamos que o enunciado utilizado seja o encontrado no Livro *Temas e Problemas Elementares*, de autoria do Prof. Elon Lages Lima e outros professores [2, p. 130], que consta a seguir:

*“Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual a  $p \cdot q$ .”*

Utilizando esse enunciado, o professor deve mostrar a sua aplicação em diferentes exemplos. Como dissemos, é importante ele explicar que o número de escolhas possíveis de cada decisão deve ser independente das escolhas feitas nas decisões anteriores, porém também é necessário ele destacar que as decisões não precisam ser independentes, ou seja, as possibilidades disponíveis em cada decisão podem variar de acordo com as escolhas consideradas nas decisões anteriores.

### 2ª aula

Após esse momento teórico, o professor aplicará as atividades propostas, discutindo-as como sugerido.

É interessante permitir e incentivar que os alunos trabalhem em duplas ou grupos maiores, a fim de promover a colaboração mútua e a capacidade de resolução de problemas por meio da argumentação e troca de ideias.

Após a realização da atividade, o professor deve corrigi-las no quadro, solicitando que os grupos apresentem as suas respostas e fazendo as observações necessárias para o entendimento de todos os pontos teóricos destacados anteriormente.

## Avaliação

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

### 3.2 Primeira atividade para o 8º ano

*A bandeira de um time de futebol será criada para representá-lo. Ela será formada por duas listras verticais com cores distintas. Os torcedores estão decidindo quais cores terão cada listra, mas querem que elas sejam escolhidas entre as cores: azul, branco, cinza, laranja, verde e marrom.*

*a) Se a primeira listra for da cor azul, quais serão as cores possíveis para a segunda listra?*

*b) E se a primeira listra for da cor branca, quais serão as cores possíveis para a segunda listra?*

*c) As cores possíveis para a segunda listra dependem da utilizada na listra anterior? E a quantidade de cores possíveis para a segunda listra depende da escolha feita na listra anterior?*

*d) Faça uma árvore de possibilidades para representar as possíveis cores da bandeira de acordo com a situação apresentada.*

*e) Quantas são as bandeiras possíveis de serem confeccionadas de acordo com a preferência dos torcedores? Qual conta pode ser feita para encontrar esse resultado?*

*f) O PFC pode ser utilizado nessa situação? Por quê?*

### 3.3 Plano de aula da segunda atividade

#### Público-alvo

Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

#### Assunto

Contagem de agrupamentos ordenados com mais de dois elementos por meio do Princípio Fundamental da Contagem.

#### Habilidade

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

#### Objetivos

- Definir três decisões sucessivas para a aplicação do PFC numa situação de contagem;
- Representar e contar agrupamentos ordenados relacionados com a tomada de mais de duas decisões consecutivas numa situação de contagem através de *3-uplas* e do PFC;
- Compreender que, numa situação possível de aplicação do PFC, as escolhas possíveis para uma determinada decisão podem variar de acordo com as escolhas feitas nas decisões anteriores;
- Entender que para o PFC ser utilizado numa situação de contagem é necessário que, na tomada de cada decisão, o número de escolhas possíveis seja independente das escolhas feitas nas decisões anteriores.

#### Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

## **Metodologia**

Após a aplicação e correção da atividade anterior, o professor deve aplicar a atividade a seguir. Ela é semelhante à anterior quanto aos seus objetivos, a forma de aplicação e os pontos a serem explorados, porém ela também permite a discussão sobre a possibilidade de o PFC ser aplicado em situações onde podem ser definidas 3 decisões. Além disso, o professor pode explorar o registro dos agrupamentos por meio de *3-uplas*.

Portanto, o professor pode seguir a metodologia da atividade anterior, propondo um momento de respostas e discussão em grupo e, posteriormente, uma apresentação, debate sobre as respostas e possíveis correções e observações importantes por parte do professor.

## **Avaliação**

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

### 3.4 Segunda atividade para o 8º ano

*Amélia, Bruna, Camilo, Denilson e Eduardo trabalham no mesmo setor de uma empresa de carros. Um deles será escolhido para ser o responsável pelo atendimento via telefone ou redes sociais, outro para ser o vendedor presencial e outro para ser o caixa.*

*a) Para montar esse trio, quantas decisões deverão ser tomadas? Quais serão elas?*

*b) Escolhendo uma ordem para as decisões que você identificou, responda: de quantas formas distintas a primeira decisão pode ser tomada? Após realizada essa escolha, de quantas formas distintas a segunda decisão pode ser tomada? E, depois dessas escolhas feitas, de quantos modos a terceira decisão poderá ser tomada?*

*c) O número de escolhas possíveis para a segunda decisão depende da escolha feita na primeira? E o número de escolhas possíveis para a terceira, depende daquelas feitas anteriormente?*

*d) Utilizando o PFC responda quantos trios (atendente, vendedor, caixa) podem ser formados com as pessoas indicadas no enunciado.*

*e) Quantos desses trios possuem uma mulher como atendente? Responda utilizando o PFC e depois escreva quais são esses trios.*

## 4 Princípio Fundamental da Contagem para o Ensino Médio

Até o Ensino Fundamental vemos que o PFC é utilizado para contar agrupamentos ordenados, que são as *n-uplas*, sobretudo pares ordenados no 4º e 5º ano. Contudo a BNCC decreta que no Ensino Médio a contagem seja trabalhada também com agrupamentos não ordenáveis, como podemos ver:

Nível	Competência específica	Habilidades
Ensino Médio	3	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
		(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Assim, os assuntos da Análise Combinatória para o Ensino Médio são os mesmos dos anos anteriores, com a diferença de que neste nível escolar a contagem de agrupamentos não ordenados é incluída. Portanto é nesse nível escolar que deve-se estudar o assunto de combinação simples. Contudo antes de abordar esse assunto, é extremamente importante que o professor proponha atividades que trabalhem os conteúdos anteriores, revisando, sobretudo, o PFC.

A competência específica 3 para o Ensino Médio que aparece é: utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. A própria Análise Combinatória é uma área em que essas competências podem ser trabalhadas ricamente, caso seja conduzida adequadamente, com o entendimento e exploração devida, como temos orientado até agora nas atividades propostas.



Assim, a primeira atividade a ser utilizada pelo professor com seus alunos pode ser uma que revise o PFC e o registro de agrupamentos ordenáveis por meio de uma tabela. A segunda pode ser uma que revise o PFC iterado e o registro de agrupamentos ordenáveis por meio de uma árvore de possibilidades. Além dessas, propomos a aplicação de mais duas atividades com o intuito de preparar o aluno para entender o método de contagem das combinações simples.

É importante que o professor explore bem as atividades, ajudando o aluno a perceber como utilizar o PFC nos casos ordenados e a sua dupla aplicação nos casos de agrupamentos não ordenados. Após a realização delas, o aluno estará mais preparado para entender a técnica de combinações simples, momento em que o professor poderá mostrar a relação entre a fórmula associada a esta técnica com a forma de resolução utilizando o PFC.

As duas primeiras atividades podem ser semelhantes àquelas propostas anteriormente, elaboradas para o 8<sup>o</sup> ano. Por isso vamos apresentar apenas mais duas focadas na contagem de agrupamentos não ordenados por meio do PFC associado à análise das *n-uplas* formadas na definição das decisões sucessivas e contadas por esse princípio. Após a realização destas, o professor pode direcionar o seu trabalho e criar outras atividades no sentido de ensinar e aplicar a técnica de combinações simples para a obtenção de respostas de modo direto em situações problemas específicas.

## 4.1 Plano de aula da terceira atividade

### Público-alvo

Alunos do Ensino Médio.

### Assunto

Contagem de agrupamentos não ordenados utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

### Habilidade

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

### Objetivos

- Analisar uma situação problema de contagem e procurar identificar qual tipo de objeto a ser contado fornece uma resposta adequada;
- Entender que o PFC calcula a quantidade de agrupamentos ordenados cujos elementos pertencem a conjuntos relacionados com as decisões sucessivas definidas, e que, caso queira-se calcular a quantidade de agrupamentos não ordenados numa determinada situação, ele não fornece a resposta de modo direto;
- Utilizar o PFC e análise de *n-uplas* para calcular agrupamentos não ordenados na resolução de um problema de contagem.

### Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

### Metodologia

Antes da aplicação da atividade, nas aulas anteriores, o professor já deve ter explorado de modo detalhado o Princípio Fundamental da Contagem, de modo que o aluno saiba que tipo de objetos ele conta. Portanto esta atividade será muito importante para ele verificar e aprimorar esse conhecimento nos alunos.

A atividade deve ser aplicada em sala, e, mais uma vez, sugerimos a realização dela em grupos, para que os alunos possam discuti-la entre si, compartilhando ideias e resoluções uns com os outros.

Após a aplicação, o professor deve corrigi-la no quadro, buscando ajudar os estudantes a atingirem os objetivos traçados no plano de aula. É fundamental que o professor verifique, durante as discussões em grupo e no momento da correção, se eles compreenderam corretamente o tipo de objeto que o PFC conta. Eles devem entender que esse objeto depende das definições dadas às decisões e à ordem escolhida entre elas.

Outro ponto importante que o professor deve explorar é sobre a possibilidade de, antes de resolver um problema de combinatória, analisar que tipo de objetos devem ser contados para resolvê-lo, se grupos ordenados ou não ordenados, buscando até mesmo escrever alguns deles em forma de *n-uplas* para uma melhor percepção. Com essa análise, o aluno poderá perceber se a aplicação do PFC pode resolver ou não o problema de modo direto. No caso do item (b), o PFC não resolve diretamente o problema. O momento da correção será essencial para o professor ensinar de modo detalhado como fazer essa análise.

## **Avaliação**

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

## 4.2 Terceira atividade para o Ensino Médio

*Joana possui 5 livros que ela gosta muito. Em suas férias ela vai ler dois deles, um na sua primeira semana de férias e outro na última semana.*

*a) De quantas formas distintas Joana pode fazer isso?*

*b) Sabendo que Joana vai viajar e levará apenas os dois livros que ela quiser ler, diga de quantas formas distintas ela pode fazer a escolha desses livros.*

## 4.3 Plano de aula da quarta atividade

### Público-alvo

Alunos do Ensino Médio.

### Assunto

Contagem de agrupamentos não ordenados utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

### Objetivos

- Analisar uma situação problema de contagem e procurar identificar qual tipo de objeto a ser contado fornece uma resposta adequada;
- Entender que o PFC calcula a quantidade de agrupamentos ordenados cujos elementos pertencem a conjuntos relacionados com as decisões sucessivas definidas, e que, caso queira-se calcular a quantidade de agrupamentos não ordenados numa determinada situação, ele não fornece a resposta de modo direto;
- Utilizar o PFC e análise de *n-uplas* para calcular agrupamentos não ordenados na resolução de um problema de contagem;
- Realizar e relacionar diferentes formas de contagem, como árvore de possibilidades, PFC e contagem de *n-uplas*, na resolução de um problema de contagem;
- Entender que cada maneira de escolha das decisões definidas num problema de contagem dá origem a um objeto contado pelo PFC, mas que nem sempre os objetos que se quer contar num problema corresponde a uma única maneira de fazer a escolha nas decisões definidas.

### Materiais necessários

- Atividade proposta impressa;
- Quadro e pincel;
- Lápis grafite, borracha e caderno escolar.

### Metodologia

Essa atividade pode ser aplicada como a anterior. Seus objetivos são semelhantes, porém ela trata de uma situação de contagem em que são definidas três decisões consecutivas, proporcionando uma ampliação da aplicação do PFC e da percepção dos

objetos formados e contados por ele. Nesse momento, o conceito de *n-upla* será trabalhado novamente, buscando contribuir com os objetivos almejados.

Assim, após a aplicação da atividade em grupo, o professor deve proceder com a sua correção e discussão. Um ponto a ser destacado, que contribui para uma maior segurança do aluno ao resolver uma questão de Análise Combinatória, além do conhecimento adequado sobre a aplicação do PFC, é a análise e reflexão sobre a correspondência entre os objetos definidos através das decisões e os desejados pelo problema. Por isso enfatizamos a importância de o professor comentar e fazer uma boa análise com os alunos sobre as *n-uplas* formadas e os objetos desejados, pois é necessário que cada maneira de escolha das decisões definidas dê origem a um objeto contado pelo PFC, e que cada objeto que se quer contar corresponda a uma única maneira de fazer a escolha nas decisões definidas. Se isso não ocorrer, é necessário fazer uma correção da contagem produzida pelo PFC. Esse aspecto deve ficar claro após a correção da atividade.

### **Avaliação**

O aluno será avaliado mediante a atividade proposta, considerando a sua participação na discussão em grupo, esforço e respostas. O professor deve estar atento a cada grupo, visitando-os para observar o andamento da atividade, podendo fazer sugestões ou perguntas norteadoras.

#### 4.4 Quarta atividade para o Ensino Médio

*Na feira de ciências da escola de Marieta, haverá uma premiação para a equipe que apresentar o melhor trabalho. A comissão que escolherá a vencedora será formada por 3 professores, a partir de um sorteio. Sabendo que na escola há 10 professores, responda às questões abaixo:*

*a) Supondo que o primeiro professor sorteado tenha um peso maior na escolha da vencedora, o segundo tenha um peso mediano, e o terceiro tenha o menor peso, diga quantas comissões distintas podem ser formadas.*

*b) Ainda no contexto do item (a), diga quantas comissões distintas podem ser formadas com os professores Alessandra, Bruno e Carla. Responda utilizando o PFC, uma árvore de possibilidades e 3-uplas.*

*c) Agora, supondo que os professores sorteados possuem o mesmo poder de escolha da equipe vencedora, diga quantas comissões podem ser formadas.*

*d) Ainda no contexto do item (c), diga quantas comissões distintas podem ser formadas com os professores Alessandra, Bruno e Carla.*

## Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf). Acesso em: 21 de abril de 2024.
- [2] LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *Temas e Problemas Elementares: Coleção do Professor de Matemática*. - 12. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [3] PAPMEM - Janeiro de 2001 - Combinatória I. Professor: Augusto César Morgado. YouTube, 4 de maio de 2018. 50min18s. Publicado pelo canal do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=qynbe\\_0PoCM&list=PLo4jXE-LdDTSSw6vQCprrrrBBmFNaiY\\_hG&index=8](https://www.youtube.com/watch?v=qynbe_0PoCM&list=PLo4jXE-LdDTSSw6vQCprrrrBBmFNaiY_hG&index=8). Acesso em: 21 de abril de 2024.