UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PUZZLE DOS PADRÕES COMBINATÓRIOS

CARLOS HENRIQUE DE CARVALHO
MIRIAM DEL MILAGRO ABDON

Sumário

1 Introdução

O ato de contar está presente na evolução do homem desde os primórdios e na contagem aparecem os coeficientes binomiais ou números binomiais presentes em conteúdos da matemática como, por exemplo, a análise combinatória, o triângulo de Pascal, binômio de Newton e em outras áreas como probabilidade, teoria dos números.

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (LIMA, MORGADO, WAGNER, CARVALHO 2006)

A matemática tem papel fundamental para o desenvolvimento do raciocínio e tem uma enorme importância para a formação do cidadão. Assim, a aprendizagem matemática se apresenta como fundamental para a formação da cidadania, pois o raciocínio faz com que o sujeito enfrente melhor os problemas do dia-a-dia.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno (BRASIL, 1997)

Análise Combinatória e o Triângulo de Pascal são conteúdos interligados que devem ser trabalhados de maneira que os alunos não necessitem decorar fórmulas de forma mecânica, mas sim encontrar formas, através de experimentos e deduções, para a resolução de problemas que estão presentes no cotidiano dos alunos e dessa forma fica mais simples que eles entendam o conteúdo através de suas próprias experiências práticas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), traz como competência para o aluno a capacidade de raciocinar através de experiências e investigações para resolução de problemas.

> Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas

> as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. (BRASIL, 2018)

Sendo assim, com a necessidade de alterar o pensamento a respeito dos conteúdos de análise combinatória para que o assunto desperte mais o interesse e a imaginação dos alunos, temos como objetivo geral do presente trabalho apresentar a análise combinatória, o triângulo de Pascal e o binômio de Newton expondo algumas de suas propriedades e propor algumas atividades de investigação e conjecturas utilizando tabelas, visto que temos como competências específicas de matemática para o ensino médio,

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018)

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.
>
> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016)

2 Atividades lúdicas e conjecturas

A partir de exemplos e tabelas que serão preenchidas com as respostas **sim** ou **não**, vamos chegar a resultados importantes da Análise Combinatória, do Triângulo de Pascal e Binômio de Newton sem o uso de fórmulas.

O presente trabalho é fruto da experiência em sala de aula e foi motivado pelos padrões observados numa churrascaria rodízio, onde tudo que é oferecido pelos garçons tem como respostas: **Sim, por favor!** ou **Não, obrigado!**; o que tem tudo a ver com a formação de comissões, pois para formarmos comissões, subconjuntos ou qualquer agrupamento não ordenado, precisamos saber se cada "elemento (objeto)" pertencerá ou não ao agrupamento.

- O uso das cores é essencial neste trabalho. Use e abuse das cores;
- Criem situações e estimulem os alunos a perceberem os padrões e fazerem conjecturas.

Vamos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e a notação:

$\binom{n}{p}$ → número de agrupamentos (não ordenados) de p elementos escolhidos num universo de n elementos. ($p, n \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$). Conhecemos como "binomial de n sobre p".

Exemplo 2.1. Considere um grupo de 2 pessoas (Ana e Bia). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem (PFC) ou princípio multiplicativo chegamos ao total de 4, pois cada pessoa tem duas possibilidades: "**participar**" ou "**não participar**" do agrupamento.

Figura 1 – agrupamentos de Até Duas Pessoas

ANA	BIA	
2	2	$2.2 = 2^2 = 4$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 2 estão representadas todas as possibilidades de participação: Ana e Bia, somente Ana, somente Bia e nenhuma das duas.

Figura 2 – Possibilidades das duas Pessoas Participarem ou Não dos agrupamentos

ANA	BIA	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
		$1 = \binom{2}{2}$	2	0
		$2 = \binom{2}{1}$	1	1
			1	1
		$1 = \binom{2}{0}$	0	2

Fonte: Produzido pelo Autor

Observação 2.2. Se considerarmos somente uma pessoa, teremos apenas duas possibilidades: **participa** ou **não participa**. Como podemos observar na figura 3.

Figura 3 – Possibilidades de uma Pessoa Participar ou Não dos agrupamentos

ANA	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
	$1 = \binom{1}{1}$	1	0
	$1 = \binom{1}{0}$	0	1

Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 2.3. Considere um grupo de três pessoas (Ana, Bia e Edu). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 8 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: **participar** ou **não participar** do agrupamento.

Figura 4 – agrupamentos de Até Três Pessoas

ANA	BIA	EDU	
2	2	2	$2.2.2 = 2^3 = 8$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 5, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 5 – Possibilidades das Três Pessoas Participarem dos agrupamentos

	ANA	BIA	EDU	De quantas Maneiras?	Sim	Não
1.				$1 = \binom{3}{3}$	3	0
2.				$3 = \binom{3}{2}$	2	1
3.					2	1
4.					2	1
5.				$3 = \binom{3}{1}$	1	2
6.					1	2
7.					1	2
8.				$1 = \binom{3}{0}$	0	3

Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 2.4. Considere um grupo de quatro pessoas (Ana, Bia, Edu e Téo). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 16 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: **participar** ou **não participar** do agrupamento.

Figura 6 – agrupamentos de Até Quatro Pessoas

ANA	BIA	EDU	TÉO	
2	2	2	2	$2.2.2.2 = 2^4 = 16$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 7, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 7 – Possibilidades das Quatro Pessoas Participarem dos agrupamentos

ANA	BIA	EDU	TÉO	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
				$1 = \binom{4}{4}$	4	0
				$4 = \binom{4}{3}$	3	1
					3	1
					3	1
					3	1
				$6 = \binom{4}{2}$	2	2
					2	2
					2	2
					2	2
					2	2
					2	2
				$4 = \binom{4}{1}$	1	3
					1	3
					1	3
					1	3
				$1 = \binom{4}{0}$	0	4

Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 2.5. Considere um grupo de cinco pessoas (A, B, C, D e E). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 32 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: "**participar**" ou "**não participar**" do agrupamento.

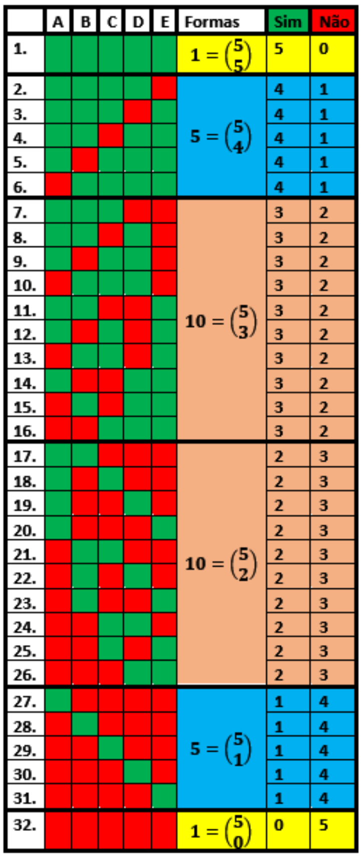
Figura 8 – agrupamentos de Até Cinco Pessoas

A	B	C	D	E	Total
2	2	2	2	2	$2.2.2.2.2 = 2^5$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 9, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 9 – Possibilidades das Cinco Pessoas Participarem dos agrupamentos



	A	B	C	D	E	Formas	Sim	Não
1.						$1 = \binom{5}{5}$	5	0
2.						$5 = \binom{5}{4}$	4	1
3.							4	1
4.							4	1
5.							4	1
6.							4	1
7.						$10 = \binom{5}{3}$	3	2
8.							3	2
9.							3	2
10.							3	2
11.							3	2
12.							3	2
13.							3	2
14.							3	2
15.							3	2
16.							3	2
17.						$10 = \binom{5}{2}$	2	3
18.							2	3
19.							2	3
20.							2	3
21.							2	3
22.							2	3
23.							2	3
24.							2	3
25.							2	3
26.							2	3
27.						$5 = \binom{5}{1}$	1	4
28.							1	4
29.							1	4
30.							1	4
31.							1	4
32.						$1 = \binom{5}{0}$	0	5

Fonte: Produzido pelo Autor

2.1 Observando Padrões e Fazendo Conjecturas

Analisando os resultados nas figuras 2, 3, 5, 7 e 9, podemos chegar a alguns resultados importantes.

2.1.1 Casos Particulares

- Ninguém participa do agrupamento:

  $$\binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \binom{3}{0} = \binom{4}{0} = \binom{5}{0} = 1.$$

  Qual o padrão observado?

  $\binom{n}{0} = 1$. Só existe 1 maneira de ninguém participar do agrupamento;

- Todos participam do agrupamento:

$$\binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \binom{4}{4} = \binom{5}{5} = 1.$$

Qual o padrão observado?

$\binom{n}{n} = 1$. Só existe 1 maneira de todos participarem do agrupamento;

- Apenas um participa do agrupamento:
  - $\binom{1}{1} = 1$. Existe 1 maneira de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{2}{1} = 2$. Existem 2 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{3}{1} = 3$. Existem 3 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{4}{1} = 1$. Existem 4 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{5}{1} = 5$. Existem 5 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento.

Qual o padrão observado?

$\binom{n}{1} = n$. Quando apenas 1 pessoa participa do agrupamento, o total de agrupamentos é igual ao número de pessoas.

2.1.2 Propriedade da Linha

- $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$
- $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 = 2^2$
- $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$
- $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16 = 2^4$
- $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32 = 2^5$

Qual o padrão observado?

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \qquad \text{(PROPRIEDADE DA LINHA).}$$

2.1.3 Binomiais Complementares

- O número de maneiras de escolher “3 sins” e “nenhum não” é igual ao número de maneiras de escolher “3 nãos” e “nenhum sim”, ou seja, $\binom{3}{3}=\binom{3}{0}$.
- O número de maneiras de escolher “2 sins” e “1 não” é igual ao número de maneiras de escolher “2 nãos” e “1 sim”, ou seja, , $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}$.
- O número de maneiras de escolher “4 sins” e “nenhum não” é igual ao número de maneiras de escolher “4 nãos” e “nenhum sim”, ou seja $\binom{4}{4}=\binom{4}{0}$.
- O número de maneiras de escolher “3 sins” e “1 não” é igual ao número de maneiras de escolher “3 nãos” e “1 sim”, ou seja, $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$.
- O número de maneiras de escolher “5 sins” e “nenhum não” é igual ao número de maneiras de escolher “5 nãos” e “nenhum sim”, ou seja, , $\binom{5}{5}=\binom{5}{0}$.
- O número de maneiras de escolher “4 sins” e “1 não” é igual ao número de maneiras de escolher “4 nãos” e “1 sim”, ou seja, $\binom{5}{4}=\binom{5}{1}$.
- O número de maneiras de escolher “3 sins” e “2 nãos” é igual ao número de maneiras de escolher “3 nãos” e “2 sins”, ou seja, $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$.

Qual o padrão observado?

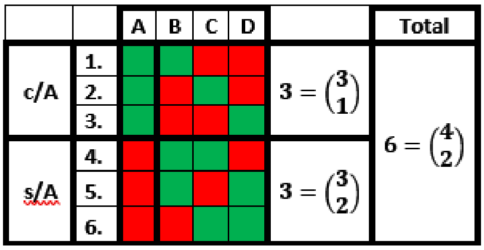
$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} \qquad \text{(BINOMIAIS COMPLEMENTARES).}$$

2.1.4 Relação de Stifel

Observando os exemplos 2.6, 2.7 e 2.8, chegaremos a um resultado importantíssimo.

Exemplo 2.6. Vamos considerar quatro pessoas (A, B, C e D) para formar agrupamentos de 2 pessoas

Figura 10 – Possibilidades de Escolher duas Pessoas entre Quatro



Fonte: Produzido pelo Autor

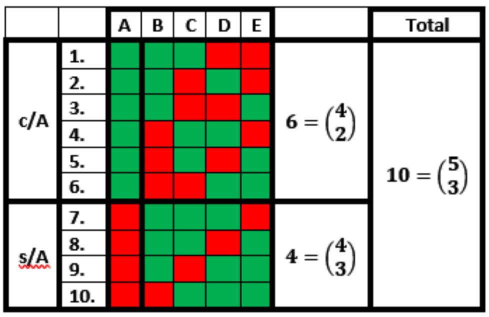
De acordo com a figura 10, podemos observar que é possível formar 6 agrupamentos de 2 pessoas. Observe que: "3 tem a pessoa **A**" e "3 não tem a pessoa **A**".

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: se tenho **A** no agrupamento de 2 pessoas, devo escolher mais 1 pessoa das 3 que sobraram e se não tenho **A** no agrupamento de 2 pessoas, devo escolher 2 pessoas das 3 que sobraram.

$$3 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}. \tag{2.1}$$

Exemplo 2.7. Vamos considerar cinco pessoas (A, B, C, D e E) para formar agrupamentos de 3 pessoas de 5 pessoas?

Figura 11 – Possibilidades de Escolher Três Pessoas entre Cinco



Fonte: Produzido pelo Autor

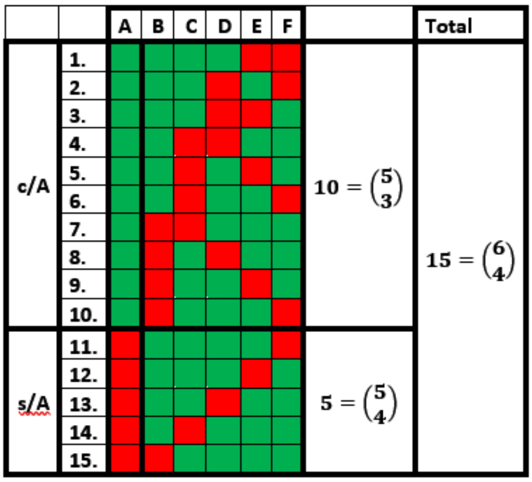
De acordo com a figura 11, podemos observar que é possível formar 10 agrupamentos de 3 pessoas. Seis agrupamentos com a pessoa **A** (**c/A**) e quatro sem a pessoa **A** (**s/A**).

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: Se tenho **A** no agrupamento de 3 pessoas, devo escolher mais 2 pessoas das 4 que sobraram e se não tenho **A** no agrupamento de 3 pessoas, devo escolher 3 pessoas das 4 que sobraram.

$$6 + 4 = 10 \quad \rightarrow \quad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.8. Vamos considerar seis pessoas (A, B, C, D, E e F) para formar agrupamentos de 4 pessoas.

Figura 12 – Possibilidades de Escolher Quatro Pessoas entre Seis



Fonte: Produzido pelo Autor

De acordo com a figura 12, podemos observar que é possível formar 15 agrupamentos de 3 pessoas. Dez agrupamentos com a pessoa **A** (**c**/**A**) e cinco não tem a pessoa **A** (**s**/**A**).

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: Se tenho A no agrupamento de 4 pessoas, devo escolher mais 3 pessoas das 5 que sobraram e se não tenho A no agrupamento de 4 pessoas, devo escolher 4 pessoas das 5 que sobraram.

$$10 + 5 = 15 \quad \rightarrow \quad \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}. \tag{2.3}$$

Qual o padrão observado?

Das igualdades 2.1, 2.2 e 2.3, temos:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \qquad \text{(RELAÇÃO DE STIFEL).}$$

2.1.5 Propriedade da Coluna

Utilizando a relação de Stifel recursivamente chegaremos a outro resultado que chamaremos de Propriedade da Coluna.

Considere um agrupamento com 5 pessoas, dentre elas as pessoas A, B e C.

Todos os agrupamentos com 3 pessoas:

$$\binom{5}{3} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{com\ o\ A} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{sem\ o\ A} \qquad \text{(RELAÇÃO DE STIFEL).}$$

$$\binom{4}{3} = \underbrace{\binom{3}{2}}_{com\ o\ B} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{sem\ o\ B} \qquad \text{(RELAÇÃO DE STIFEL).}$$

$\binom{3}{3} = \binom{2}{2}$, fixando o C, sobram 2 para escolher 2.

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \tag{2.4}$$

Da relação de Stifel, sabemos que $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$. Substituindo $\binom{5}{3}$ pela igualdade 2.4, temos

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Da mesma forma, temos que

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Qual o padrão observado?

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \text{(PROPRIEDADE DA COLUNA).}$$

Visualizando a propriedade da coluna através de um problema.

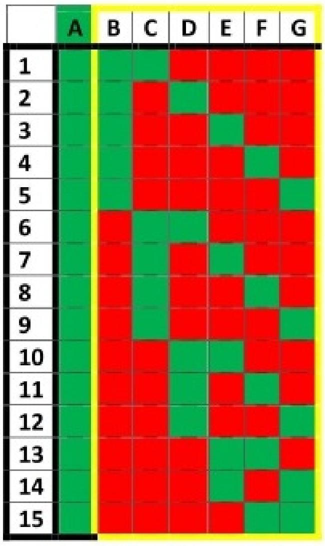
Problema 2.9. Ana, Beto, Cléo, Dinho e Eloá fazem parte de um agrupamento de 7 pessoas.

Nas respostas de cada item a seguir, considere como escolhido os quadrados verdes e não escolhido os quadrados vermelhos.

a) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana** estará entre os escolhidos?

Resposta:

Figura 13 – Resposta exemplo 2.9 a



Fonte: Produzido pelo Autor

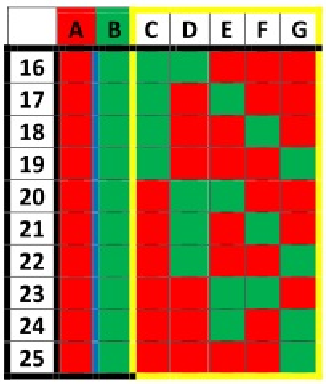
Observe na figura 13, que fixando **Ana**, sobram 6 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{6}{2} = 15.$$

b) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana não estará** entre os escolhidos e **Beto, sim**?

Resposta:

Figura 14 – Resposta exemplo 2.9 b



Fonte: Produzido pelo Autor

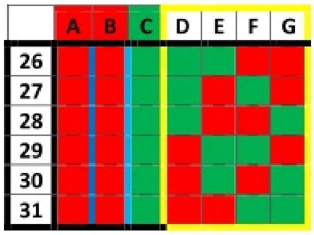
Na figura 14 podemos notar que excluindo **Ana** e fixando **Beto**, sobram 5 para escolher 2, ou seja,

$$\binom{5}{2} = 10.$$

c) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana e Beto não estarão** entre os escolhidos e **Cléo, sim**?

Resposta:

Figura 15 – Resposta exemplo 2.9 c



Fonte: Produzido pelo Autor

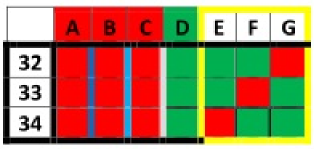
Excluindo **Ana e Beto** e fixando **Cléo**, como observado na figura 15, sobram 4 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{4}{2} = 6.$$

d) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana, Beto e Cléo não estarão** entre os escolhidos e **Dinho, sim**?

Resposta:

Figura 16 – Resposta exemplo 2.9 d



Fonte: Produzido pelo Autor

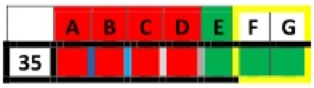
Observamos na figura 16 que, excluindo **Ana, Beto e Cléo** e fixando **Dinho**, sobram 3 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{3}{2} = 3.$$

e) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana, Beto, Cléo e Dinho não estarão** entre os escolhidos e **Eloá, sim**?

Resposta:

Figura 17 – Resposta exemplo 2.9 e



Fonte: Produzido pelo Autor

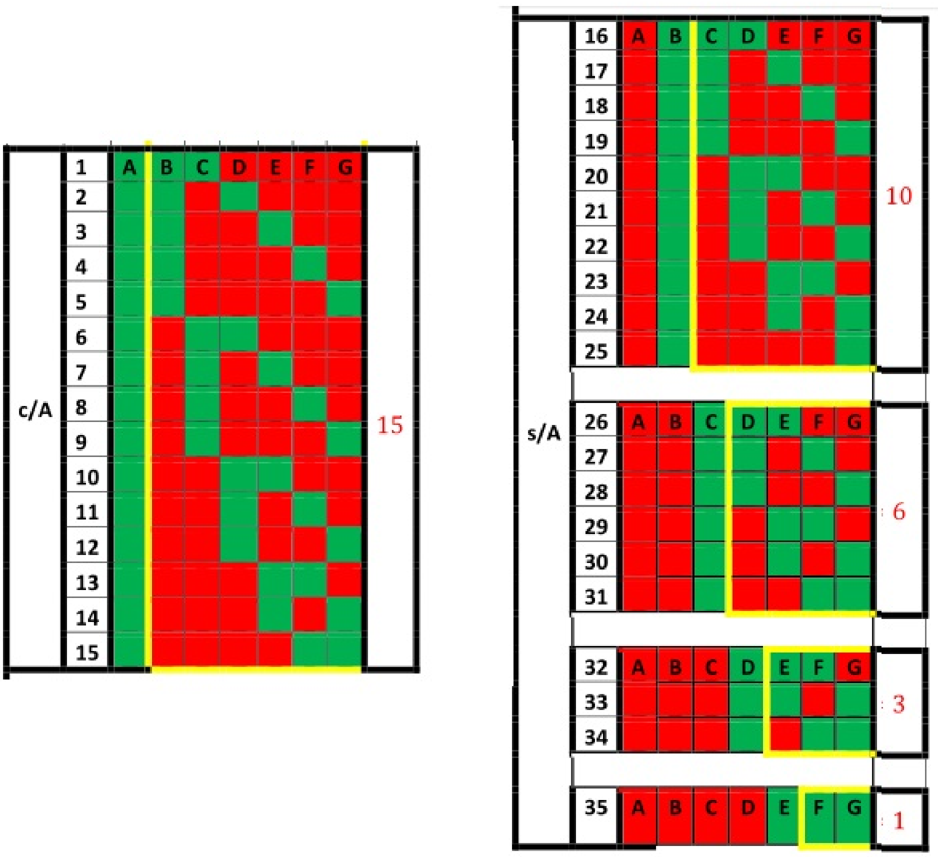
Na figura 17 podemos notar que excluindo **Ana, Beto, Cléo e Dinho** e fixando **Eloá**, sobram 2 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{2}{2} = 1.$$

f) No total, de quantas formas diferentes podemos montar uma comissão de 3 pessoas escolhidas dentre um grupo de 7?

Resposta:

Figura 18 – Resposta exemplo 2.9 f



Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 18 temos um total de 35 possibilidades de montar uma comissão de 3 pessoas dentre um grupo de 7 pessoas, ou seja,

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Somando os resultados dos itens a, b, c, d e e, temos:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35. \tag{2.5}$$

Notamos que o resultado do item f é

$$\binom{7}{3} = 35. \tag{2.6}$$

Dessa forma, da soma 2.5 e do resultado 2.6, temos

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$$

Chegando assim na propriedade da coluna

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2.1.6 Propriedade da Diagonal

Depois de conhecermos a propriedade da coluna, basta fazermos os complementares de todos os binomiais que surgirá um outro resultado intrigante conhecido como Propriedade da Diagonal.

Observe os complementares dos binomais na propriedade da coluna.

$$\underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{7}{4}} = \underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}}$$

Dessa forma, temos:

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}.$$

Qual o padrão observado?

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

(PROPRIEDADE DA DIAGONAL).

Visualizando a propriedade da Diagonal através de um problema.

Problema criado por um grupo de estudos MA12 PROFMAT-UFF 2022 formado por Carlos Henrique, Clarissa, Luisa e Mariana.

Problema 2.10. Em uma festa infantil há três tipos de docinhos: brigadeiro, beijinho de coco e cajuzinho. De acordo com o organizador da festa, cada convidado poderá escolher até seis docinhos dentre as três opções oferecidas.

De quantas maneiras cada convidado poderá fazer essa escolha?

Resposta:

Considere a o número de brigadeiros, b o número de beijinhos de coco e c o número de cajuzinhos.

O número total de maneiras de cada convidado escolher os docinhos é dado por:

$a + b + c \leq 6$, ou seja, é igual a soma dos resultados abaixo:

$a + b + c = 6 \quad \rightarrow \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \rightarrow$ O número total de soluções é dado por $\binom{8}{6}$, pois temos 8 espaços (||||||++) para escolher 6, onde colocaremos os 6 traços que representam as 6 unidades da igualdade. Ao escolhermos as posições dos 6 traços, sobrarão 2 espaços para as cruzes (adição).

Para um melhor entendimento, observe os exemplos 2.11 e 2.12.

Exemplo 2.11. Uma das soluções é 3 + 1 + 2 que pode ser representada assim: |||+|+||.

Observe que os traços ocupam 6 das 8 posições. Neste exemplo, as posições: 1, 2, 3, 5, 7 e 8.

Exemplo 2.12. Uma outra solução é 0 + 2 + 4 que pode ser representada assim: +||+||||.

Observe que os traços ocupam 6 das 8 posições. Neste exemplo, as posições: 2, 3, 5, 6, 7 e 8.

Vejamos outras somas, pois $a + b + c \leq 6$:

- $a+b+c=5 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{7}{5}$
- $a+b+c=4 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{6}{4}$
- $a+b+c=3 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{5}{3}$
- $a+b+c=2 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{4}{2}$

- $a+b+c=1 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{3}{1}$
- $a+b+c=0 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{2}{0}$

Logo, o número de maneiras que cada convidado pode escolher seus docinhos é dado por:

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \tag{2.7}$$

Trabalhoso, não? Vamos contar de outra forma?

Vamos considerar os três docinhos iniciais e vamos acrescentar um quarto docinho, de creme de avelã, cuja quantidade chamaremos de d, tal que cada convidado possa escolher, dentre as quatro opções oferecidas, exatamente 6.

Logo, teremos que:

$a+b+c+d=6$,onde $d \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, o que implica em $a+b+c \leq 6$, pois:

$d=0 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=6$

$d=1 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=5$

$d=2 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=4$

$d=3 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=3$

$d=4 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=2$

$d=5 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=1$

$d=6 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=0$

$a+b+c+d=6 \quad \rightarrow \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. Temos nove espaços para escolher 6, então número total de soluções da equação $a+b+c+d=6$ é dado por

$$\binom{9}{6} \tag{2.8}$$

De 2.7 e 2.8, podemos concluir que

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}=\binom{9}{6} \tag{2.9}$$

com a igualdade em 2.9 chegamos na propriedade da diagonal

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Observação 2.13. Se, ao invés de escolhermos os lugares para os traços (unidades), escolhermos os lugares para as cruzes (adição), chegaremos aos complementares de todos os binomiais da igualdade em 2.9 e, consequentemente, chegaremos à propriedade da coluna:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}=\binom{9}{3}$$

IMPORTANTE:

Se aplicarmos a relação de STIFEL recursivamente, chegaremos à propriedade da COLUNA e se, fizermos os complementares de todos os binomiais na propriedade da coluna, chegaremos à propriedade da DIAGONAL.

Exemplo 2.14.

$$\begin{aligned}
\binom{9}{3} &= \binom{8}{2}+\underbrace{\binom{8}{3}}_{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}} \qquad \text{STIFEL}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\underbrace{\binom{6}{3}}_{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\underbrace{\binom{5}{3}}_{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\underbrace{\binom{4}{3}}_{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\underbrace{\binom{3}{3}}_{\binom{2}{2}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2} \qquad \text{COLUNA}
\end{aligned}$$

Fazendo os complementares de todos os binomiais, temos:

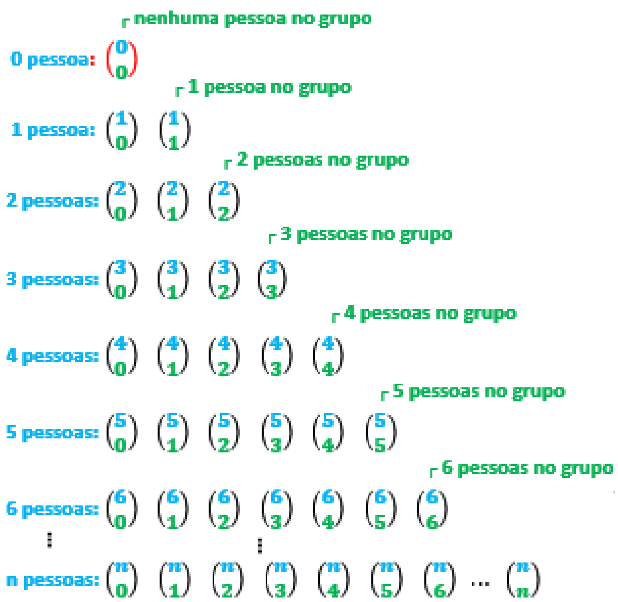
$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\binom{9}{6}} = \underbrace{\binom{8}{2}}_{\binom{8}{6}} + \underbrace{\binom{7}{2}}_{\binom{7}{5}} + \underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}}$$

$$\binom{9}{6} = \binom{8}{6} + \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{0} \quad \text{DIAGONAL}$$

2.1.7 Triângulo de Pascal

Organizando, em ordem crescente, o número total de pessoas disponíveis para formar os agrupamentos, de cima para baixo e, também em ordem crescente, o número de pessoas de cada agrupamento, da esquerda para a direita, temos:

Figura 19 – Organização de Cada Agrupamento



Fonte: Produzido pelo Autor

De acordo com os resultados observados nas figuras 2, 3, 5, 7, 9 e na Relação de Stifel, podemos reescrever o triângulo da figura 19 da seguinte forma:

Figura 20 – Organização com os Resultados do Cada Agrupamento

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Fonte: Produzido pelo Autor

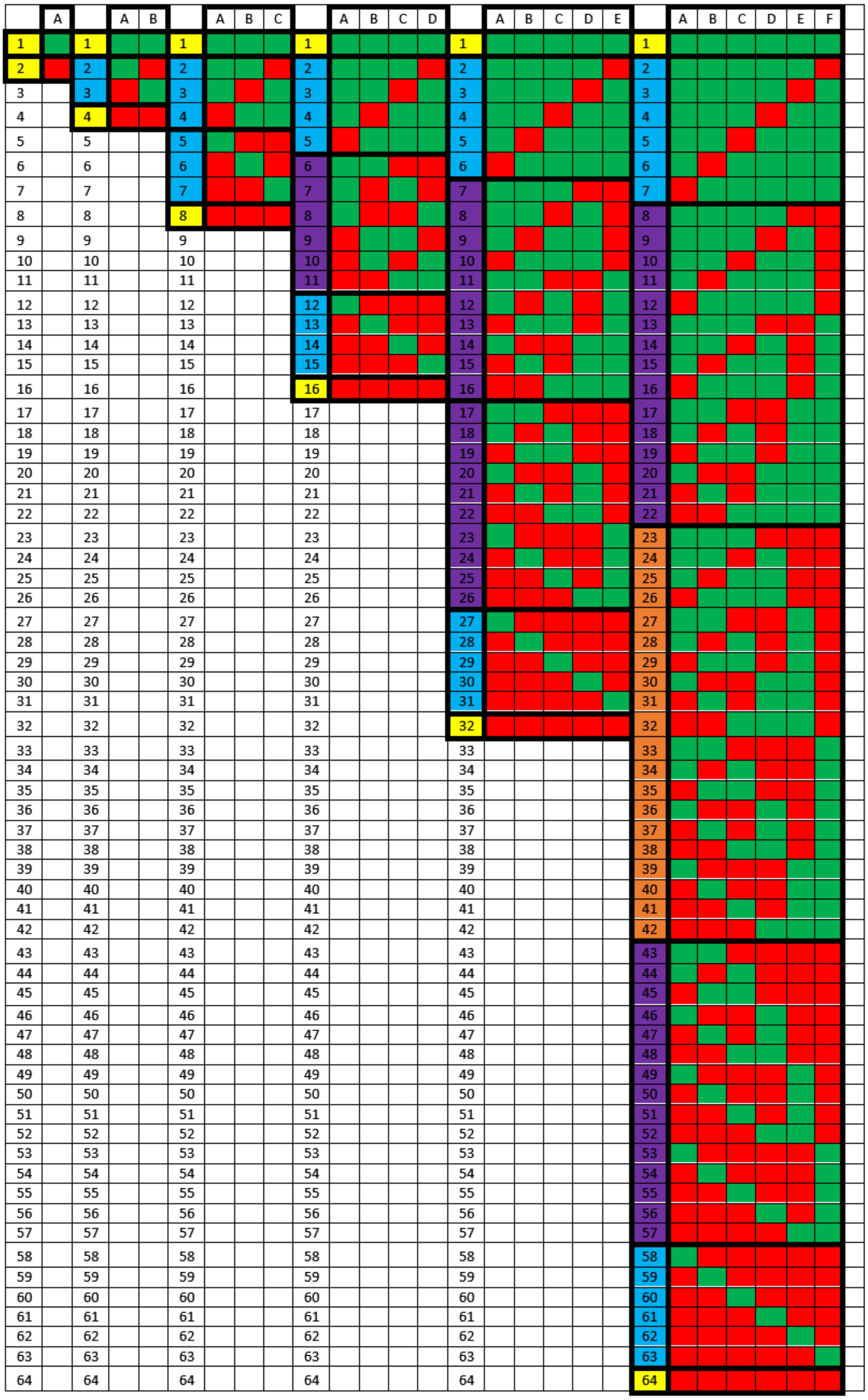
As figuras 19 e 20, representam uma organização de números conhecida como triângulo de Pascal.

Observação 2.15. Utilizando a relação de Stifel e os casos particulares, podemos construir o Triângulo de Pascal até a linha que quisermos através de recorrências, ou seja, podemos chegar aos valores de todos os números da forma $\binom{n}{p}$ sem o uso de fórmulas.

Ao final, deduziremos uma fórmula para calcular $\binom{n}{p}$, pois para “n e p grandes” ficará muito trabalhoso o cálculo usando apenas o triângulo de Pascal.

Para uma melhor percepção e contagem, observe a tabela abaixo e compare com o triângulo acima.

Figura 21 – Tabela Construção do Triângulo



Fonte: Produzido pelo Autor

3 Binômio de Newton: Desenvolvendo Potências do Tipo $(a+b)^n$

O que significa $(a+b)^2$**?**

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= aa + ab + ba + bb \\
&= 1aa + 2ab + 1bb \\
&= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 \\
&= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2
\end{aligned}
$$

O quadrado de $(a+b)$ é $(a+b)(a+b)$. Quando aplicamos a distributiva, estamos, na verdade, formando todos os possíveis agrupamentos de 2 elementos, sendo um elemento do primeiro parênteses e o outro do segundo parênteses.

Figura 22 – Coeficientes de $(s+n)^2$

ANA	BIA	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
		$1 = \binom{2}{0}$	2	0
		$2 = \binom{2}{1}$	1	1
			1	1
		$1 = \binom{2}{2}$	0	2

Fonte: Produzido pelo Autor

Considere o expoente 2 como sendo duas pessoas e a essas pessoas vamos perguntar se elas gostariam de fazer parte de um agrupamento. As possíveis respostas seriam:

ss, sn, ns e nn, ou seja, $1ss + 2sn + 1nn$.

$$\begin{aligned}
(s+n)^2 &= (s+n)(s+n)\\
&= ss + sn + ns + nn\\
&= 1ss + 2sn + 1nn\\
&= \binom{2}{0}s^2 + \binom{2}{1}sn + \binom{2}{2}n^2\\
&= \binom{2}{0}s^2n^0 + \binom{2}{1}s^1n^1 + \binom{2}{2}s^0n^2
\end{aligned}$$

Vejamos agora $(s+n)^3$

$(s+n)^3 = (s+n)(s+n)(s+n)$

Aplicando a distributiva, temos:

$sss + ssn + sns + snn + nss + nsn + nns + nnn$

Observe que foram gerados 8 produtos de 3 letras cada, uma de cada parênteses.

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$1sss + 3ssn + 3snn + 1nnn$

Escrevendo os produtos como potências, temos:

$1s^3 + 3s^2n + 3sn^2 + 1n^3$

Substituindo os coeficientes pelos binomiais correspondentes e completando as potências, temos:

$$\binom{3}{0}s^3n^0 + \binom{3}{1}s^2n^1 + \binom{3}{2}s^1n^2 + \binom{3}{3}s^0n^3$$

Vejamos um exemplo contextualizado.

Exemplo 3.1. Considere que o garçom **Stifel** da Churrascaria **New Bin** tenha três opções de carne (A = alcatra, B = Baby Beef e C = costela) para oferecer ao seu cliente **Pascal**. Ao passar com as três opções e oferecê-las a Pascal, ele poderá responder **sim** ou **não** para cada uma delas. Na figura 23, temos as possíveis respostas de Pascal para cada um dos itens oferecidos por Stifel.

Stifel, além de excelente garçom é um aluno muito dedicado e criativo. Observando a tabela com as possibilidades de respostas de Pascal, fez um link com a aula de Binômio de Newton* que assistiu com o Professor Carlos Henrique.

* $(s+n)^3 = 1s^3 + 3s^2n + 3sn^2 + 1n^3 = \binom{3}{0}s^3n^0 + \binom{3}{1}s^2n^1 + \binom{3}{2}s^1n^2 + \binom{3}{3}s^0n^3$

Ele percebeu que o expoente (3) é o número de opções (A, B *e* C) de carnes disponíveis e o desenvolvimento é a soma do número de maneiras de Pascal responder **sim (s)** ou **não (n)**.

Figura 23 – Coeficientes de $(s+n)^3$

A	B	C	Sim	Não			Sim + Não
s	s	s	3	0	1sss	$\binom{3}{3}.s^3.n^0$	3
s	s	n	2	1	3ssn	$\binom{3}{2}.s^2.n^1$	3
s	n	s	2	1			3
n	s	s	2	1			3
s	n	n	1	2	3snn	$\binom{3}{1}.s^1.n^2$	3
n	s	n	1	2			3
n	n	s	1	2			3
n	n	n	0	3	1nnn	$\binom{3}{0}.s^0.n^3$	3

Fonte: Produzido pelo Autor

A percepção do garçom e aluno Stifel nos permite escrever o desenvolvimento binomial para qualquer expoente natural sem muito esforço.

Vejamos o exemplo para expoente (4).

Exemplo 3.2. $(s+n)^4 = \binom{4}{0}s^4n^0 + \binom{4}{1}s^3n^1 + \binom{4}{2}s^2n^2 + \binom{4}{3}s^1n^3 + \binom{4}{4}s^0n^4$

Figura 24 – Coeficientes de $(s+n)^4$

A	B	C	D	SIM	NÃO		
				4	0	1ssss	$\binom{4}{4}.s^4.n^0$
				3	1	4sssn	$\binom{4}{3}.s^3.n^1$
				3	1		
				3	1		
				3	1		
				2	2	6ssnn	$\binom{4}{2}.s^2.n^2$
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				1	3	4snnn	$\binom{4}{1}.s^1.n^3$
				1	3		
				1	3		
				1	3		
				0	4	1nnnn	$\binom{4}{0}.s^0.n^4$

Fonte: Produzido pelo Autor

Generalizando, temos:

$$(s+n)^k = \binom{k}{0}s^k n^0 + \binom{k}{1}s^{k-1}n^1 + \binom{k}{2}s^{k-2}n^2 + \binom{k}{3}s^{k-3}n^3 + \ldots + \binom{k}{k}s^0 n^k.$$

Ou

$$(s+n)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}s^{k-p}n^p.$$

Observação 3.3. Vejamos que:

1 - Substituindo n por (- n), chegamos ao desenvolvimento

$$(s+(-n))^k = (s-n)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}s^{k-p}(-n)^p$$

2 - Substituindo s e n por 1, temos:

$$(1+1)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^{k-p}\times 1^p = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} = 2^k.$$

3.1 Deduzindo uma fórmula para calcular combinações simples

A partir de agora, vamos conjecturar uma fórmula para calcular todos os números da forma $\binom{n}{p}$ (Números binomiais ou número de combinações simples).

Exemplo 3.4. Como calcular $\binom{4}{3}$?

Quatro jovens apostam uma corrida. De quantas maneiras o pódio pode ser formado com os 1º, 2º e 3º lugares? (Observe que a ordem é levada em consideração)

Os mesmos quatro jovens formarão agrupamentos de três alunos. Quantos agrupamentos podem ser formados? (Observe que a ordem não é levada em consideração)

Como desconsiderar a ordem a partir do agrupamento ordenado?

Figura 25 – Formação de agrupamento de três Jovens

	A	B	C	D			A	B	C	D
	1º	2º	3º				1	2	3	
1	A	B	C			1	A	B	C	
2	A	C	B							
3	B	A	C							
4	B	C	A							
5	C	A	B							
6	C	B	A							
7	A	B	D			2	A	B	D	
8	A	D	B							
9	B	A	D							
10	B	D	A							
11	D	A	B							
12	D	B	A							
13	A	C	D			3	A	C	D	
14	A	D	C							
15	C	A	D							
16	C	D	A							
17	D	A	C							
18	D	C	A							
19	B	C	D			4	B	C	D	
20	B	D	C							
21	C	B	D							
22	C	D	B							
23	D	B	C							
24	D	C	B							

Fonte: Produzido pelo Autor

Observe na figura 25 que ao levar em consideração a ordem (1º, 2º e 3º), temos $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades.

Quando a ordem não é levada em consideração, ou seja, escolher 3 pessoas em um grupo de quatro, as possibilidades de formação do agrupamento se repetem, por exemplo, o agrupamento (A, B, C) é o mesmo agrupamento (B, C, A). Logo, teremos $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{6} = 4$.

Assim, podemos escrever

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{3 \times 2 \times 1 \times 1!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Analisando os dois primeiros lugares e desconsiderando a ordem, temos:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Analisando mais casos podemos chegar a:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq q.$$

Vejamos alguns outros exemplos de escolhas ordenadas e não ordenadas.

Exemplo 3.5. Escolha ordenada:

Em um agrupamento de 4 pessoas de quantas formas diferentes podemos formar uma fila indiana com:

- 4 pessoas: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4!}{(4-4)!} = A_{4,4}$
- 3 pessoas: $4 \times 3 \times 2 = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{1!} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = A_{4,3}$
- 2 pessoas: $4 \times 3 = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = \dfrac{4!}{(4-2)!} = A_{4,2}$
- 1 pessoa: $4 = \dfrac{4 \times 3!}{3!} = \dfrac{4!}{(4-1)!} = A_{4,1}$
- 0 pessoa: $1 = \dfrac{4!}{4!} = \dfrac{4!}{(4-0)!} = A_{4,0}$

Exemplo 3.6. Escolha não ordenada:

Em um agrupamento de 4 pessoas de quantas formas diferentes podemos formar uma comissão com:

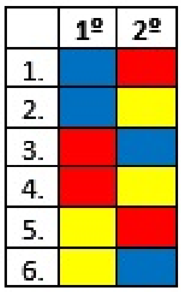
- 4 pessoas: $\dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = \dfrac{4!}{4!} = \dfrac{4!}{4! \times 0!} = \dfrac{4!}{4!(4-4)!} = C_{4,4} = C_4^4 = \dbinom{4}{4}$
- 3 pessoas: $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{3!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{3! \times 1!} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = C_{4,3} = C_4^3 = \dbinom{4}{3}$
- 2 pessoas: $\dfrac{4 \times 3}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = C_{4,2} = C_4^2 = \dbinom{4}{2}$
- 1 pessoa: $\dfrac{4}{1!} = \dfrac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = C_{4,1} = C_4^1 = \dbinom{4}{1}$
- 0 pessoa: $\dfrac{1}{0!} = \dfrac{1 \times 4!}{0! \times 4!} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = C_{4,0} = C_4^0 = \dbinom{4}{0}$

4 Orientações para o professor

A análise combinatória é considerada um dos assuntos mais difíceis do ensino médio, mas ao mesmo tempo, encanta os alunos. Isso se deve a sua aplicabilidade que é percebida de imediato por eles. A partir dessa percepção sugerimos que os professores criem problemas de contagem com os próprios alunos e, a partir dos padrões observados, estimulem os mesmos a fazerem conjecturas. A seguir, alguns exemplos:

Exemplo 4.1. Sugerir um problema simples para introduzirmos Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Por exemplo, os alunos dispõem de três lápis com cores diferentes (**azul**, **vermelho** e amarelo) para pintar dois retângulos. De quantas maneiras esses alunos poderão pintar esses dois retângulos de modo que o segundo seja pintado com uma cor diferente do primeiro? E, se os retângulos puderem ser pintados com a mesma cor?

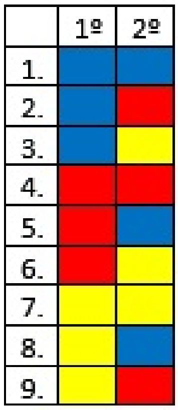
Figura 26 – Cores nos Retângulos Sem Repetição



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{nº de possibilidades} \\ \text{para pintar o} \\ \text{primeiro retângulo}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{nº de possibilidades} \\ \text{para pintar o segundo retângulo} \\ \text{(cor diferente do primeiro)}}} = \underbrace{6}_{\substack{\text{total de maneiras} \\ \text{de pintar os dois} \\ \text{retângulos}}}$$

Figura 27 – Cores nos Retângulos Com Repetição



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{n}^\text{o}\text{ de possibilidades}\\ \text{para pintar o}\\ \text{primeiro retângulo}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{n}^\text{o}\text{ de possibilidades}\\ \text{para pintar o}\\ \text{segundo retângulo}}} = \underbrace{9}_{\substack{\text{total de maneiras}\\ \text{de pintar os dois}\\ \text{retângulos}}}$$

Obs.: Explore as cores, trabalhe o visual.

Exemplo 4.2. Peça para os alunos levarem para a aula 2 calçados (tênis ou sandália), 2 bermudas (ou saias) e 3 camisas e peça para que eles façam todas as possíveis combinações com 1 calçado, 1 bermuda (ou saia) e 1 camisa. Registre as informações no quadro, faça o diagrama de árvore e depois aplique o PFC.

Exemplo 4.3. Considere uma sala de aula com 20 carteiras e 20 alunos.

Todos devem sair da sala e depois retornarem, um a um, para sentar-se. O 1º a entrar encontra 20 lugares disponíveis para sentar-se, o 2º encontra 19, o 3º encontra 18, e assim por diante até o 20º que encontra apenas um lugar vago. O professor vai anotando no quadro o número de possibilidades de cada aluno e ao final chegará ao número $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. O professor, então sugere uma notação (20!) para o produto e chama de fatorial de 20. A partir desse momento, vamos chamar o produto de um número natural por todos os seus antecessores até o 1 por fatorial desse número, ou seja:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n! \quad (n \geq 2)$$

Obs.: Adiantar para os alunos que será necessário adotar $1! = 1$ e $0! = 1$ para que os resultados futuros tenham validade para todos os números naturais.

Exemplo 4.4. Considere a sala com 20 carteiras e 14 alunos.

Seguindo a lógica do exercício 4.2, chegaremos ao número $20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 9 \times 8 \times 7$ que não poderemos chamar de 20!, pois está faltando $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Podemos sugerir aos alunos para completar o fatorial de 20 e "descontar" o que foi acrescentado. Como fazer isto?

$$20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7=\frac{20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7\times{\color{red}6\times5\times4\times3\times2\times1}}{\color{red}6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{20!}{6!}$$

(fatorial do total de lugares dividido pelo fatorial do número de lugares não ocupados), ou seja,

$$20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7=\frac{20!}{6!}=\frac{20!}{(10-14)!},$$

que será representado por

$$A_{20,14}$$

e será chamado de "Arranjos de 20 elementos tomados (agrupados) 14 a 14".

Fazendo mais alguns exemplos podemos generalizar e escrever:

$$A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}\qquad(n\in\mathbb{N}\quad\text{e}\quad p\leq n).$$

É importante que os alunos tenham a clareza que o agrupamento é ordenado.

Exemplo 4.5. Formar uma chapa do Grêmio (Presidente(a), Tesoureiro(a) e secretário (a));

Exemplo 4.6. Apostar uma corrida e formar o pódio (1º, 2º e 3º lugares);

Exemplo 4.7. Formar filas para introduzirmos a ideia de permutação; Sem restrições, elementos juntos, elementos fixos, ...

Exemplo 4.8. Anagramas com os nomes dos(as) alunos(as).

Exemplo 4.9. Calcular o número de abraços (= apertos de mãos) para introduzirmos a ideia de combinação;

Exemplo 4.10. Calcular o número de comissões.

5 Recurso Educacional: Puzzle dos padrões combinatórios

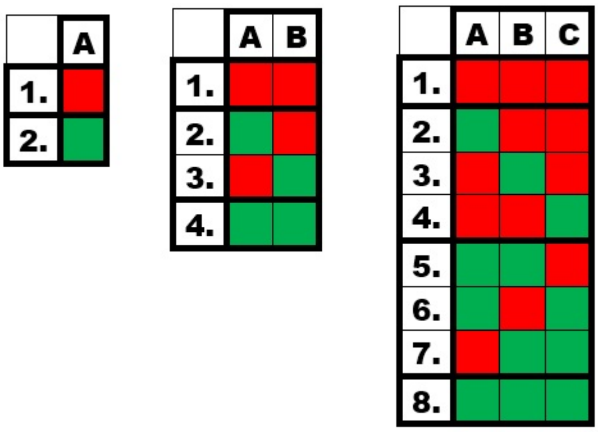
Figura 28 – Sim ou Não

Fonte: Produzido pelo Autor

Objetivo do Puzzle: Completar as tabelas com as peças verdes (sim = o elemento pertence ao agrupamento) e vermelhas (não = o elemento não pertence ao agrupamento) de modo a compor padrões combinatórios.

Recorte as figuras 29 e peça para os alunos montarem as figuras 30.

Figura 29 – Figuras para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

Figura 30 – Figuras para Montar

	A
1.	
2.	

	A	B
1.		
2.		
3.		
4.		

	A	B	C
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Figura 31 – Resultado Esperado

A	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
	$1 = \binom{1}{1}$	1	0
	$1 = \binom{1}{0}$	0	1

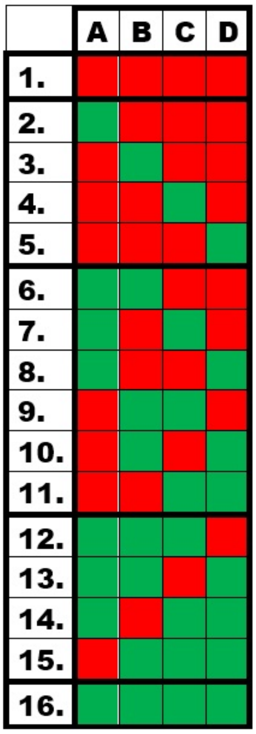
A	B	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
		$1 = \binom{2}{2}$	2	0
		$2 = \binom{2}{1}$	1	1
			1	1
		$1 = \binom{2}{0}$	0	2

	A	B	C	De quantas Maneiras?	Sim	Não
1.				$1 = \binom{3}{3}$	3	0
2.				$3 = \binom{3}{2}$	2	1
3.					2	1
4.					2	1
5.				$3 = \binom{3}{1}$	1	2
6.					1	2
7.					1	2
8.				$1 = \binom{3}{0}$	0	3

Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 32 e peça para os alunos montarem a figura 33.

Figura 32 – Figura para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

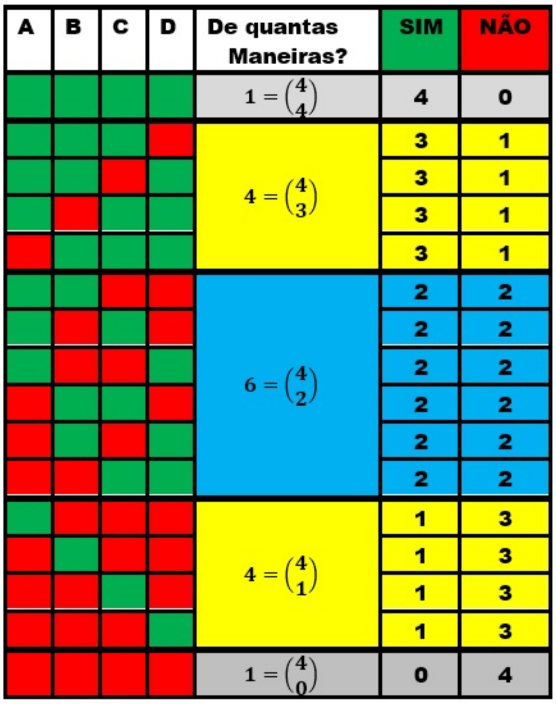
Figura 33 – Figura para Montar

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Figura 34 – Resultado Esperado

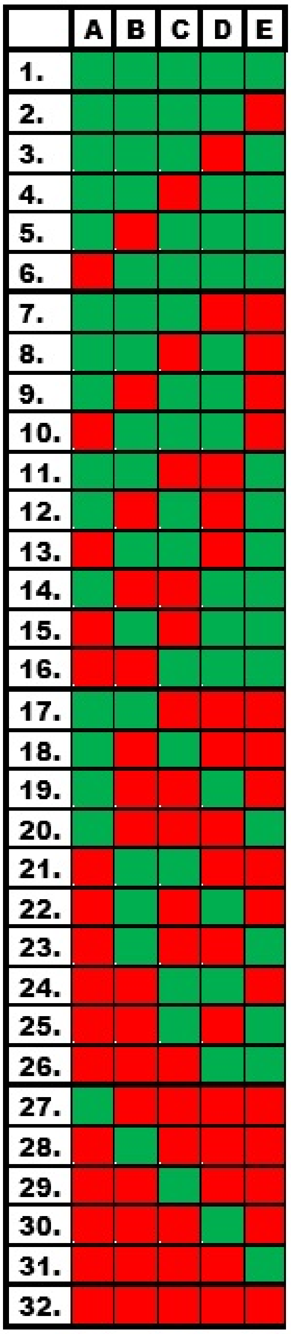


A	B	C	D	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
				$1 = \binom{4}{4}$	4	0
				$4 = \binom{4}{3}$	3	1
					3	1
					3	1
					3	1
				$6 = \binom{4}{2}$	2	2
					2	2
					2	2
					2	2
					2	2
					2	2
				$4 = \binom{4}{1}$	1	3
					1	3
					1	3
					1	3
				$1 = \binom{4}{0}$	0	4

Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 35 e peça para os alunos montarem a figura 36.

Figura 35 – Figura para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

Figura 36 – Figura para Montar

	A	B	C	D	E
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					
14.					
15.					
16.					
17.					
18.					
19.					
20.					
21.					
22.					
23.					
24.					
25.					
26.					
27.					
28.					
29.					
30.					
31.					
32.					

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

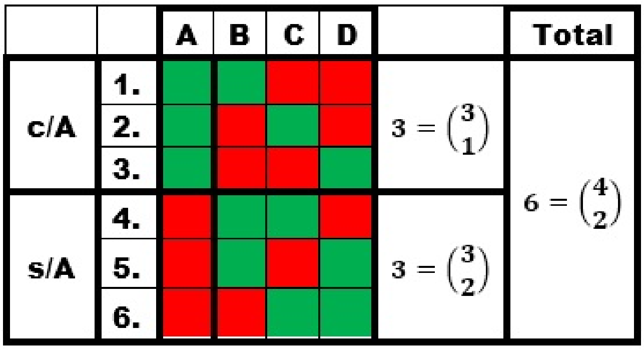
Figura 37 – Resultado Esperado

	A	B	C	D	E	Formas	Sim	Não
1.						$1 = \binom{5}{5}$	5	0
2.						$5 = \binom{5}{4}$	4	1
3.							4	1
4.							4	1
5.							4	1
6.							4	1
7.						$10 = \binom{5}{3}$	3	2
8.							3	2
9.							3	2
10.							3	2
11.							3	2
12.							3	2
13.							3	2
14.							3	2
15.							3	2
16.							3	2
17.						$10 = \binom{5}{2}$	2	3
18.							2	3
19.							2	3
20.							2	3
21.							2	3
22.							2	3
23.							2	3
24.							2	3
25.							2	3
26.							2	3
27.						$5 = \binom{5}{1}$	1	4
28.							1	4
29.							1	4
30.							1	4
31.							1	4
32.						$1 = \binom{5}{0}$	0	5

Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá usar partes das figuras anteriores e orientar os alunos para que eles percebam a Relação de STIFEL.

Figura 38 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

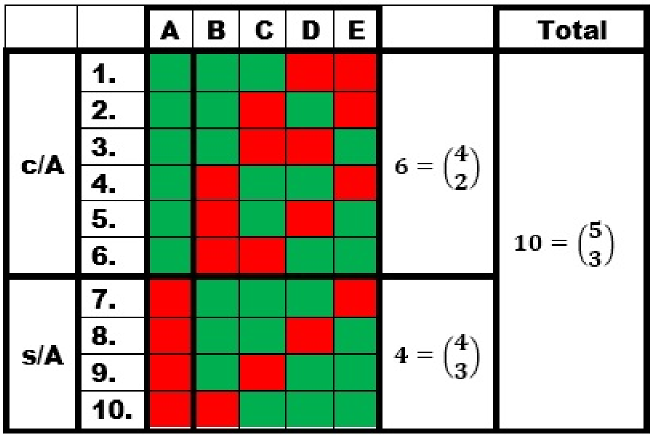
$$\underbrace{\overset{\textit{com o A}}{\binom{3}{1}}}_{3} + \underbrace{\overset{\textit{sem o A}}{\binom{3}{2}}}_{3} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}$$

Figura 39 – Relação de STIFEL. Montagem

		A	B	C	D	......	Total
c/A	1.						
	2.						
	3.						
s/A	4.						
	5.						
	6.						

Fonte: Produzido pelo Autor

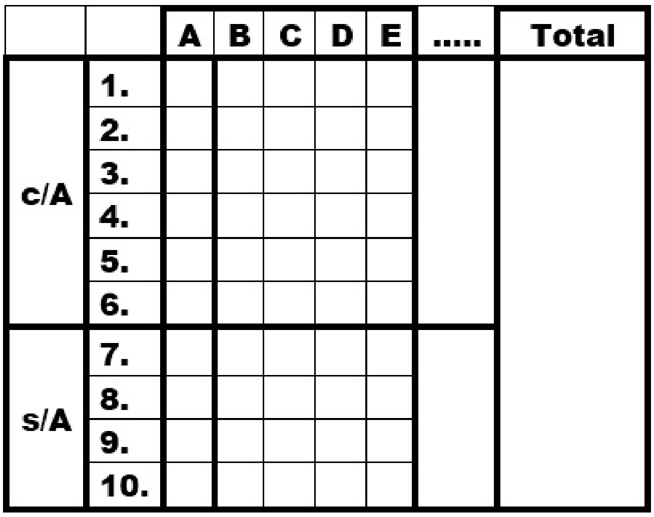
Figura 40 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

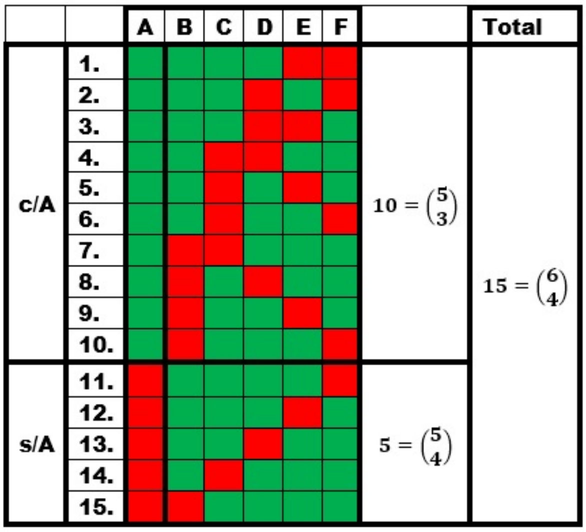
$$\underbrace{\overset{\text{com o }A}{\binom{4}{2}}}_{6} + \underbrace{\overset{\text{sem o }A}{\binom{4}{3}}}_{4} = \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}$$

Figura 41 – Relação de STIFEL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

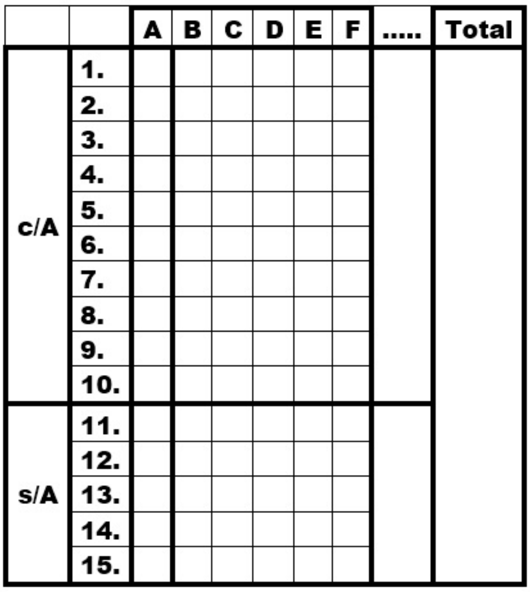
Figura 42 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{\overset{\text{com o } A}{\binom{5}{3}}}_{10} + \underbrace{\overset{\text{sem o } A}{\binom{5}{4}}}_{15} = \underbrace{\binom{6}{4}}_{10}$$

Figura 43 – Relação de STIFEL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor e a observação dos padrões obtidos em todas as figuras anteriores, os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ (Propriedade da linha);
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (Binomiais complementares);
3. $\binom{n}{0} = 1$ (Só existe 1 maneira de ninguém participar do grupo);
4. $\binom{n}{n} = 1$ (Só existe 1 maneira de todos participarem do grupo);
5. $\binom{n}{1} = n$ (Quando apenas 1 pessoa participa do grupo, o total de grupos é igual ao número de pessoas);
6. RELAÇÃO DE STIFEL

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p};$$

7. Se aplicarmos a relação de STIFEL recursivamente, chegaremos à propriedade da COLUNA e se, fizermos os complementares de todos os binomiais na propriedade da

coluna, chegaremos à propriedade da DIAGONAL.

$$
\begin{aligned}
\binom{9}{3} &= \binom{8}{2} + \underbrace{\binom{8}{3}}_{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \underbrace{\binom{6}{3}}_{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{\binom{2}{2}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \quad \text{COLUNA}
\end{aligned}
$$

PROPRIEDADE DA COLUNA

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

8. Fazendo os complementares de todos os binomiais, temos:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\binom{9}{3}}_{\binom{9}{6}} &= \underbrace{\binom{8}{2}}_{\binom{8}{6}} + \underbrace{\binom{7}{2}}_{\binom{7}{5}} + \underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}} \\
\binom{9}{6} &= \binom{8}{6} + \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{0} \quad \text{DIAGONAL}
\end{aligned}
$$

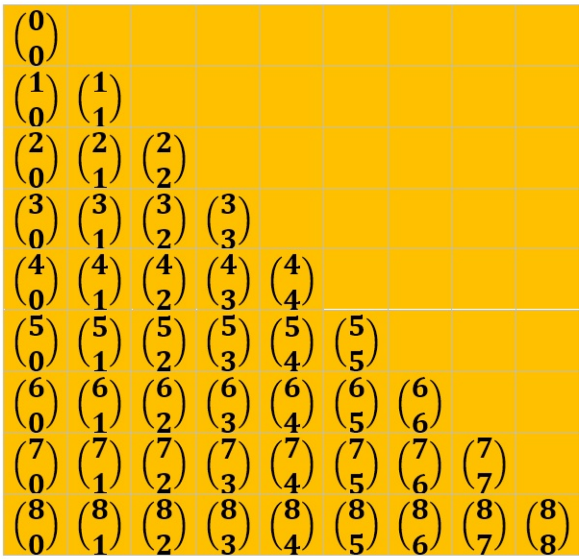
PROPRIEDADE DA DIAGONAL

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Triângulo de Pascal

Recorte a a figura 44 e peça para os alunos montarem a figura 45.

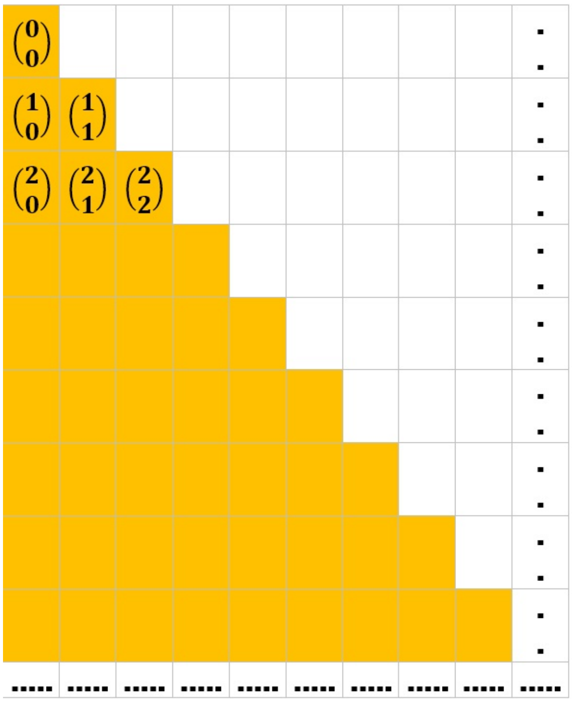
Figura 44 – Triângulo de PASCAL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 45 – Triângulo de PASCAL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 46 e peça para os alunos montarem a figura 47

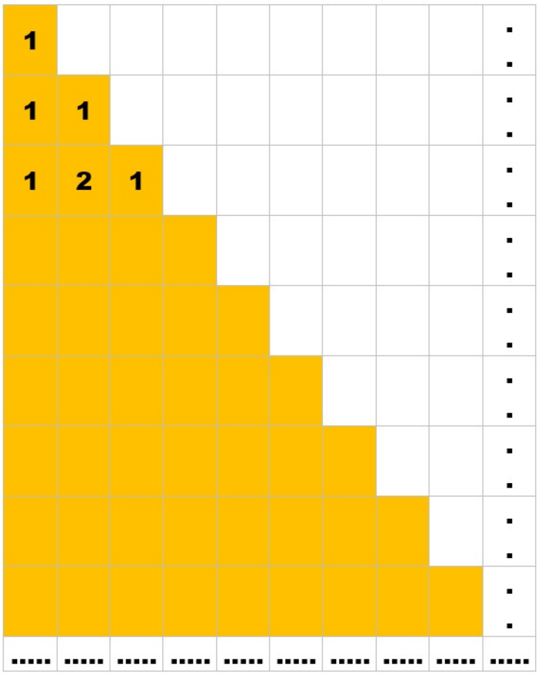
Figura 46 – Triângulo de PASCAL. Recorte

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 47 – Triângulo de PASCAL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Sequência de Fibonacci

Recorte a figura 48 e peça para os alunos montarem a figura 49.

Figura 48 – Sequência de FIBONACCI. Recorte

$\binom{0}{0}$						=	1
$\binom{1}{0}$						=	1
$\binom{2}{0}+$	$\binom{1}{1}$					=	2
$\binom{3}{0}+$	$\binom{2}{1}$					=	3
$\binom{4}{0}+$	$\binom{3}{1}+$	$\binom{2}{2}$				=	5
$\binom{5}{0}+$	$\binom{4}{1}+$	$\binom{3}{2}$				=	8
$\binom{6}{0}+$	$\binom{5}{1}+$	$\binom{4}{2}+$	$\binom{3}{3}$			=	13
$\binom{7}{0}+$	$\binom{6}{1}+$	$\binom{5}{2}+$	$\binom{4}{3}$			=	21
$\binom{8}{0}+$	$\binom{7}{1}+$	$\binom{6}{2}+$	$\binom{5}{3}+$	$\binom{4}{4}$		=	34
$\binom{9}{0}+$	$\binom{8}{1}+$	$\binom{7}{2}+$	$\binom{6}{3}+$	$\binom{5}{4}$		=	55
$\binom{10}{0}+$	$\binom{9}{1}+$	$\binom{8}{2}+$	$\binom{7}{3}+$	$\binom{6}{4}+$	$\binom{5}{5}$	=	89

Fonte: Produzido pelo Autor

Orientações para a próxima página:

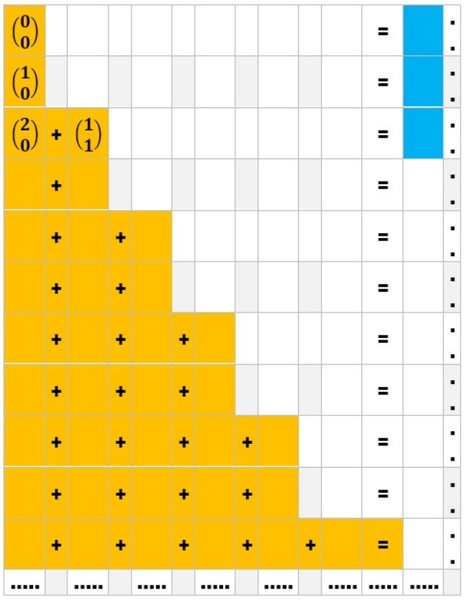
1. Arrume as peças seguindo o padrão;

2. A partir dos padrões observados, calcule a soma de cada linha;

3. Mostre que a soma dos binomiais de uma linha é igual a soma dos binomiais das duas linhas anteriores. Por exemplo, faça para a última linha.

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 49 – Sequência de FIBONACCI. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor e a observação dos padrões anteriores, os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Ex.: $\binom{9}{0} = \binom{10}{0}$, $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} = \binom{9}{1}$, $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} = \binom{8}{2}$, $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$, $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$, $\binom{4}{4} = \binom{5}{5}$.

$$\binom{8}{0} \ \binom{7}{1} \ \binom{6}{2} \ \binom{5}{3} \ \binom{4}{4} \quad = \mathbf{34}$$

$$\binom{9}{0} \ \binom{8}{1} \ \binom{7}{2} \ \binom{6}{3} \ \binom{5}{4} \quad = \mathbf{55}$$

$$\binom{10}{0} \ \binom{9}{1} \ \binom{8}{2} \ \binom{7}{3} \ \binom{6}{4} \ \binom{5}{5} = \mathbf{89}$$

Os números de Fibonacci são da forma:

$$F_{n+1} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{p}$$

onde n e p são naturais e k é o maior número natural menor do que ou igual a $\frac{n}{2}$.

Referências

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação: Base nacional comum curricular. Brasília: MEC, 2018.

LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; CARVALHO, P. C. P. A Matemática do Ensino Médio, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.