UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

CAMPINA GRANDE
2024

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva

CAMPINA GRANDE
2024

FICHA CATALOGRÁFICA

FRANCINALDO DOMINGOS PEREIRA

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÕES MATEMÁTICAS UTILIZANDO MATEMÁGICAS COM BARALHO NO ENSINO DA ÁLGEBRA E DA ARITMÉTICA

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: .. /.../20

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Membro externo)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

SUMÁRIO

1 PRODUTO EDUCACIONAL

O nosso produto educacional apresenta duas propostas de sequências didáticas bem planejadas, compostas por orientações e instruções para professores utilizarem e aplicarem em suas aulas de matemática, afim de obter uma melhor compreensão na aprendizagem de seus alunos. Cada sequência didática é composta por uma sequência de atividades para os alunos desenvolverem. A nossa proposta é estruturada para ser aplicada nas séries finais do Ensino Fundamental (6° e 7° Ano) e explora a área da aritmética básica englobando os conteúdos sobre a divisão euclidiana por 4, critérios de divisibilidade e múltiplos de 9.

Estas sequências didáticas podem ser utilizadas tanto para introduzir estes conteúdos, como também para aprofundar a compreensão dos alunos na área da aritmética, visto que diversificamos a sua abordagem através de um recurso bastante utilizado nos dias de hoje, trata-se de mágicas matemáticas utilizando baralho denominadas de Matemágicas, as quais tornam o aprendizado mais dinâmico e envolvente.

O conteúdo deste produto didático educacional é resultante da dissertação de mestrado profissional intitulada "Atividades de explorações matemáticas utilizando Matemágicas com baralho no ensino da álgebra e da aritmética". A dissertação apresenta 15 Matemágicas realizadas com o uso de um baralho comum de 52 cartas, seguidas de explorações matemáticas, com o intuito de desvendar os truques matemáticos por traz de cada Matemágica, abordando conteúdos direcionados ao ensino de álgebra e aritmética básicas.

O estudo dos conteúdos por meio de Matemágicas e explorações matemáticas se mostrou bastante eficaz, despertando o interesse dos alunos pela matemática e contribuindo para a melhoria da aprendizagem.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1 - EXPLORANDO O ALGORITMO DA DIVISÃO POR 4 POR MEIO DE MATEMÁGICAS

Público alvo:
Alunos do 6º ano ou 7º ano do Ensino Fundamental.

pré-requisitos dos estudantes:
• Noções sobre a resolução de multiplicação e divisão de números naturais.
• Noções sobre a definição de múltiplos e divisores de um número natural.

Objetos de conhecimento:
• Algoritmo da Divisão por 4/Divisão euclidiana por 4.
• Relação Fundamental da Divisão.
• Múltiplos do número natural 4.

Objetivos:
• Compreender o algorítimo da divisão euclidiana por 4 por meio de Matemágicas.
• Determinar os possíveis restos numa divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4.
• Caracterizar algebricamente a forma da divisão euclidiana por 4, dados a, q e r naturais, respectivamente o dividendo, o quociente e o resto da divisão.
• Compreender a ideia de múltiplo do número natural 4, relacionando quando o resto na divisão euclidiana por 4 for igual a zero.

Habilidades (BNCC):
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Quantidade estimada de aulas:
10 aulas de aproximadamente 50 minutos cada.

2.1 Desenvolvimento da Sequência didática 1

2.1.1 Aulas 1 e 2 – Exibição e apresentação da Matemágica 1

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula ou outro ambiente maior, caso a escola possua.
Material necessário: Baralhos, notebook, TV smart ou data show.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos com 4 alunos ou mais. Se possível, entregue um baralho contendo 52 cartas para cada grupo.

Logo após exiba dois vídeos aos alunos referentes a Matemágica 1 que irá ser trabalhada na atividade, conforme os links a seguir.

Vídeo com apresentação da Matemágica 1.
⟨https://www.youtube.com/watch?v=CCP7_mrtHbE⟩
Vídeo Desvendando o truque.
⟨https://www.youtube.com/watch?v=mHNSUyrvfgQ⟩

Em seguida, solicite aos grupos para utilizarem o baralho que foi entregue e treinarem a Matemágica entre si discutindo os procedimentos, isto é, o passo a passo da Matemágica. Por fim, solicite que um aluno de cada grupo apresente o truque para a turma.

2.1.2 Aulas 3 e 4 – Estudando o algorítimo da divisão euclidiana por 4

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Material necessário: Baralhos, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha, caderno e folhas de papel A4.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos, conforme a aula anterior. Entregue novamente um baralho contendo 52 cartas para cada grupo, para que os alunos possam utiliza-lo refazendo o truque e assim ir auxiliando na resolução da atividade 1 proposta a seguir.

Sugestão: Explique aos alunos que o algorítimo da divisão visto no item (k) da questão 1 está representado de forma horizontal por meio de uma igualdade. Esse método é chamado de **Relação Fundamental da Divisão**.

Aplique a atividade 1 impressa de preferência em folha de papel A4, distribuindo uma cópia para cada grupo. Segue abaixo a atividade 1.

Atividade 1

Leia atentamente o enunciado das atividades propostas, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 1 vista nos vídeos exibidos na aula anterior para responder o que se pede.

Na Matemágica 1, as cartas foram distribuídas em 4 montes, os quais representam os quartos, formando a seguinte sequência em cada quarto: a cada 4 cartas tem-se a primeira carta um rei (K), a segunda carta uma dama (Q), logo após um valete (J) e por fim um ás (A). Vamos Numerar os quatro quartos com os valores 0, 1, 2 e 3 nesta ordem.

Após o mágico juntar todas as cartas, colocando um monte acima do outro, formando um único monte e logo após cortar tal monte algumas vezes, obtemos sempre uma sequência ordenada das cartas, conforme descrita pelo mágico nos vídeos da aula anterior.

Vamos numerar as posições de cada uma das 16 cartas de 0 até 15, supondo que elas ficaram ordenadas após os cortes realizados e com o baralho voltado para baixo, conforme a seguinte sequência do quadro 2.1 a seguir.

Quadro 2.1 – Ordenação das 13 primeiras cartas

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A	K	Q	J	A

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Ao redistribuir as cartas nos quatro quartos conforme a ordem que elas aparecem no quadro 2.1 acima, responda:

   (a) Quais cartas ficaram no quarto 0? E quais os valores de suas posições?

   (b) Quais cartas ficaram no quarto 1? E quais os valores de suas posições?

   (c) Quais cartas ficaram no quarto 2? E quais os valores de suas posições?

   (d) Quais cartas ficaram no quarto 3? E quais os valores de suas posições?

   (e) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 0 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(f) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 1 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(g) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 2 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(h) Divida o valor de cada uma das posições no quarto 3 por 4 e descreva quais seus quocientes q e restos r em cada uma das divisões.

(i) Qual semelhança você percebe quanto aos restos ao realizar as divisões das posições por 4 em cada quarto?

(j) Do item (i) podemos determinar todos os restos na divisão de um número natural n por 4? Se sim, quais são os possíveis restos na divisão euclidiana (Algoritmo da divisão) por 4?

(k) **Algoritmo da divisão**: Sejam a e d naturais, com $d \neq 0$. Existem únicos q e r, também naturais, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{onde: } 0 \leq r < d$$

Tais naturais q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Logo, como podemos particularizar o algoritmo da divisão quando $d = 4$?

2. Do item (k) anterior, podemos afirmar que os valores de "a" na divisão por 4 podem ser representados de quatro formas diferentes, quanto aos valores de seus restos, segundo o algoritmo da divisão, também conhecido como **relação fundamental da divisão**.

   Com isto, responda qual a forma de "a" na divisão por 4, quando:

   (a) $r = 0$

   (b) $r = 1$

   (c) $r = 2$

   (d) $r = 3$

3. Observando as quatro formas encontradas na questão 2 na divisão euclidiana por 4, responda qual a forma das posições das cartas que ficaram no quarto:

   (a) 0?

   (b) 1?

   (c) 2?

   (d) 3?

Na atividade 1 acima, o professor deve ler e explicar as questões aos alunos, na medida em que os grupos as forem resolvendo. No item (k) da questão 1 deve-se explicar com maior ênfase o algoritmo da divisão para que os alunos compreendam o que se pede nas demais questões que envolvem tal conteúdo e poderem utiliza-lo com clareza quando o divisor é 4.

2.1.3 Aulas 5 e 6 – Exibição e apresentação da Matemágica 2

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula ou outro ambiente maior caso a escola possua.
material necessário: Baralhos, TV smart ou data show.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos e entregue um baralho contendo 52 cartas para cada grupo.

Logo após exiba um vídeo conforme o link a seguir aos alunos, referente a Matemágica 2 que irá ser trabalhada na atividade.

Vídeo com apresentação da Matemágica 2.
⟨https://www.youtube.com/watch?v=xUgyYuxDgtc⟩

Na sequência, peça a cada grupo de alunos para utilizarem o baralho e treinarem a Matemágica entre si, discutindo os procedimentos, isto é, o passo a passo da Matemágica.

Por fim, solicite novamente que um dos alunos de cada grupo apresente o truque para a turma, sugerindo que seja um aluno que não tenha apresentado a Matemágica 1.

2.1.4 Aulas 7 e 8 – Abordando o Algorítimo da divisão euclidiana por 4 com intermédio da Matemágica 2

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Organização dos alunos: Em duplas.
Material necessário: Baralhos, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha, caderno e folha de papel A4.

Inicie a aula organizando as duplas de alunos e logo após aplique a atividade 2 a seguir, impressa de preferência em folha de papel A4, distribuindo uma cópia para cada dupla.

Mais uma vez sugira que os alunos utilizem o baralho para realizarem a Matemágica 2 quantas vezes for necessário e assim ir auxiliando nas resoluções da atividade 2.

Atividade 2

Leia atentamente o enunciado das atividades propostas, e lembre-se dos procedimentos realizados na Matemágica 2, exibida no vídeo durante as aulas 5 e 6, para responder o que se pede.

1. Na Matemágica 2, representando as cartas aleatórias por C e os ases pela letra A e numerando os montes da esquerda para direita pelos números 0, 1, 2 e 3 respectivamente, obtemos o quadro 2.2 conforme a posição e distribuição das cartas.

Quadro 2.2 – Posições dos quatro ases

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A	C	C	C	A

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Com base no quadro 2.2 construído acima, responda:

(a) Quais os valores das posições dos quatro ases?

(b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos quatro ases por 4?

(c) Qual a forma do valor da posição de cada ás na divisão euclidiana por 4?

(d) Há alguma semelhança na forma dos 4 ases? Se sim, por qual motivo ocorre a semelhança?

2. Conforme visto na explicação realizada pelo mágico no vídeo exibido, no decorrer da distribuição do monte formado inicialmente com as cartas voltadas para baixo na mão do mágico, formando outros 4 montes numerados de 0 a 3, sabemos que o truque para obter sucesso na Matemágica 2 se dar colocando a carta que está na posição 4 para baixo do monte que está nas mãos do mágico. Complete o quadro 2.3 abaixo referente as posições das 12 cartas restantes na mão do mágico após a mudança da carta da posição 4 para baixo do monte. E logo após responda o que se pede.

(a) Quais as novas posições dos três ases que mudaram de posição?

Quadro 2.3 – Ordenação dos 4 ases após truque

Posição	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carta	C	C	C	A												

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(b) Quais os restos da divisão do valor de cada uma das posições dos três ases por 4 após a mudança?

(c) Qual a forma euclidiana na divisão por 4 de cada um dos três ases após a mudança de posição?

(d) Porque a forma euclidiana da posição dos ases na divisão por 4 foi alterada?

Mais uma vez no decorrer da atividade 2 acima, o professor deve ler e explicar as questões aos alunos, na medida que as duplas as forem resolvendo.

Após a entrega das atividades, proponha aos alunos formarem uma roda de estudos com as carteiras da sala e assim debater os conteúdos vistos nas Matemágicas 1 e 2. Neste momento o professor deve estar atento e mediando o debate.

Segue abaixo algumas sugestões de perguntas e indagações que o professor pode fazer durante uma roda de debate sobre divisão euclidiana, múltiplos e divisores.

• O que entenderam sobre a divisão euclidiana? Como você explicaria a diferença entre uma divisão exata e uma divisão com resto? Mais especificamente na divisão euclidiana por 4.

• Como identificar os múltiplos do número 4? Com base nisto como podemos determinar se um número é múltiplo de outro?

• Em que situações do dia a dia podemos aplicar o conceito de múltiplos e divisores? Como a divisão euclidiana pode ser útil em problemas do dia a dia?

• Quais são os primeiros cinco múltiplos do número 4? Existe algum padrão interessante nos múltiplos de 4 que vocês já notaram? Como podemos determinar se um número é múltiplo de 4?

Neste último tópico de indagações o professor pode expor aos alunos o critério de divisibilidade por 4.

2.1.5 Aulas 9 e 10 - Aplicação de questões problemas sobre divisão euclidiana por 4

Duração: 100 minutos.

Local: Sala de aula.

Organização dos alunos: Individual.

Material necessário: Caneta esferográfica, lápis grafite, borracha, caderno e folha de papel a A4.

Nestas duas aulas proponha uma atividade, conforme a atividade 3 a seguir, contendo questões problemas abordando o conteúdo sobre a divisão euclidiana por 4.

Inicie a aula explicando as questões que serão aplicadas na atividade 3 e distribua uma cópia para cada aluno. A atividade 3 tem o intuito de verificar a aprendizagem dos alunos em relação ao conteúdo divisão euclidiana por 4 por meio de questões problemas promissoras.

Atividade 3

Escola:

Professor: Disciplina: Matemática

Aluno: ______________________________

Questões:

1. Segundo o algoritmo da divisão, sejam a e d naturais, com $d \neq 0$, onde a é o dividendo e d o divisor na divisão de a por d. Existem únicos q e r, também naturais, tais que:

$$a = d \cdot q + r, \text{ onde: } 0 \leq r < d$$

Tais naturais q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por d. Com isto, responda:

(a) Numa divisão o divisor é 4 e o dividendo é 359. Quais os valores do resto r e quociente q desta divisão?

(b) Determine o dividendo da divisão onde 4, 12 e 2 são respectivamente o divisor, o quociente e o resto da divisão.

(c) Nas divisões de 169 e 362 por 4 obtemos, respectivamente, restos 1 e 2. Qual é o resto da divisão de 169 + 362 por 4?

(d) Qual o menor número natural que devemos subtrair de 607 para obter um número divisível por 4?

(e) Qual o menor número natural que devemos adicionar a 597 para obter um número divisível por 4?

(f) O resto da divisão de um natural n por 12 é igual a 7. Determine o resto da divisão de n por 4.(Dica: Observe que $12 = 4 \cdot 3$)

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2 - EXPLORANDO A DIFERENÇA ENTRE UM NÚMERO NATURAL N E A SOMA DE SEUS ALGARISMOS POR MEIO DE MATEMÁGICAS

Público alvo:

Alunos do 6º ano ou 7º ano do Ensino Fundamental.

pré-requisitos dos estudantes:

• Noções básicas sobre a resolução de multiplicação e divisão de números naturais, especificamente por 9.

• Noções sobre a definição de múltiplos e divisores de um número natural.

Objetos de conhecimento:

• Diferença entre um número natural e a soma de seus algarismos.

• Múltiplos e divisores de 9.

• Critério de divisibilidade por 9.

Objetivos:

• Determinar a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos quando o valor da dezena do mesmo é igual a 1.

• Compreender que a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de nove.

• Generalizar e compreender o fato da diferença entre um número natural n de N algarismos e a soma de seus algarismos ser sempre um múltiplo de nove.

• Apresentar e explicar o conceito do critério de divisibilidade por 9, destacando sua importância na resolução de problemas matemáticos.

• Desenvolver a habilidade dos alunos em identificar e aplicar o critério de divisibilidade por 9, contribuindo para a resolução eficiente de problemas.

Habilidades (BNCC):

EF06MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

EF06MA05: Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

3.1 Desenvolvimento da Sequência didática 2

3.1.1 Aulas 1 e 2 – Exibição e apresentação de Matemágica 3

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula ou outro ambiente maior, caso a escola possua.
material necessário: Baralhos, notebook, TV smart ou data show.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos com 4 alunos ou mais e entregue um baralho contendo 52 cartas para cada grupo.

Logo após exiba o vídeo abaixo conforme o link a seguir aos alunos, referente a Matemágica 3 que irá ser trabalhada na atividade.

Vídeo com apresentação da Matemágica 3.
⟨https://www.youtube.com/watch?v=9xH_vH8Ixnc⟩

Por fim, peça aos grupos de alunos para utilizarem o baralho para praticarem e realizarem a Matemágica entre si, discutindo os procedimentos, isto é, o passo a passo da Matemágica 3. Ao final solicite que um ou mais alunos do grupo apresentem o truque para a turma.

3.1.2 Aulas 3 e 4 – Diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Material necessário: Baralhos, caneta esferográfica, lápis grafite, borracha e caderno.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos, conforme a aula anterior. Entregue novamente um baralho contendo 52 cartas para cada grupo poder utiliza-lo refazendo o truque da aula anterior e assim ir auxiliando na resolução da atividade 1 proposta a seguir.

Aplique a atividade 1 impressa de preferência em folha de papel A4, distribuindo uma cópia para cada grupo. No decorrer da atividade, após os grupos resolverem o item (c) da questão 2, discuta com os alunos como as cartas iniciais que restaram no baralho ficaram dispostas conforme o quadro 3.2 da questão 3 e logo após solicite que os grupos continuem resolvendo os enunciados.

Segue abaixo a atividade 1.

Atividade 1

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta e lembre-se dos procedimentos realizados no decorrer do vídeo referente a Matemágica 3 para responder o que se pede.

Na Matemágica 3, o baralho é preparado dentro de sua caixa, antes de iniciar a Matemágica, colocando no topo do baralho as cartas de cima para baixo, sendo Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 as damas e (A) um ás qualquer do baralho, na seguinte ordem conforme o quadro 3.1 a seguir.

Quadro 3.1 – Posição das 4 damas

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Carta	2	3	4	5	6	7	8	9	Q_1	Q_2	Q_3	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Desta forma, responda:

1. Qual o valor da posição da primeira dama Q_1? Ao retirar Q_1, qual será o valor da nova posição de Q_2? Ao retirar Q_1 e Q_2, qual será o valor da nova posição de Q_3?

2. Conforme visto durante a explicação da Matemágica 3, os três primeiros números naturais escolhidos são números de 11 até 19, correspondentes a quantidade de cartas que o mágico irá retirar do baralho, formando um novo monte e colocando as cartas uma acima da outra até finalizar a contagem. Logo após o mágico retorna ao baralho a quantidade de cartas correspondente a soma dos algarismos do número escolhido.

   Com base nisto:

   (a) Resolva todas as subtrações de cada um dos números de 11 até 19 pela soma dos seus algarismos.

   (b) O que você conclui de semelhante em relação as subtrações realizadas no item (a)?

   (c) Descreva o motivo das três primeiras damas sempre serem encontradas na Matemágica 3, independentemente do número escolhido pelo aluno?

3. Após as três primeiras damas serem encontradas e retiradas, as cartas iniciais ficam dispostas da seguinte forma:

Quadro 3.2 – Posição das 10 cartas iniciais

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carta	9	8	7	6	5	4	3	2	A	Q_4

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

(a) Qual o valor da posição da última dama Q4?

(b) Determine todas as somas entre o valor da posição de cada uma das nove primeiras cartas e o valor numérico de suas faces.

Observação: Lembrem-se que o às (A) vale 1.

(c) Qual a semelhança em relação as somas realizadas no item (b)?

(d) Descreva o motivo da quarta dama ser encontrada, independentemente do número escolhido pelo aluno?

3.1.3 Aulas 5 e 6 – Elaborando e apresentando uma Matemágica

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Organização dos alunos: Grupos com 4 ou mais alunos cada.
Material necessário: Baralhos, lápis de cor, lápis grafite, borracha e caderno.

Inicie a aula organizando os alunos em grupo e entregue um baralho contendo 52 cartas para cada grupo. Logo após aplique uma atividade, copiando no quadro branco, com os seguintes itens abaixo.

1. Vamos analisar a diferença entre um número natural n de dois algarismos e a soma de seus algarismos. Desta forma:

   (a) Realize todas as diferenças entre os números naturais de 20 até 29 com suas respectivas somas de algarismos.

(b) Realize todas as diferenças entre os números naturais de 30 até 39 com suas respectivas somas de algarismos.

(c) Realize todas as diferenças entre os números naturais de 40 até 49 com suas s somas de algarismos.

Após a atividade solicite que os alunos discutam a respeito dos resultados encontrados nos três itens. Espera-se que os grupos discutam os resultados obtidos e compreendam que tais diferenças resultam sempre em 18 no item (a), no item (b) sempre em 27 e no item (c) sempre em 36, valores estes que são múltiplos de 9.

Em seguida, solicite que os grupos peguem seus baralhos e distribuam os 4 reis no baralho, com as faces das cartas viradas para baixo, nas posições 9, 19, 29 e 39 respectivamente. Feito isto peça para que cada grupo, com bastante calma, realizem os procedimentos a seguir:

Procedimento 1: Escolher um número entre 10 e 19.

Procedimento 2: Retirar, uma a uma, do topo do baralho a quantidade de cartas referente ao valor escolhido e ir formando outro monte colocando uma carta acima da outra na ordem de retirada das cartas. Logo após devolver ao baralho, também uma a uma e ordenadamente, a quantidade de cartas deste monte, referente a soma dos algarismos do número escolhido. Por fim solicite que os grupos retirem a próxima carta do monte e a guardem separadamente sem a ver e ponham o monte restante acima do baralho.

Procedimento 3: Escolher um número entre 20 e 29 e refazer o procedimento 2.

Procedimento 4: Escolher um número entre 30 e 39 e refazer o procedimento 2.

Procedimento 5: Escolher um número entre 40 e 49 e refazer o procedimento 2.

Feito isto, peça para os alunos virarem e olharem as 4 cartas retiradas por eles nestes procedimentos. Tais cartas serão os quatro reis existentes no baralho.

Para finalizar a aula peça aos grupos de alunos para discutirem entre si o porquê dos 4 reis serem exatamente as cartas encontradas. Espera-se que os mesmos consigam relacionar com os resultados vistos na atividade anterior e percebam que os 4 reis ficam localizados exatamente nas posições 9, 18, 27 e 36. Caso nenhum dos grupos consiga entender o resultado, o professor pode intermediar a discussão para que eles possam entender com clareza o objetivo esperado na aula.

Observação: O $1^{\underline{o}}$ rei é encontrado na posição 9. Ao retirar o $1^{\underline{o}}$ rei, o $2^{\underline{o}}$ rei diminuirá sua posição para posição 18. O mesmo ocorre para os demais reis, onde o $3^{\underline{o}}$ rei é encontrado na posição 27 após a retirada dos dois primeiros reis e o $4^{\underline{o}}$ rei é encontrado na posição 36 após a retirada dos três primeiros reis.

Sugestão: Caso fique esclarecido que os alunos assimilaram a Matemágica 4 trabalhada, solicite que os mesmos a treinem e pratiquem para uma possível apresentação em uma próxima aula. Caso contrario, realize o truque referente a Matemágica 4 para toda a turma.

3.1.4 Aulas 7 e 8 – Aplicação de questões problemas com intermédio da Matemágica 4 elaborada na aula anterior

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Organização dos alunos: Em Duplas.
Material necessário: Baralhos, lápis de cor, lápis grafite, borracha e caderno.

Inicie a aula organizando os alunos em duplas e entregue um baralho contendo 52 cartas para cada grupo.

Nesta etapa será aplicado uma atividade para cada dupla, trazendo questões com caráter investigativo, com objetivo de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão da matemágica 4.

Explique aos alunos que a atividade proposta contém 5 questões e terá o intuito de levar os mesmos a um melhor entendimento da Matemágica 4 elaborada na aula anterior.

Ao longo da atividade o professor deve ir explicando questão por questão afim de orientar as duplas no que se pede em cada enunciado.

O enunciado da questão número 1, traz um quadro com a posição das 52 cartas, sendo as 13 primeiras cartas na seguinte ordem: as faces numéricas de 3 a 10, um rei representado por K_1, a carta com face igual a 2, um ás representado pela letra A e um valete representado pela letra J. Diga aos alunos que a ordem destas cartas serão modificadas na medida em que os 4 reis irão sendo encontrados e que na questão 5 elas ficaram em uma outra ordem que acarretará num truque final onde o valete é sempre encontrado.

O enunciado da questão 4 traz a demonstração com o seguinte resultado: "a diferença entre um número natural de dois algarismos e a soma de seus algarismos e sempre um múltiplo de 9. Faça a demonstração do resultado explicando detalhadamente e sugira que os alunos utilizem o resultado encontrado para resolver os itens (a) e (b) do enunciado.

Segue abaixo a atividade 2.

Atividade 2

Leia atentamente o enunciado da atividade proposta, e lembre-se dos procedimentos realizados na aula anterior para encontrar os quatro reis, para responder o que se pede.

Conforme os procedimentos realizados na aula anterior, o baralho foi colocado com as faces das cartas voltadas para baixo e com os reis nas posições 9, 19, 29 e 39 respectivamente. Sendo K_1, K_2, K_3 e K_4 os reis do baralho. vejamos tal distribuição no quadro 3.3 a seguir.

Quadro 3.3 – Ordenação das cartas

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 à 18	19	20 à 28	29	30 à 38	39	40 à 52
Carta	3	4	5	6	7	8	9	10	K_1	2	A	J	6 cartas	K_2	9 cartas	K_3	9 cartas	K_4	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

1. Qual o valor da posição do primeiro rei K_1? Ao retirar K_1, qual será o valor da nova posição de K_2? Ao retirar K_1 e K_2, qual será o valor da nova posição de K_3? Ao retirar K_1, K_2 e K_3, qual será o valor da nova posição de K_4?

2. O valor das respectivas posições de K_1, K_2, K_3 e K_4, encontrados na questão 1, deixam quais restos quando divididos por 9?

3. Da questão 2, podemos afirmar que os valores das posições de K_1, K_2, K_3 e K_4 são múltiplos de 9? Por que?

4. Seja xy um número natural escrito na base dez, onde x é a dezena e y é a unidade, com $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde $0 \leq x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$, tal que:

$$xy = 10x + y \tag{3.1}$$

Subtraindo de 3.1, a soma dos algarismos do número xy, obtemos:

$$10x + y - (x + y) = 9x$$

Portanto a diferença entre um número natural de dois algarismos e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

Com base na demonstração vista acima, responda o que se pede a seguir.

(a) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos:

i. Quando o valor da dezena x for igual a 1? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

ii. Quando o valor da dezena x for igual a 2? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

(b) Qual a diferença entre um número natural n e a soma de seus algarismos quando:

i. $30 \leq n \leq 39$? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

ii. $40 \leq n \leq 49$? Qual dos reis vistos na Matemágica 4 é encontrado na posição do valor obtido?

(c) Complete o quadro 3.4, levando em consideração o intervalo de números naturais dos valores escolhidos pelos grupos de alunos na elaboração Matemágica 4 e observando as posições dos reis K_1, K_2, K_3 e K_4.

Quadro 3.4 – Questão 4 - item (c)

Valor ou nº escolhido entre	10 e 19	20 e 29	30 e 39	40 e 49
Carta encontrada				
Valor da dezena x referente ao nº escolhido				
Valor de 9x ou posição da carta				

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

5. Após a retirada dos 4 reis, restaram apenas 48 cartas e dispomos as cartas J, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 para que ao final ficassem com a seguinte distribuição, conforme quadro 3.5 abaixo.

Quadro 3.5 – Posição do valete

Posição	1 à 9	10 à 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27 à 35	36 à 48
Carta	9 cartas	6 cartas	J	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9 cartas	13 cartas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considerando o ás (A) valendo 1 e o Valete representado pela letra J, responda

(a) Qual o valor da posição do valete?

(b) Determine todas as diferenças entre o valor de cada posição de 17 até 26 e o valor numérico das faces das cartas da posição.

(c) Qual a semelhança em relação as diferenças realizadas no item (b)?

(d) Discuta e justifique com os colegas o fato de num truque de mágica, com as cartas dispostas conforme o quadro 3.5 acima, o mágico solicitar a um participante que escolha um valor de 16 até 26 e mesmo assim conseguir encontrar sempre o valete independentemente do número escolhido.

No item (d) da questão 5, espera-se que os alunos compreendam que todas as diferenças entre os valores de cada posição de 17 até 26 e o valor numérico da respectiva face das cartas sempre resultam em 16, exatamente a posição do valete e caso o participante escolha o número 16, basta o mágico mostrar o valete.

3.1.5 Aulas 9 e 10 - Generalizando o resultado obtido na aula anterior

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Organização dos alunos: Grupos com 4 ou mais alunos cada.
Material necessário: Baralhos, lápis de cor, lápis grafite, borracha e caderno.

Inicie a aula organizando os alunos em grupos.

Perceba que podemos generalizar o resultado visto na questão 4 da atividade anterior. Daí, sem realizar a demonstração, visto sua complexidade, descreva no quadro branco a generalização da seguinte forma:

A diferença entre um número natural N e a soma S de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

Logo após solicite aos alunos que façam uma verificação com alguns valores em particular sugeridos a critério do professor, para constatar com mais clareza o resultado. Em seguida oriente que cada grupo apresente no quadro branco dois exemplos cada, com valores contendo 3 e 4 algarismos respectivamente, porém escolhidos por eles, evidenciando o resultado.

Ao final da aula mencione sobre o critério de divisibilidade por 9, descreva-o no quadro brando e relate que será o objeto de estudo da próxima aula.

3.1.6 Aulas 11 e 12 – Critério de divisibilidade por 9 e aplicação de atividades para constatar a aprendizagem dos alunos

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Organização dos alunos: Individual.
Material necessário: Lápis de cor, lápis grafite, borracha e caderno.

Inicie a aula realizando a demonstração do critério de divisibilidade por 9. Fica a critério do professor apresentar apenas o resultado ou realizar a demonstração com a turma, assim como utilizar alguma outra demonstração que achem mais adequada a turma.

Segue abaixo a demonstração.

Critério de divisibilidade por 9: Um número natural N é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9.

Demonstração: Seja $N \in \mathbb{N}$, segue do resultado visto nas aulas anteriores que:

$$N - S_1 = 9k$$

Onde S_1 é a soma dos algarismos de N e $k \in \mathbb{N}$. Daí, obtemos:

$$N = 9k + S_1, \quad \text{com } k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

($\Rightarrow$) Assim da equação 3.2, seja N um número divisível por 9. Então:

$$\begin{aligned} N &= 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad 9k_1 &= 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad S_1 &= 9k_1 - 9k \\ \Rightarrow \quad S_1 &= 9(k_1 - k), \quad \text{com } k_1 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto a soma S_1 dos algarismos de N é um múltiplo de 9, isto é, S_1 é divisível por 9.

($\Leftarrow$) Por outro lado seja S_1 um número divisível por 9, então da equação 3.2, segue que:

$$\begin{aligned} N &= 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad N &= 9k + 9k_2 \\ \Rightarrow \quad N &= 9(k + k_2), \quad \text{com } k_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto N é um múltiplo de 9, isto é, N é divisível por 9, concluindo a demonstração.

O resultado 2 a seguir fica como sugestão. Daí cabe ao professor decidir se aplica ou não na turma. Lembre-se de conhecer bem os alunos de sua turma para tomar tal decisão. Caso não faça a demonstração, exponha o resultado para ser utilizado nas próximas atividades.

Resultado 2: De um modo mais geral, podemos afirmar que um número natural deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando divididos por 9.

Demonstração: De fato, pelo que vimos na demonstração anterior, pela equação 3.2, um número natural N pode ser escrito da seguinte forma:

$$N = 9k + S_1, \quad \text{com } k, S_1 \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo algoritmo da divisão, temos que o número N deixa resto S_1 ao ser dividido por 9, onde S_1 é a soma dos algarismos de N, quando $S_1 < 9$.

Por outro lado, se $S_1 \geq 9$, segue da divisão euclidiana por 9, que:

$$S_1 = 9k_3 + r, \quad \text{com } 0 \leq r < 9 \text{ e } r, k_3 \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Assim, substituindo a equação 3.3 na equação 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned} N &= 9k + S_1 \\ \Rightarrow \quad N &= 9k + 9k_3 + r \\ \Rightarrow \quad N &= 9k_4 + r, \quad \text{com } 0 \leq r < 9 \text{ e } r, k_4 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que N deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando divididos por 9.

Finalize a aula aplicando a atividade a seguir para evidenciar a aprendizagem dos alunos quanto ao critério de divisibilidade por 9 e os resultados obtidos.

Atividade 4

Escola:
Professor: Disciplina: Matemática
Aluno: ____

Situações-Problemas sobre o critério de divisibilidade por 9.

Utilizando o critério de divisibilidade por 9 e os resultados obtidos nas aulas anteriores apresentados pelo professor, responda:

1. (www.exercicios.indaguei.com) O professor de Matemática perguntou a Karina se o número 1241703 é divisível por 9. Sem efetuar a divisão, ela respondeu que sim. A resposta de Karina está certa ou errada? Justifique sua resposta?

2. **(EsPCEx)**. No número 34n27, qual é o algarismo que substitui n para que ele seja divisível por 9?

3. Dado um número $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n = 9 \cdot 654 + 5$$

   Qual o valor do resto de S quando dividido por 9, sendo S a soma dos algarismos de n?

4. Qual dos números abaixo deixa resto igual a 6, ao ser dividido por 9? Justifique a sua resposta.

   (a) 731 (b) 321 (c) 453 (d) 274 (e) 634

4 AFERIÇÃO DO OBJETIVO DE APRENDIZAGEM

Avaliar os alunos ao longo de todas as atividades propostas nas sequências didáticas 1 e 2, observando a interação entre eles em cada grupo ou dupla e também nas discussões sugeridas em sala, afim de perceber se os mesmos conseguiram compreender:

• A ideia dos possíveis restos e a forma euclidiana de um número natural numa divisão por 4;

• Que a diferença entre um número natural e a soma de seus algarismos é sempre um múltiplo de 9.

• O critério de divisibilidade por 9 e sua utilização em questões problemas;

• O algoritmo da divisão (Relação Fundamental da Divisão).

Também observe se os alunos compreenderam e executaram as instruções necessárias e corretas em cada questão proposta nas atividades das sequências didáticas 1 e 2. Colete e analise os dados do desempenho de todas as atividades propostas para identificar pontos de melhorias que necessitam de atenção. Utilize esses dados para ajustar estratégias de ensino e intervenções ao longo das aulas afim de suprir a curto ou longo prazo as deficiências perceptíveis dos alunos.

O Professor pode também realizar um questionário de autoavaliação com os alunos a respeito do que os mesmos assimilaram nas atividades e conteúdos propostos nas sequências didáticas.

Sugestão de questões que o professor pode colocar no questionário de autoavaliação.

• Prestei atenção nas explicações do professor?

• Participei das discussões sugeridas pelo professor e interagi com os colegas de sala a respeito dos conteúdos ministrados?

• Soube respeitar as opiniões dos colegas?

• Reconheci o critério de divisibilidade por 9?

• Compreendi a definição da relação fundamental da divisão (algoritmo da divisão)?

• Resolvi corretamente os enunciados das questões das atividades propostas?

• Apliquei corretamente a definição sobre múltiplo de 4 na resolução de problemas?

Ao final o professor deve fornecer um feedback regular e construtivo para os alunos, destacando os pontos fortes e as possíveis melhorias em relação ao conteúdo abordado. O feedback deve ser específico e orientado para ajudar os alunos a entenderem como podem melhorar o seu desempenho em relação aos conteúdos ministrados nas sequências didáticas.