UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Sequência didática de criptografia com atividades para a Educação Básica

Doutora Raquel Lehrer - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Mestra Dafne Moraes Deparis Teixeira - Universidade Federal da Fronteira Sul

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (2017, p. 16 - 17) elenca um rol de medidas para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, dentre as quais estão:

- Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
- Conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;

Diante disso, nesta sequência didática apresentaremos atividades que envolvem conteúdos matemáticos e criptografia. O objetivo é fornecer ideias aos professores para tornar dinâmica as aulas de matemática, e até mesmo lúdicas, com formação de grupos, participação em jogos e com o uso de materiais manipuláveis. Assim, a criptografia possibilitará ao professor trazer mais sentido e significado aos conteúdos matemáticos para os alunos. Tal sequência didática faz parte da dissertação de mestrado profissional em Matemática - PROFMAT da autora Dafne Moraes Deparis Teixeira, elaborada sob a orientação da professora Doutora Raquel Lehrer, e seu texto, na íntegra, poder acessado em (TEIXEIRA, 2024).

Atividade 1 - Cifra de substituição e porcentagem

Objetivos da atividade: Coletar, organizar e registrar dados; Representar um número na forma fracionária e decimal; Calcular porcentagens.

Conteúdos relacionados: Estatística, Número decimal, Número Fracionário e Porcentagem.

A atividade destina-se ao 6º ano do Ensino Fundamental.

Duração estimada: 6 aulas.

Materiais: Quadro, giz, lápis, borracha, caderno, papel, régua e tesoura.

Descrição da atividade:

O professor fará uma breve introdução sobre Criptografia, falando sobre seu significado, onde era utilizada a escrita secreta antigamente e na atualidade, citando alguns métodos. E então cada aluno, com o auxílio do professor, construirá o instrumento de criptografia abaixo, que trata-se de duas réguas que possuem o alfabeto em vez de números, sendo uma delas deslizante, o que possibilita o deslocamento do alfabeto, conforme a chave para cifrar.

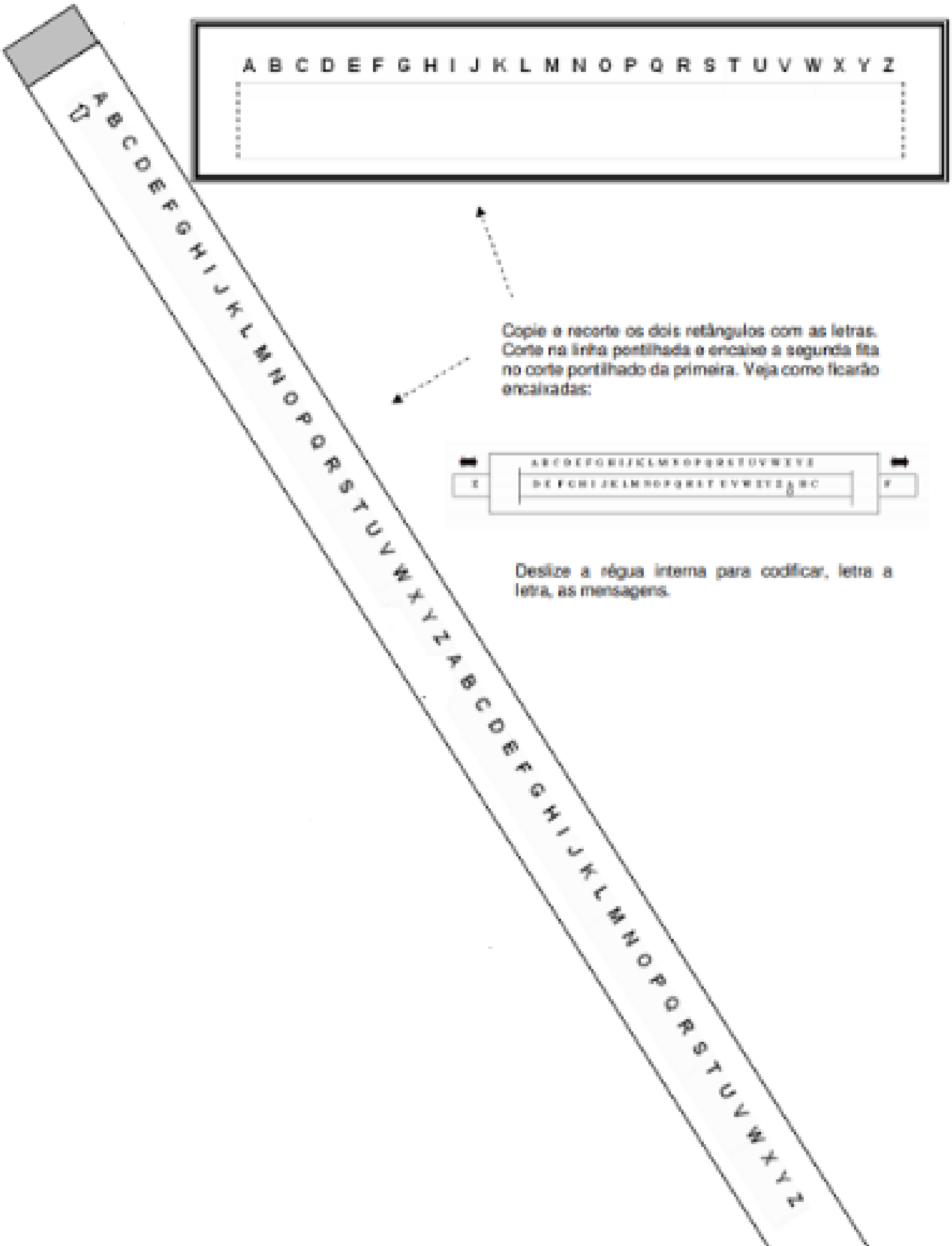

Figura 1: Régua de Cifra de substituição
Fonte: $http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Oficinas/PedroMalagutti-TemasInterdisciplinares/Aprendendo\_Criptologia\_de\_Forma\_Divertida\_Final.pdf$

O professor pode iniciar com a Cifra de César para codificar a palavra "MATEMÁTICA", sendo a chave o número 3, ou seja, o alfabeto será deslocado três casas, obtendo o seguinte alfabeto cifrado:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

Mensagem original	M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A
Mensagem codificada	p	d	w	h	p	d	w	l	f	d

Na sequência, poderá estimular os alunos a codificarem outras palavras, inclusive alterando a chave, ou seja, usando outros deslocamentos no alfabeto, também mencionando que o alfabeto pode ser substituído por números ou outros símbolos, ou o alfabeto cifrado pode ser embaralhado de diversas formas.

Depois dessa interação dos alunos, o professor explicará que a cifra de substituição é muito frágil, pois há muitos anos atrás, os criptoanalistas descobriram a análise de frequência das letras no texto, técnica capaz de quebrar essa cifra, tornando-a muito insegura. A análise de frequência é possível pois a frequência média das letras nos textos da língua portuguesa, e até mesmo de outros idiomas, é quase constante, conforme Tabela 1.

Letra	%	Letra	%	Letra	%
A	14,63	J	0,40	S	7,81
B	1,04	K	0,02	T	4,34
C	3,88	L	2,78	U	4,63
D	4,99	M	4,74	V	1,67
E	12,57	N	5,05	W	0,01
F	1,02	O	10,73	X	0,21
G	1,30	P	2,52	Y	0,01
H	1,28	Q	1,20	Z	0,47
I	6,18	R	6,53		

Tabela 1: Frequências de ocorrência das letras no português do Brasil

Neste momento da aula, o professor pode apresentar um texto codificado, e solicitar aos alunos que contem a quantidade de letras do texto, depois a quantidade de cada uma das letras do alfabeto, e então preencher a coluna “Frequência” da Tabela 2. A atividade pode ser realizada em grupo, mas cada aluno com sua tabela, o texto poderá ser dividido entre os alunos do grupo, e no final, eles podem unir as informações. A seguir, vamos apresentar uma sugestão de texto codificado, que possui no total 350 letras:

"Glwlh xlmsvxvn l evosl qltl wz evosz. L qltl wz evosz v gzl evosl jfv mrmtfvn hv ovnyiz wv jfzmwl xlnvxlf z qltz- ol xln hvfh znrtlh wl xlovtrl. Xlrhz wz rmuzmxrz. Vmgivgzmgl, kziz lh xfirlhlh, l qltl wz evosz ulr fnz lgrnz lkligfmrwzwv kziz izxrlxrmzi v gvmgzi wvhvmeloevi fnz vhgizgvtrz kziz tzmszi. Zh xirzmxzh jfv kvmhzizn ml qltl kvixvyvizn jfv hfv hl hv tzmsz jfzmwl l zwevihzirl qltz nzo, nzh, kli lfgil ozwl, v klhhrevo mfmxz kviwvi."

Na sequência, o professor solicitará aos alunos o preenchimento das outras colunas da Tabela 2, onde os alunos representarão a frequência na forma fracionária, sabendo que o total de letras do texto é 350; e então farão os cálculos para representar na forma decimal e, posteriormente, calcularão a porcentagem:

Letra	Frequência	Fração	Decimal	Porcentagem(%)
A	0	$\frac{0}{350}$	0,000	0%
B	0	$\frac{0}{350}$	0,000	0%
C	0	$\frac{0}{350}$	0,000	0%
D	0	$\frac{0}{350}$	0,000	0%
E	9	$\frac{9}{350}$	0,026	2,6%
F	14	$\frac{14}{350} = \frac{1}{25}$	0,04	4%
G	12	$\frac{12}{350} = \frac{6}{175}$	0,034	3,4%
H	20	$\frac{20}{350} = \frac{2}{35}$	0,057	5,7%
I	23	$\frac{23}{350}$	0,066	6,6%
J	5	$\frac{5}{350} = \frac{1}{70}$	0,014	1,4%
K	9	$\frac{9}{350}$	0,026	2,6%
L	49	$\frac{49}{350} = \frac{7}{50}$	0,14	14%
M	20	$\frac{20}{350} = \frac{2}{35}$	0,057	5,7%
N	13	$\frac{13}{350}$	0,037	3,7%
O	12	$\frac{12}{350} = \frac{6}{175}$	0,034	3,4%
P	0	$\frac{0}{350}$	0,000	0%
Q	6	$\frac{6}{350} = \frac{3}{175}$	0,017	1,7%
R	16	$\frac{16}{350} = \frac{8}{175}$	0,046	4,6%
S	8	$\frac{8}{350} = \frac{4}{175}$	0,023	2,3%
T	12	$\frac{12}{350} = \frac{6}{175}$	0,034	3,4%
U	2	$\frac{2}{350} = \frac{1}{175}$	0,006	0,6%
V	38	$\frac{38}{350} = \frac{19}{175}$	0,109	10,9%
W	1	$\frac{15}{350} = \frac{3}{70}$	0,043	4,3%
X	15	$\frac{15}{350} = \frac{3}{70}$	0,043	4,3%
Y	2	$\frac{2}{350} = \frac{1}{175}$	0,006	0,6%
Z	50	$\frac{50}{350} = \frac{1}{7}$	0,143	14,3%

Tabela 2: Contando a frequência relativa

Prosseguindo, o professor solicitará que os alunos comparem os dados das Tabelas 1 e 2. Uma sugestão, é que a comparação ocorra através de gráficos. A frequência das letras na língua portuguesa, segue a ordem: A, E, O, S, R, I, N, ...; no texto codificado a frequência das letras segue a ordem: Z, L, V, I, H, M, R, ... A partir disso, é possível levantar algumas conjecturas, por exemplo, "o A foi substituído pelo Z", "o E foi substituído pelo L", ou ainda, "o E foi substituído pelo V", pois apesar de a letra V não ser a segunda letra mais frequente do texto codificado, isso pode acontecer, as frequências poderão variar.

Alfabeto original	Porcentagem(%)	Alfabeto cifrado	Porcentagem(%)
A	14,63%	A	0%
B	1,04%	B	0%
C	3,88%	C	0%
D	4,99%	D	0%
E	12,57%	E	2,6%
F	1,02%	F	4%
G	1,30%	G	3,4%
H	1,28%	H	5,7%
I	6,18%	I	6,6%
J	0,40%	J	1,4%
K	0,02%	K	2,6%
L	2,78%	L	14%
M	4,74%	M	5,7%
N	5,05%	N	3,7%
O	10,73%	O	3,4%
P	2,52%	P	0%
Q	1,20%	Q	1,7%
R	6,53%	R	4,6%
S	7,81%	S	2,3%
T	4,34%	T	3,4%
U	4,63%	U	0,6%
V	1,67%	V	10,9%
W	0,01%	W	4,3%
X	0,21%	X	4,3%
Y	0,01%	Y	0,6%
Z	0,47%	Z	14,3%

Para decodificar o texto, os alunos poderão observar características da língua portuguesa, como palavras de duas ou três letras, os dígrafos, o que facilitará a decodificação. Para verificação, o texto codificado acima é o seguinte:

> "Todos conhecem o velho jogo da velha. O jogo da velha é tão velho que ninguém se lembra de quando começou a jogá-lo com seus amigos do colégio. Coisa da infância. Entretanto, para os curiosos, o jogo da velha foi uma ótima oportunidade para raciocinar e tentar desenvolver uma estratégia para ganhar. As crianças que pensaram no jogo perceberam que só se ganha quando o adversário joga mal, mas, por outro lado, é possível nunca perder (Wagner, 2015, p. 42)."

Outra sugestão, é a formulação de questões sobre a Tabela 2, por exemplo:

1. Qual o tipo de letra mais frequente no texto, vogal ou consoante? Das vogais qual a de maior e a de menor frequência? A soma da frequência das vogais é maior ou menor que a soma das frequências das consoantes?
2. Que porcentagem das letras no texto codificado eram letra T?
3. Aproximadamente, quantos Ts você esperaria em um texto de 100 letras?
4. Escreva as letras do texto codificado em ordem, da mais comum para menos comum.

Essa atividade foi adaptada das referências "Aprendendo Criptologia de Forma Divertida" (p. 22 - 23 - 24 - 25 - 27), BEISSINGER e PLESS (2006, p. 24 - 25 - 26) e REIS (2020, p. 74).

Atividade 2 - Abordar o cálculo de potências com expoentes inteiros através da Criptografia RSA

Objetivos da atividade: Identificar os múltiplos de um número; Reconhecer números primos em um determinado conjunto de números; Realizar cálculos envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisões; Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros.

Conteúdos relacionados: Múltiplos de um número; números primos; operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; e potenciação.

A atividade destina-se ao 8º ano do Ensino Fundamental.

Duração estimada: 4 aulas.

Materiais: Quadro, lápis, papel, borracha, cartões numerados de 1 a 100, fita adesiva, Crivos de Eratóstenes de 0 a 150 impressos em folha sulfite (o número depende da quantidades de alunos), caderno e calculadora.

Descrição da atividade:

Essa atividade é composta por várias etapas menores. Na primeira etapa, usaremos o Crivo de Eratóstenes para identificar os números primos existentes entre 1 e 100. Os alunos formarão duplas. Os cartões numerados de 1 a 100 serão colados com fita adesiva no quadro em ordem crescente, formando uma tabela de 10 linhas e 10 colunas. O professor apresenta o Crivo de Eratóstenes aos alunos e remove o número 1, na sequência, os alunos executarão as seguintes tarefas no Crivos de Eratóstenes que receberão impresso em folha sulfite:

1. Pinte todo o quadrado que contém o número 1 de preto.
2. Circule o número 2 e risque todos os seus múltiplos.
3. Circule o número 3 e risque todos os seus múltiplos.
4. Circule o número 5 e risque todos os seus múltiplos.
5. Continue esse processo até que não haja mais números a serem riscados ou circulados.

Concomitantemente, duplas serão sorteadas para que removam do quadro os cartões que possuem múltiplos de 2, múltiplos de 3, e assim sucessivamente.

Ao final, os alunos perceberão que restaram (ou que foram circulados) os números 2,3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97, estes são todos os números primos entre 1 e 100.

Para complementar a atividade do Crivo de Eratóstenes e aulixar na compreensão, o professor poderá propor as seguintes questões:

1. Existe algum número primo que é par? Se sim, quantos primos são pares? Por que isso acontece?
2. Podemos concluir que os números que são múltiplos 2, 3, 5, 7, e dos demais números primos, não podem ser números primos. Porque isso acontece? Qual é a relação existente entre um número ser múltiplo de outro, e os seus divisores?
3. Encontre os números primos de 0 a 150. (TAREFA DE CASA)

(A atividade acima foi adaptada das referências SILVA (2019, p. 85) e do site Laboratório Sustentável de Matemática.)

Na segunda etapa, o professor fará uma breve explanação aos alunos sobre a história da criptografia, contando sobre a evolução dos algoritmos. E então abordará a cifra de substituição, substituindo as letras por números, fazendo uso da tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

Cifrando a palavra **PRIMO**, os alunos obterão a mensagem codificada **25-27-18-22-24** ou **2527182224**.

O professor argumentará a respeito da segurança das cifras. A partir disso introduzirá a criptografia RSA simplificada, explicada abaixo. Os alunos deverão criptografar a palavra PRIMO, ou ainda, **2527182224**. No exemplo apresentado aos alunos, será adotado $n = 23$ e $e = 3$ como chave pública. Como a palavra PRIMO, já foi transformada em uma sequência numérica **2527182224**, é necessário dividi-la em blocos menores que $n = 23$, ou seja, **2 - 5 - 2 - 7 - 18 - 22 - 2 - 4**.

Seja b um bloco, o bloco b codificado é igual ao resto da divisão de b^e por n. Ou seja, para o bloco $b = 2$, temos $2^3 = 8$, dividindo-o por 23, temos $8 = 0 \cdot 23 + 8$.

Denotando por $C(b)$ o bloco codificado, então $C(2) = 8$. Repetindo os processos para os outros blocos obtemos:

C(2)=8; C(5)=10; C(2)=8; C(7)=21; C(18)=13; C(22)=22; C(2)=8; C(4)=18.

Logo, a mensagem codificada é **8 - 10 - 8 - 21 - 13 - 22 - 8 - 18**.

O professor poderá codificar os primeiros blocos, e solicitar aos alunos que codifiquem os próximos, e também que codifiquem outras palavras repetindo o processo.

A última etapa da atividade é o processo de decodificação, o que implica na determinação do valor de d. O professor explicará que d é igual ao número que multiplicado por e deixa resto 1 na divisão por $\phi(23) = 23 - 1 = 22$. Nesse caso, $d = 15$, pois $15 \cdot 3 = 45 = 2 \cdot 22 + 1$. Portanto a chave privada é (23, 15).

Seja a um bloco codificado, o bloco a decodificado é igual ao resto da divisão de a^d por n. Ou seja, para o bloco $a = 8$, temos 8^{15} dividindo-o por 23, o resto é 2. Como em alguns casos a potência é muito grande, o aluno poderá usar a calculadora. Nesse momento, o professor poderá levantar a questão sobre a escolha de números grandes como chave pública, assegurando a segurança da criptografia RSA, pois para alguns números, até mesmo computadores extremamente potentes não são capazes de obter a chave privada para assim decodificar a mensagem secreta.

Essa atividade foi adaptada das referências SILVA (2019, p. 77 - 78 - 79) e OKUMURA (2014, p. 26 - 27).

Atividade 3 - Abordar o cálculo de matriz inversa através de criptografia

Objetivos da atividade: Efetuar a operação de multiplicação entre matrizes; Obter a matriz inversa de uma matriz 2×2.

Conteúdos relacionados: Matrizes; Multiplicação de matrizes; Matriz inversa.

A atividade destina-se ao 2º ano do Ensino Médio.

Duração estimada: 3 aulas.

Materiais: Quadro, giz, lápis, borracha, caderno e papel.

Descrição da atividade:

O professor pode iniciar com uma introdução sobre a história da criptografia, e então explicar aos alunos que farão uma atividade usando criptografia e solicitar que os alunos formem duplas, sendo um aluno o remetente e o outro destinatário.

Na primeira etapa, os alunos remetentes receberão a chave do professor, que trata-se de uma matriz quadrada de ordem 2, invertível, cujos elementos são todos inteiros, que é chamada de matriz codificadora. Seja A a matriz codificadora de ordem 2 e invertível, ou seja, existe uma matriz B de mesma ordem tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2. A matriz B será a matriz decodificadora. Como sugestão, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O professor solicitará aos alunos remetentes que codifiquem a palavra "NÚMERO PRIMO". Para isso, farão a substituição, conforme tabela abaixo, das letras das palavras por números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

O espaço entre as palavras será o número 0. Caso seja necessário outro símbolo, o remetente e o destinatário deverão combinar previamente.

Após a substituição, obterão a seguinte sequência numérica:

14 - 21 - 13 - 5 - 18 - 15 - 0 - 16 - 18 - 9 - 13 - 15.

Continuando o processo, os alunos remetentes deverão separar a sequência acima, em grupos de dois números consecutivos, ou seja,

14 21 - 13 5 - 18 15 - 0 16 - 18 9 - 13 15,

que formarão as seguintes matrizes coluna 2×1:

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$$

No caso da mensagem possuir um número ímpar de elementos, completamos a mensagem com o número 0, que corresponde ao espaço entre as palavras.

Para codificar, eles deverão multiplicar à esquerda pela matriz A cada uma das matrizes coluna acima, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix},$$

o que resulta em,

$$\begin{bmatrix} 49 \\ 35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 51 \\ 33 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 45 \\ 27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Logo, a mensagem codificada e transmitida ao destinatário será,

49 - 35 - 31 - 18 - 51 - 33 - 16 - 16 - 45 - 27 - 41 - 28.

O professor pode chamar atenção dos alunos em relação ao fato de a mensagem codificada quase não possuir repetições, o que dificulta a análise de frequência.

Quando os alunos destinatários receberem a mensagem codificada, eles precisarão calcular a matriz B inversa de A, que decodificará a mensagem. Nesse caso, temos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

E então, calcular os seguintes produtos entre a matriz B e as matrizes codificadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 49 \\ 35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 51 \\ 33 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 41 \\ 28 \end{bmatrix},$$

o que resulta em,

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda,

14 - 21 - 13 - 5 - 18 - 15 - 0 - 16 - 18 - 9 - 13 - 15,

o que corresponde a seguinte mensagem, conforme a tabela do início da atividade,

NÚMERO PRIMO.

O professor pode propor que o remente passe a ocupar a função de destinatário e vice-versa. E também, que criem suas próprias mensagens e escolham suas matrizes codificadoras.

Essa atividade foi adaptada da referência EDWARDS e PENNEY (1998, p. 61 - 62 - 63 - 64).

Referências

BEISSINGER , J; PLESS, V. **The Cryptoclub Workbook: Using Mathematics to Make and Break Secret Codes**. Wellesley: A K Peters/CRC Press, 2006.

EDWARDS, C. H. J., PENNEY, D. E. **Introdução à Álgebra Linear**. Tradução: João Paulo Cursino dos Santos, José Antônio e Souza, Zaira Geriballo de Arruda Botelho. Rio de Janeiro: Prentice- Hall do Brasil Ltda, 1998.

OKUMURA, M. K. **Números primos e criptografia RSA**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo. São Carlo, 2014.

REIS, M. S. dos. **Criptografia: um estudo histórico e aplicado a matemática do ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Matemática) - Unidade de Dourados - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. Dourados, 2020.

SILVA, V. B. da. **Números Primos e Criptografia: do Conceito ao Sistema RSA**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins. Arraias, 2019.

TEIXEIRA, D. M. D. **Introdução à Criptografia e atividades para a Educação Básica**. Dissertação de Mestrado PROFMAT - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2021.

WAGNER, E. O jogo da velha em 3D. **RPM - Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 87, p. 42, 2º quadrimestre de 2015.

Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: ⟨*http://basenacionalcomum.mec.gov.br/*⟩. Acessado em: 08 de ago. de 2021.

Aprendendo Criptologia de Forma Divertida. Disponível em: ⟨*http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Oficinas/PedroMalagutti − Temas Interdisciplinares/Aprendendo_Criptologia_de_Forma_Divertida_Final.pdf*⟩. Acessado em: 08 de ago. de 2021.

Leve o Crivo de Eratóstenes para ensinar números primos na sua turma de sexto ano! Atividade disponível para download!! Por prof. Daniel Lucas. **Laboratório Sustentável de Matemática**, 2018. Disponível em: ⟨https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2018/08/o-crivo-de-erastostenes-na-sua-turma-de-6-ano.html⟩. Acessado em: 01 de ago. de 2021.