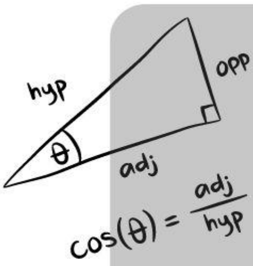
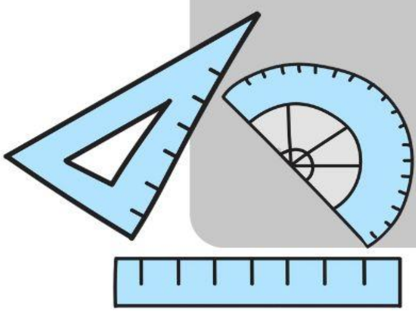


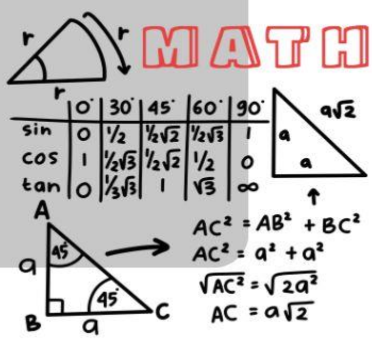
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Uma Sequência Didática para o Ensino de

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

JOSÉ CARLOS BARROS DE SOUZA JÚNIOR
NATANAEL FREITAS CABRAL





BELÉM (PA)
2024

José Carlos Barros de Souza Júnior

Natanael Freitas Cabral

Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas

Produto educacional apresentado ao comitê de avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

BELÉM (PA)

2024

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Souza Junior, José Carlos Barros de

Uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas: atividades / José Carlos Barros de Souza Junior, Natanael Freitas Cabral - Belém, 2024.

ISBN:

Produto educacional vinculado à dissertação "Uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2024.

1.Ensino de matemática. 2.Trigonometria-Estudo e ensino. 3.Prática de ensino I. Cabral, Natanael Freitas. II. Título.

CDD. 23º ed.516.24

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A preocupação com o ensino e aprendizagem no campo de conhecimento da matemática é uma realidade que alerta para todos os envolvidos no processo. Os documentos que norteiam a educação básica chamam a atenção sobre essa questão, o modo como o conhecimento é mediado, as metodologias de ensino, as práticas pedagógicas são fatores importantes que interferem diretamente na produtividade em sala de aula.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é importante que estimule os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática, como ela foi construída, como pode construir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados à investigação científica. Desse modo, o aluno pode identificar os conhecimentos matemáticos como meios que o auxiliam a compreender e atuar no mundo (Brasil, 1998, p.62).

Para Nacarato (2011), é condizente evidenciar a necessidade de conectar ao processo de ensino da matemática elementos didático-pedagógicos que favoreçam a interação social desses conhecimentos. Assim, “é o professor quem cria as oportunidades para a aprendizagem, seja na escolha de atividades significativas e desafiadoras para seus alunos, seja na gestão de sala de aula.

Então, cabe ao professor buscar estratégias que contribuam para o aprendizado dinâmico e produtivo. Desse modo, por intermédio da Dissertação “Uma Sequência didática para o Ensino de Equações Trigonométricas” do Programa de Pós – Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, foi desenvolvido um Produto Educacional, direcionado para docentes e discentes, com foco nos estudos das Equações Trigonométricas Fundamentais.

O suporte teórico desse trabalho é a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), nessa perspectiva, o intuito é organizar o objeto de conhecimento de modo a torná-lo mais inteligível para o aluno através da transposição didática. As intervenções das atividades da sequência didática estão articuladas com o construto de dispositivos comunicacionais escritos e orais, as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Aliado a essa metodologia, é recomendado utilizar recortes históricos da trigonometria para estimular a aprendizagem do objeto de conhecimento desse produto educacional, por intermédio de uma intervenção pré – formal, bem como aplicativos de geometria dinâmica (Geogebra e Desmos) como ferramentas auxiliares nas construções das atividades da sequência didática, com a pretensão de proporcionar aulas mais dinâmicas e que fujam do tradicionalismo. As teorias indicadas para as análises dos resultados das aplicações das atividades são: Análise Microgenética de Góes (2000) e a Análise do Discurso de Mortimer e Scoot (2002).

Esse produto educacional foi construído a partir da dissertação intitulada "Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas[1]", e destinado para auxiliar professores e alunos que buscam mediar/aprender o ensino de Equações Trigonométricas com recursos metodológicos que apresentaram resultados satisfatórios (resultados da dissertação) para o processo educacional, além de contribuir para debates e fomentar estudos na área da educação matemática.

José Carlos Barros de Souza Júnior
Natanael Freitas Cabral

[1] Link da Dissertação:

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

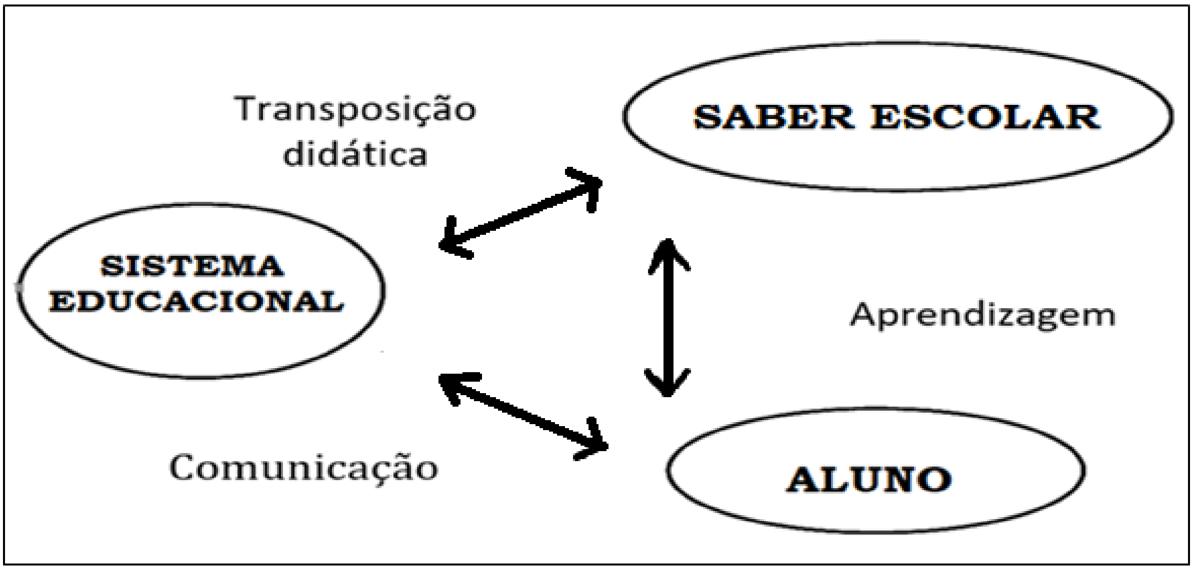
Nesse capítulo, foram abordados os aportes teóricos e metodológicos que fundamentam esse trabalho.

1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), do educador matemático francês Guy Brousseau, surgiu na década de 70, por meio de estudos desenvolvidos no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM) durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que teve como principal objetivo aproximar a matemática ensinada no ensino básico com a matemática estudada e desenvolvida por pesquisadores da área. A TSD tem como propósito fundir os conceitos matemáticos, de modo a conectar o professor, aluno e o conhecimento matemático no processo de ensino e aprendizagem.

A figura 1 sintetiza o sistema didático, proposto por Brousseau, que entende as relações didáticas como uma comunicação de informações envolvendo o saber escolar, o sistema educacional e aluno.

Figura 1: Relações Didáticas



Fonte: Brousseau (2008).

Ocorrerá uma situação didática sempre que houver intencionalidade do professor, de propiciar ao aluno a aprendizagem de um determinado assunto de forma organizada, através de uma série de mensagens, sendo o aluno o responsável por extrair as informações que lhes serão pertinentes.

De acordo com Brousseau (2008), uma "situação" é um modelo de interação entre um sujeito e um determinado ambiente. O recurso de que dispõe o sujeito para alcançar ou manter um estado favorável nesse ambiente é uma gama de decisões que dependem do uso de conhecimento preciso. Considera-se o meio como um subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.

O autor, classifica as situações didáticas em situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

Situação de Ação

Modelo implícito, que exprime o conjunto de relações ou regras segundo as quais o aluno toma suas decisões de forma intuitiva, sem consciência conceitual sobre determinado objeto de conhecimento.

Situação de Formulação

O conjunto de ações implícitas, por vezes, pode tornar-se complexo devido as projeções de um determinado conhecimento não estarem organizadas na mente do aluno. Sendo necessário a organização das ideias, conforme Brousseau (2008), a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retornar a ele (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico).

Situação de Validação

Nesse momento, o conhecimento em questão precisa ser adaptado, corrigido, confrontado, seja com experimentação, baseado em um conhecimento já estabelecido, confronto de ideias, quando houver dúvidas entre o emissor e o receptor das informações. Dessa forma, um conhecimento para ser validado, necessita estar convergindo para um mesmo foco. De acordo com o autor, esquemas de ação e formulação implicam em processos de correção, sejam empíricos ou apoiados em aspectos culturais, para garantir a pertinência, adequação, adaptação ou conveniência do conhecimento mobilizado.

Situação de Institucionalização

No decorrer das experiências desenvolvidas pelos professores, houve a necessidade de revisar, formalizar e generalizar conceitos trabalhados em sala de aula. Não há sentido no processo de ensino e aprendizagem se o emissor repassar as informações e não checar as consequências que o aprendizado desenvolvido em determinado momento gerou.

1.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Zabala (1998, p.18), considera as sequências didáticas como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Para o autor, existe uma tríade que permite ao professor um movimento de constante aperfeiçoamento de suas ações de ensino. O planejamento racionaliza a inevitável articulação entre as reconstruções conceituais e as metodologias alternativas, a aplicação que materializa a viabilidade e pertinência do material sequenciado disponibilizado aos aprendizes e a avaliação que por sua vez permite a (re)elaborações necessárias a partir da análise e discussão dos dados.

Segundo Oliveira (2013, p.39), sequência didática é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem. Nesse aspecto, as sequências didáticas podem ser entendidas como um conjunto de intervenções planejadas pelo professor, para que os envolvidos no processo, de fato, compreendam os conteúdos trabalhados.

De acordo com Cabral (2017, p.33), esse conjunto de intervenções "passo a passo" dirigido pelo professor com a finalidade de atingir objetivos de aprendizagem sugere a ideia dos elos conectados de uma corrente. Cada elo posterior está devidamente articulado aos elos anteriores e permite outras articulações com elos subsequentes. Uma forma de rede que se estrutura a partir dessas articulações conceituais.

Ao começar o trabalho faz-se necessário reunir informações prévias dos conhecimentos dos alunos e, depois desse momento, organizar uma sequência de aulas e problemas diferenciados e investigar os vestígios de aprendizagem. Gradualmente, aumenta-se o nível dos assuntos e orientações, permitindo um aprofundamento do tema em foco.

"É, neste sentido, que ao se perceber a potencialidade pedagógica do ensino pautado na mediação de uma sequência didática se faz necessário que o professor faça um diagnóstico para estabelecer a relação adequada entre aquilo que os alunos sabem sobre o que lhes será ensinado – conhecimentos mínimos necessários para apreensão do novo objeto – e a estrutura da sequência didática proposta para a aprendizagem do objeto em jogo" (Cabral, 2017, p.38).

1.3 UNIDADES ARTICULADAS DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL

A sequência didática utilizada nesse trabalho está estruturada de acordo com os moldes do construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), sendo um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas (Cabral, 2017, p. 12).

Cabral (2017) apresenta seis categorias de intervenções estruturantes que se materializam de forma escrita nas sequências didáticas e são subdivididas em três classificações, são elas: Pré – formal, composta pela Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r) e Intervenção Exploratória (I_e), Formal, com a Intervenção Formalizante (I_f) e a Pós – formal, que integra a Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a). O autor apresenta uma intervenção oral, denominada Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO).

Pré – Formal

Intervenção Inicial (I_i) :O professor busca envolver o discente a partir de um discurso didático-pedagógico, na busca da percepção ativa (de maneira empírica e intuitiva) das regularidades relacionadas a determinado conceito, ou seja, o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida;

Intervenção Reflexiva (I_r) : Sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve, nessa perspectiva, o aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências;

Intervenção Exploratória (I_e): Aprofundar as percepções dos alunos quanto aos questionamentos expostos nas intervenções reflexivas. Para isso, o professor solicita que os estudantes executem procedimentos direcionados como simulações, descrições, preenchimentos de tabelas, elaboração de gráficos e observações.

Formal

Intervenção Formalizante (I_f): Nesse estágio o professor reelabora as verdades "redescobertas" pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.

Pós – Formal

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Tem como finalidade estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. O que deve ser fortalecido nessa etapa é um aspecto igualmente desprezado pelo ensino tradicional que é a justificativa de procedimentos adotados como base as verdades empírico-intuitivas estabelecidas nas reconstruções conceituais. A ideia é sair da lógica da "reprodução algorítmica" para uma lógica da "justificativa de procedimentos" a partir das noções conceituais.

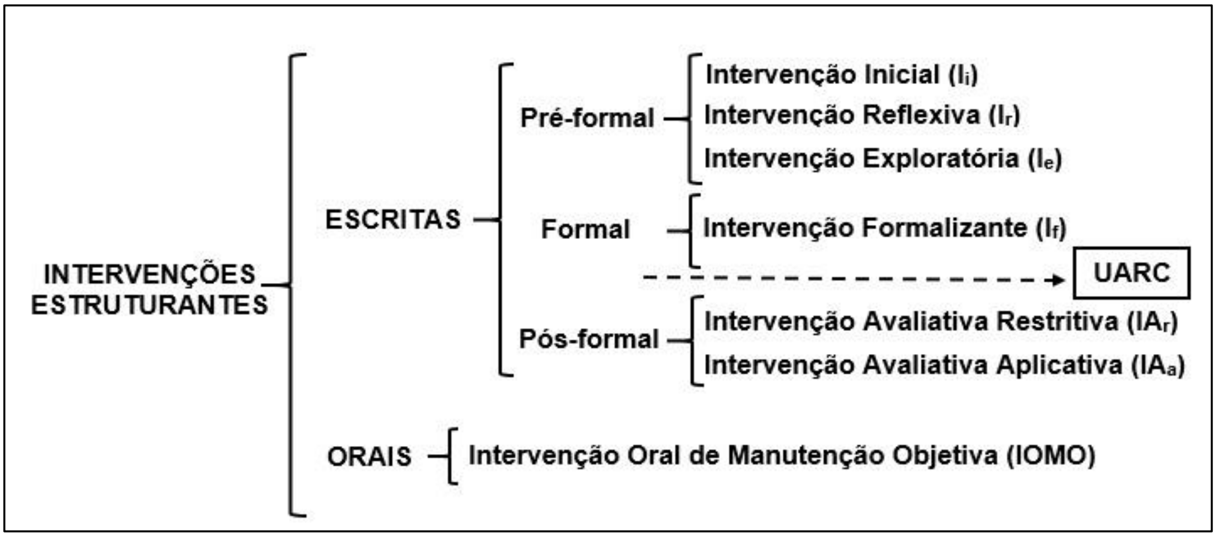
Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa): A proposta dessa intervenção é a resolução de problemas de aplicação, pois têm-se o nível mais elevado de assimilação dos conceitos abordados. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

Oral

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): Pode ser compreendida como uma espécie de sequência didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual. Cuja finalidade é manter a objetividade planejada, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática.

As UARC como modelo estruturante de sequência didática, possui um desempenho intencional através das intervenções, com o intuito de instigar a aprendizagem. Dessa forma, podemos sintetizar a teoria com a seguinte figura.

Figura 2: Estrutura UARC



Fonte: Cabral (2017, p.97).

As intervenções estruturantes são importantes no processo de aplicação da sequência didática, pois é valorizado o ambiente pré-formal dos participantes, análise dos conhecimentos prévios e a busca dos estímulos certos através das intervenções para que os alunos compreendam a construção formalizante do conteúdo e a busca no ambiente pós-formal pela concretização de aprendizagem dos conceitos abordados nas UARC.

1.4 ANÁLISE MICROGENÉTICA

A Análise Microgenética, na perspectiva de Maria Cecília Rafael de Góes, Góes (2000), aborda uma metodologia de coleta de informações, registros das aulas com análises sociais entre sujeitos, na busca por minúcias em um determinado e curto espaço de tempo, através de videogravações no campo educacional e da psicologia.

Segundo Góes (2000, p.09), de um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção aos detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. Frequentemente, dadas as demandas de registro implicadas, essa análise é associada ao uso de videogravação, envolvendo o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição. A Análise Microgenética pode ser o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante.

O modelo de transcrição em episódios, segmentos e turnos é utilizado com o intuito de organizar os áudios que contém pontos importantes e discussões relevantes para a pesquisa. Os turnos são registros das falas dos sujeitos envolvidos, como professor-aluno e aluno-aluno, os segmentos são um conjunto de turnos com objetivo delimitado como recorte de análise dos indícios de mudança de significado do objeto de estudo, com as primeiras percepções, avanços e retrocessos, ciclos incompletos, e por fim os episódios, que são um conjunto de segmentos com o objetivo identificar as de organizar as atividades presentes na experimentação.

1.5 ANÁLISE DO DISCURSO

O discurso e a interação são importantes ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, são através das interações em sala de aula que os estudantes constroem significados e consequentemente despertam o interesse para o aprendizado. Improvavelmente, alguém destoaria da importância, em modos gerais, do discurso de professores e alunos no ambiente escolar, porém pouca relevância tem sido dada para esse tema, tanto entre professores, formadores de professores e investigadores da área.

“O que nos impressiona são as diferentes formas pelas quais os professores interagem com seus estudantes ao falar sobre os conteúdos científicos: em algumas salas, as palavras estão por toda a parte. Os professores fazem perguntas que levam os estudantes a pensar e então são capazes de articular suas ideias em palavras, apresentando pontos de vista diferentes. Em algumas ocasiões o professor lidera as discussões com toda a classe. Em outras, os estudantes trabalham em pequenos grupos e o professor desloca-se continuamente entre os grupos, ajudando os estudantes a progredirem nas tarefas. Em outras salas de aula, o professor faz uma série de questões e as respostas dos estudantes, na maioria das vezes, limitam-se a palavras aqui e acolá, preenchendo as lacunas no discurso do professor. Muitas vezes o professor é extremamente hábil nesse estilo de exposição, mas há muito pouco espaço para os estudantes fazerem e falarem algo, e muitos nunca abrem a boca”. (Mortimer e Scoot, 2002).

Os autores apresentaram cinco aspectos interrelacionados, com destaque para o papel do professor e estão agrupados em três classes, como mostra a figura a seguir.

Figura 3: Estrutura Analítica

Aspectos da Análise	
i. Focos do ensino	*1. Intenções do professor* *2. Conteúdo*
ii. Abordagem	*3. Abordagem comunicativa*
iii. Ações	*4. Padrões de interação* *5. Intervenções do professor*

Fonte: Mortimer e Scoot (2002, p.285).

2. RECORTES HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

Pode-se apontar que a capacidade de reconhecer, analisar e resolver problemas é uma característica da espécie humana, a matemática surge ao longo da história como uma expressão cultural vibrante com o objetivo de garantir a sobrevivência e o bem-estar da humanidade.

A história da matemática é um campo que se estende além do estudo de conceitos matemáticos ao longo do tempo; de fato, um objeto matemático inserido em um contexto histórico pode perder sua obscuridade e passar a fazer sentido dentro da teoria, além de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos. Para trabalhar em tópicos matemáticos, conectar materiais escritos às suas raízes históricas e colocar a matemática no contexto de outras disciplinas, um professor pode se beneficiar do estudo da história da matemática, se souber utilizar a teoria juntamente com suas raízes conceituais.

De acordo com Chaquiam e Mendes (2016), a história da qual falamos é uma história das explicações e compreensões sobre os objetos existentes no mundo e das construções de realidades que podem ser estruturadas e reestruturadas na medida em que a sociedade reflete, se reinventa e redireciona seu modo de ser, isto é, uma dinâmica cultural que exige esse movimento de construção da realidade.

Nesse contexto, a história da trigonometria incita-nos a pensar o presente e a sua aplicabilidade às situações do cotidiano. A análise da história naturalmente nos leva a considerar uma matemática empírica que foi desenvolvida e expressa através das tradições culturais dos povos. A investigação e a exploração da matemática abstrata permitem examinar os vários contextos em que as ideias matemáticas surgiram e se desenvolveram sem minimizar um foco contestador. O foco da educação deve estar em uma metodologia que desenvolva a capacidade de analisar situações encontradas em nosso cenário socioeconômico e cultural.

Desse modo, D’Ambrosio destaca a evolução da Matemática e o seu ensino associado aos fatores socioculturais: isto nos conduz a atribuir à matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido (D’Ambrosio, 1986, p. 36).

Conforme Galvão (2008) os registros mais antigos do desenvolvimento do conhecimento matemático podem ser encontrados nas "tábuas" da Mesopotâmia, bem como em papiros egípcios e outros escritos. Essas duas civilizações aparentemente independentes deixaram um legado inestimável que contém ideias intrigantes que foram desenvolvidas para tratar de questões não apenas relacionadas às demandas cotidianas, mas também ao desenvolvimento e uso dos conceitos e métodos matemáticos por eles desenvolvidos.

De acordo com Chaquiam (2017) estudos apontam que a História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode ajudar a melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, possibilitando em uma nova forma de ver e entender essa disciplina, tornando-a mais contextualizada, mais interdisciplinar, mais agradável, mais criativa e mais humanizada. Ainda de acordo com o autor, observa-se um crescente desenvolvimento de pesquisas relacionadas à História das ciências e, em particular, a História da Matemática.

A História da Matemática pode ser considerada como um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na fonte de busca, na compreensão e como elemento esclarecedor de conceitos matemáticos. Além também de possibilitar o levantamento e a discussão das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante. É pela História da Matemática que se tem a possibilidade do estudante entender como o conhecimento matemático é construído historicamente.

Um documento datado por volta de 1650 a. C é o famoso Papiro de Rhind rico em informações matemáticas, contendo uma série de tabelas e oitenta e quatro problemas resolvidos. Os problemas revelam que os egípcios possuíam, entre outros, conhecimentos rudimentares sobre as razões trigonométricas num triângulo retângulo e a teoria sobre a semelhança entre triângulos, conhecimentos estes indispensáveis para a construção das pirâmides.

Boyer, assim, refere-se ao conteúdo do problema 56 deste papiro, por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Na tecnologia moderna é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é recíproca da usada no Egito (Boyer, 2010, p.13).

Os babilônios eram melhores e mais hábeis em realizar cálculos, talvez como resultado de sua língua ser considerada mais acessível do que a egípcia. Eles também entendiam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e a trigonometria básica, conforme declarado na placa "Plimpton 322", que leva o nome de George Arthur Plimpton (1855–1936), um colecionador de livros que doou vários livros para a Universidade de Colômbia antes de sua morte. Esta placa, que contém uma notável lista de secantes e é a 322ª da coleção Plimpton, é a mais significativa e conhecida.

Conforme Boyer (2010), existem milhares de pequenas tábuas da Mesopotâmia armazenadas em bibliotecas universitárias, algumas das quais são matemáticas, incluindo as de Yale, Columbia e Pensilvânia. Entre elas, a tábua de número 322, mantida na Coleção Plimpton da Universidade de Columbia e datada de aproximadamente 1900 a 1600 a.C., possui símbolos matemáticos relacionados a um tipo de prototrigonometria.

Em outras pequenas tábuas problemas que apresentam conexão com o Teorema de Pitágoras. Em uma tábua pertencente ao Museu Britânico, o conteúdo tem a seguinte tradução: “4 é o comprimento e 5 a diagonal. Qual é a largura? Seu tamanho não é conhecido. 4 vezes 4 é 16. 5 vezes 5 é 25. Você tira 16 de 25 e restam 9. Que número podemos multiplicar por ele mesmo para chegar a 9? 3 vezes 3 é 9. 3 é a largura” (Galvão, 2008).

De acordo com Boyer (2010) os dados das pequenas tábuas mesopotâmicas e dos papiros egípcios se referem a casos específicos, sem formulações gerais. Entretanto, aproximadamente 585 a.C., Tales de Mileto, nascido por volta de 624 a.C. em Mileto, e falecido cerca de 548 a.C., considerado “discípulo dos egípcios e caldeus”, homem de inteligência rara e grande filósofo – primeiro dos Sete Sábios da antiguidade - é saudado como o primeiro matemático verdadeiro e autor da seguinte proposição: que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, conhecida atualmente como Teorema de Tales.

Aristarco de Samos (por volta de 310 a.C. – 230 a.C.), em seus estudos, propõe um sistema heliocêntrico, mas o que quer que tenha escrito sobre o assunto se perdeu. O que restou de suas obras foi o tratado: Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua. Para medir a distância da Terra ao Sol, Aristarco considerou as duas posições em que a Lua está em seus quartos crescentes e minguantes. Admitiu que tinha um triângulo retângulo e mediu o ângulo α , chegando à conclusão de que a medida era o 87. Construiu um triângulo retângulo semelhante com esses ângulos e concluiu que a distância da Terra ao Sol seria 20 vezes a distância da Terra à Lua. (Galvão, 2008).

Por mais um século e meio os matemáticos gregos continuaram a estudar as relações entre retas e círculos aplicados à Astronomia, quando Hiparco de Niceia (por volta de 180 a.C. – 125 a.C.), astrônomo grego, compilou a primeira tabela trigonométrica, sendo, então, considerado o "pai da Trigonometria". Hiparco criou uma matemática aplicada para prever os movimentos dos astros, os eclipses e medir as distâncias dos planetas e das estrelas, sabendo os ângulos com os quais eram vistos da Terra, porém não se sabe como fez sua tabela, pois sua obra se perdeu (Boyer, 2010).

Segundo Galvão (2008), a contribuição da civilização grega para o desenvolvimento da trigonometria é imensurável durante um período de cerca de 1200 anos, de 600 a.C. a 600 d.C. A trigonometria foi algo completamente novo na história da Geometria, que surgiu na Escola de Alexandria, e evoluiu como criação de Aristarco, Hiparco, Menelau e Ptolomeu. O estudo da trajetória e das posições dos corpos celestes e o desejo de compreendê-los e também de obter mais recursos para a navegação e a geografia foram motivações para o desenvolvimento das ideias originais da Trigonometria. Até então, as adequadas relações de semelhança entre lados de um triângulo retângulo eram utilizadas, na prática, para resolver problemas.

Nesse cenário, analisar as raízes históricas de alguns fatos importantes que surgiram no passado, encoraja a pensar no presente e na aplicabilidade da trigonometria às situações cotidianas. Naturalmente, apresentar acontecimentos históricos proporciona reflexões sobre uma matemática empírica que se desenvolveu e se expressou via tradições culturais do povo. Uma metodologia que desenvolva a capacidade de focar nas situações encontradas em um cenário socioeconômico e cultural deve ser o foco da educação.

3. CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Nessa seção foi apresentado as Equações Trigonométricas Fundamentais, de acordo com o Fundamentos da Matemática Elementar (2013), volume 3, de Gelson Iezzi.

Equações Fundamentais

Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações fundamentais a seguir:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$$

É importante que o estudante saiba resolver, antes de tudo, equações fundamentais para que consiga evoluir no conteúdo, para então, resolver equações trigonométricas de qualquer tipo.

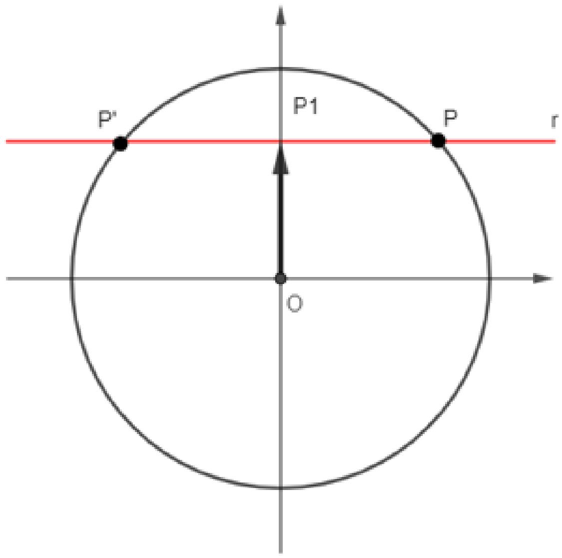
Resolução da Equação sen α = cos β

Se sen α = cos β = OP_1, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, ou seja, estão em P ou P'.

Há duas soluções para esse tipo de caso. O primeiro considera α e β possuírem a mesma imagem P, ou seja, são côngruos. O segundo caso destaca α e β com imagens simétricas, isto implica no fato de que α e β são suplementares.

Figura 4: Resoluções da equação de seno.

$$sen\alpha = sen\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

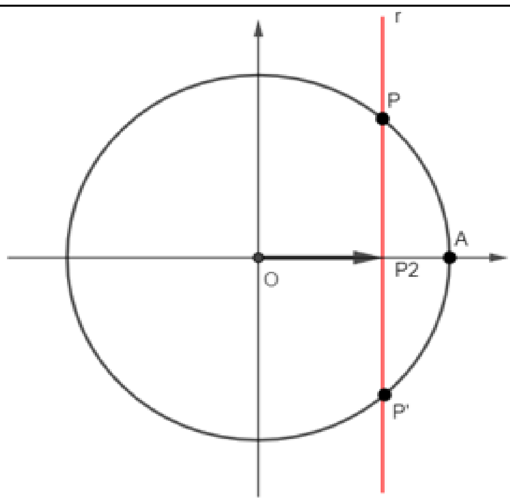
Resolução da Equação cos α = cos β

Se $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos, no ponto P_2, ou seja, estão em P ou P'.

Duas possibilidades são observadas para equações desse tipo. Na primeira situação, α e β são côngruos, o que implica dizer que esses arcos possuem a mesma imagem. No segundo caso, α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares, ou seja, $\alpha + \beta$ = 360° ou $\alpha + \beta$ = 2π.

Figura 5: Resoluções da equação de cosseno.

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \pm\beta + 2k\pi$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Resolução da Equação tg α = tg β

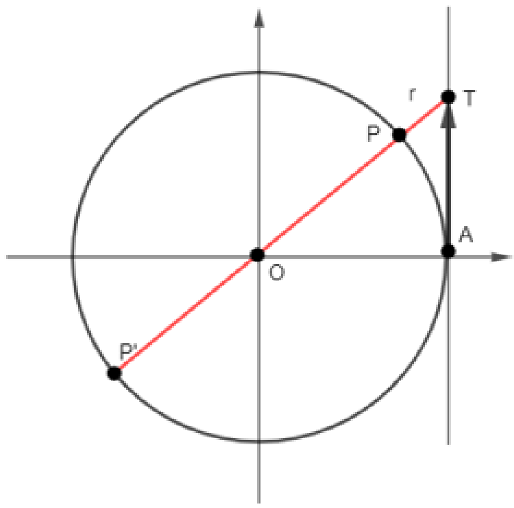
Se tg α = tg β = AT, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, ou seja, estão em P ou P'.

Há, desse modo, duas possibilidades para soluções desse tipo. A primeira α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos. A segunda α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, pode-se dizer que os arcos são explementares, ou seja, quando a diferença das suas medidas é igual a 180°.
(α - β = 180° ou α - β = π.).

Figura 6: Resoluções da equação da tangente.

$$tg\,\alpha = tg\,\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

4. ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES

Nessa seção foi levantado algumas orientações para professores que buscam abordar uma metodologia diferenciada por intermédio de uma sequência didática para o ensino de Equações Trigonométricas Fundamentais. Nesse aspecto, sugere-se que seja ofertado uma oficina de conhecimentos prévios necessários para que possam ser gerenciados possíveis problemas durante a aplicação da sequência didática, como a definição de arcos e ângulos, unidades de medidas de arcos e ângulo (grau e radiano), transformações de unidades, características gerais do círculo trigonométricos. Após as aulas suporte, faz-se necessário aplicar um teste de verificação de aprendizagem desses conhecimentos, se o rendimento não for satisfatório, é indicado repetir as aulas e repassar o teste, caso os alunos tenham apresentado resultado positivo, iniciar a aplicação da sequência didática.

De acordo com Chaquiam (2017) inserir fatos históricos durante as aulas podem torná-las mais dinâmicas, tendo em vista que os alunos podem reconhecer essa ciência como uma criação humana, que surgiu a partir das buscas por soluções para problemas do cotidiano. Com o intuito estimular os alunos para as dinâmicas em sala de aula, antes de iniciar as atividades da sequência didática, em cada encontro, será aberto um intervalo de tempo para discussões a respeito de algum fato histórico pré-selecionado pelo professor e em cada UARC terá uma intervenção pré- formal que irá questionar quais as considerações desses alunos com relação a esse fato histórico, pois ao inserir o objeto matemático e contextualizá-lo, bem como relacionar esses estudos com outras ciências e com o cotidiano estimula o imaginário, curiosidade dos envolvidos. Esses contextos históricos podem ser pesquisados através do google acadêmico, em dissertações e artigos que tratam sobre o assunto.

No desenvolvimento das atividades é indicado a utilização de materiais manipuláveis virtuais de geometria dinâmica, como o Geogebra e o Desmos. Os conhecimentos referentes a utilização dessas ferramentas podem ser repassados nas aulas de oficina de conhecimentos prévios, a utilização do círculo trigonométrico virtual auxilia os alunos a identificarem os valores de seno, cosseno e tangente de um determinado arco, ajuda no entendimento de arcos côngruos e redução de um arco ao primeiro quadrante, sendo esses conceitos importantes para que os alunos possam resolver uma equação trigonométrica fundamental. É prudente que o professor antes de trabalhar com esses materiais manipuláveis virtuais dominem essas ferramentas, logo, existe a necessidade do professor se capacitar, buscar conhecimentos para que possa se inserir nesse ambiente tecnológico.

A sequência didática é composta por quatro atividades, cada atividade é denominada UARC. A UARC 1 tem como objetivo definir as razões trigonométricas no círculo trigonométrico, a UARC 2 trata sobre redução de um arco ao 1º quadrante, a UARC 3 desenvolve o conteúdo de arcos côngruos e a última atividade, UARC 4, é sobre as equações trigonométricas, ou seja, com os conhecimentos das atividades, que precedem a atividade 4, a tendência é que, naturalmente, os alunos consigam desenvolver a resolução das equações trigonométricas fundamentais e algumas equações trigonométricas clássicas, propostas nas intervenções. As equações clássicas são aquelas que requerem algum tipo de artifício matemático para serem resolvidas. As técnicas para a resolução das equações clássicas podem ser repassadas para os alunos durante a aplicação das atividades nas intervenções orais de manutenção objetiva (IOMO), bem como os direcionamentos, correções, posicionamentos, dicas no decorrer das atividades, quando houver a necessidade das mediações do professor.

Ademais, recomenda-se que a turma seja dividida em grupos, conforme Bortoli (2012) dividir a classe em grupos tem como objetivo permitir que os alunos interajam, conversem e façam perguntas para construir e compartilhar informações. Os resultados apresentados nas análises da dissertação base desse trabalho ratificam os benefícios de dividir a classe em grupos para a aplicação das atividades. É importante focar nos objetivos de cada atividade, visto que o cumprimento desses objetivos ou a proximidade em alcançá-los, são fatores preponderantes para a produtividade almejada em cada atividade. Sugere-se dois tempos de aula, 50 minutos para cada aula, para a aplicação de cada UARC, desse tempo, os 20 primeiros minutos serão destinados para as discussões dos fatos históricos pré-selecionados e o restante para as intervenções da sequência didática.

5. ATIVIDADES

Este produto educacional é uma proposta de sequência didática composta por 4 (quatro) atividades em nível processual que desencadeiam na construção do conhecimento sobre as equações trigonométricas fundamentais e clássicas para serem trabalhadas com alunos do 2º ano do Ensino Médio. As atividades abordam os seguintes conteúdos: Razões trigonométricas na circunferência, redução ao 1º quadrante, arcos côngruos, equações trigonométricas fundamentais e clássicas nos moldes do construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual desenvolvido por Cabral (2017).

5.1 ATIVIDADE 1 | UARC 1

Título: Razões trigonométricas na circunferência.

Objetivo: Definir as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no círculo trigonométrico, bem como os sinais dessas razões e comportamentos (crescente ou decrescente) nos quadrantes com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Contextualização: Utilize o texto presente nesse produto educacional referente aos recortes históricos da trigonometria. Disponibilize o texto para que todos possam ler. Após a leitura, pergunte quais foram os fatos históricos mais interessantes no ponto de vista deles. Provavelmente, surgirá uma discussão produtiva entre os envolvidos. A intenção é instigar o imaginário e curiosidade dos alunos para que eles possam estar mais predispostos para começarem a responder as intervenções. Sugira para os alunos pesquisem no google acadêmico, artigos científicos, dissertações sobre a História da Trigonometria, para as próximas intervenções. A próxima UARC o assunto em destaque é sobre o surgimento da trigonometria na humanidade e sobre Papiro de Rhind.

Intervenção Inicial (I_i): O que seria seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico?

Intervenção Reflexiva (I_r): Os valores das razões trigonométricas são infinitos ou não? Podem ser maiores que 1?

Intervenção Reflexiva (I_r): As razões trigonométricas podem ter valores negativos?

Intervenção Reflexiva (I_r): Após as discussões sobre o texto "Recortes históricos da Trigonometria" disponibilizado nessa atividade, apresente as suas percepções sobre os tópicos abordados.

Intervenção Exploratória (I_e): Os valores de seno, cosseno e tangente aumentam ou diminuem quando o arco percorre o círculo trigonométrico no sentido positivo? Faça uma análise de cada razão em cada quadrante.

Intervenção Exploratória (I_e): Existe algum ponto do círculo trigonométrico que as razões trigonométricas não são definidas?

Intervenção Formalizante (I_f):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Existem arcos diferentes que possuem o mesmo valor numérico? Existem arcos com valores simétricos? Cite exemplos.

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):

Encontre os valores das razões trigonométricas utilizando o material concreto e ou o material virtual.

sen 0 =	tg 90° =	sen 270º =
cos 0 =	$sen\,\frac{4\pi}{9}$ =	$sen\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ =
tg 0 =	cos 160° =	$\cos(-270)$ =
$sen\,\frac{\pi}{2}$ =	$tg\,\frac{3\pi}{4}$ =	tg 305°=
$\cos\pi$ =	sen 220° =	cos 360° =
sen (– 70º) =	$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ =	tg 255° =

ATIVIDADE 2 | UARC 2

Título: Redução ao 1º quadrante.

Objetivo: Reduzir arcos ao 1º quadrante, com a técnica de simetria e formalização do método algébrico, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Contextualização: Envolva os alunos nas discussões referentes ao surgimento da trigonometria na humanidade por intermédio de problemas gerados pela astronomia, agrimensura e navegação em meados do século IV ou V a.C com os egípcios e babilônios. Sobre o Papiro de Rhind, livro escrito por Ahmes, é importante destacar que é datado por volta de 1650 a.C, possui 84 problemas, sendo que 4 deles apresentam conceitos relacionados à trigonometria. Busque focar sobre um dos problemas que calcula o seqt de uma pirâmide, ideia primitiva da cotangente. Com os conhecimentos adquiridos pelas pesquisas dos alunos, e as discussões sobre os assuntos em foco, certamente a turma estará mais motivada para o início da UARC. O tema sugerido para a próxima atividade é sobre os personagens: Tales de Mileto (625 – 546 a.C) e Pitágoras (570 – 495 a.C), bem como, as contribuições desses estudiosos para a trigonometria.

Intervenção Inicial ($\boldsymbol{I_i}$): O que seria reduzir um arco ao primeiro quadrante?

Intervenção Reflexiva ($\boldsymbol{I_r}$): Com o auxílio do círculo trigonométrico no material concreto ou virtual, encontre os sinais das razões seno, cosseno e tangente nos quadrantes.

Intervenção Reflexiva (I_r): Após as discussões sobre o surgimento da trigonometria na humanidade e sobre o Papiro de Rhind, apresente as suas percepções sobre os tópicos abordados.

Intervenção Exploratória (I_e): Busque encontrar os arcos que possuem o mesmo valor numérico, em módulo, de $sen\frac{\pi}{6}$. Utilize o círculo trigonométrico concreto e trace os pontos simétricos em cada quadrante.

Intervenção Exploratória (I_e): Encontre as expressões algébricas que fazem a redução dos arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes ao 1º quadrante. Sugestão: Atribua valores para os arcos, utilize a simetria para auxiliar, perceba regularidades e em seguida generalize as expressões.

Intervenção Formalizante (I_f):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Encontre o ângulo α e o seu valor numérico, com o auxílio das ferramentas virtuais, tal que $0° \leq \alpha < 360º$, $sen\alpha = -sen230°$ e $\cos\alpha = \cos 230°$.

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):

Encontre os valores das razões trigonométricas, utilizando a simetria ou através das expressões de redução.

a) $sen\,\frac{5\pi}{6} =$
b) $\cos 135° =$
c) $tg\,\frac{5\pi}{4} =$
d) $sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$
e) $tg(-150°) =$

ATIVIDADE 3 | UARC 3

Título: Arcos côngruos

Objetivo: Definir arcos côngruos com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Contextualização: A intenção de estimular a pesquisa e a discussão sobre os personagens da antiga Grécia (Tales de Mileto e Pitágoras), é mostrar para os alunos que assuntos que hoje são estudados na trigonometria surgiram por volta de 600 a 200 a.C, ou seja, que a matemática não é uma disciplina que já nasceu pronta e acabada, muito pelo contrário, o que sabemos hoje é fruto de muitos estudos e discussões de personagens durante séculos. O tema sugerido para a próxima atividade é sobre os personagens: Erastóstenes (276 – 194 a.C), Hiparco de Nicéia (180 – 125 a.C) e Cláudio Ptolomeu (168 – 100 a.C), bem como as contribuições desses estudiosos para a trigonometria.

Intervenção Inicial (I_i): O que seriam arcos côngruos?

Intervenção Reflexiva (I_r): o que os arcos 45°, 405°, 765° e 1125° possuem em comum? Utilize o material manipulável para auxiliar na análise.

Intervenção Reflexiva (I_r): Após as discussões sobre Tales de Mileto e Pitágoras, bem com as contribuições desses estudiosos para a trigonometria, apresente as suas percepções sobre os tópicos abordados.

Intervenção Exploratória (I_e): Busque generalizar uma expressão que represente a família de arcos côngruos a 60°.

Intervenção Exploratória (I_e): Seja o ponto P, o final do arco 2550º. Como seria possível encontrar o seno, o cosseno e a tangente desse arco? Qual seria o primeiro arco da família de arcos côngruos do 2550°? Quantas voltas o ponto P deu no círculo trigonométrico para gerar esse arco?

Intervenção Formalizante (I_f):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r):

Encontre a 1ª determinação positiva do arco $\frac{33\pi}{4}$

Sugestão: transformar o arco que está em radiano para grau, ou articular a fração para aparecer um múltiplo de 2π.

Intervenção Avaliativa Aplicada ($\boldsymbol{IAa}$):

Encontre a 1ª determinação positiva dos arcos e em seguida calcule o valor das razões trigonométricas abaixo. Utilize o material manipulável virtual como ferramenta auxiliar.

a) tg 1130°=
b) $\cos\frac{45\pi}{4} =$
c) sen 5570º =
d) $tg(-945º) =$

ATIVIDADE 4 | UARC 4

Título: Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas.

Objetivo: Resolver Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas, utilizando o conhecimento adquirido nas atividades anteriores, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Contextualização: Nessa atividade, a discussão inicial será sobre os personagens Erastóstenes com o feito histórico de medição da circunferência da terra através de semelhança de triângulos e razões trigonométricas, Hiparco de Nicéia considerado o Pai da Trigonometria sendo o autor da primeira construção da tabela trigonométrica e Cláudio Ptolomeu, autor de um dos textos científicos mais influentes de todos os tempos, um tratado composto por 13 livros conhecido como Almogesto e contribuições significativas para a trigonometria.

Intervenção Inicial (I_i): O que é uma equação matemática?

Intervenção Reflexiva (I_r): Como você reconheceria uma equação trigonométrica?

Intervenção Reflexiva ($\boldsymbol{I_r}$): Após as discussões sobre Erastóstenes, Hiparco de Nicéia e Cláudio Ptolomeu, bem com as contribuições desses estudiosos para a trigonometria, apresente as suas percepções sobre os tópicos abordados.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $senx = \frac{1}{2}$, além da solução $x = \frac{\pi}{6}$ ou x = 30º. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $\cos x = \frac{1}{2}$, além solução $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 60°$. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $tgx = 1$, além da solução $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = 45°$. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Formalizante ($\boldsymbol{I_f}$):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r):

Encontrar a solução geral de:

$$\cos x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$$

Sugestão: Dividir a relação fundamental da trigonometria por $\cos^2 x$.

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r):

A soma das raízes da equação $\cos x + sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$, com $0 \leq x < 4\pi$.

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):

Encontre a solução geral das seguintes Equações Trigonométricas e represente no círculo trigonométrico. Utilize o material manipulável passa auxiliar nas resoluções.

a) $\cos\sec x = \sqrt{2}$
b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $3.tg^2 x = 1$
d) $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscar metodologias que fujam do tradicionalismo para o ensino de matemática é uma tarefa que requer dedicação e comprometimento com a profissão. E quando se trata da trigonometria a situação ainda é mais delicada, visto que o assunto é de complexa compreensão por parte dos alunos e os professores, em geral, possuem dificuldades durante o processo de ensino, por sem ministrado, ainda nos dias atuais, de forma tradicional na maioria dos casos.

Mediante o exposto, foi elaborado um produto educacional gerado com os desdobramentos da dissertação "Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas" do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. As atividades da sequência didática, estão articuladas nos moldes do construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017).

A Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) é o instrumento científico que deu o suporte teórico para esse trabalho, por intermédio das situações didáticas com o intuito de potencializar as interações entre o aluno, saber escolar e o sistema educacional. A sequência didática está organizada, estruturada e os assuntos estão articulados de modo que o ensino do objeto de conhecimento possa ser transmitido com clareza e objetividade.

As ferramentas indicadas para potencializar as atividades da sequência didática são os softwares de geometria dinâmica (Geogebra e Desmos) que demonstraram ser fortes aliados na construção de conceitos trigonométricos e no dinamismo das intervenções. Além disso, foi proposto antes do início das UARC uma discussão sobre fatos históricos pré-selecionados pelo professor/mediador, com o intuito de gerar curiosidade, interesse, interações, estímulo à pesquisa.

. As teorias indicadas para as análises dos resultados são a Análise Microgenética de Góes (2000) que por intermédio de registros (videogravações) das atividades são organizados por episódios, segmentos e turnos de modo que sejam verificadas as relações intersubjetivas, condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos, dessa forma tanto as dificuldades quanto os indícios de aprendizagem são evidenciados.

Outra teoria que é indicada para as análises dos resultados é a Análise do Discurso de Mortimer e Scoot (2002), que analisa os tipos de discursos e interações na sala de aula entre professores e alunos. Os tipos de abordagem comunicativa, bem como os padrões de interações determinam as construções de significados e favorecem o ambiente de estudos para o aprendizado.

Esses mecanismos metodológicos e pedagógicos foram utilizados na dissertação base desse produto e em outros trabalhos científicos e demonstraram resultados positivos e satisfatórios para o ensino de matemática. Desse modo, sugere-se a utilização desse produto educacional para professores e alunos que buscam aprimorar seus conhecimentos em trigonometria, especificamente, na resolução de equações trigonométricas fundamentais e clássicas.

Para a continuidade desse trabalho, sugere-se o desenvolvimento de novos produtos educacionais, utilizando a sequência didática de equações trigonométricas clássicas, com intervenções mais rebuscadas, fatos históricos pré-selecionados que estejam relacionados com o objeto de conhecimento em foco, com o propósito de aprofundar os conhecimentos nessa área. As atividades podem ser separadas de acordo com a técnica de resolução de cada equação trigonométrica. Esse recurso metodológico pode ser adaptado para a realidade de cada turma e modelado de acordo com a metodologia de cada professor.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORTOLI, Gladis. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa.** Lajeado, 2012.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed., São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. MEC: Brasília, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos: história e matemática em sala de aula** – SBEM-PA, 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação – reflexões sobre educação e matemática**. 3. ed., Campinas – SP: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática: dos números à geometria**. Osasco: Edifieo, 2008.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem Microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel História nas aulas de Matemática: **fundamentos e sugestões didáticas para professores** / Iran Abreu Mendes; Miguel Chaquiam. Belém: SBHMat, 2016.

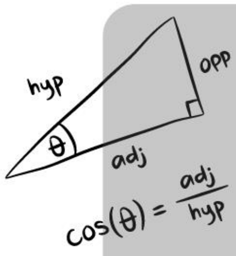
MORTIMER, E. F. e SCOTT, P**. Atividades discursivas nas salas de aulas de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino**. Revista Investigação no Ensino de Ciências, v.7, n.3, 2003.

NACARATO, Adair Mendes. **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 1. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** Viçosa – MG, 2013.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Ed. Vozes, 2013.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TRAVESSA DJALMA DUTRA, S/N - TELÉGRAFO
66050-540
BELÉM(PA)