Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

José Carlos Barros de Souza Júnior

Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas

Belém (PA)
2024

José Carlos Barros de Souza Júnior

Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de pesquisa: Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Belém (PA)
2024

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Souza Junior, José Carlos Barros de
Uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas / José Carlos Barros de Souza Junior, orientação de Natanael Freitas Cabral - Belém, 2024.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2024.

1.
1.Trigonometria-Estudo e ensino.2. Equações. 3.Prática de ensino. I. Cabral, Natanael Freitas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 516.24

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

JOSÉ CARLOS BARROS DE SOUZA JÚNIOR

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data de aprovação: 05/04/2024

Banca examinadora

____. Orientador

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

____. Examinador Interno

Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

____. Examinador Externo

Prof. Dr. Gustavo Nogueira Dias
Doutor em Humanidades e Arte – Ciências da Educação – Universidade Nacional de Rosário
Escola Tenente Rego Barros – I COMAR

Belém – PA

2024

AGRADECIMENTOS

A Deus que esteve comigo em todos os momentos, me fortaleceu quando eu mesmo achei que não conseguiria.

A minha mãe Maria Alice e ao meu pai José Carlos (in memoriam), por sempre me incentivarem e apoiarem em todos os momentos.

Aos meus filhos Carlos Eduardo e Pedro Miguel, vocês são a minha motivação diária.

Ao Colégio Tenente Rêgo Barros e aos meus alunos, em especial aos que participaram desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral, pelas orientações, apoio e compreensão durante todo o percurso dessa jornada.

Aos meus colegas de trabalho, que sempre me estimularam na busca por mais essa qualificação profissional.

RESUMO

SOUZA JÚNIOR, José Carlos Barros de. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas.** 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2024.

Apresento a pesquisa desenvolvida, por intermédio do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará, relativo ao ensino e aprendizagem sobre Equações Trigonométricas Fundamentais. A pergunta norteadora da pesquisa foi: *De que forma uma Sequência Didática, desenvolvida de acordo com o modelo estruturante (UARC), com o auxílio de material concreto e softwares, contribuirá para melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas?* Para responder essa questão definiu-se o objetivo geral de propor o desenvolvimento de uma Sequência Didática para potencializar o ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas Fundamentais. A sequência didática está estruturada conforme o construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), de acordo com Cabral (2017). Foram analisadas dissertações e livros didáticos sobre o tema, além de ter sido passado um questionário via Google Forms para professores de matemática do Ensino Médio e alunos egressos com perguntas pertinentes à pesquisa, os dados coletados corroboraram com os objetivos metodológicos traçados. A sequência didática foi aplicada para uma turma experimental e na turma de controle de processo foi ministrado o conteúdo de forma tradicional, após a conclusão das aulas e dinâmicas, foi passado um teste de verificação de aprendizagem para as duas turmas. A análise dos resultados está moldada de acordo com as teorias Análise Microgenética de Góes (2000) e Análise do Discurso de Mortimer e Scoot (2002). Os indícios de aprendizagem transcritos, juntamente com a média das notas do teste de verificação de aprendizagem da turma experimental, indicaram que a utilização da sequência didática para o ensino de equações trigonométricas fundamentais com o auxílio de materiais manipuláveis, provou ser uma alternativa metodológica eficiente para o ensino. Essa dissertação gerou o produto educacional intitulado “Uma Sequência Didática para o Ensino de Equações Trigonométricas”[1].

Palavras – Chave: Educação Matemática. Ensino de Matemática. Equações Trigonométricas. Materiais Manipuláveis. Sequência Didática.

[1] Link do Produto Educacional:

ABSTRACT

SOUZA JÚNIOR, José Carlos Barros de. **A Didactic Sequence for Teaching Trigonometric Equations.** 2024. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) - State University of Pará, Belém, 2024.

I present the research developed, through the Postgraduate Program in Mathematics Teaching (PPGEM), at the State University of Pará, regarding teaching and learning about Fundamental Trigonometric Equations. The guiding research question was: How will a Didactic Sequence, developed according to the structuring model (UARC), with the help of concrete material and software, contribute to improvements in the teaching and learning process of Trigonometric Equations? To answer this question, the general objective was defined to propose the development of a Didactic Sequence to enhance the teaching and learning of Fundamental Trigonometric Equations. The didactic sequence is structured according to the construct of Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC), according to Cabral (2017). Dissertations and textbooks on the topic were analyzed, in addition to a questionnaire being sent via Google Forms to high school mathematics teachers and graduating students with questions relevant to the research, the data collected corroborated the methodological objectives outlined. The didactic sequence was applied to an experimental class and in the process control class the content was taught in a traditional way. After completing the classes and dynamics, a learning verification test was given to both classes. The analysis of the results is modeled according to the theories Microgenetic Analysis by Góes (2000) and Discourse Analysis by Mortimer and Scoot (2002). The transcribed evidence of learning, together with the average scores from the learning verification test of the experimental class, indicated that the use of the didactic sequence for teaching fundamental trigonometric equations with the aid of manipulative materials proved to be an efficient methodological alternative for the education. This dissertation generated the educational product entitled “A Didactic Sequence for teaching trigonometric equations”[2].

Keywords: Mathematics Education. Teaching Mathematics. Trigonometric Equations. Manipulable Materials. Following teaching.

[2] Link do Produto Educacional:

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É notório que a Matemática é uma área do conhecimento que os alunos possuem grandes dificuldades para compreender e, de fato, aprender. Com isso, gera insatisfação, medo e falta de interesse para o aprendizado. Dessa forma, surgem obstáculos a serem superados, juntamente com o desafio de buscar alternativas que suplantem, ou minimizem tais adversidades.

Somado a essa problemática, tem-se o pouco tempo para trabalhar o conteúdo, a carência de recursos didáticos e a falta ou a baixa oferta de formação continuada para que os professores se favoreçam de metodologias propícias para o processo educacional.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PNC)

> Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo, se resume a decorar uma série de fatos matemáticos sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade. Tal constatação, nos leva a assumir o desinteresse, na falta e empenho e mesmo na preocupação diante dos resultados insatisfatórios ou no sentimento de insegurança, bloqueio e até uma certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que leva a se afastar da Matemática em situação futura (Brasil,1998, p. 79)

Um assunto que requer atenção com relação as metodologias de ensino é a trigonometria, em muitos casos, visto pelo aluno como um conteúdo complexo e com pouca aplicabilidade. Apesar da sua importância, tradicionalmente, a trigonometria é apresentada desconectada da realidade, com excessos de cálculos. Dessa forma, os PCN chamam atenção para alguns detalhes

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (Brasil, 2000, p.44).

Nesses 10 anos ministrando aulas de matemática, esbarrei em diversos percalços provenientes da profissão. No início era pela falta de experiência, maturidade profissional e insegurança. Depois de certo tempo, mesmo com experiência, senti que faltava algo a mais para agregar no meu trabalho. A qualificação profissional já estava em minha mente, mas depois que comecei a ministrar aulas, a rotina, por diversas vezes sabotou os meus planos. Tive a oportunidade, em 2014, de fazer uma especialização em matemática básica, logo após a minha graduação, os conhecimentos adquiridos na ocasião me ajudaram muito no início do meu trabalho.

Ser professor de matemática não é fácil, desde o início do processo eu sabia que grandes seriam os desafios e que eu precisava estar preparado para as situações vindouras. Em 2019, comecei a trabalhar no Colégio Tenente Rêgo Barros, situado em Belém, no Estado do Pará. Mediante essa nova realidade profissional, surgiu a autocobrança em elevar o nível técnico e pedagógico para proporcionar aulas de qualidade e ser o mais inteligível possível para os alunos da instituição. Aliado a essa necessidade, os meus colegas de profissão, desde a minha chegada, me estimularam muito a retomar os estudos, a ascensão acadêmica é muito valorizada por todos.

Dessa forma, em 2021, ingressei no Programa de Pós–Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM-UEPA). Ter a oportunidade de voltar a estudar na Universidade do Estado do Pará, reencontrar professores da época de graduação, foi motivo de grande nostalgia e felicidade para mim. Infelizmente como estávamos vivenciando um momento pandêmico, as aulas do Programa foram online, o que impossibilitou ter o contato físico com os meus colegas de turma e professores. Mesmo com essa problemática, os professores da Universidade nos proporcionaram, dentro das possibilidades da ocasião, o melhor.

O tema escolhido para esse trabalho surgiu através da minha experiência em sala de aula. Para ajudar na escolha, fiz um teste com alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Coloquei algumas equações simples para eles resolverem, do primeiro grau, do segundo grau, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Muitos conseguiram resolver as equações do primeiro e segundo grau, alguns conseguiram resolver a equação exponencial e logarítmica, porém a equação trigonométrica fundamental, poucos resolveram e dentre esse grupo, a maioria não apresentou a solução da equação completa. Perguntei para a turma o motivo pelo qual eles não haviam conseguido resolver aquela equação trigonométrica fundamental, a resposta foi que para eles, a trigonometria é um assunto de difícil compreensão, apesar de muitos deles também acharem os outros assuntos da matemática complicados, mas dentre todas as equações propostas, a trigonométrica era a mais complexa.

Confesso que por muito tempo ensinei trigonometria apenas utilizando os meios tradicionais. Depois de um tempo, comecei a utilizar a ferramenta educacional Geogebra para elucidar os gráficos das funções trigonométricas, esse recurso otimizou bastante as minhas aulas. Mesmo utilizando a ferramenta, organizando as aulas, as dificuldades em ministrar esse conteúdo sempre aparecem. Mediar conhecimentos sobre a trigonometria não é uma tarefa fácil, especificamente sobre as equações trigonométricas, o tema representa um problema para o aluno do Ensino Médio, que em muitos casos, não sabe apresentar a solução de uma equação trigonométrica fundamental. Então, essa situação foi motivadora para que eu pudesse desenvolver uma sequência didática com foco na resolução de equações trigonométricas fundamentais, fugindo do método tradicional e utilizando a tecnologia e metodologias diferenciadas na busca por melhorias de ensino.

Desse modo, busquei compreender melhor sobre esse objeto de conhecimento, como ele é apresentado no ensino básico, de que forma é trabalhado pelos professores, quais as relações e aplicações no dia a dia dos alunos, de que maneira as diretrizes educacionais tratam esse tema. Nessa perspectiva, o público-alvo dessa pesquisa foram os meus alunos do 2º ano do Ensino Médio, do Colégio Tenente Rêgo Barros, localizado em Belém do Pará, local onde ministro aulas nos dias atuais. Foi realizado uma revisão da literatura através de trabalhos científicos e livros didáticos que abordam o tema, além de ter aplicado um formulário via Google Forms para alunos egressos, ou seja, alunos do 3º ano do Ensino Médio, do Colégio que trabalho, além de professores de matemática que trabalham com o objeto de conhecimento em foco. Os dados coletados foram importantes para subsidiar o objetivo dessa pesquisa.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008), foi tratada nesse trabalho como suporte teórico, para que o objeto matemático tenha transposição didática, em outras palavras, seja organizado e repassado de forma que a comunicação fique mais acessível para o aluno assimilar e de fato aprender. Dessa forma, o professor, conhecimento matemático e o sistema educacional são peças importante para as evoluções educacionais.

O modelo estruturante utilizado como metodologia de ensino e aprendizagem e que auxiliou no desenvolvimento da Sequência Didática aplicada nesse trabalho, foram as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Esse construto, visa às limitações dos alunos, com procedimentos sensíveis, prediletar o ambiente pré-formal, ao invés de apresentar a formalização do objeto sem ter o contato com as argumentações, inquietações e problemas desses alunos com relação ao objeto matemático a ser trabalhado.

Foi utilizado na pesquisa a Análise Microgenética proposta por Góes (2000) como forma de apresentar os processos cognitivos de ensino e aprendizagem, para verificar particularidades e estabelecer padrões. Investigar as interações verbais durante a realização da sequência didática possibilitou análises aprofundadas e minuciosas dos indícios de aprendizagem. A coleta dos dados foi feita através de gravações de áudio e imagens.

A Análise do Discurso de Mortimer e Scott (2002), é uma ferramenta analítica sociocultural presente na aplicação da sequência didática, especificamente durante o processo de interações entre os participantes. O discurso interativo-dialógico foi considerado durante as atividades, explorar o ponto de vista dos alunos oportunizou novas ideias, perguntas, interações entre as equipes, o que de certo modo, estimulou os envolvidos na busca pelas respostas das intervenções. Além de aplicar o discurso interativo de autoridade para guiar os alunos através de perguntas planejadas com o intuito de chegar a um objetivo específico dentro de cada atividade.

Dessa maneira, foi definido a questão norteadora da pesquisa: *De que forma uma Sequência Didática, desenvolvida de acordo com o modelo estruturante (UARC), com o auxílio de material concreto e softwares, contribuirá para melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas?*

Para atingir a questão norteadora, foi definido como objetivo geral propor o desenvolvimento de uma Sequência Didática para potencializar o ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas Fundamentais.

Para auxiliar a alcançar o objetivo geral da pesquisa, foi estabelecido os seguintes objetivos específicos:

- Analisar como o objeto Equações Trigonométricas vem sendo abordado nos trabalhos científicos e nos livros didáticos;
- Examinar as necessidades de Ensino e Aprendizagem de Equações Trigonométricas;
- Elaborar uma sequência didática utilizando, como metodologia, as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), para o ensino de Equações Trigonométricas Fundamentais;
- Utilizar material manipulável concreto e virtual como ferramentas auxiliares como o intuito de dinamizar a sequência didática.

No 2º capítulo, foi abordado uma investigação sobre trabalhos desenvolvidos na linha de conhecimento de trigonometria, bem como estudos de livros didáticos nos capítulos referentes ao objeto de conhecimento, no intuito de angariar dados que possam contribuir para esta pesquisa, a fim de compreender como o ensino desse assunto em destaque é estudado por pesquisadores e de que forma é desenvolvido e trabalhado em sala de aula por intermédio do material didático.

No 3° capítulo, foram descritos os resultados de uma pesquisa feita por meio de formulários (Google Forms), com professores de matemática do Ensino Médio e com alunos egressos, ou seja, alunos do 3º ano do Ensino Médio que estudaram o assunto de trigonometria no ano anterior. O conteúdo da pesquisa visou buscar informações acerca do ambiente escolar, além de contribuir com os objetivos desse trabalho.

No 4º capítulo intitulado “Aspectos Históricos” foram abordados recortes históricos de grandes eventos que marcaram gerações e feitos matemáticos de estudiosos na área de conhecimento da trigonometria. Conectar o ensino da matemática com contextos históricos proporciona um ambiente de aprendizagem mais aprazível e dinâmico. Dessa forma, objetivou-se conectar esses recortes históricos com o produto educacional gerado a partir dessa pesquisa.

No 5° capítulo foram apresentados os conceitos trigonométricos, com foco na trigonometria que envolve o círculo trigonométrico, pois esses conceitos são pré-requisitos importantes para que o aluno consiga compreender as equações trigonométricas fundamentais. No final da parte teórica, foram trabalhadas questões resolvidas sobre equações trigonométricas que complementam o capítulo.

No capítulo 6 foram expostos os procedimentos metodológicos da pesquisa. Uma sequência didática nos moldes do construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) para o ensino de equações trigonométricas fundamentais foi apresentada, tendo como público-alvo os alunos do 2º Ano do Ensino Médio do Colégio Tenente Rêgo Barros, situado em Belém do Pará.

Foram comentadas, no capítulo 7, as análises da pesquisa. A Análise Microgenética juntamente com a Análise do Discurso foram as teorias que deram o suporte na busca por dados que evidenciassem indícios de aprendizagem. No 8º capítulo, discorreu-se sobre as considerações finais desse estudo, que por intermédio dos procedimentos metodológicos, das intervenções e de todos os dados coletados no decorrer do processo, foi possível identificar indícios de aprendizagem para uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas. No capítulo 9 foram expostas as referências bibliográficas utilizadas na construção desse trabalho.

1. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Nesse capítulo, têm-se por finalidade, perpassar o contexto de informações dos pressupostos teóricos e metodológicos que estruturam e fundamentam esse trabalho.

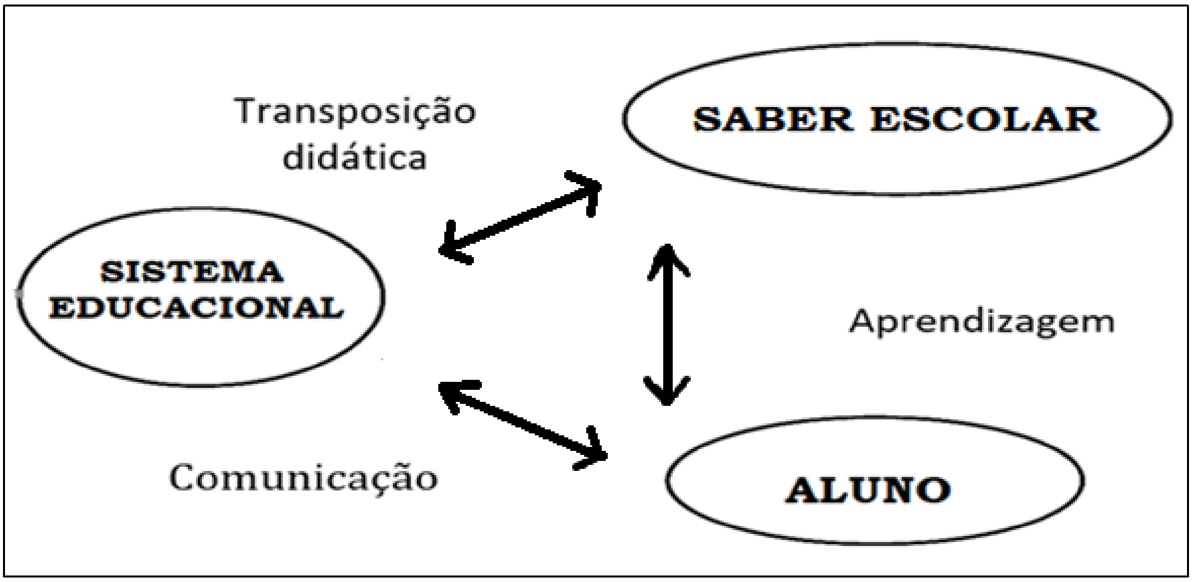
1.1 TEORIA DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), do educador matemático francês Guy Brousseau, surgiu na década de 70, por meio de estudos desenvolvidos no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM) durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que teve como principal objetivo aproximar a matemática ensinada no ensino básico com a matemática estudada e desenvolvida por pesquisadores da área. A TSD tem como propósito fundir os conceitos matemáticos, de modo a conectar o professor, aluno e o conhecimento matemático no processo de ensino e aprendizagem.

Brousseau elaborou essa teoria baseada nas teorias construtivistas de Piaget – Epistemologia genética, defende que o desenvolvimento do indivíduo passa por várias etapas através do equilíbrio entre a assimilação - extrair dados que obtém no exterior, ou seja, no ambiente e a acomodação – adaptar esses dados a estrutura cognitiva já existente, resultando em adaptação – reação do organismo que se modifica de alguma maneira de modo a incorporar dinamicamente a nova informação e no sócio construtivismo de Vygotsky que atribui a evolução do indivíduos através da linguagem, interações sociais e culturais . Nesse sentido, define-se situação didática como um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, que compreende eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber construído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (Brousseau, 1986).

A figura 1 sintetiza o sistema didático, proposto por Brousseau, que entende as relações didáticas como uma comunicação de informações envolvendo o saber escolar, o sistema educacional e aluno.

Figura 1: Relações Didáticas



Fonte: Brousseau (2008).

Ocorrerá uma situação didática sempre que houver intencionalidade do professor, de propiciar ao aluno a aprendizagem de um determinado assunto de forma organizada, através de uma série de mensagens, sendo o aluno o responsável por extrair as informações que lhes serão pertinentes.

De acordo com Brousseau (2008), uma "situação" é um modelo de interação entre um sujeito e um determinado ambiente. O recurso de que dispõe o sujeito para alcançar ou manter um estado favorável nesse ambiente é uma gama de decisões que dependem do uso de conhecimento preciso. Considera-se o meio como um subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.

O autor, classifica as situações didáticas em situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

Situação de Ação

Modelo implícito, que exprime o conjunto de relações ou regras segundo as quais o aluno toma suas decisões de forma intuitiva, sem consciência conceitual sobre determinado objeto de conhecimento.

De acordo com Brousseau (2008), para um sujeito, ‘agir’ consiste em escolher diretamente os estados do ambiente antagônico com base em suas próprias motivações. Se o ambiente reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (feedback), antecipar suas reações e levá-las em consideração em suas próprias ações futuras. O conhecimento permite produzir e mudar essas “antecipações”. A aprendizagem é o processo pelo qual o conhecimento é modificado. Podemos representar esse conhecimento por meio de descrições de táticas (ou procedimentos) que o sujeito parece seguir ou por declarações do que ele parece ter em mente, mas são apenas projeções. A manifestação observável é um padrão de resposta explicado por um modelo implícito de ação.

Situação de Formulação

O conjunto de ações implícitas, por vezes, pode tornar-se complexo devido as projeções de um determinado conhecimento não estarem organizadas na mente do aluno. Sendo necessário a organização das ideias, conforme Brousseau (2008), a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retornar a ele (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico).

Situação de Validação

Nesse momento, o conhecimento em questão precisa ser adaptado, corrigido, confrontado, seja com experimentação, baseado em um conhecimento já estabelecido, confronto de ideias, quando houver dúvidas entre o emissor e o receptor das informações. Dessa forma, um conhecimento para ser validado, necessita estar convergindo para um mesmo foco. De acordo com o autor, esquemas de ação e formulação implicam em processos de correção, sejam empíricos ou apoiados em aspectos culturais, para garantir a pertinência, adequação, adaptação ou conveniência do conhecimento mobilizado.

Situação de Institucionalização

No decorrer das experiências desenvolvidas pelos professores, houve a necessidade de revisar, formalizar e generalizar conceitos trabalhados em sala de aula. Não há sentido no processo de ensino e aprendizagem se o emissor repassar as informações e não checar as consequências que o aprendizado desenvolvido em determinado momento gerou. Para Brousseau (2008), os professores realmente tinham que “fazer alguma coisa”, eles tinham que prestar contas do que os alunos haviam feito, descrever o que havia acontecido e o que estava ligado ao conhecimento em questão, dar aos alunos resultados de ensino, assumir um objeto de ensino, identificar, aproximar produções de conhecimento de outras criações (culturais ou programáticas), indicar quais poderiam ser reutilizadas novamente.

De acordo com o autor, o fato de afirmar a consistência do conjunto de modelagens eliminando aquelas que são contraditórias exige trabalho teórico, mostraram a necessidade de levar em conta fases de institucionalização que dariam a certos conhecimentos o indispensável estado cultural do conhecimento.

Situação Adidática

Um ponto de fundamental importância a ser considerado para a pesquisa, no que tange a aplicabilidade da sequência didática, foi o conceito de situação adidática, que se remete à uma ocasião onde o intuito de ensinar não é revelado ao aluno, mas foi presumido, organizado e desenvolvido pelo professor para fornecer condições favoráveis e propícias ao ensino.

Para Brousseau (2008), as situações adidáticas, de acordo com as concepções atuais de ensino, se configuram por apresentarem provocações do professor por meio da escolha sensata dos “problemas” que ele propõe aos alunos e as adaptações desejadas. Esses problemas, escolhidos de forma que o aluno possa aceitá-los, devem conseguir, por seu próprio movimento, que ajam, falem, reflitam e evoluam. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e quando ele produz sua resposta, o professor se recusa a intervir como provedor do conhecimento que ele quer ver aparecer, para que dessa forma, possa construí-lo sem ter em mente razões didáticas.

Desse modo, antes de aplicar a sequência didática de Equações Trigonométricas Fundamentais, preparei os alunos com os conhecimentos prévios necessários, instruções sobre a utilização das ferramentas que foram utilizadas no processo, para que com a capacidade cognitiva dos envolvidos, fosse possível construir o conhecimento do objeto da pesquisa, mediando as interações através das intervenções. Propus o problema de forma que eles aceitassem o desafio de encontrar as soluções, por meios próprios, com o foco nos objetivos de cada atividade, sendo a Teoria das Situações Didáticas o instrumento científico que deu o suporte necessário para o desenvolvimento desse trabalho.

1.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ORGANIZADA PELO CONSTRUTO DAS UARC

Nesta seção será discutido a respeito de Sequência Didática e como é possível trabalhar essa metodologia, aliada com as UARC na construção do ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas.

Para Zabala (1998, p.18) a sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos. Ou seja, para o autor esse procedimento educacional sistêmico, apresenta caminhos definidos para objetivar uma determinada área de conhecimento em questão.

Segundo Oliveira (2013, p.39), sequência didática é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem. Nesse aspecto, as sequências didáticas podem ser entendidas como um conjunto de intervenções planejadas pelo professor, para que os envolvidos no processo, de fato, compreendam os conteúdos trabalhados.

> Esse conjunto de intervenções “passo a passo” dirigido pelo professor com a finalidade de atingir objetivos de aprendizagem sugere a ideia dos elos conectados de uma corrente. Cada elo posterior está devidamente articulado aos elos anteriores e permite outras articulações com elos subsequentes. Uma forma de rede que se estrutura a partir dessas articulações conceituais. (Cabral,2017, p. 33)

Ao começar o trabalho faz-se necessário reunir informações prévias dos conhecimentos dos alunos e, depois desse momento, organizar uma sequência de aulas e problemas diferenciados e investigar os vestígios de aprendizagem. Gradualmente, aumenta-se o nível dos assuntos e orientações, permitindo um aprofundamento do tema em foco.

“É, neste sentido, que ao se perceber a potencialidade pedagógica do ensino pautado na mediação de uma sequência didática se faz necessário que o professor faça um diagnóstico para estabelecer a relação adequada entre aquilo que os alunos sabem sobre o que lhes será ensinado – conhecimentos mínimos necessários para apreensão do novo objeto – e a estrutura da sequência didática proposta para a aprendizagem do objeto em jogo” (Cabral, 2017, p.38).

> Resumindo, a sequência didática é um procedimento para sistematização do processo ensino e aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial informando aos alunos o real objetivo da realização da sequência didática no contexto da sala de aula, até o final da sequência para avaliar e informar os resultados. (Oliveira, 2013, p.40)

A sequência didática utilizada nesse trabalho está estruturada de acordo com os moldes do construto das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), sendo um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas (Cabral, 2017, p. 12).

Cabral (2017) apresenta seis categorias de intervenções estruturantes que se materializam de forma escrita nas sequências didáticas e são subdivididas em três classificações, são elas: Pré – formal, composta pela Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r) e Intervenção Exploratória (I_e), Formal, com a Intervenção Formalizante (I_f) e a Pós – formal, que integra a Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a). O autor apresenta uma intervenção oral, denominada Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO).

Pré – Formal

Intervenção Inicial $(\boldsymbol{I_i})$:O professor busca envolver o discente a partir de um discurso didático-pedagógico, na busca da percepção ativa (de maneira empírica e intuitiva) das regularidades relacionadas a determinado conceito, ou seja, o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida;

Intervenção Reflexiva $(\boldsymbol{I_r})$: Sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve, nessa perspectiva, o aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências;

Intervenção Exploratória (I_e): Aprofundar as percepções dos alunos quanto aos questionamentos expostos nas intervenções reflexivas. Para isso, o professor solicita que os estudantes executem procedimentos direcionados como simulações, descrições, preenchimentos de tabelas, elaboração de gráficos e observações.

Formal

Intervenção Formalizante (I_f): Nesse estágio o professor reelabora as verdades "redescobertas" pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.

Pós – Formal

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Tem como finalidade estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. O que deve ser fortalecido nessa etapa é um aspecto igualmente desprezado pelo ensino tradicional que é a justificativa de procedimentos adotados como base as verdades empírico-intuitivas estabelecidas nas reconstruções conceituais. A ideia é sair da lógica da "reprodução algorítmica" para uma lógica da "justificativa de procedimentos" a partir das noções conceituais.

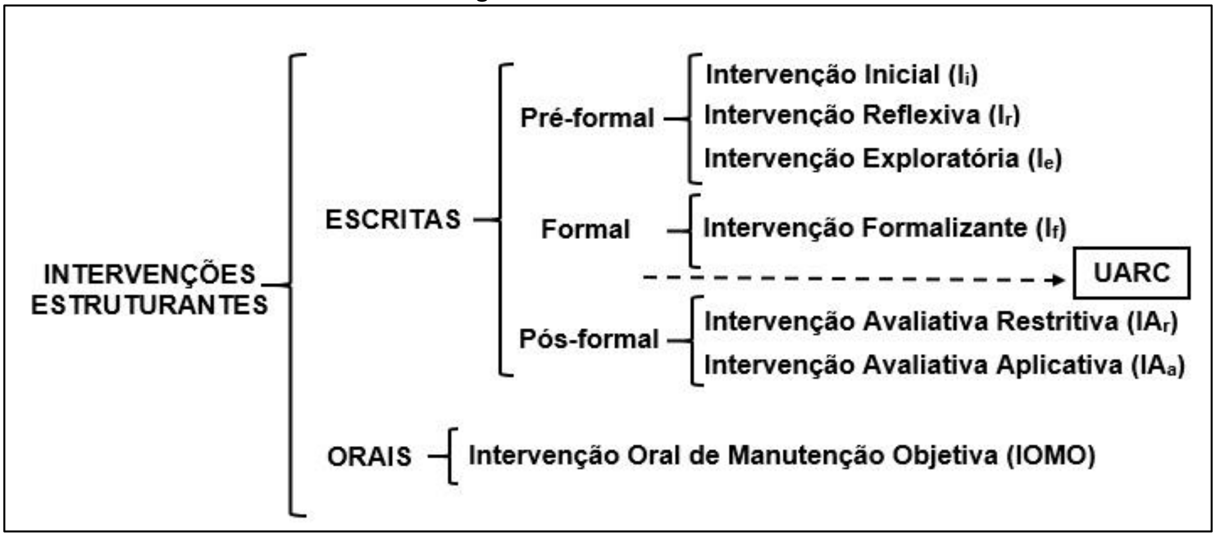
Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa): A proposta dessa intervenção é a resolução de problemas de aplicação, pois têm-se o nível mais elevado de assimilação dos conceitos abordados. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

Oral

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): Pode ser compreendida como uma espécie de sequência didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual. Cuja finalidade é manter a objetividade planejada, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática.

As UARC como modelo estruturante de sequência didática, possui um desempenho intencional através das intervenções, com o intuito de instigar a aprendizagem. Dessa forma, podemos sintetizar a teoria com a seguinte figura.

Figura 2: Estrutura UARC



Fonte: Cabral (2017, p.97).

Ao projetar uma sequência didática, o professor conjectura o caminho que o aluno seguirá até que de forma empírico-intuitiva o conhecimento é construído ou reconstruído de acordo com as interações ou estímulos previstos na experimentação. Entretanto, isso pode não acontecer pois é necessário considerar possíveis problemas durante o processo, a falta de compreensão do aluno devido a carência de conhecimentos prévios, intervenções com níveis de complexidade inapropriadas para a situação, falta de interesse por parte do aluno em participar da atividade.

Conforme Cabral (2017), a figura 3 representa as Zonas de Tensão Discursivas Alfa, Beta e Gama, no qual, a linha mais escura representa os objetivos didáticos do professor, ou seja, as pretensões em sala de aula e a linha clara representam as ações dos alunos mediante as provocações da Sequência Didática e das intervenções orais do professor.

Figura 3: Zonas de Tensão Discursivas

Fonte: Cabral (2017, p.47).

Cabral (2017), esclarece o que significa cada uma dessas zonas, nas palavras do autor a primeira zona de tensão discursiva de Alfa. É a zona inicial onde as primeiras articulações argumentativas são propostas em direção aos objetos de aprendizagem. A lógica desse momento é simples: quanto menor o domínio dos alunos diante dos objetos de conhecimento maior será a quantidade de intervenções dirigidas pelo professor. A segunda zona é a Beta. É a zona intermediária e marcada por uma tensão discursiva menos intensa. Aqui o professor percebe que certas conquistas de aprendizagens fundamentais estão sendo consolidadas. A zona discursiva Gama é final com ênfase em avaliar o nível de segurança conceitual e algorítmica do aprendiz. É um momento em que o professor percebe que o domínio do objeto de conhecimento já se mostrou relativamente consolidado pela classe.

As intervenções estruturantes foram importantes no processo de aplicação da sequência didática para o ensino de Equações Trigonométricas Fundamentais, pois foi valorizado o ambiente pré-formal dos participantes, análise dos conhecimentos prévios e a busca dos estímulos certos através das intervenções para que os alunos compreendessem a construção formalizante do conteúdo e a busca no ambiente pós-formal pela concretização de aprendizagem dos conceitos abordados nas UARC.

1.3 ANÁLISE MICROGENÉTICA

A Análise Microgenética, teoria utilizada nesse trabalho, na perspectiva de Maria Cecília Rafael de Góes, Góes (2000), aborda uma metodologia de coleta de informações, registros das aulas com análises sociais entre sujeitos, na busca por minúcias e um determinado e curto espaço de tempo, através de videogravações no campo educacional e da psicologia.

Segundo Góes (2000, p.09), de um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção aos detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. Frequentemente, dadas as demandas de registro implicadas, essa análise é associada ao uso de videogravação, envolvendo o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição. A Análise Microgenética pode ser o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante.

A autora busca associar os estudos envolvendo à Análise Microgenética a matriz histórica – cultural, para diferenciar das outras teorias que analisam microeventos. Evidencia o estudo do funcionamento humano voltado para questões, semióticas, históricas e culturais. Além do embasamento teórico, faz-se necessário o conhecimento técnico na produção das videogravações para o suporte documental da teoria.

De acordo com Góes (2000), a Análise Microgenética, possui fundamentação nas teorias de Vygotsky, que dentro das suas linhas metodológicas, buscam atender duas teses: gênese social e funcionamento humano socialmente mediado. Segundo a autora, essas teses distinguem suas proposições de outras teorias em que, de um lado, o “genético” é fragilmente relacionado ao meio social e, de outro, o desenvolvimento é concebido como um curso de etapas progressivas. Tendo em vista a crença no papel fundante das relações sociais, Vygotsky concebe o estudo do homem enquanto ser que se constitui imerso na cultura nas experiências coletivas e práticas sociais e como produtor intérprete de sistemas semióticos. Além de diferenciar a sua teoria da análise de microeventos de Piaget, que focaliza no psicogenético, já Vygotsky caminha por um viés sociogenético, ou seja, ele acreditava que a gênese das relações psicológicas está nas relações sociais e que a constituição do funcionamento humano é socialmente mediada, num processo evolutivo e revolucionário.

Góes (2000), traz uma análise ao seu trabalho de Wertsch (1985), a respeito dos domínios genéticos, processos de desenvolvimento humano com viés histórico-cultural, abordados por Vygotsky, sendo eles a filogênese, a história sociocultural, a ontogênese e a microgênese. Segundo Wertsch (1985), Vygotsky focalizou seus estudos na ontogênese, processo de formação de um ser vivo e na microgênese, ou seja, na mistura de fatores biológicos, históricos e culturais no desenvolvimento humano.

Para Wertsch (1985), a análise microgenética

> envolve o acompanhamento minucioso da formação de um processo, detalhando as ações dos sujeitose as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo. Essa duração corresponde a uma ou poucas sessões, em delineamentos planejados ou a curtos segmentos interativos, em situações naturais. É uma espécie de “estudo longitudinal de curto prazo” e uma forma de identificar transições genéticas, ou seja, a transformação nas ações dos sujeitos e a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intra-subjetivo. Portanto, desse ponto de vista, é destacado o exame de processos interativos e de pistas de internalização. (Wertsch, 1985)

Góes (2000) faz uma análise a partir dos estudos de Wertsch (1985), sobre a transição genética (do intersubjetivo para o intra-subjetivo), destaca a importância do domínio ontogênico, ou seja, um apontamento aprimorado, mas não como fator diferencial suficiente do plano da microgênese e na curta duração dos eventos estudados, na necessidade de recortes que permitam examinar as minúcias, apontando o fato de que nos relatos de pesquisa, não há mensuração quanto ao tempo de duração de cada episódio em análise, dessa forma, um mesmo trabalho, de acordo com a autora, poderá apresentar episódios com durações variadas.

O modelo de transcrição em episódios, segmentos e turnos foi utilizado para organizar os áudios que continham pontos importantes e discussões relevantes para a pesquisa. Os turnos são registros das falas dos sujeitos envolvidos, como professor-aluno e aluno-aluno, os segmentos são um conjunto de turnos com objetivo delimitado como recorte de análise dos indícios de mudança de significado do objeto de estudo, com as primeiras percepções, avanços e retrocessos, ciclos incompletos, e por fim os episódios, que são um conjunto de segmentos com o objetivo de organizar as atividades presentes na experimentação.

Dessa forma, utilizei a Análise Microgenética no transcurso da sequência didática, ou seja, no momento das aplicações das atividades foi registrado as minúcias dos diálogos, através de gravações de áudios e recortes de partes importantes das atividades, com o intuito de verificar possíveis indícios de aprendizagem nas análises dos resultados dessa pesquisa.

1.4 ANÁLISE DO DISCURSO

O discurso e a interação são importantes ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. Sendo assim, são através das interações em sala de aula que os estudantes constroem significados e consequentemente despertam o interesse para o aprendizado. Improvavelmente, alguém destoaria da importância, em modos gerais, do discurso de professores e alunos no ambiente escolar, porém pouca relevância tem sido dada para esse tema, tanto entre professores, formadores de professores e investigadores da área.

“O que nos impressiona são as diferentes formas pelas quais os professores interagem com seus estudantes ao falar sobre os conteúdos científicos: em algumas salas, as palavras estão por toda a parte. Os professores fazem perguntas que levam os estudantes a pensar e então são capazes de articular suas ideias em palavras, apresentando pontos de vista diferentes. Em algumas ocasiões o professor lidera as discussões com toda a classe. Em outras, os estudantes trabalham em pequenos grupos e o professor desloca-se continuamente entre os grupos, ajudando os estudantes a progredirem nas tarefas. Em outras salas de aula, o professor faz uma série de questões e as respostas dos estudantes, na maioria das vezes, limitam-se a palavras aqui e acolá, preenchendo as lacunas no discurso do professor. Muitas vezes o professor é extremamente hábil nesse estilo de exposição, mas há muito pouco espaço para os estudantes fazerem e falarem algo, e muitos nunca abrem a boca”. (Mortimer e Scoot, 2002).

Os autores apresentaram cinco aspectos interrelacionados, com destaque para o papel do professor e estão agrupados em três classes, como mostra a figura a seguir.

Figura 4: Estrutura Analítica

Aspectos da Análise		
i. Focos do ensino	*1. Intenções do professor*	*2. Conteúdo*
ii. Abordagem	*3. Abordagem comunicativa*	
iii. Ações	*4. Padrões de interação*	*5. Intervenções do professor*

Fonte: Mortimer e Scoot (2002, p.285).

Focos do Ensino

Interações do professor: Nesse aspecto, o professor criará um problema, com o intuito de estimular os alunos, envolvendo a razão e emoção no processo de construção do conhecimento. Investigar as ideias dos alunos com relação ao conteúdo, introduzir embasamento científico (incluindo temas conceituais, epistemológicos, tecnológicos e ambientais) no plano social da sala de aula. Ensejar o pensamento, a fala e as novas ideias que poderão surgir, por meio de atividades com a turma. Além de transferir aos alunos o senso de responsabilidade e controle pelos assuntos abordados, para que eles possam desenvolver habilidades de aplicar os conhecimentos adquiridos em situações diversas.

Conteúdo: A análise do conteúdo do discurso da sala de aula foi analisada pelos autores e classificadas em três categorias: descrição, explicação e generalização. A descrição abrange enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. A explicação envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. A generalização compreende elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.

Abordagem

Abordagem Comunicativa: Para Mortimer e Scott (2002) “O conceito de ‘abordagem comunicativa’ é central na estrutura analítica, fornecendo a perspectiva sobre como o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas que resultam em diferentes padrões de interação. Os autores identificaram quatro classes de abordagem comunicativa, que são definidas por meio da caracterização do discurso entre professor e alunos ou entre alunos em termos de duas dimensões discurso *dialógico* ou *de autoridade*; discurso *interativo* ou *não-interativo"*.

Na primeira dimensão apresentam-se os seguintes discursos:

Discurso Dialógico: O professor considera o que o estudante tem a dizer do ponto de vista do próprio estudante, dessa forma oportuniza um ambiente de ideias, o que propicia análises de particularidades de cada aluno participante;

Discurso de Autoridade: O professor considera o que o estudante tem a dizer apenas do ponto de vista do discurso científico escolar que está sendo construído, ou seja, é analisado apenas questões envolvendo o conteúdo trabalhado e não há envolvimento de ideias;

Na segunda dimensão, têm-se os decorrentes discursos:

Discurso Interativo: De acordo com os autores, esse tipo de abordagem ocorre com a participação de mais de uma pessoa, ou seja, além da participação do professor é considerado as falas dos alunos;

Discurso Não- Interativo: Nessa etapa, ocorre a participação de uma única pessoa, isso significa que apenas a voz do professor é considerada no processo discursivo.

Essas dimensões ao serem combinadas, geram 4 classes de abordagem comunicativa, com o professor sendo o mediador e responsável na condução do discurso da classe, também sendo estendido para as interações/discussões apenas entre os estudantes.

Mortimer e Scott (2002), sintetizaram as características das dimensões que ao serem mescladas, surgiram as seguintes classes:

Interativo/Dialógico: professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista;

Não-Interativo/Dialógico: professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças;

Interativo/de Autoridade: professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico;

Não-Interativo / de Autoridade: professor apresenta um ponto de vista específico.

Ações

Padrões de Interação: Surgem no desenvolvimento da aula, com a troca de discursos, entre o professor e alunos. Uma tríade muito presente nos padrões de interações é a I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor). Existem outros padrões observados, de acordo com os autores, no processo de interações, não triádicas, do tipo I-R-P-R-P, I-R-F-R-F ou I-R-F-R-A onde o P representa uma ação discursiva de permitir o prosseguimento da fala do aluno e o F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.

Intervenções do Professor: Nesse aspecto, a intensão é analisar a maneira como o professor intervém no desenvolvimento da sua proposta de aula e quais são os mecanismos que utiliza para facilitar a aprendizagem dos estudantes. Segundo os autores, os tipos de intervenções são: dando forma aos significados; selecionando significados; marcando significados-chave; compartilhando significados; checando o entendimento dos estudantes; revendo o progresso da estória científica. Cada uma dessas intervenções necessita de uma direção, ou seja, objetivar um foco conjuntamente com a ação do professor no processo.

Vale ressaltar que a utilização da metodologia de ensino, Análise do Discurso, na aplicação da sequência didática, proporcionou interações verbais entre o professor e os alunos e entre os alunos, auxiliou na construção dos conhecimentos propostos nos objetivos das atividades, além de favorecer o ambiente de estudos para o aprendizado.

1.5 MATERIAL MANIPULÁVEL E SUA APLICABILIDADE NO CAMPO DA MATEMÁTICA

Nota-se a necessidade, mais expressiva, de propor maneiras de objetivar o ensino de matemática de forma eficiente e agradável para o aluno, que mesmo com o avanço dos estudos, metodologias e tecnologias, ainda encontram dificuldades para, de fato, aprender a matemática.

Tratando-se de trigonometria, a dificuldade ainda aumenta, visto que esse assunto, no geral, possui grandes barreiras no ensino e aprendizagem, seja na forma que o professor conduz o assunto, com tradicionalismo e falta de metodologias pedagógicas para que o ensino se torne instigante e acessível para o nível cognitivo do aluno, ou pela maneira que o aluno recebe o assunto em sala de aula, dando pouca importância, ignorando as aulas por não enxergar atrativos ou aplicabilidades do assunto no seu cotidiano.

A utilização de materiais manipuláveis em sala de aula é um recurso importante para dinamizar e chamar a atenção do aluno para o aprendizado. Nessa perspectiva, os PCN destacam algumas questões, dentre as quais, técnicas que o professor poderá utilizar no ambiente escolar, para propiciar um ensino efetivo, que vai além de expor o conteúdo para os alunos de forma mecanizada.

> Essas aprendizagens só serão possíveis na medida em que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias. (...) Além de organizador, o professor também é consultor nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos, etc. (Brasil, 1997, p. 31).

O material manipulável é um recurso palpável, de modo a simplificar o aprendizado de um conhecimento matemático para o aluno, além de estimular a criatividade, dinamizar as aulas, tornando-as mais interessantes e menos cansativas.

Para Passos (2009), a utilização de materiais manipuláveis, como recurso didático, nas aulas de matemática, serve para facilitar o processo de ensino e aprendizagem e agregam no momento de produção do conhecimento, pois os recursos envolvem uma diversidade de elementos utilizados, principalmente, como suporte experimental na organização dos procedimentos metodológicos. Porém, a autora considera que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor, aluno e conhecimento no momento em que um saber está sendo construído, ou seja, os recursos são suportes no processo e não devem ser responsabilizados ou comparados como autores principais na produção do conhecimento.

Passos (2009) ainda acrescenta que o professor precisa conhecer muito bem o material que utiliza a fim de assumir um papel de mediador durante a aula e possibilitar a construção do conhecimento, ou seja, de nada adianta o professor utilizar um material concreto ou virtual se não dominar as técnicas que envolvem esse material e de maneira simples e objetiva saber transmitir a finalidade desse instrumento para o aluno. Então, um material manipulável só será bem aproveitado em sala, se for dominado e conduzido pelo professor.

Material Manipulável Concreto e Virtual

Foi trabalhado nessa pesquisa a utilização de material manipulável, concreto e virtual como ferramenta auxiliar, no desenvolvimento da sequência didática sobre os conceitos pertinentes a trigonometria na circunferência como: unidades de medida de arco e de ângulo (grau e radiano), circunferência trigonométrica, arcos côngruos, valores notáveis de seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico, redução ao 1º quadrante, relação fundamental da trigonometria. Esses conhecimentos são importantes para que o aluno possa entender e resolver equações trigonométricas fundamentais.

De acordo com Lorenzato (2012), no caso da referência ao material didático como ‘concreto’ há pelo menos duas interpretações: a primeira delas refere-se ao palpável, manipulável e a segunda interpretação considerada mais ampla, inclui também as imagens gráficas, que são referentes ao próprio objeto concreto.

Em aulas que antecederam a sequência didática, os alunos receberam os conhecimentos prévios necessários sobre medidas de ângulos (grau e radiano), circunferência trigonométrica, além de outros conceitos básicos. Solicitei para que eles dividissem a turma em 6 grupos com 5 alunos por grupo. Para cada grupo foi atribuído a missão de produção de uma circunferência trigonométrica em cartolina e que esse material seria utilizado por eles nas atividades da sequência didática. O intuito de atribuir essa tarefa para eles foi de atrair a atenção dos grupos, transmitir senso de responsabilidade, apresentar as atividades e a visualização dos conceitos matemáticos por uma perspectiva diferente. Percebi, na ocasião, que os alunos ficaram motivados.

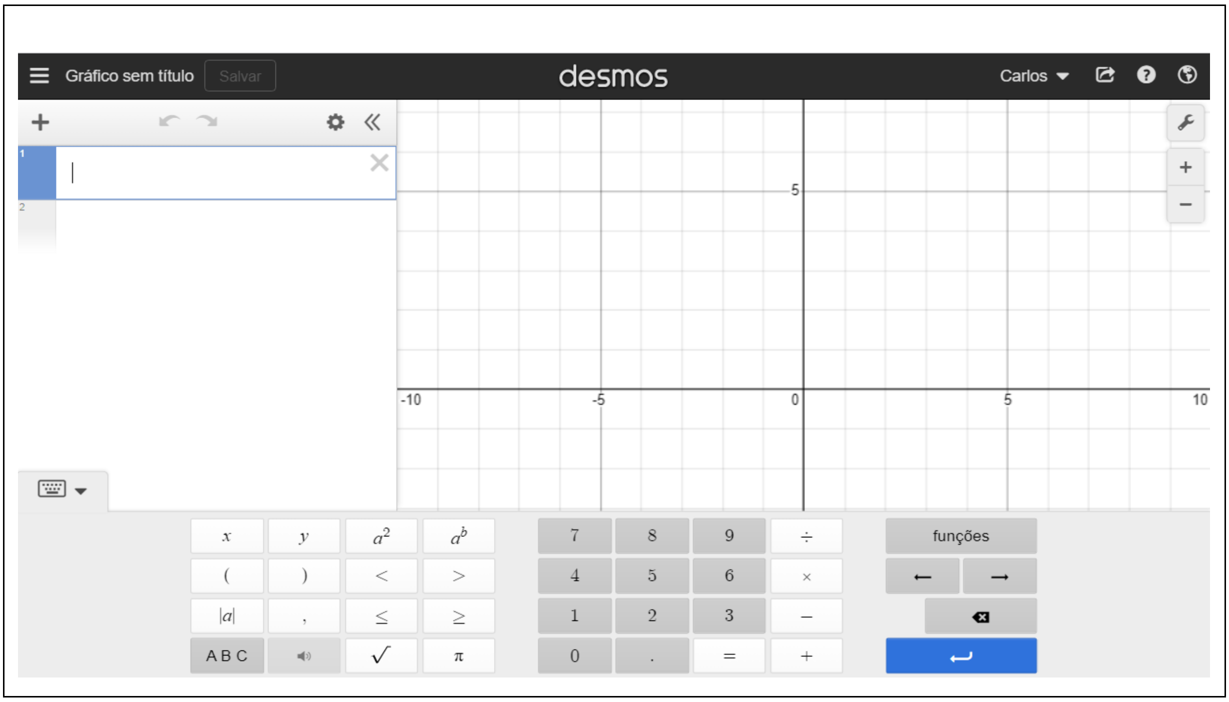
Ainda sobre as aulas que precederam a sequência didática, foi proposto e ensinado para os participantes a construção e manuseio das ferramentas digitais. Os grupos utilizaram notebooks, smartphones e tabletes, além de compartilhamento de internet por meios próprios. Os softwares apresentados nas aulas iniciais da pesquisa foi o Desmos e o Geogebra. Esses aplicativos deram o suporte auxiliar necessário no processo de ensino e aprendizagem, de todas as atividades propostas nesse trabalho, visto que os jovens estão cada vez mais próximos da tecnologia e possuem, no geral, facilidade em aprender a manusear aplicativos.

D'Ambrósio (1986) alerta para o fato de que, em vários casos, os alunos se mostram mais confortáveis em usar tecnologias como computadores e softwares do que os professores. Isso se deve ao fato de que as crianças e jovens estão usando essas tecnologias em brincadeiras e jogos destinados a eles.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) já enfatizam o uso de recursos tecnológicos na educação para melhorar o ensino. Seus argumentos são os seguintes: a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender".

O software Desmos foi desenvolvido em 2011 por Eli Luberoff com o intuito de construir gráficos de funções, criar tabelas, facilitar resoluções de situações problemas, visualização algébrica e uma calculadora com diversas funções. Para conseguir acessar o Desmos, disponibilizado gratuitamente nas lojas de aplicativos de smartphones, pode ser utilizado offline após ser instalado ou acessar pelo site (https://www.desmos.com/). Existe a possibilidade de salvar as construções gráficas, fazendo o login no aplicativo através da inserção de informações do usuário. A tela inicial do aplicativo, figura 5, apresenta um plano cartesiano quadriculado, espaço no lado esquerdo destinado para os comandos e no canto inferior esquerdo um botão que aciona a calculadora do aplicativo.

Figura 5: Tela inicial do Desmos



Fonte: https://www.desmos.com/

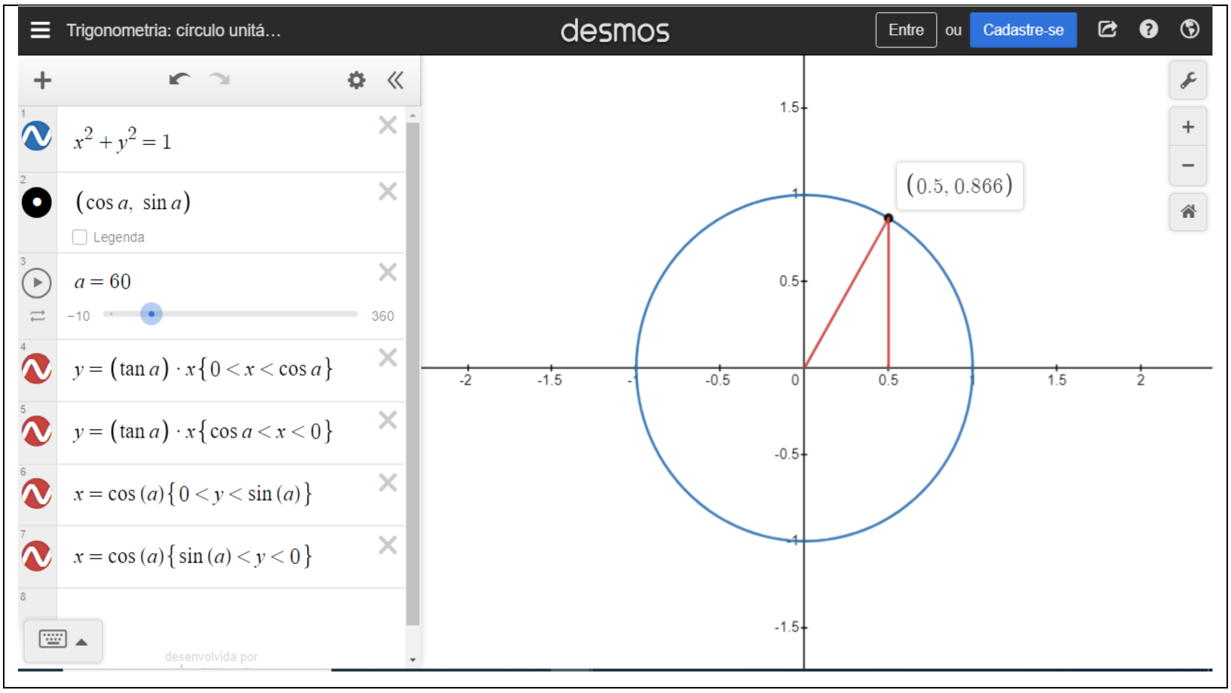
O Desmos é uma ferramenta de fácil utilização, simples e com uma interface bem intuitiva. À medida que o usuário escolhe o assunto que deseja trabalhar, o aplicativo imediatamente reproduz o comando e fornece as informações necessárias, bem como os gráficos desses assuntos. A ferramenta disponibiliza gráficos de retas, trigonométricos, além de disponibilizar gráficos de derivadas, integrais, integral com limites ajustáveis e tópicos de estatística.

No caso desse trabalho, que se trata da trigonometria na circunferência, existe um campo no aplicativo denominado de “Trigonometria: círculo unitário”. Ao abrir o campo, o usuário poderá inserir a função que desejar e o gráfico será reproduzido e apresentado a sua solução no círculo trigonométrico.

Na medida em que o ponto “a” desliza sobre o círculo trigonométrico, através de um botão deslizante, como mostra a figura 6, os valores são reproduzidos no círculo trigonométrico. Observe que quando o valor de a = 60, ou seja, quando o arco vale 60°, o cosseno (eixo das abscissas) está gerando o valor de 0,5 e o seno (eixo das ordenadas) está produzindo o valor de aproximadamente 0,86 e de fato, o cosseno de 60° é igual a 0,5 e o seno de 60° é $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}86$. Então, o aplicativo está gerando e mostrando, de forma intuitiva e dinâmica, a solução da equação trigonométrica $\cos a = \cos 60° = 0{,}5$ e

$$sena = sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}86\,.$$

Figura 6: Círculo unitário no Desmos.

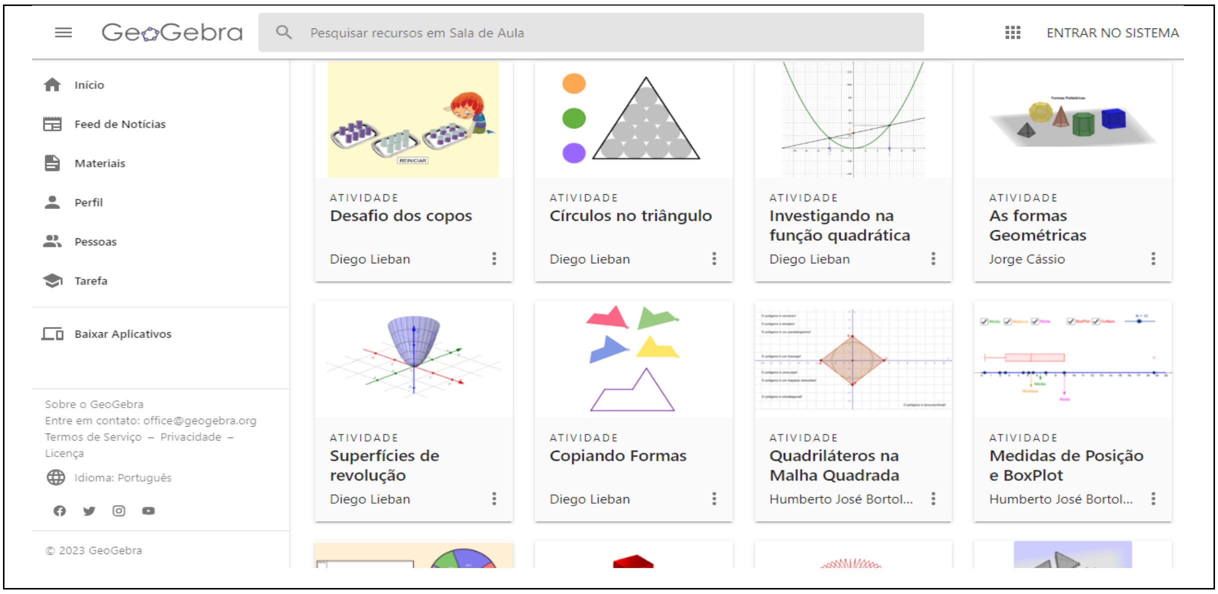


Fonte: https://www.desmos.com/

Outro aplicativo que auxiliou os alunos participantes dessa pesquisa foi o Geogebra, sendo essa ferramenta um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, foi projetado para o ensino e aprendizagem de matemática em vários níveis de ensino, do básico ao universitário. O Geogebra combina a álgebra, geometria, tabelas, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um ambiente único. Assim, a capacidade de apresentar várias representações de um mesmo objeto interconectado simultaneamente constitui uma vantagem didática do Geogebra.

Para acessar o aplicativo é necessário digitar o seguinte endereço virtual (www.geogebra.org). Na página inicial, na aba do lado esquerdo é disponibilizado materiais que usuários produziram, de diversas áreas da matemática como estatística, probabilidade, cálculo, trigonometria, funções, geometria. A figura 7, mostra a tela inicial do aplicativo, no modo online, na aba materiais. Esses materiais podem servir para o ensino e aprendizagem de pessoas em diversos lugares do mundo.

Figura 7: Aba “Materiais” do Geogebra

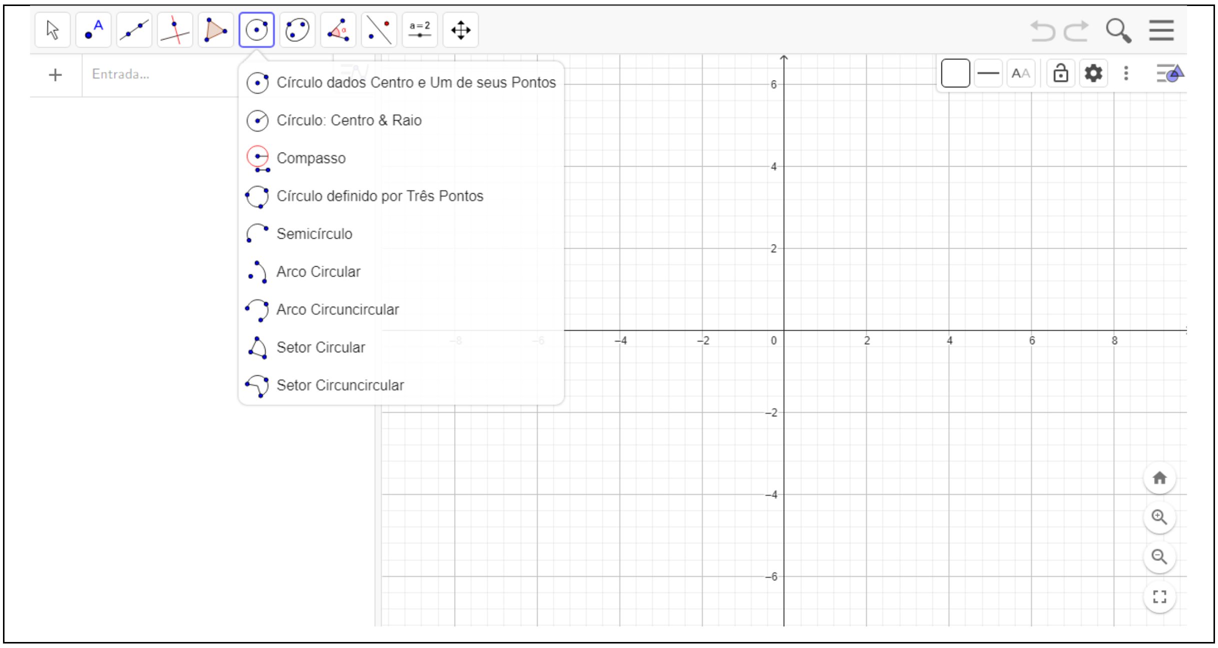


Fonte: www.geogebra.org

É possível criar uma conta no aplicativo, para que o usuário possa salvar os seus trabalhos e obter todos os benefícios que o Geogebra oferece. Dentre as muitas vertentes que o aplicativo tem como calculadora 3D, calculadora gráfica, calculadora científica, nesse trabalho, o Geogebra será utilizado como material manipulável auxiliar, na modalidade “Geogebra Clássico”. É possível acessá-lo com o seguinte endereço (www.geogebra.org/classic). O intuito é desenvolver o círculo trigonométrico no aplicativo e auxiliar os alunos nas soluções das equações, bem como nos conceitos iniciais da trigonometria na circunferência.

Na aba em destaque, figura 8, possui a opção, “Circulo: centro e raio” que será indicada para que os alunos possam construir o círculo trigonométrico deles, nessa mesma aba tem a opção para criar arcos. Nas outras abas existem opções para criação de ângulos, segmentos de retas e pontos.

Figura 8: Geogebra Clássico



Fonte: www.geogebra.org/classic

É importante a inserção das tecnologias no ambiente escolar. É sabido que o processo não é fácil, tendo em vista as barreiras para sair do tradicionalismo, seja pela falta de tempo para ministrar aulas diferenciadas, escassez nas ofertas de formação continuada e entre outras problemáticas que tangenciam a educação. Porém, cabe aos professores, de acordo com as suas atribuições, a busca pela superação dessas adversidades.

Capacitações, qualificações e estudos na área, bem como a utilização de tecnologias, são alternativas que aumentam a perspectiva de regressão desses percalços educacionais. No cotidiano dos alunos, da atual geração, quase todos os jovens possuem smartphones, o que ocasiona maior facilidade em trabalhar com aplicativos e jogos educacionais virtuais. Então, é de responsabilidade do professor instruir os alunos para a utilização dessas ferramentas em prol do ensino. Esses recursos podem tornar as aulas mais atrativas e motivadoras, além de despertar nos alunos o interesse de se preparar para o mercado de trabalho, que a cada dia, está mais exigente e competitivo.

Segundo Santos (2011) A apropriação das tecnologias de informação e comunicação (TIC's), no espaço escolar faz ressignificar o conceito de conhecimento. É através das ferramentas tecnológicas, a partir de mediações atuantes que as potencialidades se afloram.

Então, a utilização de materiais manipuláveis (concreto e virtual) agregou positivamente para o andamento do trabalho desenvolvido na pesquisa. Os alunos foram instruídos nas aulas iniciais da pesquisa, e sem muitas dificuldades, no decorrer das atividades, estavam dominando os aplicativos, bem como tiveram a oportunidade de materializar conceitos abstratos, através do manuseio da circunferência trigonométrica de produção própria de cada grupo.

2. O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E SUAS PERSPECTIVAS

Neste capítulo, foi abordado uma investigação sobre trabalhos desenvolvidos na linha de conhecimento de trigonometria. Foram analisadas 5 (cinco) dissertações na categoria de estudos diagnósticos e 5 (cinco) dissertações na categoria de estudos experimentais, além de explorar 8 (oito) livros didáticos, na busca de reunir dados que possam contribuir para essa pesquisa, com o propósito de entender como o ensino do objeto de conhecimento em foco é estudado por pesquisadores e como esse assunto é desenvolvido e trabalhado em sala de aula por intermédio do material didático, para que a partir dessas questões, seja criado uma base de dados para a elaboração de uma sequência didática que possa agregar no ensino e aprendizagem de trigonometria e de forma específica, buscar uma linha de ensino eficaz no assunto de equações trigonométricas.

2.1 ANÁLISES DAS PESQUISAS

O estudo envolvendo equações trigonométricas é um dos tópicos que integra a trigonometria, no Ensino Médio. Esse assunto é considerado difícil de ser trabalhado por professores e de complexa compreensão para os alunos, por envolver muitos conceitos, fórmulas e exigir refinado conhecimento de álgebra e matemática básica. A Trigonometria é tradicionalmente apresentada de forma mecânica focando-se em cálculos algébricos de identidades e equações de tal forma que o conteúdo fica desconectado de suas aplicações (Brasil, 2002). Essa maneira de transmitir o conteúdo, com apresentação de fórmulas e sem aplicações no cotidiano, se contrapõe com o que os Parâmetros Curriculares Nacionais, sugerem como forma de apresentação do conteúdo.

O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo detém-se às funções seno, cosseno e tangente, com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas (Brasil, 2002, p. 122).

Portanto, há a necessidade da construção de linhas de ensino para o estudo de equações trigonométricas que fujam do tradicionalismo e que estimule o ensino e aprendizagem nessa área, dinamizando o processo, com aplicabilidade dos conceitos em situações problemas que possivelmente possam ser vivenciadas pelos alunos, para que os mesmos consigam entender a importância de se estudar a trigonometria.

Porém, para que essas linhas de ensino sejam traçadas há a necessidade de se fazer um estudo mais detalhado sobre como esse conhecimento está sendo tratado nas pesquisas, pelos professores e alunos. Então, nesse trabalho, foi revisado 10 dissertações com o objeto de conhecimento de trigonometria, com foco em equações trigonométricas. As análises foram direcionadas para os objetivos, metodologias, propostas didáticas, dificuldades inerentes do processo de aprendizagem, experimentações e análises de resultados. Além de extrair o que cada trabalho revisado poderá contribuir para esta pesquisa.

Para fazer a busca dessas literaturas utilizei o google acadêmico e digitei as seguintes palavras – chave: “funções trigonométricas”, “equações trigonométricas”. Na procura por trabalhos acadêmicos, observei a carência de pesquisas com o tema abordado, o que de certa forma dificultou o processo das análises presentes nesse capítulo, mas em contrapartida motivou o desenvolvimento desse trabalho, na busca de produzir uma metodologia diferenciada, para que futuramente possa contribuir com o ensino e aprendizagem desse conteúdo nas escolas de ensino básico.

As revisões das literaturas foram divididas em duas categorias: **Estudos Diagnósticos** e **Estudos Experimentais**. No final de cada revisão, consta as contribuições dessas literaturas para esta pesquisa.

2.2 ESTUDOS DIAGNÓSTICOS

Nessa categoria foram analisadas 5 (cinco) dissertações, no qual foi apresentado o objeto da pesquisa, o embasamento teórico e metodológico e as contribuições desses trabalhos para essa pesquisa.

2.2.1 A Heurística de Pólya e a Resolução de Problemas de Trigonometria.

Luizalba Santos e Souza Pinheiro, Pinheiro (2017), defendeu o trabalho de dissertação intitulado “A Heurística de Pólya e a Resolução de Problemas de Trigonometria” no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e Universidade Federal de Roraima (UFRR), Boa Vista, em 2017. A autora apresenta o objetivo geral de sua pesquisa “Estudar e interpretar as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, contidas na sua paradigmática obra intitulada na sua tradução ao português “A Arte de Resolver Problemas”, e aplicá-las na resolução de problemas de trigonometria, no Ensino Médio”.

Sobre a metodologia do trabalho, Pinheiro (2017) fez uma pesquisa analítica de revisão, que envolveu a análise, avaliação e integração da literatura publicada sobre o assunto objeto do trabalho. A busca bibliográfica se deu em livros, artigos e trabalhos científicos sobre o tema “heurística na resolução de problemas matemáticos, com foco nas ideias de George Pólya a respeito da temática. A autora se debruçou na obra “A Arte de Resolver Problemas” de George Pólya sendo a principal fonte bibliográfica de seu trabalho e livros de trigonometria com ênfase na resolução de problemas trigonométricos para utilizar no embasamento teórico do trabalho.

Relatou a problemática encontrada por Pólya durante o seu período estudantil, que estimulou seu interesse pela resolução de problemas, sendo a mesma que atualmente confrontam muitos alunos de matemática no Ensino básico e nos cursos universitários. Enfatiza que a falta de técnicas para resolver problemas ou para demonstrar uma proposição matemática constitui um obstáculo significativo para o satisfatório desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem da matemática. Expõe que durante muito tempo, os professores da área têm debatido e pesquisado sobre este complexo assunto, mas não encontraram uma solução definitiva, se é que existe. Sendo essa situação um dos fatores preponderantes na falta de interesse, desmotivação e rejeição pela disciplina, por parte dos alunos. Portanto, a matemática é lecionada no seu aspecto formal. Ao estudante lhe são apresentados axiomas, definições e teoremas demonstrados formalmente. Mas, não é trabalhado como gerar as ideias para elaborar uma demonstração ou resolver um problema de certa complexidade. É algo que considera fazer parte da aptidão do estudante para a matemática e que se desenvolve espontaneamente durante os estudos.

Apresenta a ideia de Heurística, conceituando-a como arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos. Método educacional que consiste em fazer descobrir pelo estudante o que se lhe quer ensinar, serve para a descoberta ou para a investigação de fatos. A autora apresenta o objetivo da heurística de acordo com Pólya, sendo o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção, além de compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. O estudo da heurística tem objetivos “práticos” melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da matemática.

Aborda as quatro etapas de Pólya na resolução de problemas, quais sejam: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Sobre essas etapas, irei destacar as partes mais importantes que a autora explanou.

Sobre a compreensão é importante identificar as partes principais, as incógnitas, dados e suas condicionantes. É importante não abrir mão de todas as suposições, interpretações de um problema, pois mesmo que algumas delas estejam erradas, algum tipo de ajuda elas trarão ao estudo. Deverá ser instigada a criatividade do aluno para traçar os caminhos que percorrerá no estudo, a representatividade da incógnita, por uma letra por exemplo, nunca poderá representar duas coisas ao mesmo tempo. Dessa forma, torna-se essencial que o estudante compreenda o problema como um todo, para que então, possa separar os dados e informações pertinentes para o estudo do problema, decompondo em partes, então, poderá analisar os dados essenciais e os que poderão ser deixados de lado e que não serão necessários para a resolução do problema.

No estabelecimento de um plano é fundamental que o estudante busque em sua memória se já viu algum modelo semelhante, que possa lhe ajudar na resolução da questão. É significativo frisar que não existe um problema totalmente inédito, ou seja, se o estudante já praticou a resolução de problemas de um determinado assunto, é provável que em algum momento ele já tenha se deparado com um modelo que satisfaz aquele novo problema ou que o auxilie, mas nem sempre é uma tarefa fácil identificar esses modelos.

É necessário estimular o aluno a modificar a linguagem empregada na apresentação do problema em uma linguagem matemática, expressa através de fórmulas. Para problemas mais complexos, pode ser que os dados, a incógnita e a condicionante não possam ser denominados por simbologia matemática direta, sendo necessário reformulá-los de modo que se encontre a notação matemática cabível. Por fim, se surgir alguma dificuldade para chegar à solução de um problema é necessário voltar ao início e verificar se todos os dados foram utilizados no plano, pois alguma informação poderá ter passado despercebido, o que ocasionará dificuldades no processo de construção da resolução.

Na execução do plano, a compreensão e o planejamento já foram traçados, então é a hora de colocar em prática. O cuidado e atenção na verificação dos passos, podem evitar erros do tipo interpretativos, algébricos. Os erros, juntamente com a não contemplação de uma resolução, gera desmotivação e desistência por parte do aluno. Então, a identificação breve de um possível erro, pode evitar tais adversidades no processo. É importante ter em mente que em alguns casos a solução de um problema não vem de imediato, dessa forma, deixar as coisas esfriarem e voltar em um outro momento, pode ser indicado para que o problema seja enxergado por uma outra perspectiva, tornando-se mais claro. É fundamental que o professor estimule a paciência, esperança e o bom ânimo, ou seja, desistir na primeira barreira não é uma alternativa indicada para o aluno durante o processo.

Na etapa do retrospecto, algumas questões devem ser analisadas. Uma das mais importantes, além de verificar se o resultado está correto, é verificar se não tem resoluções alternativas, outros caminhos, formas mais simples de conduzir o problema. Cabe ao professor estimular os alunos, eles próprios, a descobrirem modos diversos de solucionar um problema, otimizar o aprendizado com o intuito de torná-lo mais completo e produtivo.

Desenvolveu uma coletânea de problemas de trigonometria de dificuldade acima da média com a intenção de desenvolver as ideias de George Pólya para instigar a criatividade e perseverança dos alunos com a utilização do método heurístico, discussão das resoluções e apresentação das soluções de maneira organizada para facilitar o entendimento do leitor. Abordou questões de identidades trigonométricas, equações trigonométricas, máximos e mínimos de funções trigonométricas, desigualdades trigonométricas e funções trigonométricas inversas.

A pesquisa desenvolvida por Pinheiro (2017), teve influência nesse trabalho na aplicação das atividades. Na evolução da sequência didática, o estímulo das etapas (compreensão, planejamento, execução e retrospecto) foram fundamentais para a resolução das intervenções propostas, ratificando a importância da perseverança, criatividade, organização e proatividade dos alunos no desenvolvimento dos estudos.

2.2.2 Jogos Pedagógicos na Aprendizagem de Trigonometria para Alunos do Ensino Médio

Rodolfo Maximo de Lima e Silva, Silva (2018), defendeu sua dissertação com a titulação “Jogos Pedagógicos na Aprendizagem de Trigonometria para Alunos do Ensino Médio”, apresentada à Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo do Programa de Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências em 2018. O objetivo geral da pesquisa é promover o desenvolvimento de habilidades relacionadas à trigonometria, estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), através da utilização de jogos didáticos, recorreu aos jogos “baralho trigonométrico” voltado para a estimulação estratégica e “trigonometrilha” com foco no conteúdo, para alunos do segundo ano do Ensino Médio da rede estadual paulista, nos anos de 2015, 2016 e 2017.O autor buscou verificar a motivação dos alunos no aprendizado de trigonometria através da utilização de jogos didáticos, avaliou a interação dos alunos durante a realização dos jogos, produziu duas sequências didáticas com assuntos relacionados à trigonometria, aplicou a avaliação diagnóstica, pós atividades, com a intenção de verificar se a utilização de jogos didáticos contribuiu de forma positiva na construção do conhecimento.

No pressuposto teórico, Silva (2018) discorreu sobre o contexto histórico da educação básica nas últimas décadas. De acordo com o autor, no século XX, o campo educacional foi influenciado diretamente por disparidades ideológicas, guerras e avanços tecnológicos. A partir da década de 1920 começaram a surgir movimentos voltados para os ideais educacionais, opositores ao modelo educacional convencional da época. Entre esses movimentos, destaca-se a Associação Brasileira de Educação, fundada em 1924, no Rio de Janeiro, que objetivava uma política educacional eficaz. Em 1932, surgiu o Manifesto dos Pioneiros da Escola Nova, movimento que estabeleceu princípios de uma nova política educacional para o Brasil, tratando os ideais de que a educação é um direito de todos.

Pressionada por pressões sociais, a constituição de 1934 declarou que a educação é um direito de todo cidadão e deve ser assegurada pelos poderes públicos, para isso, foi criado o Plano Nacional de Educação (PNE). Em 1971, foi elaborada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), vigorando até 1996. A LDB é fundamentalmente importante para a construção do processo educacional, ratifica a importância da educação no país, orienta a participação do poder público e do setor privado na educação, bem como, a estrutura necessária para promover o acesso à escola.

Apresentou um tópico referente aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A criação dos PCN serviu para nortear as instituições de ensino quanto à formação de seu currículo, servindo como referencial para os professores sobre o currículo básico nacional. Dessa forma, direcionam os sistemas educacionais a construírem um currículo que ultrapasse a formação convencional, levando em consideração os quatro pilares descritos no próprio PCN, que são aprender e aprender, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser. Além dessas questões, é necessário que no ambiente escolar sejam trabalhadas questões éticas e sociais, construindo um currículo pautado na formação do indivíduo capaz de viver em sociedade de forma participativa e ética.

O autor fez uma análise sobre os sistemas de avaliação externa e sua contribuição para políticas educacionais. Verificou o desempenho dos alunos do 7º e 9º ano do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio, no estado de São Paulo, nos anos de 2010 e 2014, do Sistema de Avaliação do Estado de São Paulo (SARESP). A conclusão das análises, não foram positivas para esses anos, na disciplina de matemática, uma vez que foi averiguado índices elevados de alunos com baixo desempenho nas habilidades e competências exigidas para os respectivos anos escolares.

Os órgãos responsáveis criaram sistemas de avaliação externas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Prova Brasil, com a proposta de universalizar o ensino em todo o país, além de medir o nível da educação básica a partir dos resultados obtidos nessas avaliações e dessa forma, pensar em novas políticas educacionais que suplantem tais problemáticas.

Fez um estudo sobre o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), este é um indicador que reúne a taxa do fluxo escolar e as médias do desempenho dos alunos nas avaliações. Este indicador é obtido a partir dos dados obtidos no Censo Escolar e nas avaliações externas. Por meio desse índice é possível traçar planos e metas para os estabelecimentos de ensino, assim como medir o avanço ou retrocesso do ensino no Brasil. De acordo com as análises do autor, em um determinado período, os resultados apresentados pelo IDEB, evidenciam que o ensino no Brasil, de modo geral, não está adequado às demandas exigidas no currículo básico, uma vez que muitos alunos ao avançarem nas séries escolares, regridem em termos de habilidades e competências, por motivos diversos, entre eles, a falta de interesse, esquecimento, desmotivação. Dessa forma, o sistema de ensino carece de políticas educacionais efetivas que combatam a defasagem que se encontra no ambiente escolar.

O autor utilizou como pressuposto teórico a teoria sociocultural de Vygotsky, na busca de responder questionamentos inerentes ao aprendizado, ou seja, fatores que facilitam ou dificultam o processo de aprendizagem. Analisou, através dessa teoria que o desenvolvimento da criança pode ser dividido em dois seguimentos, um processo de origem biológica e outro de origem sociocultural. Desse modo, Vygotsky afirma que o aprendizado é fundamental para o desenvolvimento cognitivo da criança e com o passar do tempo, possa ser adquirido a linguagem necessária para interações individuais e coletivas.

Outro fator importante para o professor observar são os conhecimentos prévios, os diferentes níveis de conhecimento dos indivíduos, bem como, considerar as formas específicas de cada aluno aprender um mesmo conteúdo. Então, diante do pressuposto exposto, o autor considera o uso de jogos no ambiente escolar como uma ferramenta importante que viabiliza de maneira motivadora a interação entre o aluno e o conhecimento formal.

Descreve a relação entre o ensino de matemática e a utilização de jogos, essa relação estimula a autoconfiança, organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo, além de fortalecer as relações de socialização possibilitando o aumento das interações interpessoais.

O trabalho de Silva (2018) influenciou essa pesquisa nas análises prévias dos alunos que participaram das atividades e no decorrer das etapas. Foi averiguado os conhecimentos prévios dos alunos e as particularidades de cada um, com o intuito de alcançar resultados consistentes e direcionados nas atividades propostas.

2.2.3 A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa

Emerson Carlos Castelo Branco, Castelo Branco (2013), apresentou sua dissertação à Universidade Federal do Maranhão, em 2013, com o título “A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa”, para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

O autor começa o seu trabalho com uma breve introdução sobre a história da trigonometria. No próximo capítulo, Castelo Branco (2013), buscou apresentar os conceitos trigonométricos através das demonstrações de fórmulas. Na perspectiva do autor, apresentar as técnicas que deduzem fórmulas trigonométricas, pode facilitar o entendimento do aluno sobre a trigonometria. Para almejar os valores dos arcos notáveis, foi apresentado um triângulo equilátero, com a altura traçada, forma-se um triângulo retângulo, com o ângulo de 60º da base e o de 30º formado pela altura/bissetriz. Dessa forma, aplicou-se as relações de seno, cosseno e tangente, anteriormente apresentadas, de modo tradicional e foi encontrado os valores para os arcos.

Desenvolveu as teorias sobre a medida de arco (grau e radiano), apresentou a fórmula de comprimento de um arco, exemplos tradicionais de aplicabilidade da fórmula, circunferência orientada e finalizou com as definições sobre o círculo trigonométrico. Apesar dos conceitos apresentados pelo autor serem de fundamental relevância para o desenvolvimento da trigonometria, é notório a ausência de exemplos aplicados a realidade do aluno, a relação do conteúdo com situações - problema.

São apresentadas as funções trigonométricas e a teoria de cada uma delas, com exemplos de aplicabilidade, sem contextualização. O autor desenvolve a demonstração de algumas fórmulas importantes, como o teorema fundamental da trigonometria, relações trigonométricas derivadas, adição e subtração de arcos, arco duplo, arco metade. Demonstra as fórmulas da lei dos senos e lei dos cossenos, utiliza exemplos contextualizados e faz uma relação dessas leis com o conteúdo de grandezas vetoriais, trabalhado com mais detalhes na disciplina Física. Aborda resoluções de equações trigonométricas fundamentais, equações clássicas, bem como aquelas que exigem certos artifícios matemáticos para resolver. As resoluções estão claras e objetivas e agregará conhecimento para alunos que buscam um entendimento mais detalhado desse tópico.

No geral, o trabalho possui pouco embasamento teórico, a história da trigonometria apresentada na introdução poderia ser mais explorada nos tópicos seguintes. Em contrapartida, possui o assunto de trigonometria rico em teoria, exemplos tradicionais de aplicabilidade e demonstrações detalhadas e organizadas para alunos que buscam evoluir no conteúdo, o trabalho poderá agregar significativamente.

O trabalho desenvolvido por Castelo Branco (2013) agregou com esse trabalho, na parte teórica da trigonometria, que foi apresentada pelo autor de modo organizado e detalhado, além das demonstrações de teoremas, fórmulas e equações.

2.2.4 Uma Abordagem para Análise, Classificação e Resolução de Problemas que Envolvem Trigonometria. Exemplos de Aplicação

Maria de Fátima Castilho Dias, Dias (2010), defendeu a sua dissertação intitulada “Uma Abordagem para Análise, Classificação e Resolução de Problemas que Envolvem Trigonometria. Exemplos de Aplicação” na Universidade de Évora, no Departamento de Mestrado para o Ensino, em 2010. Nas palavras da autora “Penso que os conteúdos de trigonometria dos atuais manuais escolares do ensino secundário do nosso país não são suficientes para os alunos que pretendem seguir estudos superiores nas áreas de matemática, engenharia, física, entre outras, onde algumas das disciplinas pressupõem que os alunos conheçam e saibam aplicar fórmulas e ainda que conheçam a natureza e essência destes conceitos matemáticos”.

Dias (2010) expõe que um dos objetivos do seu trabalho é propor uma forma alternativa de apresentação do tema e mostrar uma variedade de questões que incluam os conceitos trigonométricos, tentando fazer com que os alunos compreendam os motivos pelos quais as relações trigonométricas, fórmulas surgiram para que, desse modo, desperte o interesse dos estudantes na aprendizagem do objeto de conhecimento. Um outro objetivo em foco no trabalho é mostrar a importância de analisar profundamente problemas aparentemente complicados, ensinar o aluno a conceder tempo a si mesmo para poder pensar e solucionar, bem como, desenvolver espírito crítico, criatividade e ensiná-lo a procurar e descobrir ideias, concepções, métodos de resoluções para os problemas que lhes serão apresentados.

Introduz um apontamento histórico, com ideias de que a trigonometria surgiu da astronomia e que o triângulo, inicialmente, originou-se da esfera e somente com o passar do tempo a trigonometria plana libertou-se da astronomia e foi ganhando espaço com seu próprio campo de atuação. Perpassa por diversos atores que contribuíram para esta ciência até concluir o capítulo com as aplicações atuais da trigonometria, visto que estas aplicações ultrapassam o cálculo de comprimentos e de amplitudes de ângulos. As funções trigonométricas intervêm no estudo de movimentos oscilatórios, de propagação de onda, variação de intensidade de movimentos da corrente elétrica, o som, a luz, a eletricidade, o eletromagnetismo, são fenômenos ondulatórios com estudos voltados para a trigonometria.

Apresentou os conceitos iniciais, sobre as funções seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, bem como as razões trigonométricas, os sinais dessas funções no círculo trigonométricos, arcos côngruos, redução ao primeiro quadrante, demonstração da relação fundamental da trigonometria, dos arcos notáveis (30º, 45º e 60º).

Demonstrou as fórmulas de soma de arcos, arco metade, arco duplo, soma e diferença de senos e cossenos, além de utilizar muitos exemplos para aplicar as fórmulas demonstradas. Todas as questões exigem um nível de conhecimento médio/elevado para serem resolvidas. A autora apresenta a resolução das questões passo a passo, algumas questões além da resolução analítica ainda possuem a resolução geométrica. Apresentou questões de igualdade trigonométrica, simplificação de expressões, na área do cálculo, questões de limites, derivadas, integrais, com exemplos de aplicações resolvidos.

Define as funções trigonométricas inversas de seno, cosseno, tangente e cotangente, bem como apresenta os respectivos gráficos das funções, apresenta diversos modelos de equações trigonométricas elementares e não elementares como as redutíveis a equações do 2º grau, equações lineares, homogêneas, simétricas. Todas essas teorias envolvem-se com exemplos de aplicação para fortalecer a parte teórica juntamente com a construção do conhecimento.

Apresenta o método de indução matemática, aplicação da teoria dos extremos de uma função, para resolver desigualdades trigonométricas. Expõe que um dos métodos para resolver desigualdades trigonométricas elementares é com a utilização dos gráficos das funções trigonométricas, pois permite visualizar os domínios dos intervalos em que a inequação tem significado, bem como pode ser utilizado o círculo trigonométrico para atingir a mesma finalidade. Para os dois casos, são apresentados exemplos de aplicação, alguns com a resolução através do gráfico da função, outros exemplos com a utilização do círculo trigonométrico.

Aborda questões de sistema de equações trigonométricas. De acordo com a autora, é necessário o aluno conhecer as propriedades da soma dos senos e cossenos, saber aplicá-las e ter um bom domínio em equações trigonométricas e equações algébricas. São apresentados exemplos de aplicação com resoluções.

Expõe métodos de aplicação da trigonometria na resolução de problemas geométricos. Identidades trigonométricas, lei dos senos e cossenos, transformações trigonométricas, equações e igualdades trigonométricas em casos particulares. Ou seja, nesse capítulo a autora trouxe exemplos de aplicação que apresentam figuras geométricas, ou conhecimentos sobre geometria como pré-requisito para resolver um problema trigonométrico. Abordou a trigonometria no campo da topografia e da Física, além de envolver as relações trigonométricas na teoria dos números complexos.

Na conclusão, autora se sente satisfeita por apresentar a trigonometria de um modo diferente, com variedades de questões e resoluções, com o intuito de mostrar para os alunos de onde e como surgiu os conceitos sobre a trigonometria. Um dos objetivos é que o seu trabalho sirva de material de apoio a professores do ensino básico, principalmente para os que queiram enriquecer e aprofundar os conhecimentos científicos na área.

O trabalho de Dias (2010) foi importante para o desenvolvimento desse trabalho, apesar de ter pouco embasamento teórico, possui riqueza de detalhes sobre os assuntos da trigonometria. A autora apresenta muitas questões sobre equações trigonométricas, que é o objeto de conhecimento dessa pesquisa, o que contribui nas referências do assunto para o desenvolvimento desse trabalho. Além de mostrar a importância e a dimensão que a trigonometria possui através de exemplos de aplicação com resoluções detalhadas de diversas frentes da trigonometria.

2.2.5 A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas

Juliana Elvira Mendes de Oliveira, Oliveira (2013), apresentou sua dissertação intitulada “A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua

Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas”, para o Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, à Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, em 2013.

Oliveira (2013) acredita que o ensino da trigonometria pode se apoiar em dois pilares: sua evolução histórica e suas aplicações. Umas das motivações para a escolha do tema, nas palavras da autora “em nossa prática docente nos deparamos muitas vezes com questionamentos dos alunos sobre a utilidade dos conteúdos ensinados em sala de aula, portanto a utilização da História da Matemática pode contribuir para solucionar essa questão e ser usada como motivação para a aprendizagem escolar”.

A autora expõe que a trigonometria é um tópico da matemática com muitas aplicações práticas que envolvem várias áreas do conhecimento humano, pode-se usar isso para enriquecer as aulas com atividades práticas que permitam aos alunos entenderem a importância dos conteúdos de trigonometria para o desenvolvimento de várias profissões. Além disso, essas atividades podem ser integradas com outros elementos do currículo, bem como considerar o contexto histórico em que determinada situação está envolvida. A junção desses fatores contribui para despertar o interesse do aluno diante da matéria.

Tem como objetivo apresentar uma proposta metodológica onde o estudante possa perceber a importância da Trigonometria também a partir de atividades práticas e utilização de recursos multimídia.

Descreve o conteúdo básico de trigonometria nos triângulos retângulos, nos triângulos quaisquer e no círculo trigonométrico, o que considera essencial para o ensino básico. Desenvolve o contexto histórico da trigonometria com a apresentação da trigonometria no Egito, na Babilônia, no Oriente, na Grécia e no início de nossa Era, além de expor a relação da trigonometria com a Astronomia.

Aborda a trigonometria na educação básica, com propostas curriculares existentes no país e no estado de Minas Gerais. Introduz um breve histórico da reforma de ensino, além de apresentar o conteúdo de trigonometria presente nos livros didáticos do ensino básico.

Apresenta algumas aplicações da trigonometria na atualidade. A autora expõe aplicabilidades trigonométricas nas seguintes áreas de conhecimento: cartografia, sistema de posicionamento global (GPS), medicina, física, engenharia, engenharia aeronáutica, engenharia civil, agrimensura.

O trabalho de Oliveira (2013) contribuiu com essa pesquisa, pois através da história da trigonometria é possível contar de onde surgiram as definições, teoremas, quem foram os atores que participaram da construção desse objeto de conhecimento. Dessa forma, foi buscado apresentar no início das aulas alguns recortes históricos sobre a trigonometria com o intuito de estimular o aprendizado.

Nos quadros a seguir foram sintetizados os estudos diagnósticos, com destaque para o objetivo da pesquisa, o embasamento teórico e metodológico e as contribuições desses estudos para esse trabalho.

Quadro 1: Resumo dos estudos diagnósticos 1

TÍTULO/AUTOR	OBJETIVO DA PESQUISA	EMBASAMENTO TEÓRICO E METODOLÓGICO	CONTRIBUIÇÕES
A Heurística de Pólya e a Resolução de Problemas de Trigonometria. Luizalba Santos e Souza Pinheiro, Pinheiro (2017).	Estudar e interpretar as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, contidas na sua paradigmática obra intitulada na sua tradução ao português “A Arte de Resolver Problemas”, e aplicá-las na resolução de problemas de trigonometria, no Ensino Médio.	Pesquisa analítica de revisão sobre o assunto objeto do trabalho através de busca bibliográfica. A autora desenvolveu uma coletânea de problemas de trigonometria de dificuldade acima da média com o intuito de instigar a criatividade e perseverança do aluno.	A pesquisa desenvolvida por Pinheiro (2017), teve influência nesse trabalho na aplicação das atividades. Na evolução da sequência didática, o estímulo das etapas (compreensão, planejamento, execução e retrospecto) foram fundamentais para a resolução das intervenções propostas, ratificando a importância da perseverança, criatividade, organização e proatividade dos alunos no desenvolvimento dos estudos.
Jogos Pedagógicos na Aprendizagem de Trigonometria para Alunos do Ensino Médio. Rodolfo Maximo de Lima e Silva, Silva (2018).	Promover o desenvolvimento de habilidades relacionadas à trigonometria, estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), através da utilização de jogos didáticos.	Silva (2018) discorreu sobre o contexto histórico da educação básica nas últimas décadas. O autor fez uma análise sobre os sistemas de avaliação externa e sua contribuição para políticas educacionais. Verificou o desempenho dos alunos do 7º e 9º ano do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio, no estado de São Paulo, nos anos de 2010 e 2014, do Sistema de Avaliação do Estado de São Paulo – SARESP. um estudo sobre o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).	Silva (2018) influenciou essa pesquisa nas análises prévias dos alunos que participaram das atividades e no decorrer das etapas. Foi averiguado os conhecimentos prévios dos alunos e as particularidades de cada um, com o intuito de alcançar resultados consistentes e direcionados nas atividades propostas.
A Importância das Deduções das Fórmulas Trigonométricas para a Construção de uma Aprendizagem Significativa. Emerson Carlos Castelo Branco, Castelo Branco (2013).	Apresentar os conceitos trigonométricos através das demonstrações de fórmulas, bem como apresentar as técnicas que deduzem fórmulas trigonométricas, com o intuito de facilitar o entendimento do aluno sobre a trigonometria.	O autor começa o seu trabalho com uma breve introdução sobre a história da trigonometria. Em seguida buscou apresentar os conceitos trigonométricos através das demonstrações de fórmulas. O trabalho é rico em teoria do assunto objeto da pesquisa, exemplos tradicionais de aplicabilidade e demonstrações detalhadas e organizadas para alunos que buscam evoluir no conteúdo.	O trabalho desenvolvido por Castelo Branco (2013) agregou com esse trabalho, na parte teórica da trigonometria, que foi apresentada pelo autor de modo organizado e detalhado, além das demonstrações de teoremas, fórmulas e equações.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Quadro 2: Resumo dos estudos diagnósticos 2

TÍTULO/AUTOR	OBJETIVO DA PESQUISA	EMBASAMENTO TEÓRICO E METODOLÓGICO	CONTRIBUIÇÕES
Uma Abordagem para Análise, Classificação e Resolução de Problemas que Envolvem Trigonometria. Exemplos de Aplicação Maria de Fátima Castilho Dias, Dias (2010).	Propor uma forma alternativa de apresentação do tema e mostrar uma variedade de questões que incluam os conceitos trigonométricos, tentando fazer com que os alunos compreendam os motivos pelos quais as relações trigonométricas, fórmulas surgiram para que, desse modo, desperte o interesse dos estudantes na aprendizagem do objeto de conhecimento.	A autora, introduz no seu trabalho um apontamento histórico, com ideias de que a trigonometria surgiu da astronomia e que o triângulo, inicialmente, originou-se da esfera e somente com o passar do tempo a trigonometria plana libertou-se da astronomia e foi ganhando espaço com seu próprio campo de atuação. A autora demonstrou fórmulas, utilizou exemplos resolvidos com nível de conhecimento de médio para difícil. Além de apresentar a trigonometria no campo da topografia e envolver as relações trigonométricas na teoria dos números complexos.	O trabalho de Dias (2010) foi importante para o desenvolvimento desse trabalho, apesar de ter pouco embasamento teórico, possui riqueza de detalhes sobre os assuntos da trigonometria. A autora apresenta muitas questões sobre equações trigonométricas, que é o objeto de conhecimento dessa pesquisa, o que contribui nas referências do assunto para o desenvolvimento desse trabalho. Além de mostrar a importância e a dimensão que a trigonometria possui através de exemplos de aplicação com resoluções detalhadas de diversas frentes da trigonometria.
A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas. Juliana Elvira Mendes de Oliveira, Oliveira (2013).	Apresentar uma proposta metodológica onde o estudante possa perceber a importância da Trigonometria também a partir de atividades práticas e utilização de recursos multimídia.	Desenvolve o contexto histórico da trigonometria, além de abordar a trigonometria na educação básica, com propostas curriculares existentes no país e no estado de Minas Gerais. Introduz um breve histórico da reforma de ensino, bem como apresenta o conteúdo de trigonometria presente nos livros didáticos do ensino básico. A autora apresenta aplicabilidades trigonométricas nas seguintes áreas de conhecimento: cartografia, sistema de posicionamento global (GPS), medicina, física, engenharia, engenharia aeronáutica, engenharia civil, agrimensura.	O trabalho de Oliveira (2013) contribuiu com essa pesquisa, pois através da história da trigonometria é possível contar de onde surgiram as definições, teoremas, quem foram os atores que participaram da construção desse objeto de conhecimento. Dessa forma, foi buscado apresentar no início das aulas alguns recortes históricos sobre a trigonometria com o intuito de estimular o aprendizado.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

2.3 ESTUDOS EXPERIMENTAIS

Nesses estudos, foram analisados 5 (cinco) dissertações, entretanto, nessa categoria, foi exposto o objetivo da pesquisa, embasamento teórico e metodológico, procedimentos experimentais e as contribuições dessas pesquisas para esse trabalho.

2.3.1 O Ensino de Trigonometria: Perspectivas do Ensino Fundamental e Médio

Wellington da Silva, Silva (2013), defendeu sua dissertação intitulada “O Ensino de Trigonometria: Perspectivas do Ensino Fundamental e Médio” no programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, no campus de Rio Claro - São Paulo em 2013. O autor iniciou o seu trabalho apresentando a história do ensino da trigonometria no Brasil. No início, alguns livros abordavam a trigonometria elementar e noções de trigonometria esférica, e a proposta era o tratamento da trigonometria como conteúdo isolados dos demais segmentos matemáticos e das demais áreas, não havendo uma preocupação com o desenvolvimento conceitual das noções básicas da trigonometria. Consequentemente, a trigonometria não era relacionada com os fatos históricos do desenvolvimento da Matemática, como por exemplo o surgimento da trigonometria com os esticadores de cordas e a origem da nomenclatura utilizada (seno, cosseno e tangente), o que poderia facilitar a compreensão do aluno com relação às aplicações desse conteúdo no desenvolvimento das civilizações. Quando abordado o conteúdo da forma supracitada, existe uma abordagem didática semelhante ao do início do século XX, onde os alunos eram meros reprodutores de técnicas, uma vez que a necessidade da sociedade era ter pessoas qualificadas para trabalhar de forma mecânica na indústria.

Porém, pensando na sociedade atual, que necessita cada vez mais de pessoas dinâmicas, que não sejam meramente reprodutoras de modelos e pensamentos já estabelecidos, o ensino deve auxiliar na formação de um cidadão que saiba questionar, compreender, aplicar, propor, sistematizar, relacionar, avaliar, inovar e, principalmente, produzir novos conceitos e soluções, de forma rápida, para situações cotidianas que envolvam processos industriais, sociais e políticos. Assim, é notório que essa abordagem mecanicista não contribui de forma satisfatória para essa formação dos cidadãos, que será exigida pelo mercado de trabalho e pela sociedade em geral.

Silva (2013) propôs uma sequência didática para trabalhar trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental. A determinação da altura de uma nuvem em relação ao solo utilizando a trigonometria, aplicando o recurso do triângulo retângulo e utilizando as relações de seno, cosseno e tangente, bem como explanar o assunto por um viés histórico, além de estimular o aluno a respeito da aplicação da atual trigonometria, com o intento de mostrar os benefícios do assunto para as situações do cotidiano, os exemplos de aplicabilidades são: cálculo do diâmetro da Terra, cálculo da distância entre planetas, cálculo da distância para confeccionar mapas, cálculo de larguras de rios. Nessa perspectiva é esperado pelo autor o despertar da curiosidade e interesse dos alunos com relação a essas aplicabilidades do objeto matemático em questão. Além de propor a construção de triângulos retângulos semelhantes, no aplicativo Geogebra, através de uma sequência pré-estabelecida com o objetivo de introduzir e institucionalizar as razões trigonométricas de arcos notáveis.

Ressaltou a história e as aplicações das funções trigonométricas, apresentando modelos matemáticos de fenômenos da natureza que se comportam através de gráficos trigonométricos, tais como: temperatura da atmosfera terrestre, pressão sanguínea do coração, tensão e corrente elétrica, campo eletromagnético, comportamento ondulatório de notas musicais. O propósito do autor é dar subsídios para que os alunos construam conceitos como amplitude, translação, deslocamento e período. Dessa forma, a sequência didática para alunos do 2º ano do Ensino Médio, com a utilização do software Geogebra, busca que os alunos compreendam os efeitos determinados pelos coeficientes das funções, do tipo $f(x) = a + b.sen\ (cx + d)$, $f(x) = a + b.cos\ (cx + d)$, $f(x) = a + b.tg\ (cx + d)$, em seus respectivos gráficos.

A pesquisa de Silva (2013) foi importante para este trabalho pois, mostrou que a aplicação da sequência didática pode ser apresentada juntamente com a história do objeto em questão. Expor para o aluno de onde surgiu determinado conceito, apresentar as aplicabilidades dos conteúdos, aflora o interesse, instiga a curiosidade e consequentemente, proporciona um ambiente propício para a aprendizagem.

2.3.2 Software Geogebra no Ensino da Trigonometria: Proposta Metodológica e Revisão da Literatura a partir das Produções Discentes nas Dissertações do Profmat

Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de Sousa, Sousa (2018), apresentou a sua dissertação intitulada “Software Geogebra no Ensino da Trigonometria: Proposta Metodológica e Revisão da Literatura a partir das Produções Discentes nas Dissertações do Profmat”, para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão, em 2018. O objetivo do autor é verificar se a utilização do Software Geogebra no ensino de trigonometria reflete resultados positivos para aluno do Ensino Médio. Para isso, ele fez uma análise em 20 trabalhos, que tem como afinidade a aplicabilidade do software Geogebra em sua metodologia e fazer a comparação necessária para tomar as suas projeções.

Sousa (2018) faz um apanhado sobre o ensino de matemática e tecnologias educativas. Ressalta a importância de metodologias ativas, como jogos matemáticos, materiais didáticos, sendo estes, recursos de caráter motivador na construção do conhecimento matemático, bem como a utilização de tecnologias educacionais para proporcionar aulas mais dinâmicas e motivadoras. Expõe os desafios que os professores passam, pois, a tecnologia é uma barreira para muitos educadores que possuem dificuldades em manusear equipamentos, utilizar softwares, além da falta de computadores, internet, local apropriado para as aulas, baixa oferta de formação continuada no ambiente escolar.

O autor explora a história da trigonometria, aborda origem de conceitos fundamentais do conteúdo, considera importante analisar os obstáculos enfrentados na construção do conhecimento no passado e assim, compreender as dificuldades dos alunos de hoje para que o ensino da matemática melhore e torne-se mais interessante e objetivo.

Apresenta a parte teórica da trigonometria, relações trigonométricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, relação fundamental da trigonometria, trigonometria na circunferência e funções trigonométricas. O autor abordou de forma clara e objetiva os conceitos, mas não utilizou exemplos de aplicabilidade.

A metodologia da pesquisa tem como ponto principal a revisão de 20 dissertações do PROFMAT relacionadas à trigonometria com aplicação de recursos do software Geogebra, com o objetivo de apresentar dados de estudos experimentais e não experimentais para uma compreensão mais abrangente do objeto de investigação. De modo geral, o autor analisou resultados positivos, para professores e alunos, com relação a utilização do Geogebra, como ferramenta auxiliar no processo de construção do conhecimento trigonométrico no ensino médio. Concluiu que atividades diferenciadas, utilizando a tecnologia, são muito enriquecedoras e produtivas, além de poder ser estendida para outras áreas da matemática como em geometria, estudo de matrizes, funções.

Dessa forma, o trabalho de Sousa (2018) motivou positivamente a produção desse trabalho, pois, os resultados do autor foram satisfatórios para a utilização de tecnologias, então busquei ter efeitos equivalentes nas aplicações das atividades da sequência didática, com o auxílio das ferramentas auxiliares virtuais.

2.3.3 A História da Matemática como Motivação para a Aprendizagem das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Elaine Regina Marquezin Marinho, Marinho (2018) apresentou a sua dissertação para o Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (USP), em 2018, como seguinte título “A História da Matemática como Motivação para a Aprendizagem das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo”, o referido trabalho tem como objetivo oferecer uma alternativa para o aprendizado mais significativo, especialmente na introdução à trigonometria. Portanto, a autora propôs uma atividade baseada na metodologia de resolução de problemas e investigação matemática.

A pergunta problema que Marinho (2018) busca responder é “como atribuir significado à aprendizagem de razões trigonométricas através de problemas históricos?”, ou seja, a autora busca na história dos conceitos, aplicar uma sequência de atividades motivadoras que agucem a curiosidade e interesse dos alunos. Além de despertar proatividade, empenho, persistência, autonomia nos estudos, trabalho em equipe, sendo essa série de habilidades, importantes no processo de construção do conhecimento.

A autora começa a parte teórica a partir da história da trigonometria, apresentou problemas da Astronomia, há mais de 4 milênios, com relação ao cálculo da distância entre planetas, que necessitavam da utilização do triângulo retângulo, razões trigonométricas.

Expõe que os problemas matemáticos existem desde a antiguidade e que são aplicados no ensino de matemática, sendo valorizado os resultados obtidos. E que esse modelo padronizado viria a mudar no decorrer dos anos, com o foco no processo de construção do conhecimento ao invés de valorizar apenas o resultado. Através do método de resolução de problemas de George Pólya, a autora busca, na sua sequência de atividades, que o aluno, baseado nos seus conhecimentos já adquiridos anteriormente e em discussão com seus pares e através da mediação do professor, consiga construir novos conhecimentos.

A autora acredita que para obter resultados significativos, não basta o professor apenas apresentar fatos históricos para os alunos. É necessário adaptar as atividades, instigar o caráter investigativo, manipular os materiais concretos para o problema em específico, além do papel de agente estimulador de ideias, o professor deve questionar os alunos ao invés de fornecer as respostas, deve responder perguntas com outras perguntas, levar os alunos a confrontarem os métodos e buscar novos horizontes, focar no processo, tendo em vista a socialização das etapas com a turma.

As atividades foram aplicadas para o público-alvo de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola situada na cidade de São Paulo. A atividade 1 é focada em distâncias impossíveis de serem medidas, sem os conhecimentos da trigonometria. O desafio da primeira atividade é descobrir quantas vezes o sol está mais distante da terra do que da lua, ou seja, quantas vezes a distância terra – lua cabe na distância terra – sol.

Utilizando a história, a autora fez um paralelo de problemas de milênios de anos atrás, apresentou como o astrônomo grego Aristarco (310 – 230 a C) resolveu esse problema através de noções de geometria como semelhança de triângulos e proporção.

A atividade 2 foi proposta para os alunos através da introdução da história do matemático grego Erastóstenes (275 – 194 a C), que na época, descobriu a medida da circunferência da terra. O questionamento para os participantes sobre as possibilidades e caminhos que Erastóstenes fez para resolver esse problema.

A atividade 3 envolve a história do astrônomo e matemático Hiparco de Nicéia (190 – 120 a C), ficou conhecido como pai da trigonometria, dentre as suas contribuições de estudos matemáticos, buscou encontrar a distância da terra à lua, porém em função do raio da terra, ou seja, a quantos raios terrestres corresponde a distância da terra à lua. Com a orientação do professor, através de triângulos retângulos traçados, é esperado que os alunos façam relações e se motivem a descobrir os possíveis caminhos que fizeram Hiparco, à época, resolver o problema.

A atividade 4 foi uma proposta prática para os alunos. Os envolvidos tiveram que construir o próprio instrumento de medição, com linha, canudo e transferidor, além de serem divididos em grupos para desenvolverem a dinâmica. A ideia é utilizar o instrumento produzido por eles, coletar informações e descobrir a altura e medidas dos objetos selecionados.

Por fim, a autora pôde concluir que as atividades propostas, utilizando a história de astrônomos matemáticos para resolverem problemas de distâncias impossíveis, por meio do triângulo retângulo e das razões trigonométricas, foi bem-sucedido, pois a maioria dos alunos se interessaram pela dinâmica e se sentiram motivados a solucionar tais problemas.

Dessa maneira, o trabalho de Marinho (2018) contribuiu para essa pesquisa na produção da sequência didática. Na busca em elaborar as atividades de modo que desperte o interesse e curiosidade dos alunos, estimular o trabalho em equipe e a perseverança dos envolvidos, com o foco no processo de construção do conhecimento, ao invés de exigir apenas os resultados.

2.3.4 Trigonometria no Ensino Médio e suas Aplicações

Francine Dalavale Tozatto Souza, Tozatto (2018), defendeu a sua dissertação com a titulação “Trigonometria no Ensino Médio e suas Aplicações”, no Programa de Pós – Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo – USP em 2018.

Tozatto (2018) descreve a introdução do seu trabalho, mostrando que a motivação pela qual ela escolheu o tema como objeto de conhecimento de seu trabalho é a notória dificuldade que os alunos possuem em entender trigonometria.

Explicita o dilema que o professor passa, em casos corriqueiros de sala de aula, dando o exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao alertar que a trigonometria deve ser trabalhada de modo a estar ligada a aplicações do cotidiano, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações. Porém, um dos principais objetivos dos alunos do ensino médio é o ingresso em grandes universidades públicas e isso só é possível através da realização de provas de níveis mais complexos, como é o caso da Fuvest (universidade citada pela autora), que exige que o aluno tenha um conhecimento mais aprofundado sobre a trigonometria, contrariando a citação dos PCN.

Mediante esse dilema, expõe a questão problema do seu trabalho. Deixar a trigonometria mais palpável e próxima da realidade dos alunos, ou profundar os conceitos e equações trigonométricas para deixá-los mais preparados para grandes vestibulares? Respondeu essa pergunta com a seguinte afirmação: “é possível conciliar as duas situações, mostrando a origem da trigonometria, suas aplicações atuais e em seguida trabalhar os conceitos e aprofundá-los.

Descreve os principais conceitos trigonométricos. Iniciou o capítulo com uma breve história da trigonometria, em seguida, mostrou a definição de ângulos, razões trigonométricas, teorema de Pitágoras, relação fundamental da trigonometria, desenvolveu as demonstrações dos ângulos notáveis, bem como a lei dos senos e lei dos cossenos, conceitos sobre arcos e ângulos na circunferência, unidades de medidas (grau e radiano), conversão das unidades, comprimento de arco, ângulos formados por ponteiro de relógio, ciclo trigonométrico, funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente), funções trigonométricas inversas, juntamente com suas definições e gráficos, adição e subtração de arcos, arco duplo, fatoração ou fórmulas de Prostaférese, arco triplo, arco metade.

É perceptível que a autora, além de colocar os assuntos mais trabalhados em trigonometria, considerou assuntos menos recorrentes de serem trabalhados em sala de aula, como funções trigonométricas inversas, Prostaférese, arco triplo. Com o intuito de responder à questão problema de sua pesquisa, relacionar a trigonometria com situações cotidianas além de elevar o nível dos alunos, principalmente para os que estão querendo passar em concursos de universidades públicas com provas de acesso mais complexas.

Apresentou algumas histórias clássicas sobre a trigonometria, como a de Erastóstenes e o cálculo do raio da terra, a de Tales de Mileto e a altura da pirâmide de Quéops, relacionou a trigonometria com outras áreas do conhecimento, na Física, com o lançamento oblíquo de um corpo qualquer, no fenômeno óptico refração, nas ondas sonoras, no gráfico da pressão sanguínea de um indivíduo.

Aplicou uma atividade para o seu público-alvo com o objetivo de avaliá-los sobre o conteúdo abordado durantes as aulas direcionadas para a pesquisa. O teste, formado por 10 questões de grandes vestibulares do país nos anos de 2016 e

1017, foi aplicado para aluno do 2º ano do ensino médio, de escolas privadas das cidades de Barra Bonita, Jaú e Botucatu, com tempo estimado para 100 minutos com um total de 60 participantes.

Através das observações finais da autora, pode-se perceber que a dinâmica obteve resultados positivos, pois muitos alunos, após o teste, a procuraram para comentar. Ressaltou que o trabalho direcionado com questões de vestibulares e ENEM, em sala de aula, é de fundamental importância para o bom desempenho dos alunos nesses exames, proporcionando segurança, confiança e preparo, apontou que um dos grandes problemas enfrentados pelos alunos foi a interpretação de texto da questão, principalmente as questões do ENEM que estavam no teste, desse modo, enfatizou a importância da correta leitura para a obtenção de resultados positivos nesse exame. O trabalho de Tozatto (2018) contribuiu com essa pesquisa no aspecto de que é possível preparar o aluno e elevar o seu nível na disciplina ao proporcionar condições e técnicas certas que auxiliem nesse processo. No caso da autora, apresentou a origem da trigonometria, aplicações nos dias atuais para poder ganhar a atenção dos alunos e após essa dinâmica elevou o nível dos assuntos inerentes ao objeto de conhecimento em questão, através de um teste com a obtenção de resultados positivos. Nessa pesquisa foi buscado elevar o nível dos alunos em Equações Trigonométricas Fundamentais ao aliar as metodologias ativas do conhecimento em prol do ensino.

2.3.5 Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de uma Prática Pedagógica Investigativa.

Gladis Bortoli, Bortoli (2012), defendeu sua dissertação para o Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates em Lajeado, no ano de 2012. Com o título “Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de uma Prática Pedagógica Investigativa”.

Bortoli (2012) buscou realizar uma pesquisa que visa uma abordagem diferenciada no ensino dos conteúdos de trigonometria, com foco no triângulo retângulo, para o ensino médio. Utilizou a história da matemática e a etnomatemática, juntamente com grupos de discussões em sala da aula, mostrar que matemática é uma construção humana presente no cotidiano das pessoas.

O público-alvo da pesquisa foram alunos do 2º ano do ensino médio, com idade variando de 15 a 17 anos, com diferentes níveis de aprendizagem, de uma escola particular de Caxias do Sul, no Rio Grande do Sul (RS), onde a autora ministra aulas.

Buscando diminuir as dificuldades inerentes dos seus alunos, no campo da trigonometria, a autora almejou responder a seguinte questão problema: quais as possibilidades da inserção da História da Matemática no ensino e na aprendizagem da Trigonometria presente no triângulo retângulo no Ensino Médio, tendo como aporte teórico o campo da Etnomatemática?

Como objetivo geral, visou problematizar, junto a um grupo de alunos do ensino médio, a construção de conhecimentos vinculados à trigonometria no triângulo retângulo.

A abordagem teórica apresentada em seu trabalho é a Etnomatemática, juntamente com contextos históricos, utiliza como autor principal o considerado pai da Etnomatemática D' Ambrósio, explana que o objetivo principal dessa metodologia é analisar as raízes socioculturais do conhecimento matemático, revela uma grande preocupação com a dimensão política do estudo da História e da Filosofia da Matemática, bem como suas implicações na educação.

Para Bortoli (2012), "O estudo histórico da construção dos conceitos é importante em Educação Matemática. Por ele pode-se analisar os erros e as dificuldades superadas pelos matemáticos, bem como observar as adaptações ocorridas ao longo da história e, além de auxiliar a condução da construção do conhecimento matemático, proporcionar uma visão mais ampla desse conhecimento.

A autora citou algumas histórias clássicas em sua pesquisa como a do Papiro de Rhind, Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Aristarco, Hiparco de Niceia, Ptolomeu, Menelau de Alexandria. Todas essas personalidades contribuíram com a trigonometria no decorrer dos séculos.

Para a autora, os conhecimentos matemáticos que estão presentes na sociedade são criados e utilizados pelas pessoas para resolver os mais diversos problemas do dia a dia, agregando métodos e conhecimentos que fazem desconsiderar certas abordagens academicamente aceitas, constituindo uma matemática cultural que faz a sociedade funcionar e está presente nas questões da vida cotidiana.

A pesquisa apresentada é de caráter qualitativo, tendo como ponto central de ação a busca por construir conceitos trigonométricos para o ensino médio, juntamente com a contextualização histórica. Desse modo a autora afirma que não pretende que o aluno aprenda somente a história, mas sim fazer uso dela para entender o contexto em que cada conteúdo se originou, os motivos que levaram o homem a criá-lo e as transformações pelas quais passou no percurso do tempo.

A aplicação da pesquisa ocorreu em agosto e setembro de 2011. Além disso, as aulas foram gravadas e os materiais construídos foram documentados por meio de fotografias e/ou filmagens para aumentar a fidelidade e a riqueza de detalhes das descobertas e dos eventos. Para descobrir como os profissionais da construção civil usam os números e como eles se relacionam com o triângulo estudado, foram realizadas palestras, entrevistas e atividades práticas.

Dividiu em a turma em equipes, cada equipe realizou uma atividade prática vinculada ao conteúdo, orientados por pedreiros, mestres de obra, engenheiros civis e arquitetos. As atividades propostas foram:

- Trigonometria no esquadro do chão com uma parede de um cômodo: verificar acerca do modo como se tira o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Analisar e identificar os conceitos de Trigonometria envolvidos no estabelecimento do esquadro.
- Trigonometria na determinação do desnível entre dois pontos de um terreno: verificar com trabalhadores da construção como se determina o desnível entre dois pontos de um terreno utilizando mangueira e água. Analisar e identificar os conceitos de Trigonometria envolvidos na determinação do desnível.
- Trigonometria na construção das “tesouras” de sustentação do telhado de uma residência: verificar os métodos empregados na construção da base dos diferentes telhados em função de sua aparência (seu formato) ou materiais empregados. Analisar e identificar os conceitos de trigonometria envolvidos na construção das tesouras que dão sustentação ao telhado.

Destacou sobre a importância de esclarecer que a divisão da atividade prática em temas distintos visa mostrar e trazer para o âmbito escolar as diferentes matemáticas utilizadas por estes profissionais na realização de cada uma das tarefas anteriormente citadas, bem como oportunizar à turma as diferentes visões da trigonometria empregada em cada uma delas, o que veio a acontecer na socialização dos trabalhos. Além de ressaltar que as contribuições e opiniões levantadas pelos alunos junto aos profissionais da construção civil constituíram-se meios para a construção dos conceitos da Trigonometria. Estes conhecimentos oportunizam um ambiente favorável à compreensão dos conceitos matemáticos formais.

Afirmou que a decisão de dividir a classe em grupos foi tomada com o objetivo de permitir que os alunos interajam, conversem e façam perguntas para construir e compartilhar informações. Além da avaliação dos grupos, através de tarefas individuais, foram analisadas as particularidades cognitivas e produtividade de cada participante. Sobre como avaliar, a autora buscou nas atividades, participações em seminários e nas demais atividades feitas em sua pesquisa, responder o seu objetivo inicial que seria problematizar, junto a um grupo de alunos do ensino médio, construção de conhecimentos vinculados à Trigonometria no triângulo retângulo.

O processo de avaliação desse trabalho começou com uma pesquisa preliminar para determinar o perfil da classe. Isso foi feito por meio de um questionário que buscou avaliar não apenas as habilidades prévias dos alunos em trigonometria, que são essenciais para estabelecer as diretrizes para a prática pedagógica do trabalho, mas também as condições educacionais e familiares dos participantes. A avaliação do processo de ensino e aprendizagem dos alunos foi simultâneo com o dia a dia da pesquisa. No final, isso envolveu a entrega de trabalhos escritos e apresentações orais sobre o tema escolhido e o profissional entrevistado, bem como estabelecer conexões entre os métodos matemáticos da escola e os ambientes de trabalho dos profissionais da construção civil.

Sobre o seu papel no desenvolvimento das atividades, explanou a importância do professor/ pesquisador na orientação das atividades, auxiliar nos momentos oportunos, indicar caminhos, apoiar e incentivar a autonomia dos alunos na busca pelo conhecimento.

Afirma que os seus alunos passaram a ver a matemática como uma ciência que evoluiu ao longo da história ao discutir que a matemática é uma construção humana resultante da necessidade de resolver problemas que a humanidade tem enfrentado ao longo dos tempos. Eles puderam relacionar a trigonometria com as situações cotidianas por meio desta proposta, demonstrando que o conhecimento matemático construído está presente no mundo moderno, embora com diferentes regras. Isso melhorou a compreensão das teorias e lhes deu sentido. Desse modo, relata que os alunos disseram no questionário final que esta forma de aprender trigonometria os ajudou a se tornarem pesquisadores independentes na construção de seu próprio conhecimento. Nas palavras da autora “acredito que a minha pesquisa ultrapassou o âmbito escolar, provocando uma educação que humaniza e personaliza a pessoa, produzindo cultura. Ademais, os alunos, agora pesquisadores, perceberam a existência e a importância de outras profissões dentro da sociedade".

O trabalho de Bortoli (2012) contribuiu para essa pesquisa, com a estratégia utilizada pela autora de dividir a turma em grupo no momento da aplicação das suas atividades, com o intuito de permitir a interação dos alunos, melhorar a participação e interesse dos alunos, estimular o senso de responsabilidade em equipe, são alguns aspectos que ajudaram na construção do conhecimento. Desse modo, como a experiência foi positiva nesse quesito, foi utilizado a estratégia de dividir a turma experimental em equipes na aplicação das atividades da sequência didática dessa pesquisa.

Nos quadros a seguir foram sintetizados os estudos experimentais, nos quais destacam-se o objetivo da pesquisa, o embasamento teórico e metodológico, procedimentos experimentais e as contribuições desses estudos para esse trabalho.

Quadro 3: Resumo dos estudos experimentais 1

TÍTULO/ AUTOR/ OBJETIVO DA PESQUISA	EMBASAMENTO TEÓRICO E METODOLÓGICO	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	CONTRIBUIÇÕES
O Ensino de Trigonometria: Perspectivas do Ensino Fundamental e Médio. Wellington da Silva, Silva (2013). Propor uma abordagem no ensino de trigonometria desde o 9° ano do ensino fundamental até o final do ensino médio, respeitando o currículo básico da matemática e o nível de aprofundamento do conteúdo de acordo com a faixa etária dos estudantes.	O autor iniciou o seu trabalho apresentando a história do ensino da trigonometria no Brasil. Apresentou a trigonometria abordada no ensino fundamental, modelou fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas, bem como aprofundou conceitos trigonométricos nos números complexos, engenharia, topografia e na física.	Silva (2013) propôs uma sequência didática para trabalhar trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental. A determinação da altura de uma nuvem em relação ao solo utilizando a trigonometria, aplicando o recurso do triângulo retângulo e utilizando as relações de seno, cosseno e tangente, bem como explanar o assunto por um viés histórico, além de estimular o aluno a respeito da aplicação da atual trigonometria, com o intento de mostrar os benefícios do assunto para as situações do cotidiano, os exemplos de aplicabilidades são: cálculo do diâmetro da Terra, cálculo da distância entre planetas, cálculo da distância para confeccionar mapas, cálculo de larguras de rios.	A pesquisa de Silva (2013) foi importante para este trabalho pois, mostrou que a aplicação da sequência didática pode ser apresentada juntamente com a história do objeto em questão. Expor para o aluno de onde surgiu determinado conceito, apresentar as aplicabilidades dos conteúdos, aflora o interesse, instiga a curiosidade e consequentemente, proporciona um ambiente propício para a aprendizagem.
Software Geogebra no Ensino da Trigonometria: Proposta Metodológica e Revisão da Literatura a partir das Produções Discentes nas Dissertações do Profmat. Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de Sousa, Sousa (2018). Verificar se a utilização do Software Geogebra no ensino de trigonometria reflete resultados positivos para aluno do Ensino Médio.	O autor fez uma análise em 20 trabalhos, que tem como afinidade a aplicabilidade do software Geogebra em sua metodologia e fazer a comparação necessária para tomar as suas projeções.	Analisou resultados positivos, para professores e alunos, com relação a utilização do Geogebra, como ferramenta auxiliar no processo de construção do conhecimento trigonométrico no ensino médio. Concluiu que atividades diferenciadas, utilizando a tecnologia, são muito enriquecedoras e produtivas, além de poder ser estendida para outras áreas da matemática como em geometria, estudo de matrizes, funções.	o trabalho de Sousa (2018) motivou positivamente a produção desse trabalho, pois, os resultados do autor foram satisfatórios para a utilização de tecnologias, então busquei ter efeitos equivalentes nas aplicações das atividades da sequência didática, com o auxílio das ferramentas auxiliares virtuais.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Quadro 4: Resumo dos estudos experimentais 2

TÍTULO/ AUTOR/ OBJETIVO DA PESQUISA	EMBASAMENTO TEÓRICO E METODOLÓGICO	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	CONTRIBUIÇÕES
A História da Matemática como Motivação para a Aprendizagem das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Elaine Regina Marquezin Marinho, Marinho (2018). Oferecer uma alternativa para o aprendizado mais significativo, especialmente na introdução à trigonometria.	A autora começa a parte teórica a partir da história da trigonometria, apresentou problemas da Astronomia, há mais de 4 milênios. Expõe que os problemas matemáticos existem desde a antiguidade e que são aplicados no ensino de matemática, sendo valorizado os resultados obtidos.	Através do método de resolução de problemas de George Pólya, a autora busca, na sua sequência de atividades, que o aluno, baseado nos seus conhecimentos já adquiridos anteriormente e em discussão com seus pares e através da mediação do professor, consiga construir novos conhecimentos. A autora pôde concluir que as atividades propostas, utilizando a história de astrônomos matemáticos para resolverem problemas de distâncias impossíveis, por meio do triângulo retângulo e das razões trigonométricas, foi bem-sucedido, pois a maioria dos alunos se interessaram pela dinâmica e se sentiram motivados a solucionar tais problemas.	O trabalho de Marinho (2018) contribuiu para essa pesquisa na produção da sequência didática. Na busca em elaborar as atividades de modo que desperte o interesse e curiosidade dos alunos, estimular o trabalho em equipe e a perseverança dos envolvidos, com o foco no processo de construção do conhecimento, ao invés de exigir apenas os resultados.
Trigonometria no Ensino Médio e suas Aplicações. Francine Dalavale Tozatto Souza, Tozatto (2018). Mostrar como pode-se desenvolver, em conjunto com os alunos, um conteúdo mais interessante, para que exista uma maior motivação e apreciação, não só para o aluno, mas também para o docente ao explanar esse conteúdo em sala de aula.	Descreve os principais conceitos trigonométricos. Iniciou o capítulo com uma breve história da trigonometria. além de colocar os assuntos mais trabalhados em trigonometria, considerou assuntos menos recorrentes de serem trabalhados em sala de aula.	A autora, aplicou uma atividade para o seu público-alvo com o objetivo de avaliá-los sobre o conteúdo abordado durantes as aulas direcionadas para a pesquisa. O teste foi formado por 10 questões de grandes vestibulares do país nos anos de 2016 e 2017, com tempo estimado para 100 minutos com um total de 60 participantes.	O trabalho de Tozatto (2018) contribuiu com essa pesquisa no aspecto de que é possível preparar o aluno e elevar o seu nível na disciplina ao proporcionar condições e técnicas certas que auxiliem nesse processo.
Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de uma Prática Pedagógica Investigativa. Gladis Bortoli, Bortoli (2012). A autora visou problematizar, junto a um grupo de alunos do ensino médio, a construção de conhecimentos vinculados à trigonometria no triângulo retângulo.	A autora buscou realizar uma pesquisa que visa uma abordagem diferenciada no ensino dos conteúdos de trigonometria, com foco no triângulo retângulo, para o ensino médio. Utilizou a história da matemática juntamente com a etnomatemática na construção dos conhecimentos.	A autora dividiu em a turma em equipes, cada equipe realizou uma atividade prática vinculada ao conteúdo, orientados por pedreiros, mestres de obra, engenheiros civis e arquitetos. A autora visa mostrar e trazer para o âmbito escolar as diferentes matemáticas utilizadas por estes profissionais, bem como oportunizar à turma as diferentes visões da trigonometria empregada em cada uma delas, o que veio a acontecer na socialização dos trabalhos.	O trabalho de Bortoli (2012) contribuiu para essa pesquisa, com a estratégia utilizada pela autora de dividir a turma em grupo no momento da aplicação da sua pesquisa, com o intuito de permitir a interação dos alunos, melhorar a participação e interesse nas atividades, estimular o senso de responsabilidade em equipe.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

2.4 A TRIGONOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS: PERCEPÇÕES E ANÁLISES

Os conhecimentos matemáticos não foram desenvolvidos de forma sistematizada, como algoritmos prontos que podem ser usados em situações com ou sem significado real; em vez disso, são construções humanas derivadas da necessidade de resolver situações concretas. Desse modo, entende-se que o desenvolvimento desses conhecimentos ao longo do tempo pode ajudar as pessoas a entendê-los dentro do ambiente escolar. Existe, nos dias atuais, vasta quantidade de literaturas que demonstram os saberes matemáticos prontos e organizados, porém é importante ressaltar que esses saberes foram construídos ao longo de muitos anos, ou seja, o que se apresenta nos livros didáticos é resultado de muito trabalho por parte desses autores/ construtores de conhecimento.

O livro didático é um recurso essencial para professores e alunos e é um instrumento importante na construção do conhecimento. Os livros didáticos servem como verdadeiros manuais e auxiliam no planejamento e na prática do professor. De acordo com Cavalcanti (1996) os livros didáticos são publicações dirigidas tanto aos professores quanto aos alunos, que não apenas organizam os conteúdos a serem ensinados, como também indicam a forma como os professores devem planejar suas aulas e tratar seus conteúdos com os alunos.

Para Libâneo (2002) devido ao fato de ser útil tanto para professores quanto para alunos, o livro didático é um recurso essencial no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, o professor pode usá-lo para aprimorar seus conhecimentos sobre um conteúdo específico ou aprender como aplicá-lo no ambiente escolar. Por sua vez, o livro didático permite que os alunos tratem o conteúdo de maneira mais organizada e simplificada. Isso contribui para que os conhecimentos adquiridos em sala de aula sejam reforçados.

Como o livro didático de matemática sempre teve e continuará a desempenhar um papel essencial na educação, é inegável o quão importante ele é para a construção dos saberes. Assim, entende-se a importância de os professores utilizarem essa ferramenta de modo adequado, com responsabilidade por analisar criticamente o material didático e integrá-lo à realidade do grupo, além de buscar novos métodos de ensino, visto que o livro didático não deve ser a única ferramenta utilizada em sala de aula.

Conforme Dante (2009) o livro didático não deve ser visto apenas como um recurso auxiliador para professores que visam ensinar matemática, isso mostra que é necessário buscar outros recursos. Assim, entende-se que existem várias abordagens metodológicas para o aprendizado de qualquer disciplina, especialmente matemática. Portanto, para criar sua própria prática de ensino, os professores precisam conhecer as várias possibilidades metodológicas para a dinâmica de trabalho.

A análise dos livros didáticos foi realizada para se ter uma visão de como a trigonometria, mais especificamente o assunto equações trigonométricas é tratado nesse recurso didático. O foco da análise foi em torno da trigonometria na circunferência, definições sobre arco, ângulo, unidades de medidas de arcos e ângulos, arcos côngruos, circunferência trigonométrica, valores notáveis de seno, cosseno, tangente e equações trigonométricas fundamentais e clássicas. De que maneira esses assuntos foram abordados, quantidade de exercícios propostos, aplicabilidade no cotidiano e com outras áreas de conhecimento, particularidades de cada obra.

2.4.1 Matemática – Contexto e Aplicações

O livro intitulado “Matemática: Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante, destinado para o 2º ano do Ensino Médio, Editora Ática, 1ª Edição (edição reformulada), ano 2003. O objetivo do autor é fazer com que o aluno compreenda as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino e, quando necessário, saiba aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

“Foi buscado explorar todos os conceitos básicos próprios do Ensino Médio de maneira intuitiva e compreensível. Evitamos as receitas prontas e o formalismo excessivo, porém foi mantido o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta” (Dante, 2003).

O capítulo 2: Conceitos trigonométricos básicos, aborda as definições de arcos e ângulos, unidades para medir arcos de circunferência, relação entre as unidades, circunferência trigonométrica, arcos trigonométricos, arcos côngruos. No capítulo 3: Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica o autor apresenta os valores notáveis de seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, redução ao 1º quadrante. No capitulo 5 “relações trigonométricas”, apresentam-se relações fundamentais, relações decorrentes das fundamentais, identidades trigonométricas e equações trigonométricas.

Sobre as equações trigonométricas, Dante (2003), apresenta as equações trigonométricas fundamentais do tipo sen x = a, cos x = a e tg x = a. No campo de exercícios resolvidos, fornece a resolução algébrica e geométrica de equações trigonométricas fundamentais, além de apresentar equações trigonométricas que necessitam de algum artifício algébrico para ser resolvida. Além dos exercícios resolvidos, é proposto exercícios para que o aluno possa desenvolver seus conhecimentos, bem como, no final do capítulo é proposto exercícios de revisão.

O livro é direto nas definições analisadas, o conteúdo sobre trigonometria é completo, com linguagem simples, o que facilita o entendimento das abordagens, apresenta quantidade satisfatória de exercícios resolvidos, exercícios propostos, além de possuir exercícios extra de revisão, questão desafio e em várias páginas o autor coloca quadrinhos com informações para refletir sobre algum tópico do assunto em questão.

2.4.2 Matemática Paiva 2

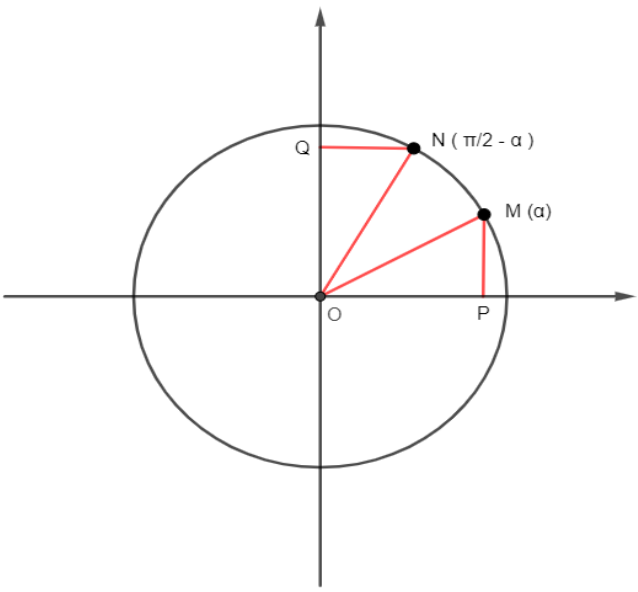
O livro da Editora Moderna, com o título “Matemática Paiva 2” é do autor Manoel Paiva, lançado no ano de 2009, 1ª edição, destinado para o 2º ano do Ensino Médio. Nas palavras do autor “esperamos contribuir com a formação de modo a instigar o espírito crítico e científico, despertar a curiosidade para o vasto universo da matemática, do qual conhecemos uma minúscula parte”.

A obra em análise apresenta o objeto matemático em foco no segundo e terceiro capítulo. Na introdução do assunto, o autor apresenta o esquema da órbita da lua ao redor da terra, admitiu que a órbita seja uma circunferência e lançou a seguinte pergunta “Sabendo que a lua percorre aproximadamente $\frac{\pi}{15}$ rad por dia, e que a distância da lua para a terra é de 384 000 km (raio da circunferência), como você calcularia a velocidade da lua em volta da terra em km/h? Lançado esse questionamento, o autor afirma para o leitor que após o estudo desse capítulo, será possível entender o que é a unidade de medida (radiano) e dessa forma, será possível resolver essa questão e outras que envolvam ângulos e distâncias em uma circunferência.

Paiva (2009) utilizou uma situação – problema para aguçar o leitor na busca da resposta, sendo uma estratégia importante para o aprendizado. Na parte inicial de trigonometria na circunferência, além dos conceitos estarem bem explanados, nas questões propostas o autor colocou questões contextualizadas, novamente, mostrando cuidado e preservando a estratégia de cativar atenção do leitor/aluno.

Sobre o conteúdo, vale ressaltar que o autor apresentou a redução ao 1º quadrante, arcos de medidas opostas e o mais interessante desse tópico, são os arcos de medidas $\alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, nesse tipo de situação o autor afirmou que os arcos trigonométricos estudados nesse tópico não têm extremidades simétricas em relação a nenhum dos eixos coordenados nem em relação à origem do sistema cartesiano. Há entre eles, no entanto, relações trigonométricas importantes que são utilizadas nas expressões e simplificações trigonométricas. No caso em questão, o autor apresenta a congruência entre os triângulos NOQ e MOP formados na circunferência trigonométrica dos arcos α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Figura 9: Relações entre arcos



$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\alpha$$

Fonte: Paiva (2009, p. 34).

De modo análogo, o autor apresenta as relações dos arcos α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$, α e $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, α e $\frac{3\pi}{2} + \alpha$. Uma maneira mais simples de apresentar essas relações entre arcos para os leitores/alunos, utilizando o conceito de congruência de triângulos, na circunferência trigonométrica, sem dúvidas, é um artifício importante que ajuda a dirimir possíveis dificuldades de aprendizagem.

Sobre as equações trigonométricas, Paiva (2009), trabalha as equações trigonométricas fundamentais, as clássicas, e propõe questões de fixação do conteúdo, além de no final do capítulo terem as questões complementares, tradicionais, as contextualizadas, questões – desafio e as questões de revisão cumulativa.

O livro de Paiva (2009) é completo de conteúdo sobre os conteúdos analisados, possui muitas questões (tradicionais e contextualizadas), além de ter linguagem acessível para o leitor/aluno que está aprendendo o conteúdo. Diante do exposto, o livro em foco é um excelente material para o professor utilizar como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem de trigonometria.

2.4.3 # Contato Matemática

O livro "#Contato Matemática" de Joamir Souza e Jacqueline Garcia produzido pela Editora FTD em 2016, 1ª edição, destinado a alunos do 2º ano do Ensino Médio. Nas palavras dos autores "desejamos que os alunos desenvolvam suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso desse material com dedicação e entusiasmo.

O assunto de trigonometria está presente no primeiro capítulo do livro. Na introdução do assunto, foi abordado a definição de marés e suas variações periódicas do nível do mar, nesse contexto, os autores levantaram uma problematização onde o aluno, de modo intuitivo, deveria buscar identificar dentre os gráficos, qual o que melhor representa a altura da maré em relação ao tempo. Visto que a maré tem variações periódicas, e o gráfico de uma função trigonométrica, também é periódico, o gráfico que melhor representa esse fenômeno é o da função trigonométrica. A contextualização é uma excelente maneira de introduzir o assunto, aproxima o objeto matemático do leitor/aluno através de situações do cotidiano.

Os conceitos iniciais sobre trigonometria na circunferência estão bem explicados, com figuras, algumas atividades contextualizadas e outras tradicionais. Nas atividades resolvidas os autores tiveram o cuidado de apresentar a resolução algébrica e a representação da solução no círculo trigonométrico. No tópico que aborda o assunto de equações trigonométricas, trouxeram o estudo das equações através de atividades resolvidas, e em seguida foi proposto alguns exercícios para fixação do assunto.

No geral, o livro abordou o assunto de equações trigonométricas de modo superficial, apresentou dois exercícios resolvidos de equações trigonométricas clássicas, pouca teoria e poucos exercícios de fixação, porém o conteúdo está bem organizado, com resoluções de fácil compreensão nas atividades resolvidas e os exercícios de fixação são do tipo tradicionais e contextualizadas. Se o professor necessitar elevar o nível da turma nesse conteúdo, não deverá se basear apenas nesse livro, será necessário utilizar material extra acrescido de lista de exercícios.

2.4.4 Conexões com a Matemática

Essa obra coletiva intitulada “Conexões com a Matemática” foi desenvolvida e produzida pela editora Moderna, 3ª edição, no ano de 2016, sendo Fábio Martins de Leonardo o editor responsável. Nas palavras dos editores “esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do aluno”.

A trigonometria de modo geral, nesse livro, é bem simplificada, o conteúdo é abordado com definições bem reduzidas e sem rigor matemático. A maioria dos exercícios são tradicionais, o livro oferta poucos exercícios resolvidos e propostos. Sobre as equações trigonométricas o livro oferece 4 exercícios resolvidos de equações trigonométricas fundamentais e alguns exercícios propostos.

No final do capítulo, são ofertados exercícios complementares e uma página denominada de autoavaliação com alguns exercícios sobre o capítulo, uma tabela de retomada de conceitos, para que o aluno verifique se acertou ou não o exercício dos assuntos que estão no capítulo. Os editores colocaram os objetivos do capítulo, os assuntos que as questões abordam e orientam os alunos a retomar a teoria, caso tenham errado algum item proposto.

No meu parecer, essa técnica não é a mais adequada, pois o livro focou no resultado, deixou a desejar na parte conceitual e nos níveis das questões, atrelado a isso, se o aluno errou uma questão não necessariamente implica que ele não saiba o conteúdo, existem outros fatores que podem influenciar no resultado de resolução de uma questão. Deve-se aprimorar pelo processo de construção do conhecimento e o que o aluno absorveu através das aulas e exercícios, verificar as falhas e dificuldades e buscar alternativas para minimizar tais situações.

Então, o que poderia agregar positivamente nessa obra, seria o aprofundamento do conteúdo, maior oferta de exercícios resolvidos e propostos, contextualizar conceitos trigonométricos para que o professor tenha uma ferramenta auxiliar em sala de aula que propicie maior suporte e dinâmica de trabalho.

2.4.5 Matemática: Interação e Tecnologia

O livro “Matemática: Interação e Tecnologia” do autor Rodrigo Balestri, da Editora LEYA, do ano de 2016, 2ª edição. Nas palavras do autor “essa coleção foi elaborada com o cuidado de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento, dessa forma, espero que esse livro o auxilie a compreender melhor a matemática. Para isso, é preciso comprometimento com os estudos e persistência perante as dificuldades, o que fará perceber o quanto é gratificante superá-las”.

No início do capítulo 1, denominado trigonometria na circunferência, é apresentado, de modo breve, a origem da trigonometria, as definições são abordadas juntamente com alguma situação problema, a ideia do autor é associar o objeto de conhecimento com situações da realidade do leitor/aluno.

O livro possui quantidade satisfatória de atividades resolvidas e atividades propostas, questões tradicionais e contextualizadas. Além de possuir questões desafio, com o intento de instigar o aluno a elevar seus conhecimentos e resolver esse tipo de questão que requer nível conceitual rebuscado.

Sobre o assunto de equações trigonométricas, o autor apresenta as equações trigonométricas fundamentais com resolução algébrica e geométrica no círculo trigonométrico. Nas atividades propostas, as equações selecionadas são clássicas, que requerem recursos, como o conhecimento da relação fundamental da trigonometria, mudança de variável o que resulta em uma equação do segundo grau, equações com arco duplo.

Associado a isso, o livro apresenta a “conexão tecnológica”, nesse espaço o autor faz o passo a passo, com imagens, de como construir uma circunferência trigonométrica no GeogebraPrim, além de propor atividades com o valor aproximado do seno e cosseno de ângulos através da circunferência criada no programa.

O livro expõe aplicabilidades de conceitos trigonométricos em diversas áreas, associa a assunto com a tecnologia, possui quantidade satisfatória de exercícios tradicionais e contextualizados e fornece a base conceitual resumida e organizada para facilitar a compreensão do leitor/ aluno. Desse modo, o livro tem condições para auxiliar o professor nas aulas de trigonometria, bem como estimular o interesse dos alunos através dos recursos disponibilizados.

2.4.6 Matemática 2

O livro “Matemática 2” de Eduardo Chavante e Diego Prestes é direcionado para alunos do 2º ano do Ensino Médio, foi produzido pela Editora SM, no ano de 2016. Nas palavras dos autores “preparamos esta obra com assuntos matemáticos direcionados à formação cidadã, fornecendo oportunidades de reflexão sobre atitudes que podemos, e devemos, desenvolver para viver melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação”.

Os autores começam o capítulo 1 denominado de “Trigonometria”, com uma contextualização sobre a meteorologia, sendo esta, uma ciência que estuda a atmosfera terrestre. O meteorologista utiliza de conhecimentos trigonométricos para construir determinados modelos matemáticos e efetuar análises, modelagens e previsões, sendo que em muitos desses modelos são utilizadas as funções trigonométricas. Uma ótima maneira de iniciar o assunto é relacionar o objeto matemático com aplicações práticas e de conhecimento do leitor/aluno.

A base teórica da trigonometria na circunferência trabalhada pelos autores é simples e objetiva, o que facilita a compreensão, possui quantidade satisfatória de atividades resolvidas, questões contextualizadas, além de questões desafio, para aguçar as percepções e conhecimentos do estudante. Sobre as equações trigonométricas, os autores propuseram a resolução de quatro equações trigonométricas, sendo elas de nível elevado de complexidade. Seria mais adequado que as questões começassem em nível crescente de dificuldade, ou seja, começar com as equações trigonométricas fundamentais, estabelecer o raciocínio de resolução para depois ir aumentando, gradualmente, o nível das questões. Nas atividades sobre as equações trigonométricas os autores, propuseram a resolução de equações fundamentais e clássicas.

No geral, o livro é positivo com relação a ser usado como ferramenta para aulas de trigonometria. Entretanto, não é indicado que o professor comece com as questões resolvidas do livro sobre o assunto de equações trigonométricas, pois há a necessidade de elevar o nível gradualmente. De nada adiantar propor inicialmente questões que requerem recursos algébricos para serem resolvidas sem trabalhar a base do assunto e fortalecer os conhecimentos necessário para almejar tais resultados. Nessa perspectiva, inverter a ordem dos níveis de questões pode ocasionar um colapso no ensino e aprendizagem e distanciar cada vez mais os alunos da disciplina.

2.4.7 Matemática: Contexto e Aplicações

A coleção "Matemática: Contexto e Aplicações" de Luiz Roberto Dante, 3ª edição, de 2016, Editora Ática, direcionado para alunos do 3º ano do Ensino Médio. Nas palavras do autor "nosso objetivo é criar condições para que você, aluno, possa compreender as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino atribuindo significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real".

O capítulo 10 do livro em questão, aborda as equações trigonométricas, a relação fundamental da trigonometria, as relações inversas de seno, cosseno e tangente de modo direto. Sugere que o aluno encontre outras relações fundamentais através da fornecida inicialmente.

Sobre as equações trigonométricas, esse volume trabalha quatro exercícios tradicionais, resolvidos, de equações trigonométricas que necessitam de algum artifício algébrico.

O que chamou atenção foi o exercício resolvido da página 240. O exercício é contextualizado e resolvido passo a passo, além do autor ampliar o problema acrescentando novas perguntas com o intuito de possibilitar maior compreensão do assunto exposto. Segue o problema, a resolução e a ampliação do problema.

(Unicastelo – SP) A temperatura média diária (em °C) de uma determinada região é expressa pela seguinte função: $T = 8 + 10.sen\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]$*, sendo s o número de semanas do ano e T a temperatura média diária. A semana do ano em que ocorreu a 1ª temperatura máxima foi a:*

a) 26ª.

b) 27ª.

c) 28ª.

d) 29ª.

e) 30ª.

Sabe-se que a temperatura máxima é atingida quando o valor de $sen\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]$ for igual a 1. No círculo trigonométrico o seno é igual a 1 quando o ângulo é de $\frac{\pi}{2}$ rad. Logo, basta igualar as duas relações de seno.

$$sen\left[2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)\right]=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 2\pi\left(\frac{s-13}{52}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2(s-13)=26\Rightarrow 2s-26=26\Rightarrow 2s=52$$

$$\Rightarrow \boxed{s=26}$$

Então, a primeira temperatura máxima do ano é obtida na 26ª semana do ano.

Na ampliação do problema, o autor fez quatro perguntas para aguçar a mente do leitor/aluno e estimular a aprendizagem do conteúdo.

a) Em qual semana ocorre a 1ª temperatura mínima do ano e qual será essa temperatura?

b) Ainda analisando a função enunciada e baseando-se nos conhecimentos trigonométricos, em qual semana ocorre pela 3ª vez a maior temperatura do ano e a menor temperatura? É importante analisar se é possível isso ocorrer em um mesmo ano.

c) Desafio em equipe: Com os colegas, monte um grupo de análises de temperatura da sua cidade durante um período de 30 dias e forme uma função que expresse a temperatura em função do dia do mês, trabalhando, assim, o assunto na prática.

d) Pesquisa: Como é feita a análise de temperatura do seu estado? E do Brasil? Como é elaborado o processo de previsão da temperatura de dias subsequentes e em que se baseia?

Ainda sobre as equações trigonométricas, Dante (2016) propôs exercícios para serem resolvidos, dentre eles, possui uma questão desafio e uma questão interdisciplinar, sobre movimento harmônico simples (MHS) estudado em Física.

Apesar desse volume trabalhar apenas alguns pontos da trigonometria, pois a outra parte foi trabalhada no volume 2 da mesma coleção, os assuntos são bem expostos, o conteúdo é abordado de forma simples e objetiva, quantidade satisfatória de exercícios propostos e exercícios resolvidos, em destaque nessa análise, a abordagem do problema juntamente com a sua ampliação com o intuito de estimular novos questionamentos e soluções aos estudantes. Então, pode-se dizer que o livro em foco é um bom aliado do professor no que se refere a trabalhar os tópicos apresentados sobre a trigonometria.

2.4.8 Matemática em Contextos

O livro “Matemática em Contextos” de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, destinado ao Ensino Médio, 1ª edição, ano 2020. Nas palavras dos autores “no decorrer de cada capítulo, apresentamos textos e atividades significativos, que abordam fatos históricos e contextualizaram a construção dos conteúdos que estão sendo estudados, bem como expõem e promovem a resolução de problemas relacionados a situações reais ou a outras áreas do conhecimento, exploram as tecnologias digitais – tão presentes em nossas vidas – e propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional.

O livro possui apenas dois capítulos, o primeiro é sobre trigonometria e o segundo é de matrizes e sistemas lineares.

No início do capítulo de trigonometria foi contextualizado o fenômeno das marés – fenômeno periódico. A força de atração da lua e do sol sobre as águas do mar provoca tal fenômeno. No final do texto, os autores afirmam que o fenômeno das marés, pode ser modelado, aproximadamente, por funções do tipo trigonométrica.

Os conceitos trigonométricos básicos na circunferência foram explanados sem formalismo e de maneira breve, poucas atividades resolvidas por tópico. Os autores fizeram associações com a história de acontecimentos importantes. Na página 46, denominada “conexões” é contado a história de Erastóstenes (276 – 194 a.C) e a medida de comprimento da circunferência da Terra. Na aba “fique atento” os autores apresentaram outra contribuição científica importante de Erastóstenes, a elaboração de um método (um algoritmo) para determinar todos os números primos menores ou iguais a certo número natural que ficou conhecido como “crivo de Erastóstenes”. É sugerido para os professores que essa contribuição seja pesquisada pelos alunos e em momento oportuno debatida em sala de aula. Na página 47 é explanado a história sobre o formato da Terra e os argumentos convincentes de Aristóteles (384 – 322 a.C) sobre a esfericidade da Terra.

Na seção denominada “Tecnologias digitais” os autores apresentaram e resolveram passo a passo, com ilustrações, uma construção de arcos côngruos no Geogebra e no final dessa dinâmica possui um exercício para verificar a eficiência e produtividade da construção.

O livro explora de maneira breve a ideia de seno e cosseno de um número real na circunferência, porém não é abordado a mesma ideia sobre a tangente. Existe apenas uma página do assunto redução ao 1º quadrante, poucos exercícios resolvidos e atividades propostas sobre esse tópico.

Não foi verificado um tópico que aborde as equações trigonométricas fundamentais e clássicas. Porém, quando o aluno for resolver as atividades de funções trigonométricas proposta no próprio livro, precisará saber resolver uma equação trigonométrica. Identidades trigonométricas, inequações trigonométricas, tangente e as razões trigonométricas inversas, não foram abordadas no livro.

O livro deixou a desejar na parte conceitual da trigonometria, foi verificado a ausência de muitos tópicos importante da matéria. Se o professor necessitar elevar o nível da turma, necessariamente, precisará de material complementar juntamente com questões extras. Foi detectado recursos didáticos valorosos no que tange a relacionar conceitos trigonométricos com a história, abordar aplicabilidades da trigonometria em situações cotidianas e apresentar atividades no Geogebra. O que poderia melhorar nesse livro, seria o equilíbrio entre o conteúdo e os recursos didáticos, para que assim o professor consiga elevar o nível da turma utilizando os recursos didáticos e tecnológicos a seu favor.

O quadro a seguir sintetiza as percepções gerais sobre o capítulo referente à trigonometria de cada livro analisado.

Quadro 5: Considerações sobre os livros analisados

LIVRO	CONSIDERAÇÕES
Matemática – Contexto e Aplicações Luiz Roberto Dante, destinado para o 2º ano do Ensino Médio, Editora Ática, 1ª Edição (edição reformulada), ano 2003.	O livro é direto nas definições analisadas, o conteúdo sobre trigonometria é completo, com linguagem simples, o que facilita o entendimento das abordagens, apresenta quantidade satisfatória de exercícios resolvidos, exercícios propostos, além de possuir exercícios extra de revisão, questão desafio e em várias páginas o autor coloca quadrinhos com informações para refletir sobre algum tópico do assunto em questão.
Matemática Paiva 2 Manoel Paiva, lançado no ano de 2009, 1ª edição, destinado para o 2º ano do Ensino Médio.	O livro de Paiva (2009) é completo de conteúdo sobre os conteúdos analisados, possui muitas questões (tradicionais e contextualizadas), além de ter linguagem acessível para o leitor/aluno que está aprendendo o conteúdo. Diante do exposto, o livro em foco é um excelente material para o professor utilizar como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem de trigonometria.
# Contato Matemática Joamir Souza e Jacqueline Garcia produzido pela Editora FTD em 2016, 1ª edição, destinado a alunos do 2º ano do Ensino Médio.	Os conceitos iniciais sobre trigonometria na circunferência estão bem explicados, com figuras, algumas atividades contextualizadas e outras tradicionais. Nas atividades resolvidas os autores tiveram o cuidado de apresentar a resolução algébrica e a representação da solução no círculo trigonométrico. No tópico que aborda o assunto de equações trigonométricas, os autores trouxeram o estudo das equações através de atividades resolvidas, e em seguida foi proposto alguns exercícios para fixação do assunto.
Conexões com a Matemática Moderna, 3ª edição, no ano de 2016, sendo Fábio Martins de Leonardo o editor responsável.	O que poderia agregar positivamente nessa obra, seria o aprofundamento do conteúdo, maior oferta de exercícios resolvidos e propostos, contextualizar conceitos trigonométricos para que o professor tenha uma ferramenta auxiliar em sala de aula que propicie maior suporte e dinâmica de trabalho.
Matemática: Interação e Tecnologia Rodrigo Balestri, da Editora LEYA, do ano de 2016, 2ª edição.	O livro expõe aplicabilidades de conceitos trigonométricos em diversas áreas, associa a assunto com a tecnologia, possui quantidade satisfatória de exercícios tradicionais e contextualizados e fornece a base conceitual resumida e organizada para facilitar a compreensão do leitor/ aluno. Desse modo, o livro tem condições para auxiliar o professor nas aulas de trigonometria, bem como estimular o interesse dos alunos através dos recursos disponibilizados.
Matemática 2 Eduardo Chavante e Diego Prestes é direcionado para alunos do 2º ano do Ensino Médio, foi produzido pela Editora SM, no ano de 2016	No geral, o livro é positivo com relação a ser usado como ferramenta para aulas de trigonometria. Entretanto, não é indicado que o professor comece com as questões resolvidas do livro sobre o assunto de equações trigonométricas, pois há a necessidade de elevar o nível gradualmente. De nada adiantar propor inicialmente questões que requerem recursos algébricos para serem resolvidas sem trabalhar a base do assunto e fortalecer os conhecimentos necessário para almejar tais resultados. Nessa perspectiva, inverter a ordem dos níveis de questões pode ocasionar um colapso no ensino e aprendizagem e distanciar cada vez mais os alunos da disciplina.
Matemática: Contexto e Aplicações Luiz Roberto Dante, 3ª edição, de 2016, Editora Ática, direcionado para alunos do 3º ano do Ensino Médio.	Apesar desse volume trabalhar apenas alguns pontos da trigonometria, pois a outra parte foi trabalhada no volume 2 da mesma coleção, os assuntos são bem expostos, o conteúdo é abordado de forma simples e objetiva, quantidade satisfatória de exercícios propostos e exercícios resolvidos, em destaque nessa análise, a abordagem do problema juntamente com a sua ampliação com o intuito de estimular novos questionamentos e soluções aos estudantes. Então, pode-se dizer que o livro em foco é um bom aliado do professor no que se refere a trabalhar os tópicos apresentados sobre a trigonometria.
Matemática em Contextos Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, destinado ao Ensino Médio, 1ª edição, ano 2020.	O livro deixou a desejar na parte conceitual da trigonometria, foi verificado a ausência de muitos tópicos importante da matéria. Se o professor necessitar elevar o nível da turma, necessariamente, precisará de material complementar juntamente com questões extras. Foi detectado recursos didáticos valorosos no que tange a relacionar conceitos trigonométricos com a história, abordar aplicabilidades da trigonometria em situações cotidianas e apresentar atividades no Geogebra. O que poderia melhorar nesse livro, seria o equilíbrio entre o conteúdo e os recursos didáticos, para que assim o professor consiga elevar o nível da turma utilizando os recursos didáticos e tecnológicos a seu favor.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

3. PERCEPÇÕES DE PROFESSORES E ALUNOS

É de fundamental importância para essa pesquisa angariar informações sobre como a trigonometria vem sendo trabalhada pelos professores, de que modo eles ministram o assunto, quais as estratégias metodológicas aplicadas em sala de aula, quais as dificuldades enfrentadas no processo. Bem como, obter dados de como os alunos egressos absorveram os conhecimentos, quais as dificuldades, afinidades, perspectivas, sobre a maneira que lhes foi apresentado a trigonometria, especificamente sobre as equações trigonométricas.

3.1 PROFESSORES COLABORADORES

Foi elaborado um formulário no Google Forms e encaminhado para Professores de Matemática do Ensino Médio que trabalham com o objeto de pesquisa desse trabalho. Foram feitas perguntas quanto ao tempo de serviço desses professores, como costumam ministrar suas aulas de trigonometria, sobre oferta de formação continuada na rede de ensino onde trabalham, se consideram a trigonometria um assunto difícil de ser ensinado, se os seus alunos gostam de Matemática e quais são as suas maiores dificuldades, também foi abordado perguntas de cunho técnico, relacionado aos tópicos da trigonometria que são trabalhados por eles e qual o nível de dificuldade desses tópicos na concepção desses professores, se acreditam sobre a importância da utilização de metodologias que fujam do tradicionalismo nas aulas de trigonometria e se utilizariam em suas aulas uma sequência didática para a construção do conhecimento na área de trigonometria.

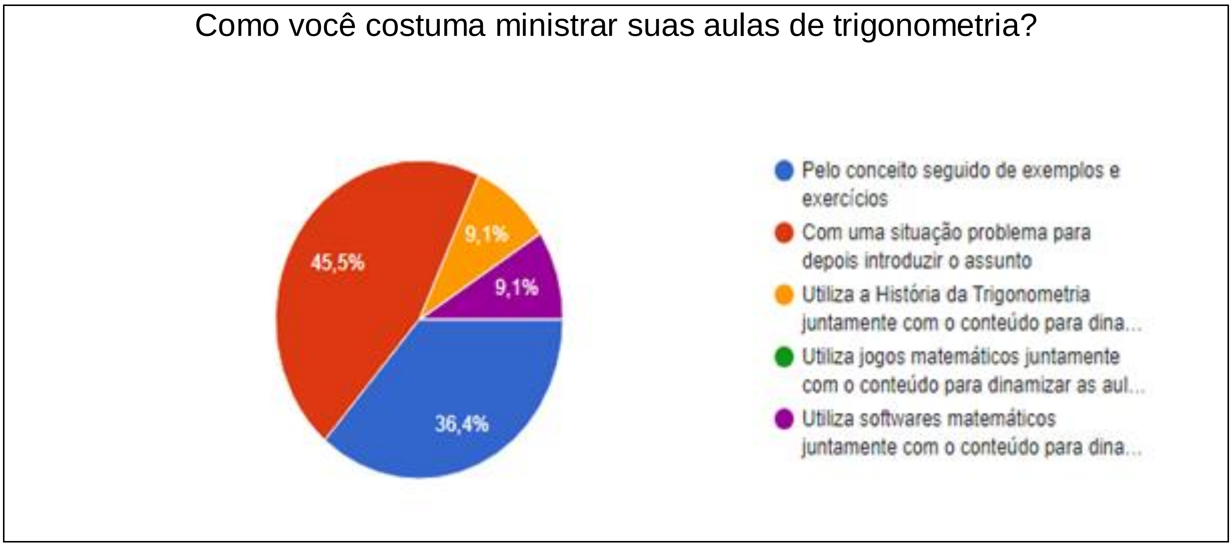
Sobre o tempo de serviço como professor, os participantes apresentaram maior percentual, de 36,4% no intervalo de 11 a 15 anos, o segundo maior percentual, com 27,3% está na faixa de 21 a 25 anos de serviço.

Figura 9: Tempo de serviço como professor

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Sobre a maneira como ministram as aulas de trigonometria, os participantes, de modo geral, trabalham sobre duas perspectivas. Com percentual de 45,5%, ministram suas aulas com uma situação problema para depois introduzir o assunto. O segundo percentual a se considerar, com 36,4% é a conceituação do objeto seguido de exemplos e exercícios

Figura 10: Maneira como os professores ministram suas aulas

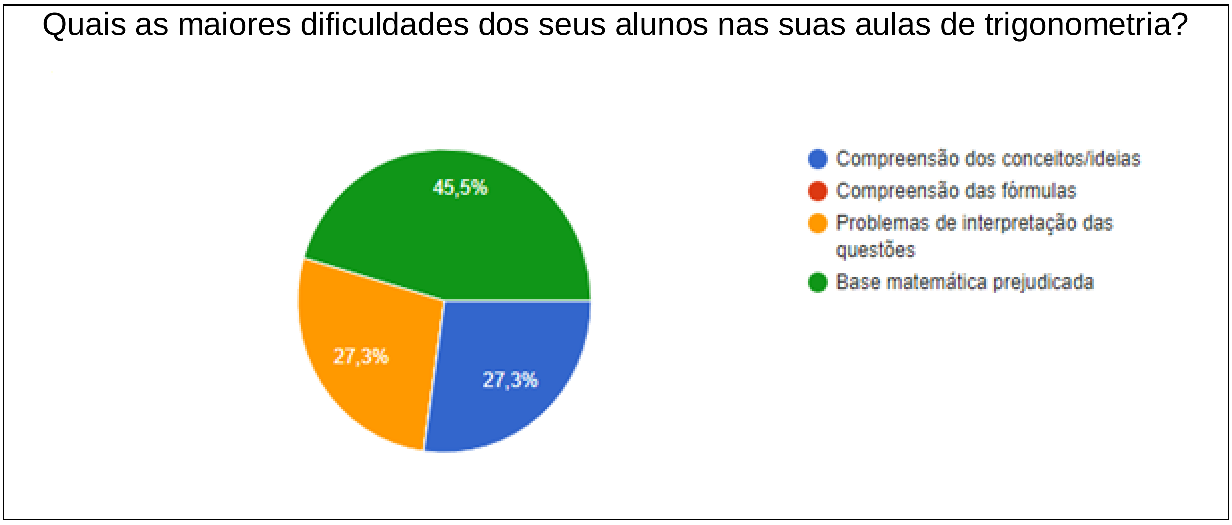


Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Em relação a curso de formação continuada, quando ofertado pelas redes de ensino que esses professores trabalham, 72,7% dos participantes afirmaram que participam em muitos casos, 18,2% participam poucas vezes e 9,1% participam sempre.

Sobre o ponto de vista do professor em relação a trigonometria, 63,6% dos participantes acreditam ser uma disciplina difícil de ser ensinada. Na perspectiva dos participantes em relação aos seus alunos, 54,5% dos professores entrevistados acreditam que a metade de seus alunos gostam de matemática, 27,3% afirma que a maioria de seus alunos gostam de matemática e um percentual de apenas 18,2% dos participantes acreditam que as minorias de seus alunos gostam de matemática.

Figura 11: Dificuldade dos alunos na perspectiva do professor

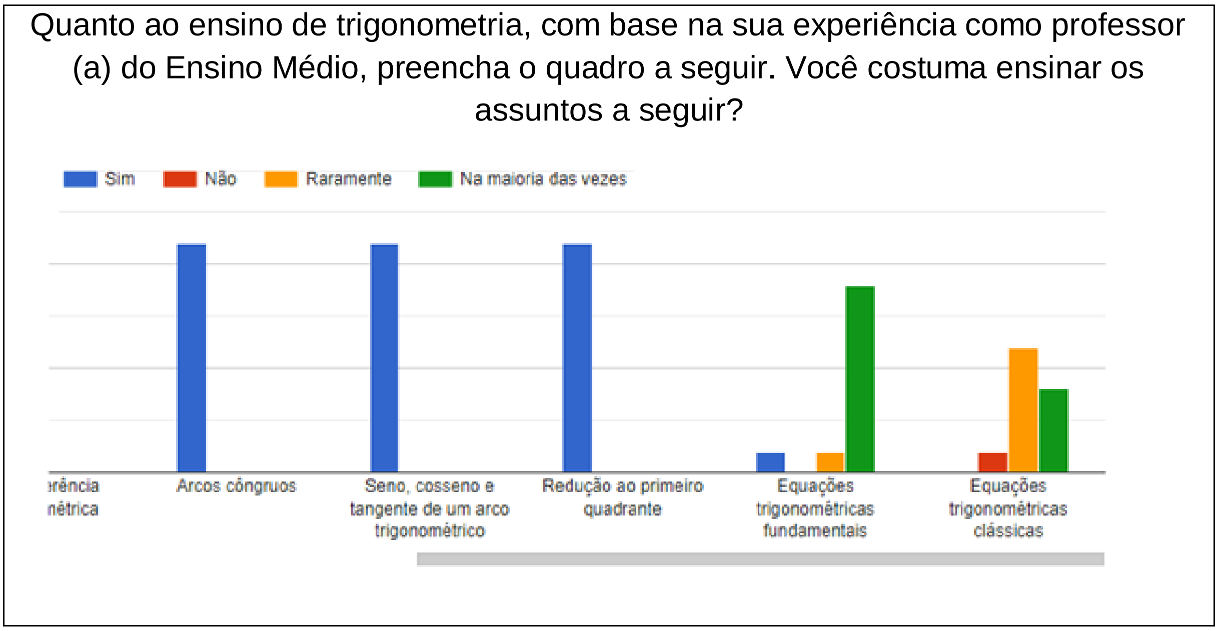


Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Sobre as dificuldades dos alunos nas aulas de trigonometria desses professores, o gráfico da figura 11 mostra que, para cerca de 45,5% dos participantes, a dificuldade está na base matemática. E com percentual igual de 27,3%, dificuldades na compreensão de conceitos e na interpretação as questões.

Quanto ao ensino de trigonometria, sobre os assuntos ensinados pelos professores participantes. O gráfico da figura 12 apresenta alguns dados importantes. Sobre os tópicos, definição de arco e ângulo, unidades de medidas, circunferência trigonométrica, arcos côngruos, seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico, redução ao primeiro quadrante os professores afirmaram trabalhar em sala de aula, porém sobre as equações trigonométricas fundamentais os dados apresentaram algumas divergências, a maioria dos entrevistados trabalham na maioria das vezes esse tópico, porém sobre as equações trigonométricas clássicas, ou seja, aquelas que requerem algum artifício algébrico para serem trabalhadas, o gráfico apresentou a opção raramente como a mais selecionada pelos participantes no questionário. Dessa forma, percebe-se que o tópico equações trigonométricas nem sempre é abordado pelos professores em sala de aula.

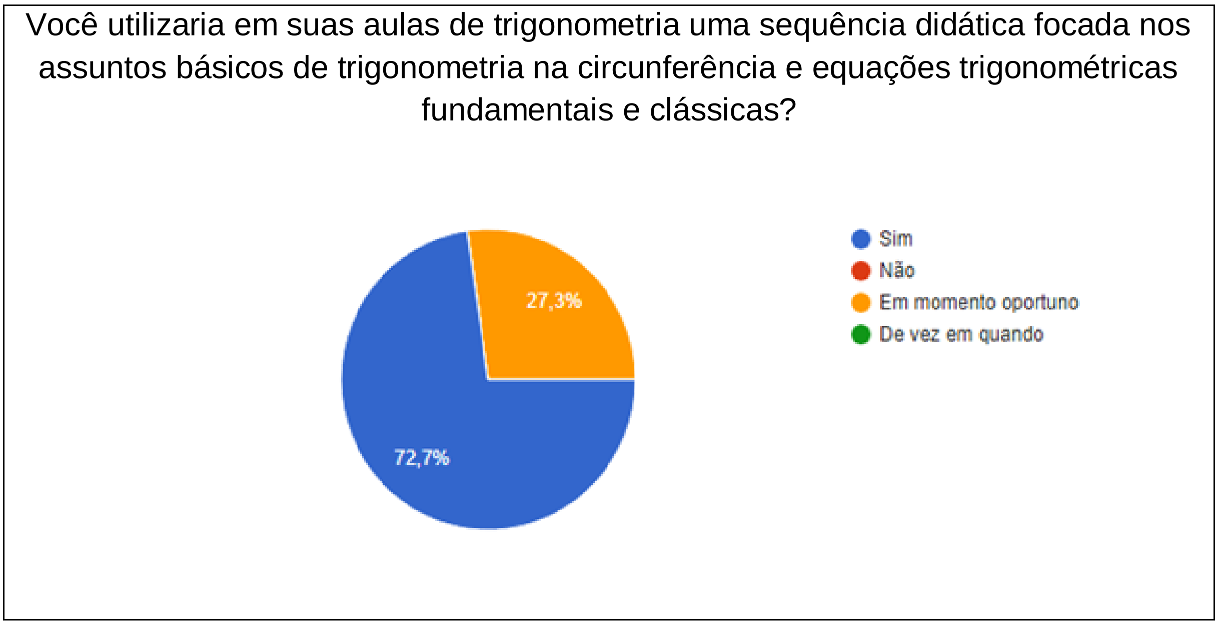
Figura 12: Assuntos de trigonometria trabalhados pelos professores



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

No que se refere a utilização de metodologias que fujam do tradicionalismo nas aulas de trigonometria, 81,8% dos participantes acreditam ser uma boa alternativa. E o mais importante para esse trabalho, 72,7% dos professores utilizariam em suas aulas de trigonometria uma sequência didática focada em assuntos básicos de trigonometria na circunferência para subsidiar a resolução de equações trigonométricas fundamentais e clássicas, como mostra o gráfico da figura 13 a seguir.

Figura 13: Opinião dos professores com relação à sequência didática



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Pode-se inferir sobre as percepções atingidas com os dados coletados no formulário, que a maioria dos participantes possuem mais de 10 anos de magistério, poucos utilizam a história da trigonometria, jogos matemáticos ou softwares como recursos metodológicos, nas suas aulas de trigonometria. Além disso, esses professores mostraram estar dispostos a reciclar os seus conhecimentos e o modo como trabalham, pois quando é ofertado cursos de formação continuada todos participam desses eventos. Consideram a trigonometria uma disciplina difícil de ser trabalhada, o que gera a necessidade de possuir conhecimentos e metodologias diferenciadas para ensiná-la satisfatoriamente.

A cerca da percepção dos professores com relação a empatia dos alunos com a matemática, grandes percentuais dos participantes, acreditam que seus alunos gostam da disciplina, o que demonstra ser um ponto positivo no processo, pois quando o aluno não gosta de uma determinada disciplina, produz bloqueios que dificultam o ensino e aprendizagem.

Em relação aos ensinamentos de determinados tópicos da trigonometria, todos os professores participantes ensinam os conceitos básicos da trigonometria na circunferência, porém quando perguntados sobre as equações trigonométricas fundamentais e clássicas, muitos responderam que ensinam na maioria das vezes ou raramente. Nessa perspectiva, surgem alguns questionamentos: será que as equações trigonométricas são, de fato, importantes para um aluno de ensino médio? Ou esse assunto pode ser pulado e dado apenas em uma revisão, ou em funções trigonométricas, quando a questão evoluir e cair em uma equação?

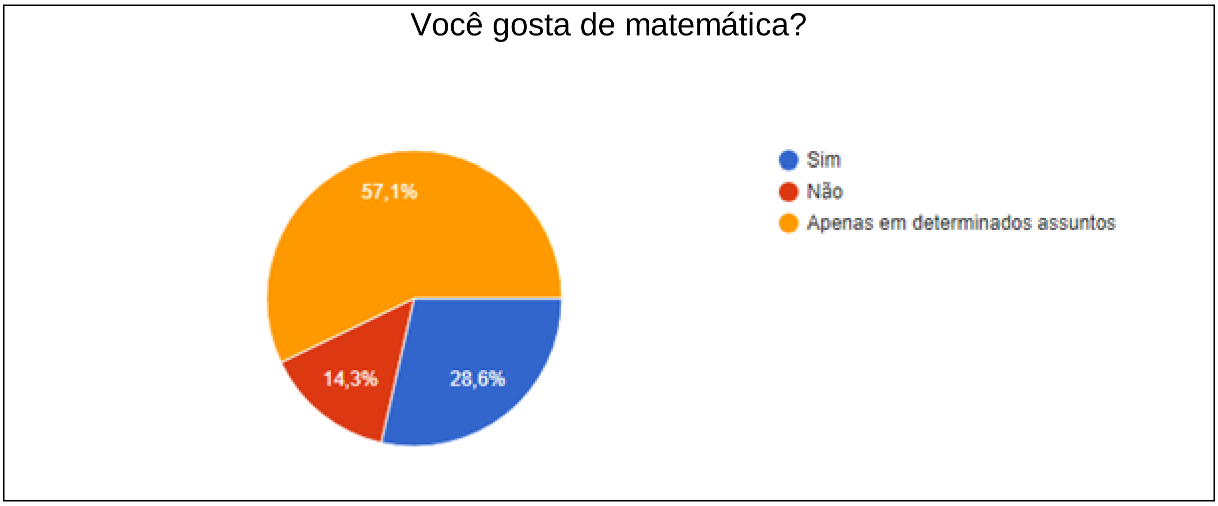
Certamente, as equações são importantes em qualquer assunto da matemática, ainda mais sobre as equações trigonométricas, que necessitam de base matemática e de conceitos específicos da disciplina para que o aluno consiga evoluir. O que pode ser melhorado nesse aspecto, para que o professor consiga chegar até as equações trigonométricas, seria ajustar a distribuição dos tempos, separar horários específicos para trabalhar as equações fundamentais e clássicas, o que ajudará o aluno a revisar vários conceitos da trigonometria e de modo estratégico, prospectar aumento no nível desses estudantes na disciplina, além da utilização de metodologias diferenciadas em sala de aula, sendo a sequência didática uma ótima alternativa para intermediar o conhecimento e potencializar os resultados.

3.2 ALUNOS EGRESSOS

Foi elaborado um formulário no Google Forms e encaminhado para alunos do 3º ano do Ensino Médio, que estudaram trigonometria no ano anterior. Foram feitas perguntas quanto a idade deles, se gostam de matemática, se além da sala de aula esses estudantes costumam estudar em casa, suas prospecções profissionais após o ensino básico, se possuem dificuldades com a matemática básica, se consideram a trigonometria um assunto difícil de ser entendido, seus conhecimentos sobre equações trigonométricas e as considerações e perspectivas sobre metodologias diferenciadas no ensino de trigonometria.

Sobre a idade dos participantes, cerca de 64,3% possuem 16 anos, idade prevista para alunos do 3º ano do Ensino Médio. Em relação a afinidade desses estudantes com a Matemática, o gráfico da figura 14 apresenta os seguintes dados.

Figura 14: Afinidade dos estudantes egressos com relação a matemática



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

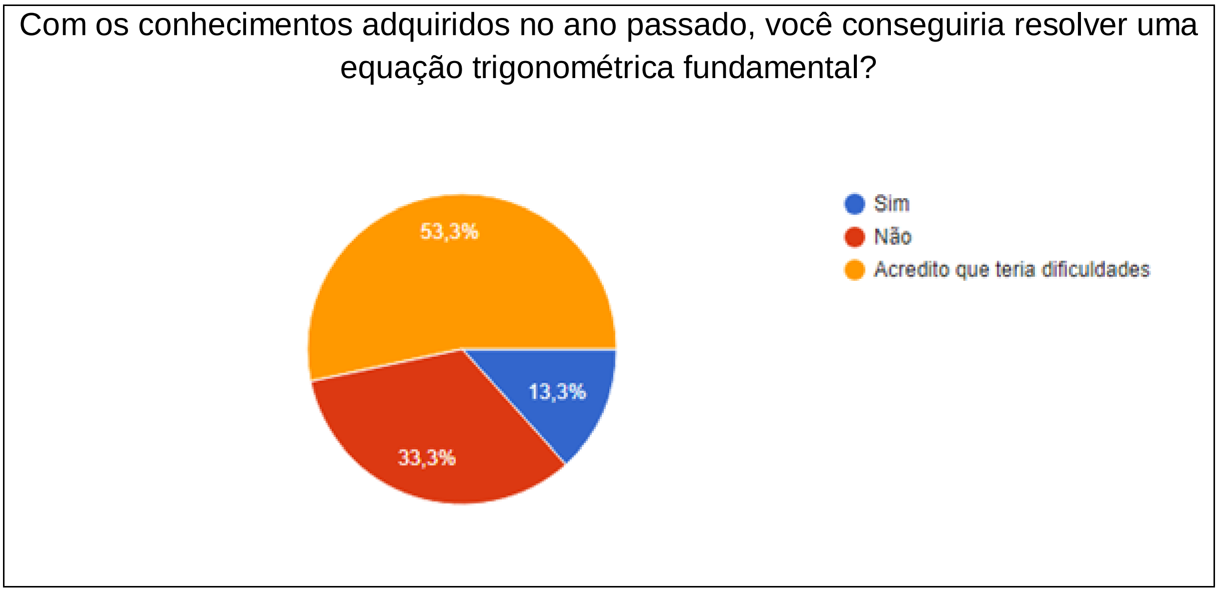
Apenas 14,3% dos estudantes não gostam de matemática, ou seja, a maioria dos participantes gostam ou possuem assuntos da disciplina com afinidade, esse indicativo é positivo para o ensino. Entretanto, somente gostar da disciplina não garante o aprendizado, é necessária rotina de estudos e dedicação no processo, apenas 26,7% dos participantes costumam estudar em casa, como mostra o gráfico da figura 16, abaixo. Esse pode ser um dos motivos que justificam os 80% dos estudantes que afirmaram possuírem dificuldades com a matemática básica.

Figura 15: Rotina de estudos dos estudantes egressos

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Cerca de 73,3% dos participantes consideram a trigonometria um assunto difícil de ser entendido. Sobre as equações trigonométricas, todos acreditam ser um tópico importante para ser abordado em sala de aula, porém apenas 13,3% dos estudantes conseguiriam resolver uma equação trigonométrica fundamental, figura 16. Sendo esse ponto, a motivação para a minha busca por uma sequência didática sobre equações trigonométricas.

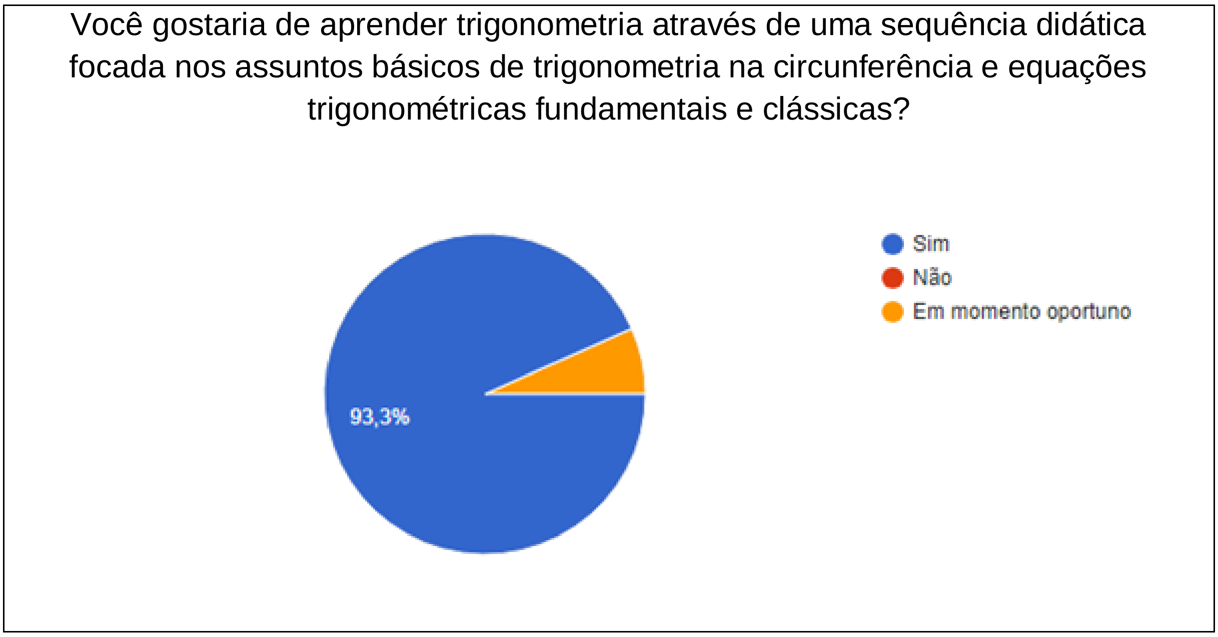
Figura 16: Conhecimento dos estudantes egressos sobre equações trigonométricas



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Sobre as metodologias aplicadas em sala de aula com o intuito de fugir de aulas tradicionais, 66,7% dos alunos acreditam ser um viés importante para o ensino de trigonometria e o que impulsiona o objetivo desse trabalho é saber que cerca de 93,3% dos estudantes egressos gostariam de aprender trigonometria, com o foco em equações trigonométricas fundamentais e clássicas através de uma sequência didática, como mostra o gráfico da figura 17.

Figura 17: Opinião dos estudantes egressos com relação a sequência didática



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Desse modo, com os dados angariados nesse formulário, têm-se subsídios necessários para a busca por uma sequência didática que contribua com o ensino e aprendizagem desse objeto, bem como fornecer uma alternativa futura para professores que buscam aprimorar suas aulas e potencializar seus resultados.

No quadro a seguir foram sintetizadas as principais percepções com relação aos professores e alunos egressos participantes.

Quadro 6: Resumo das percepções de acordo com professores e alunos egressos

PERCEPÇÕES NO ÂMBITO EDUCACIONAL	
PROFESSORES	ALUNOS EGRESSOS
• A maioria dos participantes possuem mais de 10 anos de magistério, poucos utilizam a história da trigonometria, jogos matemáticos ou softwares como recursos metodológicos, nas suas aulas de trigonometria. • Mostraram estar dispostos a reciclar os seus conhecimentos e o modo como trabalham, pois, quando é ofertado cursos de formação continuada todos os entrevistados costumam participar desses eventos. Consideram a trigonometria uma disciplina difícil de ser trabalhada, o que gera a necessidade de possuir conhecimentos e metodologias diferenciadas para ensiná-la satisfatoriamente. • Em relação aos ensinamentos de determinados tópicos da trigonometria, todos os professores participantes ensinam os conceitos básicos da trigonometria na circunferência, porém quando perguntados sobre as equações trigonométricas fundamentais e clássicas, muitos responderam que ensinam na maioria das vezes ou raramente. • No que se refere a utilização de metodologias que fujam do tradicionalismo nas aulas de trigonometria, 81,8% dos participantes acreditam ser uma boa alternativa. E o mais importante para esse trabalho, 72,7% dos professores utilizariam em suas aulas de trigonometria uma sequência didática focada em assuntos básicos de trigonometria na circunferência para subsidiar a resolução de equações trigonométricas fundamentais e clássicas.	• Sobre a idade dos participantes, cerca de 64,3% possuem 16 anos, idade prevista para alunos do 3º ano do Ensino Médio. • Em relação a afinidade desses alunos com a matemática, a maioria respondeu que gosta ou têm interesse em assuntos específicos da disciplina, apenas 14,3% responderam não gostar de matemática. Porém, apenas gostar não é suficiente para o processo de ensino e aprendizagem. • Os estudos além do ambiente escolar são importantes para a fixação dos conteúdos abordados em sala de aula, bem como revisar assuntos que não ficaram bem compreendidos no decorrer do processo, nessa perspectiva apenas 26,7% afirmaram estudar em casa. Esse pode ser um dos motivos que justificam os 80% dos estudantes que afirmaram possuírem dificuldades com a matemática básica. • Cerca de 73,3% dos participantes consideram a trigonometria um assunto difícil de ser entendido. Sobre as equações trigonométricas, todos acreditam ser um tópico importante para ser abordado em sala de aula. Além disso, cerca de 93,3% dos estudantes egressos gostariam de aprender trigonometria, com o foco em equações trigonométricas fundamentais e clássicas através de uma sequência didática.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

4. ASPECTOS HISTÓRICOS

A História da Matemática é uma área que vai além de estudos das ideias matemáticas no tempo, na verdade, um objeto matemático dentro de um contexto histórico, pode sair da imprecisão e ganhar sentido dentro da teoria, além de despertar a curiosidade e interesse por parte dos alunos. Estudar a história da matemática permite que o professor tenha uma carga de conhecimento extra para trabalhar os assuntos matemáticos, interligar os conteúdos com as suas origens históricas, bem como contextualizar a matemática com outras disciplinas.

De acordo com (Mendes; Chaquiam, 2016),

> Cabe ao professor pensar cuidadosamente sobre para o quê e para quem é essa história da matemática. Em nosso modo de pensar e agir na formação de professores de matemática, a história que compreendemos como importante para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos em sala de aula é uma história que tem a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço. Assim, essa história pode ser tomada como um aporte para esclarecimentos de cunho epistemológico e didático que poderão contribuir para o professor explicar e orientar a organização das matemáticas escolares. Nesse sentido as informações históricas poderão ser utilizadas para auxiliar o professor de matemática a melhorar o planejamento e a execução de suas explanações durante as aulas de matemática, bem como para justificar os modos de produção matemática no tempo e no espaço. (Mendes; Chaquiam, 2016, p. 17,18).

Por intermédio da história da matemática, verifica-se que a matemática é um construto humano, desenvolvida ao longo do tempo para suprir as necessidades da sociedade, ou seja, resolver circunstâncias que foram aparecendo ao longo dos anos, sendo assim, uma ferramenta para solucionar problemas de ordem geral. “As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.” (D’ Ambrósio, 1999, p. 97).

Ao analisar a história da matemática é possível perceber que a matemática que estudamos hoje, organizada, com os assuntos de cada série predeterminados, percorreu um longo caminho na história da humanidade, passou por várias fases, problemas sociais, culturais, necessidades práticas e abstrações, até chegar no estágio atual. Chaquiam (2017, p.13) afirma que a história da matemática vem se constituindo um valioso elemento para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, nas diferentes áreas e nos diversos níveis, o que permite compreender as origens das ideias que deram forma à nossa cultura, observar os diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem bem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Desse modo, a utilização da história da matemática no ambiente de ensino possibilita outras perspectivas de ver e entender a matemática, tornando-a mais agradável, contextualizada e integrada com as outras disciplinas. Conforme (Mendes; Chaquiam, 2016, p.18), há outros indicativos de que a inserção das discussões sobre o desenvolvimento histórico da matemática no ensino da disciplina se torna de extrema importância para dar significado ao conhecimento matemático ensinado e aprendido por estudantes da Educação Básica e Superior.

Portanto, foi utilizado nesse trabalho, recortes da História da Matemática para contextualizar conceitos matemáticos, especificamente, conceitos trigonométricos, resgatar a essência da problemática vivida na antiguidade, buscar entender as necessidades da sociedade do passado e relacionar com adversidades da atualidade, visto a possibilidade de utilizar a história para despertar o interesse e proporcionar aulas mais dinâmicas sobre o conteúdo.

4.1 RECORTES HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

O termo "trigonometria" vem do grego "trígonos", que significa "triângulo", e "métron", que significa "medida". No entanto, o campo não se concentra apenas no estudo de triângulos, mas também em outras áreas, como funções, equações e aplicações em várias ciências. De acordo com Boyer (1974), os povos egípcios já utilizavam a trigonometria, de forma inconsciente, nas construções de suas pirâmides. Sua trigonometria era considerada primitiva, pois ainda não existia as relações métricas do triângulo retângulo naqueles tempos, porém, o pensamento era o mesmo, mesmo que sendo aplicado com outras unidades e padrões de medidas diferentes dos nossos.

Estudos dizem que a trigonometria começou com problemas gerados pela astronomia, agrimensura e navegação em meados do século IV ou V a.C com os egípcios e babilônios. Ainda não há uma resposta concreta a respeito de como surgiu.

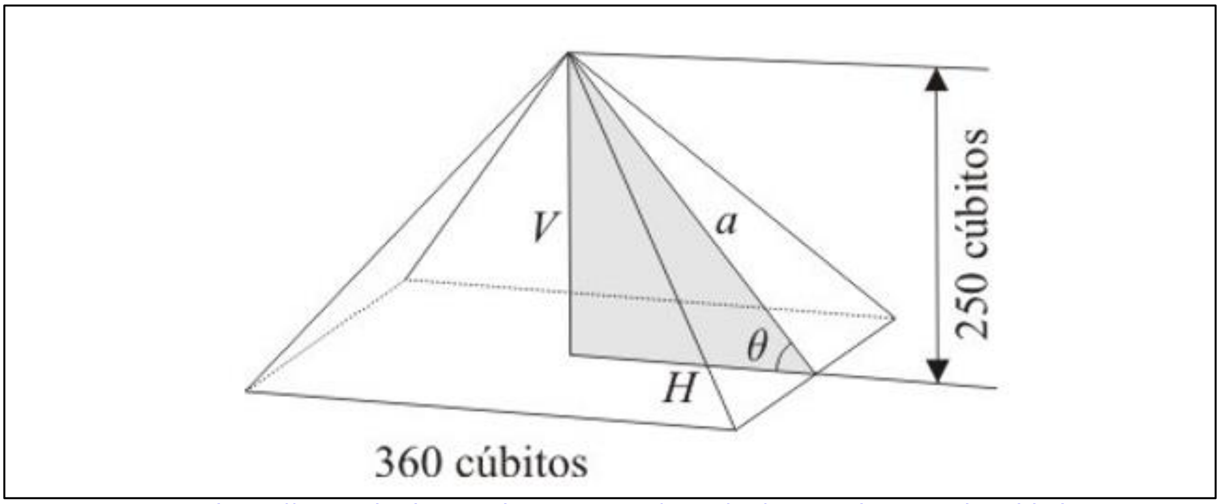
Aahmesu, que significava "Filho da Lua", era o nome de um dos primeiros escritores da história. Ele era conhecido como Ahmes e escreveu o Papiro de Ahmes, ou Papiro de Rhind, um dos textos matemáticos mais antigos conhecidos. O egiptólogo escocês A. Henry Rhind adquiriu o papiro de Ahmes no Egito e o deu o segundo nome. Este livro foi escrito aproximadamente em 1650 a.C e serve como um manual prático. Possui 84 problemas, e quatro deles apresentam um conceito relacionado à trigonometria.

O Papiro de Ahmes é considerado o documento matemático mais antigo registrado na história, com a identificação do autor. Embora esse papiro não tenha sido muito claro ao usar o termo "seqt", acredita-se, hoje, que o seqt de uma pirâmide regular seja equivalente à cotangente de um ângulo. (Contador, 2006).

No documento, os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o “percurso” e a “elevação”, isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Esse afastamento horizontal era chamado de Seqt (ou Seked) da pirâmide e é o que hoje chama-se de inclinação de uma parede. A unidade de medida da altura era dada em cúbitos e a unidade de medida horizontal era dada em mãos, onde em 1 cúbito cabem 7 mãos.

No papiro de Rhind, no problema de número 56, há um assunto que aborda os fundamentos da trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Essas informações podem ser aplicadas à construção de pirâmides, cujas faces devem ter uma inclinação constante. Pede-se o Seqt de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura e lados de sua base 360 cúbitos.

Figura 18: Seqt egípcio



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2010/08/o-seqt-de-uma-piramide.html

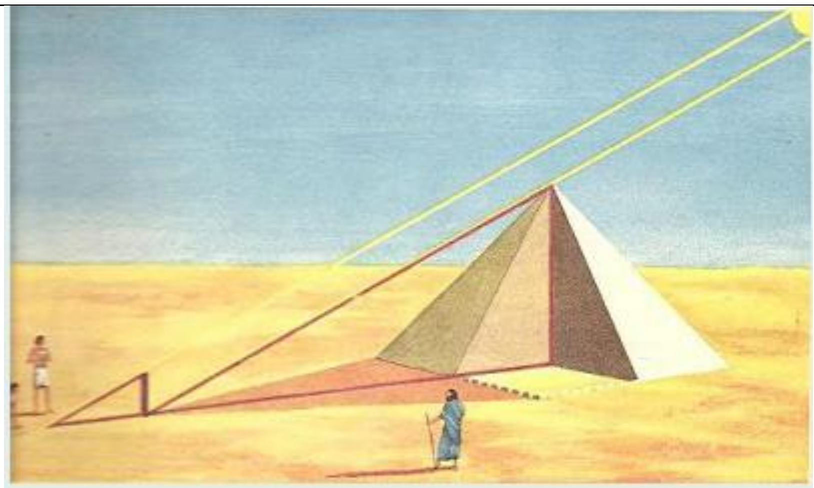
Embora Ahmed não tenha fornecido uma definição precisa do termo Seqt, é possível chegar à conclusão de que o Seqt de uma pirâmide seria o equivalente à cotangente de um ângulo, como pode ser visto na figura 18, onde o Seqt seria a razão entre o afastamento horizontal (H) pela altura (V):

$$\text{Seqt } (\theta) = \frac{180}{250} = \frac{18}{25} \text{ cúbitos ou } \frac{18}{25}.7 = 5{,}04 \text{ mãos.}$$

Conforme Brummelen (2009) os problemas 56 a 60, em particular, apresentam cálculos sobre a inclinação de uma pirâmide com foco nas suas dimensões horizontais e verticais, e alguns postulados têm sugerido que esses problemas são uma espécie de prototrigonometria. A causa destas afirmações é a noção de "seqt", um termo que se refere à inclinação de um lado inclinado na arquitetura egípcia; no Papiro Rhind, ele é usado apenas em relação à pirâmide, mas há evidências de que também foi usado para as inclinações da porta do templo. Como uma medida de "inclinação" e mudando o significado da palavra: A quantidade de deslocamento horizontal, medida em palmos, é seqt. Para cada sete palmos de posicionamento vertical, temos (portanto, s = 7/m, onde m é a definição de inclinação contemporânea.

Os gregos usaram sua sombra para medir a altura dos objetos. De acordo com Mendes (2009), em sua obra, Tales de Mileto, por volta de 600 a.C., relata essa experiência em sua passagem pelo Egito, quando foi abordado pelos escribas egípcios a pedido do faraó para calcular a altura de uma pirâmide quadrangular. Tales fez o seguinte: se apoiou em uma vara e esperou até que a sombra da vara na vertical tivesse o mesmo comprimento da vara no dia seguinte. Após isso, Tales pediu a um escriba presente que medisse a sombra da pirâmide mais a metade do comprimento de sua base. Como a sombra da pirâmide equivaleria a metade da altura da pirâmide.

Figura 19: Semelhança de triângulos de Tales de Mileto.



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_tales-de-mileto/

A trigonometria começou como uma ferramenta para auxiliar no estudo da astronomia e, à medida que se desenvolvia, se tornou uma base para outras áreas do conhecimento. Assim, a trigonometria foi organizada pelos gregos antigos, e a astronomia foi a força que impulsionou tais avanços, que começou na trigonometria esférica principalmente por causa dessas aplicações.

É de conhecimento os três nomes principais do desenvolvimento da trigonometria grega: Hiparco, Menelau e Ptolomeu. Houve outros colaboradores no decorrer do percurso, entretanto, os trabalhos deles foram perdidos e seus nomes esquecidos. De acordo com Flood & Wilson (2013) embora pouco da obra de Hiparco tenha sobrevivido, Cláudio Ptolomeu o considerava o seu antecessor mais importante. Na verdade, a disciplina Trigonometria (que significa medição de ângulos), criada por Hiparco por volta de 150 a.C., foi desenvolvida por Cláudio Ptolomeu.

Hiparco de Nicéia, astrônomo grego, matemático e geógrafo, nasceu na cidade de Nicéia, na Turquia atual, por volta de 190 a 120 a.C. Criou métodos para medir distâncias e ângulos. É considerado o pai da trigonometria. Ele escreveu um tratado em doze livros, que incluiu a construção da primeira tabela trigonométrica e uma tábua de cordas.

Conforme Katz (2010) para lidar quantitativamente com as posições das estrelas e dos planetas, é necessário fixar uma unidade de medida de arcos e ângulos e um método de especificar onde um corpo particular se encontra localizado na esfera celeste, isto é, um sistema de coordenadas. A unidade para medida de ângulos de Euclides era simplesmente o ângulo reto. Outros ângulos eram referidos como partes ou múltiplos deste ângulo. Os babilônios, no entanto, iniciaram, antes de 300 a.C., a divisão da circunferência em 360 partes, chamadas graus, e nos dois séculos seguintes esta medida, juntamente com a divisão sexagesimal dos graus em minutos e segundos, foi adaptado no mundo grego. Hiparco foi um dos primeiros a fazer uso desta medida, embora também usasse arcos de 1/24 e 1/48 de círculo, assim denominados “passos” e “semi-passos”, em parte da sua obra.

Após Hiparco, o próximo matemático grego conhecido por ter contribuído de forma expressiva para a trigonometria foi Menelau de Alexandria sabe-se que ele escreveu várias obras de trigonometria e geometria, porém o único livro que sobreviveu ao tempo foi o “Sphaerica” uma obra de três volumes que tratou sobre a geometria e a trigonometria esférica, sendo o primeiro trabalho que foi preservado sobre a trigonometria esférica.

No primeiro volume possui um teorema que afirma que “dois triângulos esféricos são congruentes quando os ângulos correspondentes são iguais”. No segundo volume contém teoremas de interesse para a astronomia e no terceiro volume, foi desenvolvido a trigonometria esférica através do teorema de Menelau com representação para o caso plano e esférico.

De acordo com Katz (2010) temos um resultado importante desse trabalho (Sphaerica), hoje conhecido como o Teorema de Menelau, que faz as relações entre os arcos dos círculos máximos em triângulos esféricos.

O astrônomo, matemático e geógrafo Cláudio Ptolomeu foi outro grande cientista do período grego que contribuiu significativamente para a trigonometria. Em seu trabalho chamado Almogesto, que também é conhecido como Syntaxis Mathematica - Coleção Matemática, ele expandiu as cordas em um círculo de Hiparco. A obra, dividida em treze livros, reúne os trabalhos de astrônomos da Antiguidade, incluindo Aristóteles, Hiparco e Posidônio (135 a.C.–51 a.C.), sendo Hiparco, considerado o maior astrônomo da Grécia antiga, a principal fonte.

Baseado na cosmologia aristotélica, o Almagesto é o trabalho mais influente e importante sobre trigonometria da Antiguidade. Ele apresenta o sistema cosmológico geocêntrico, que afirma que a Terra é o centro do Universo e descreve as órbitas de outros astros e corpos celestes ao seu redor. Platão e Aristóteles ensinaram que essas órbitas seriam círculos perfeitos. Os teólogos medievais, que rejeitavam qualquer teoria que não colocasse a Terra em um lugar privilegiado, adotaram essa ideia. Por causa disso, por cerca de 1.500 anos, o modelo geocêntrico foi considerado correto.

Segundo katz (2010) desde o tempo em que foi escrito até o século dezessete, o Almogesto, foi o trabalho astronômico mais influente, foi copiado e revisado inúmeras vezes. Mais do que outros livros, este inspirou a nação a acreditar que os astrônomos poderiam fazer previsões confiáveis usando um modelo matemático, ou seja, uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais.

O trabalho mais significativo do Almagesto foi mostrar que a matemática poderia ser usada para descrever quantitativamente os fenômenos naturais, ao criar métodos de trigonometria esférica que simplificaram significativamente as interpretações e análises desses fenômenos.

A evolução da trigonometria feita pelos gregos superou a dos egípcios e babilônicos. Apesar de os gregos terem utilizado obras elaboradas daquelas civilizações, eles deram um novo formato à trigonometria existente até essa época, alguns trabalhos significativos, como os encontrados nas obras de Hiparco, Menelau e Ptolomeu, serviram de apoio para os matemáticos posteriores, que fizeram compilações, traduções.

Embora considera-se os gregos os grandes motivadores dos estudos voltados para a trigonometria, é importante ressaltar que eles não foram os únicos que a estudaram. Outros povos sucederam os estudos como os indianos, persas e árabes aprimorando a trigonometria existente e contribuindo para a melhoria de várias ciências que se relacionam com ela.

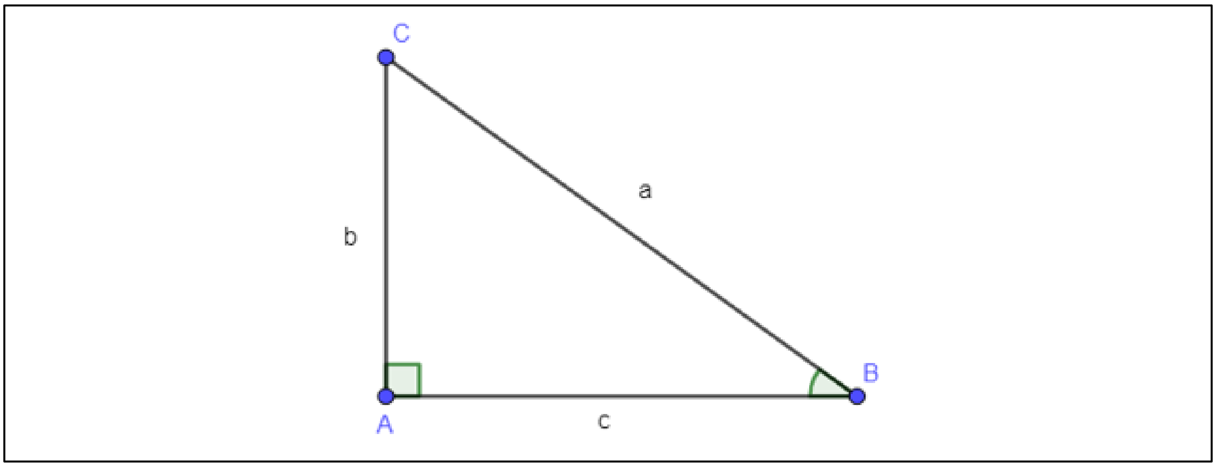
5. CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Para elaboração deste capítulo do trabalho foi utilizado como material de referência o livro *Fundamentos de Matemática Elementar 2013*, volume 3, de Gelson Iezzi.

5.1. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto. A hipotenusa é o maior lado do triângulo e encontra-se oposto ao ângulo reto e os outros dois lados são chamados de catetos.

Figura 20: Triângulo Retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

A partir do triângulo retângulo, teremos as razões trigonométricas fixando um ângulo agudo **B**.

Quadro 7: Razões trigonométricas

Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.	$Sen\hat{B} = \frac{b}{a}$
Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.	$Cos\hat{B} = \frac{c}{a}$
Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo	$Tg\hat{B} = \frac{b}{c}$
Cossecante de um ângulo é a razão inversa do seno	$Cos\sec\hat{B} = \frac{a}{b}$
Secante de um ângulo é a razão inversa do cosseno	$Sec\hat{B} = \frac{a}{c}$
Cotangente de um ângulo agudo é a razão inversa da tangente	$Cotg\hat{B} = \frac{c}{b}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.2. RELAÇÕES DERIVADAS DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

- **Relação Fundamental da Trigonometria**

Como $Sen\hat{B} = \frac{b}{a}$ e $Cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ então:

$$a \cdot sen\hat{B} = b \,;\, a \cdot \cos\hat{B} = c$$

Substituindo b e c no Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$, temos:

$$\left(a \cdot sen\hat{B}\right)^2 + \left(a \cdot \cos\hat{B}\right)^2 = a^2$$

$$a^2 \cdot sen^2\hat{B} + a^2 \cdot \cos^2\hat{B} = a^2$$

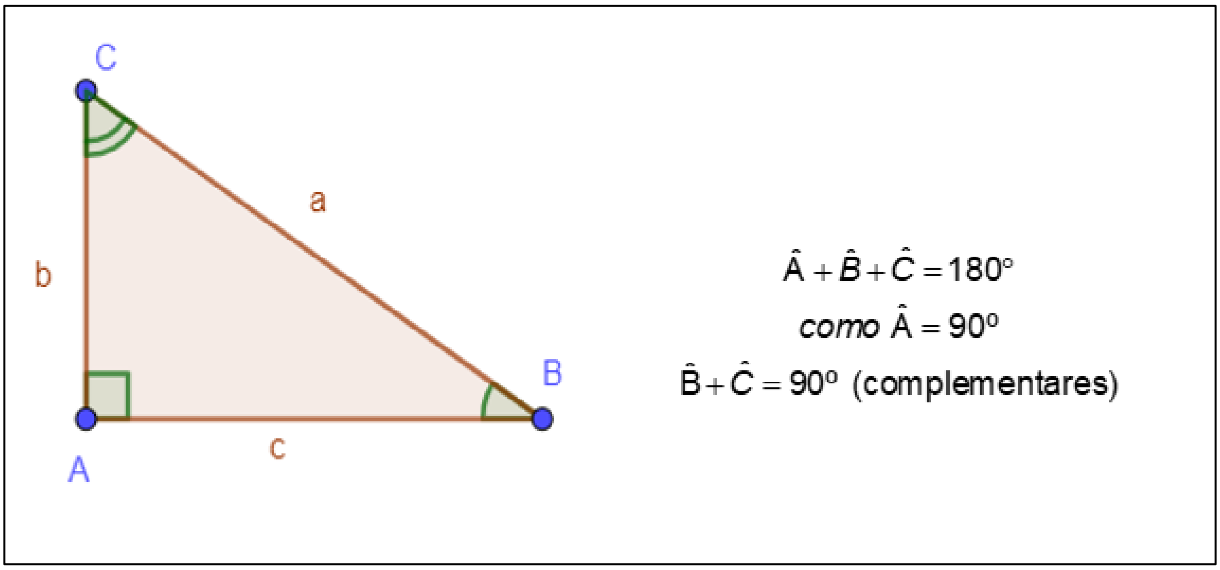
$$sen^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$$

- $Tg\hat{B} = \dfrac{Sen\hat{B}}{Cos\hat{B}}$

$$\frac{Sen\hat{B}}{Cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = Tg\hat{B}$$

- **Seno, Cosseno, Tangente, Cossecante, Secante e Cotangente de Ângulos Complementares.**

Figura 21: Triângulo retângulo com ângulos agudos em destaque



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Quadro 8: Relação dos ângulos complementares no triângulo retângulo

$Sen\hat{B} = \frac{b}{a}$	$Sen\hat{B} = Cos\hat{C}$
$Cos\hat{C} = \frac{b}{a}$	
$Sen\hat{C} = \frac{c}{a}$	$Sen\hat{C} = Cos\hat{B}$
$Cos\hat{B} = \frac{c}{a}$	
$Tg\hat{B} = \frac{b}{c}$	$Tg\hat{B} = Cotg\hat{C}$ ou $Tg\hat{B} = \frac{1}{Tg\hat{C}}$
$Cotg\hat{C} = \frac{b}{c}$	
$Cos\sec\hat{B} = \frac{a}{b}$	$Cos\sec\hat{B} = Sec\hat{C}$
$Sec\hat{C} = \frac{a}{b}$	

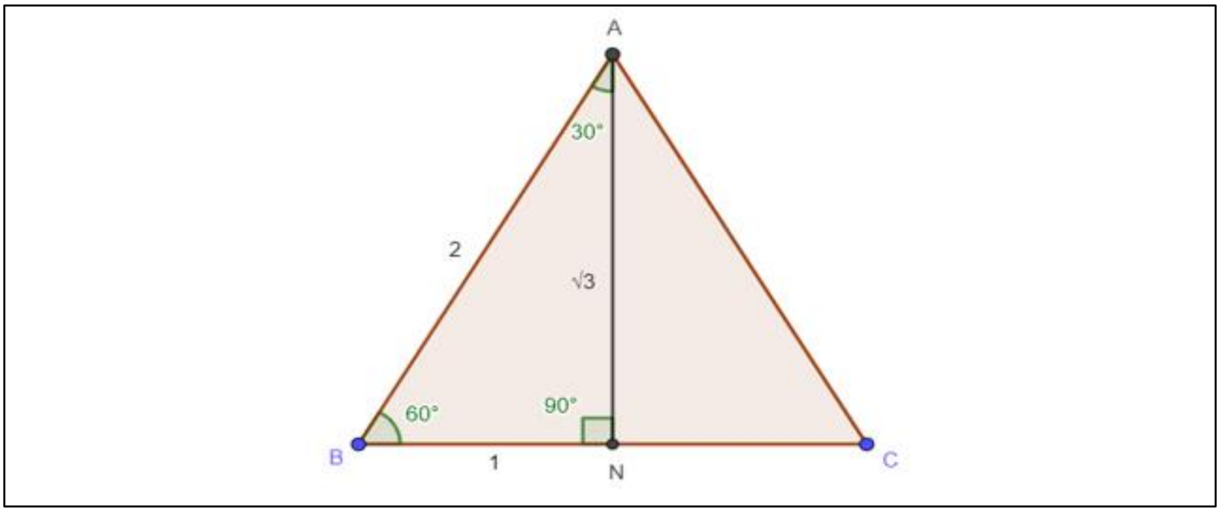
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS NOTÁVEIS

- **Do ângulo de 30º e 60º**

Seja um triângulo equilátero ABC de lado igual a 2 unidades de medida. Então, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 60°$. Considere $\overline{AN}$ a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.Sabe-se que em um triângulo equilátero a mediana coincide com a altura e bissetriz. Então, pelo Teorema de Pitágoras $\overline{AN}$ = $\sqrt{3}$.

Figura 22: Triângulo equilátero e uma mediana relativa ao lado BC



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

De acordo com o triângulo equilátero da figura 9, pode-se desenvolver as relações trigonométricas referentes aos ângulos de 30° e 60°.

$$sen30° = \frac{cat.op}{hip} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{cat.adj}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{cat.op}{cat.adj} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen60° = \frac{cat.op}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

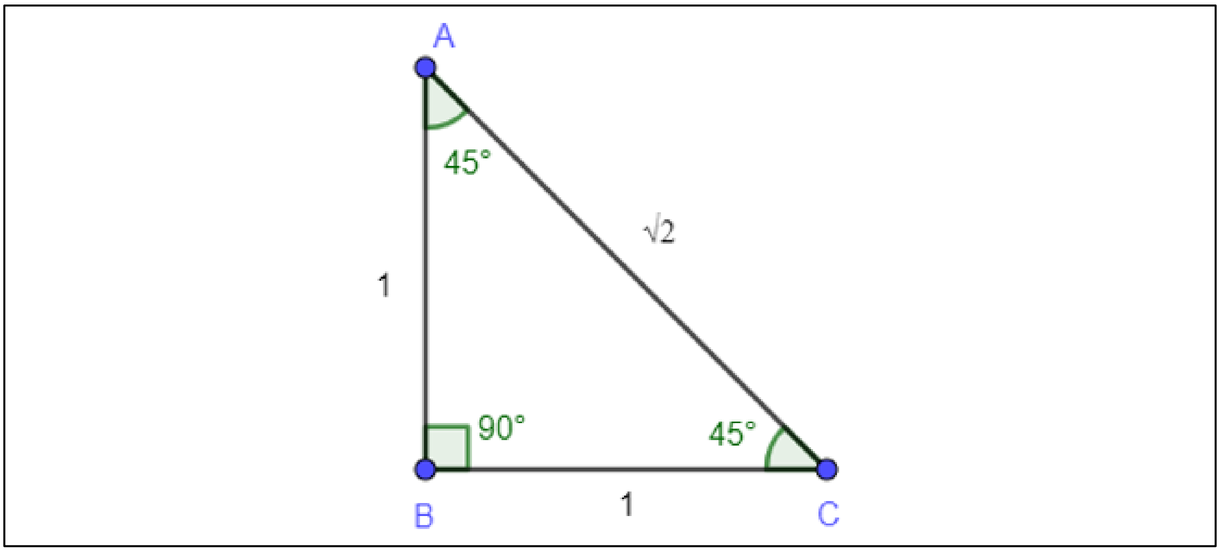
$$\cos 60° = \frac{cat.adj}{hip} = \frac{1}{2}$$

$$tg60° = \frac{cat.op}{cat.adj} = \sqrt{3}$$

- **Do ângulo de 45º**

Considere um triângulo retângulo isósceles, com catetos de medida iguais a 1 (um).

Figura 23: Triângulo Retângulo Isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Pelo Teorema de Pitágoras a hipotenusa $\overline{AC}$ é igual a $\sqrt{2}$. Então as relações trigonométricas referentes ao ângulo de 45° são:

$$sen45° = \frac{cat.op}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{cat.adj}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{cat.op}{cat.adj} = \frac{1}{1} = 1$$

É possível organizar essas razões trigonométricas em uma tabela, visto que esses ângulos são notáveis, ou seja, são importantes para o desenvolvimento de diversas questões envolvendo o assunto em questão.

Quadro 9: Razões Trigonométricas de Arcos Notáveis

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

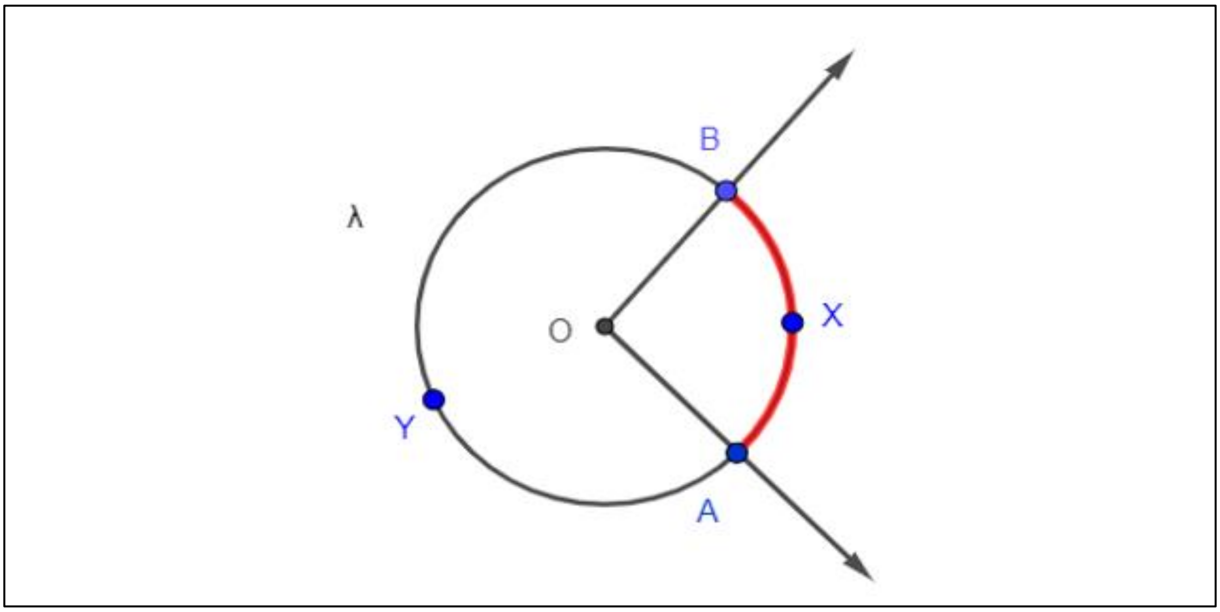
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5.4. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

- **Arcos de uma Circunferência**

Considere uma circunferência λ de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.

Figura 24: Representação de um arco na circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Sendo x um ponto pertencente ao arco referente ao ângulo agudo e y um ponto pertencente ao arco referente ao ângulo obtuso. A circunferência fica dividida em duas partes, ou seja, em dois arcos com extremidades nos pontos A e B. Os arcos podem ser representados por AXB e AYB, ou simplesmente AB quando não houver dúvidas sobre qual arco a situação estiver se referindo.

- **Unidades**

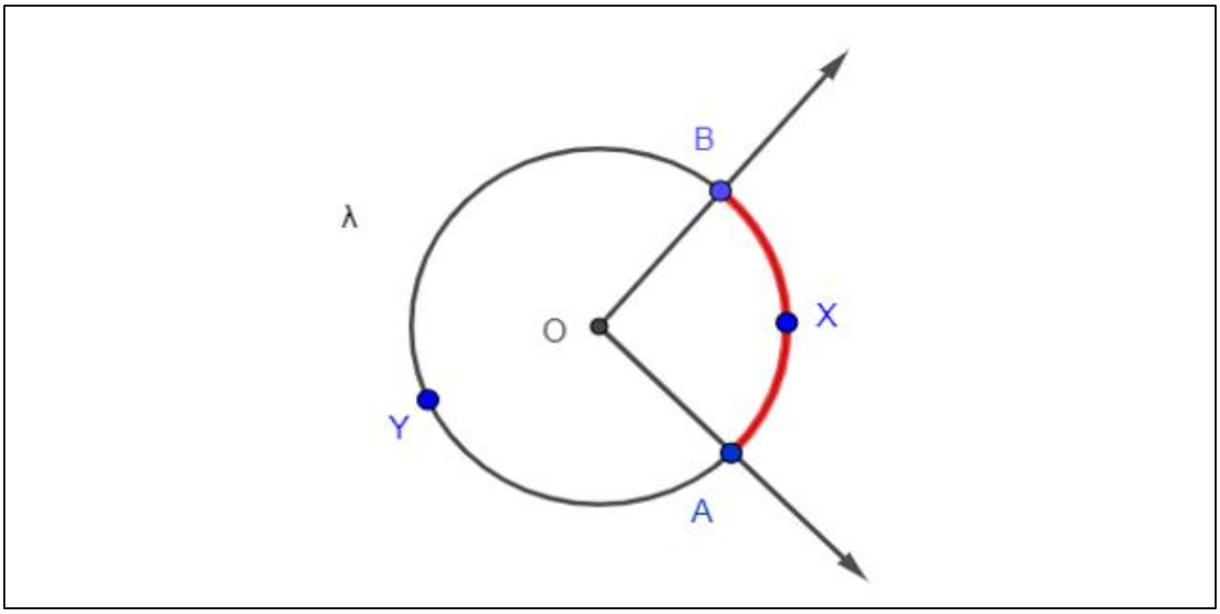
Existem duas unidades que os arcos podem ser medidos: o grau e o radiano. A seguir será apresentado as definições, bem como informações pertinentes sobre as unidades.

O grau (°) é um arco unitário igual à $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Uma volta completa em uma circunferência equivale a 360º.

A medida, em graus, de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central (α) correspondente.

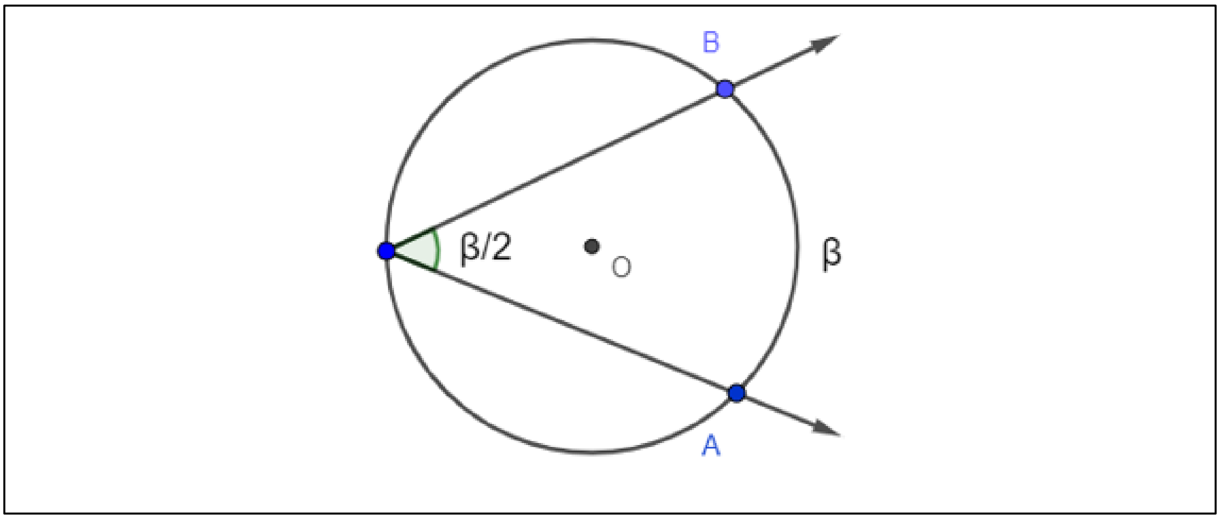
Figura 25: Ângulo central



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

A medida, em graus, de um ângulo inscrito (β) equivale à metade do arco correspondente.

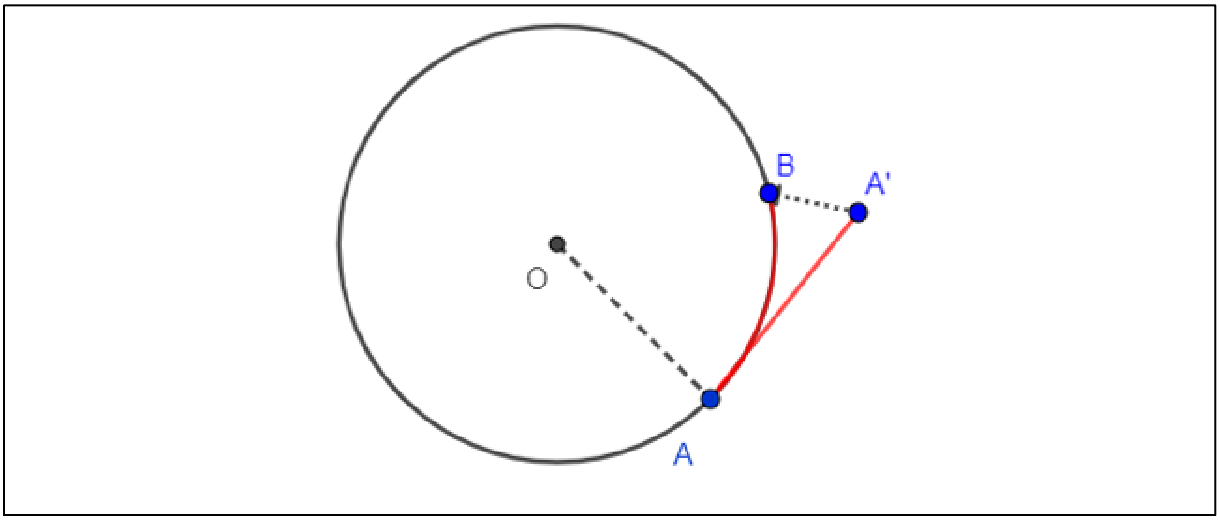
Figura 26: Ângulo inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

O radiano (rad) é um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido, ou seja, a medida do arco AB é igual a 1 rad.

Figura 27: Representação de 1 radiano



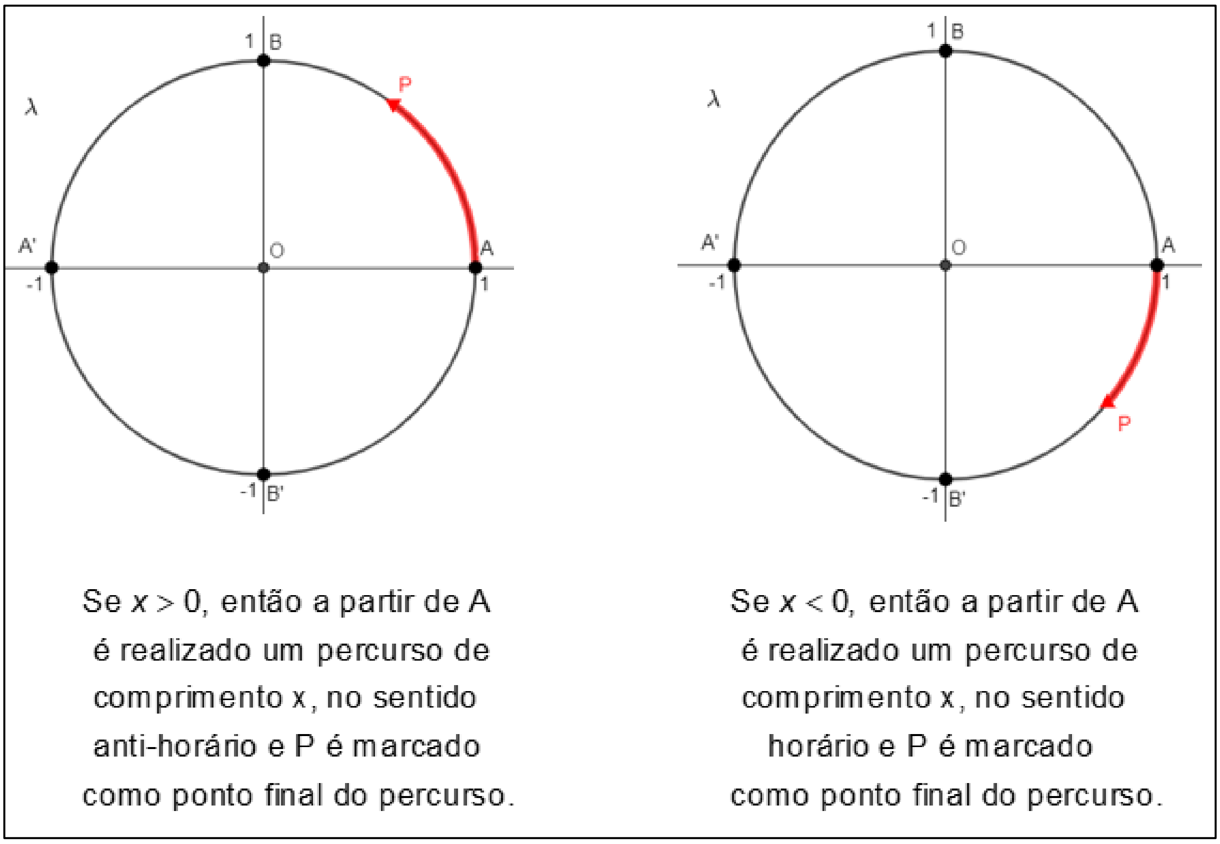
Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Vale ressaltar que existe uma relação entre grau e radiano, então, um arco que se encontra em grau pode ser convertido para radiano e vice versa, basta saber que π radiano (π rad) é igual a 180°. De modo proporcional, 2π rad equivale 360°, $\frac{\pi}{2}$ rad é igual a 90º e assim por diante.

5.5 CICLO TRIGONOMÉTRICO

Sobre um plano, têm-se um sistema cartesiano ortogonal xOy. Considere uma circunferência λ de centro O e raio igual a 1. Percebe-se que o comprimento dessa circunferência é 2π. Associa-se a cada número real x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, um único ponto P da circunferência λ.

Figura 28: Ciclo Trigonométrico

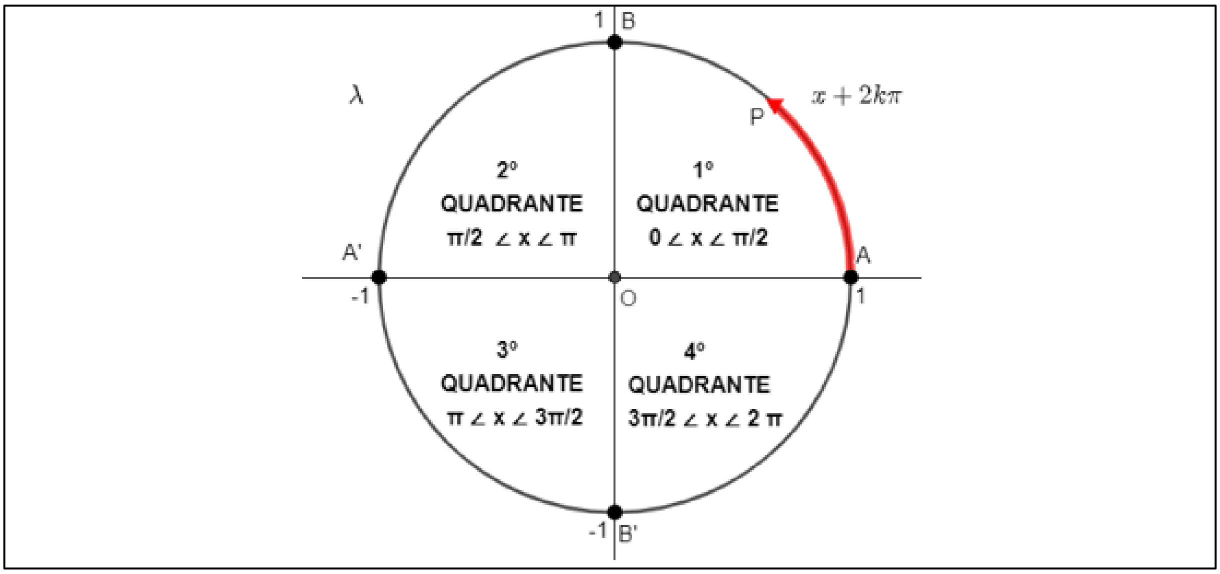


Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Como o ponto P está associado ao número x, então podemos dizer que P é a imagem de x no ciclo trigonométrico. Dessa forma, pode-se notar que P é a imagem do número x_0 e também de todos os arcos côngruos a ele, para k voltas. Em suma, P é a imagem dos elementos do conjunto $\{x \in R \,/\, x = x_0 + 2k\pi, k \in Z\}$

.

Figura 29: Conjunto de arcos côngruos de X_0, a imagem P e quadrantes.

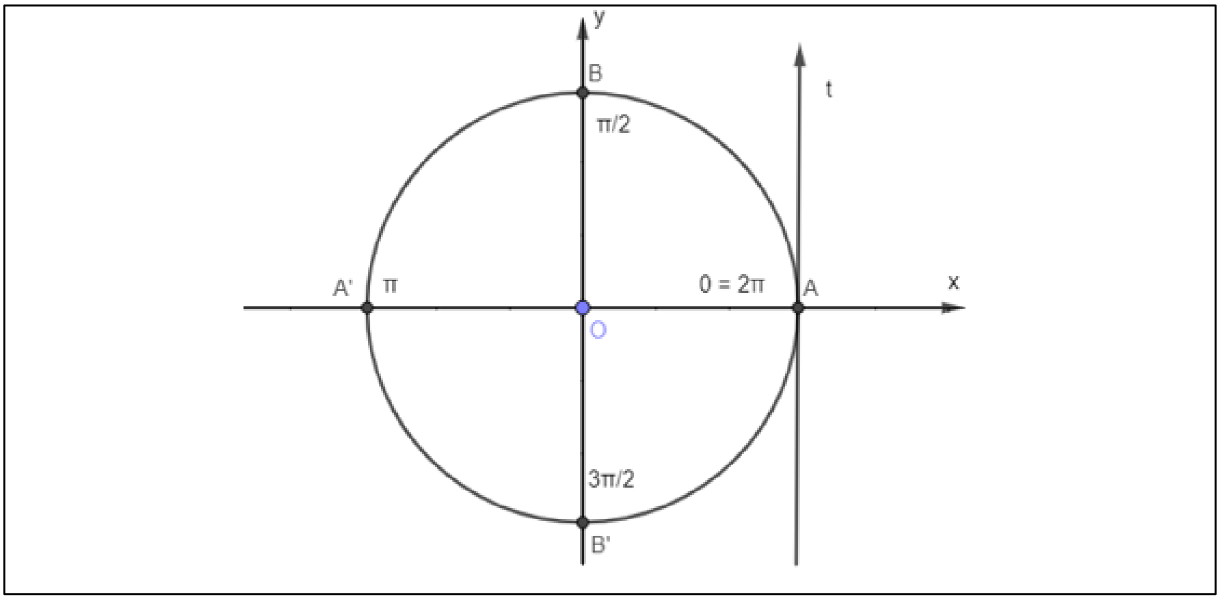


Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

5.6 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Considere um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA} = 1$. O eixo dos cossenos coincide com os eixos das abscissas (x), o eixo dos senos coincide com o eixo das ordenadas (y) e o eixo das tangentes (t) tangencia a origem (A) e é paralelo ao eixo dos cossenos.

Figura 30: Eixos de um ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Os eixos x e y dividem a circunferência em quatro arcos: AB, BA', $A'B'$ e

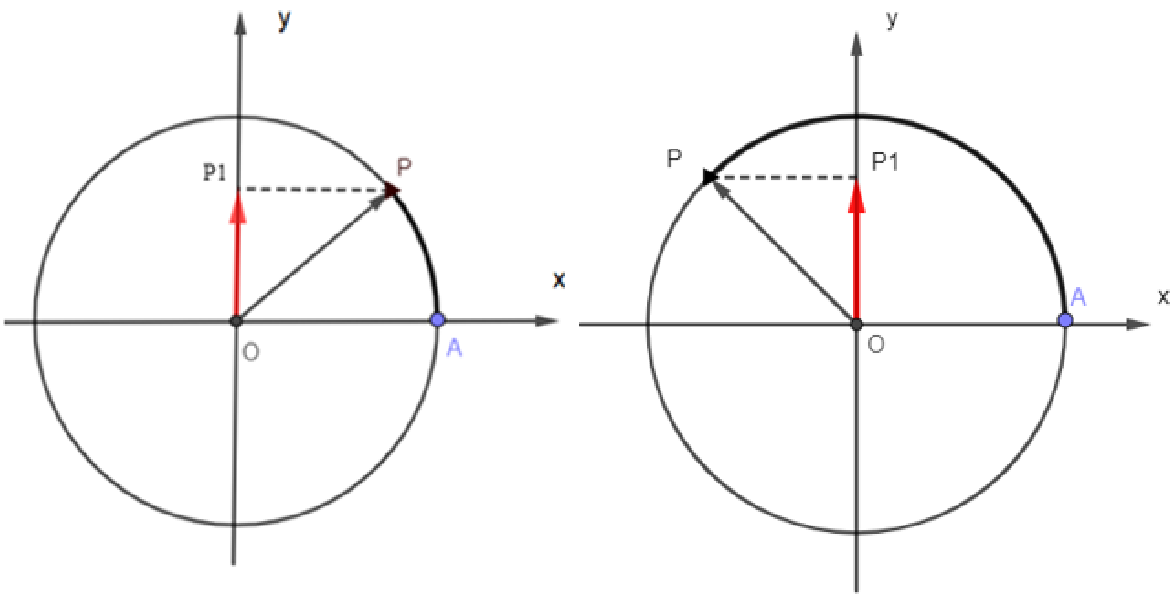
$B'A$. Dado um número real x, para localizar a imagem P de x no ciclo, pode-se dizer que x está no 1º quadrante se P $\in AB$, no 2° quadrante se P$\in BA'$, no 3° quadrante se P$\in A'B'$ e por fim, x está no 4° quadrante se P$\in B'A$.

- **Seno**

Dado um número real x$\in [0,2\pi]$,seja P sua imagem no ciclo. É chamado de seno de x (sen x) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao plano cartesiano. Para cada número real x$\in [0,2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para sen x, ou seja OP_1 = sen x.

Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então sen x é positivo.

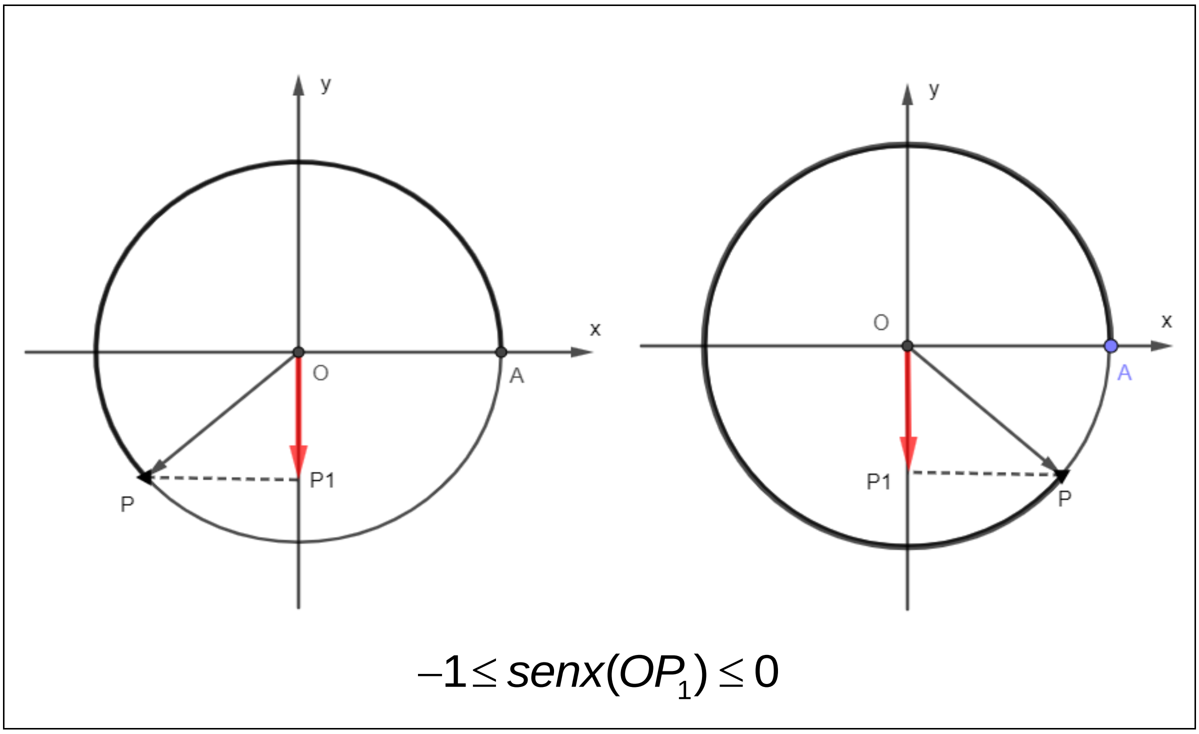
Figura 31: Valores positivos para seno.



$$0 \le senx(OP_1) \le 1$$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Figura 32: Valores negativos para seno



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

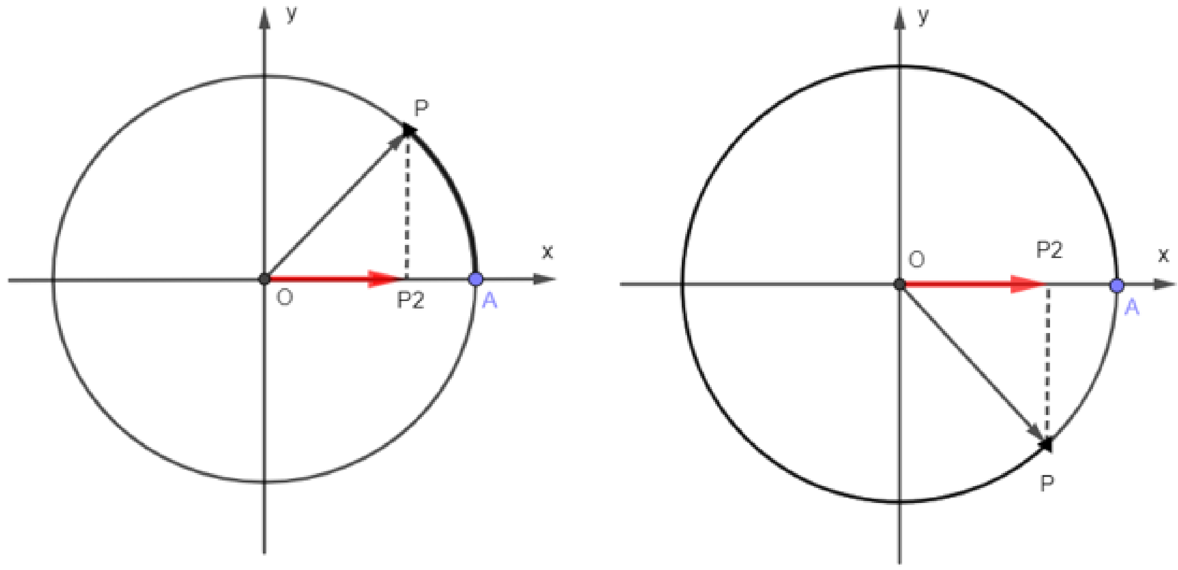
Desse modo, para todo x $\in [0,2\pi]$, têm-se $-1 \leq senx \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de sen x.

- **Cosseno**

Dado um número real $x \in [0,2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. É chamado de cosseno de x (cos x) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao plano cartesiano. Para cada número real $x \in [0,2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P têm um único valor para cos x (OP_2 = cos x).

Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então cos x é positivo.

Figura 33: Valores positivos para cosseno.

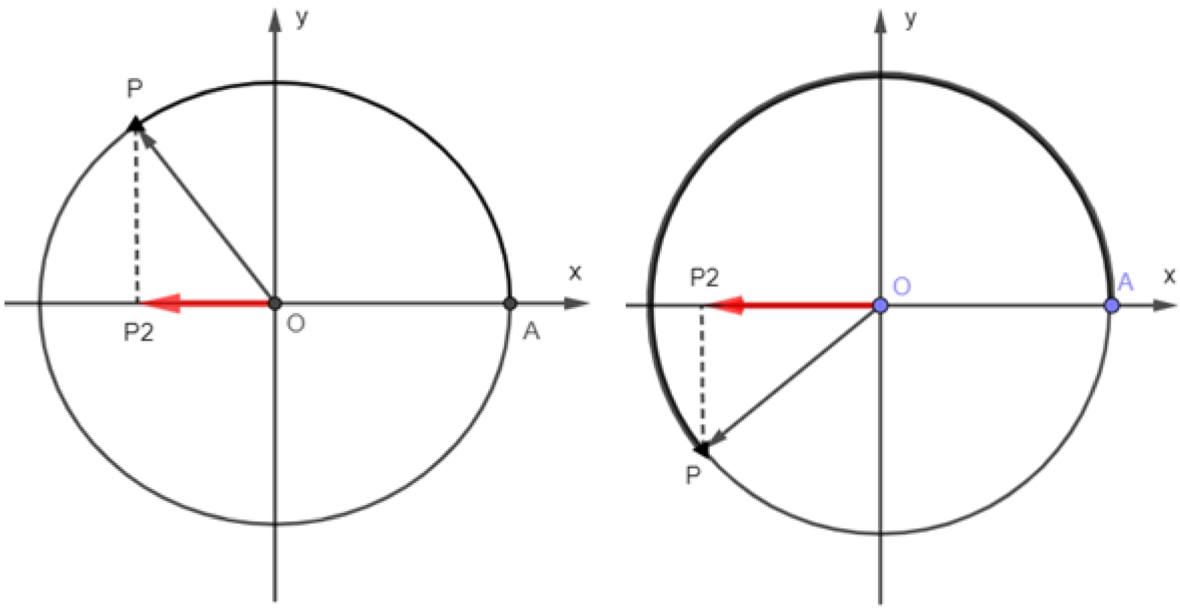


$$0 \leq \cos x(OP_2) \leq 1$$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então cos x é negativo.

Figura 34: Valores negativos para cosseno.



$$-1 \leq \cos x(OP_2) \leq 0$$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

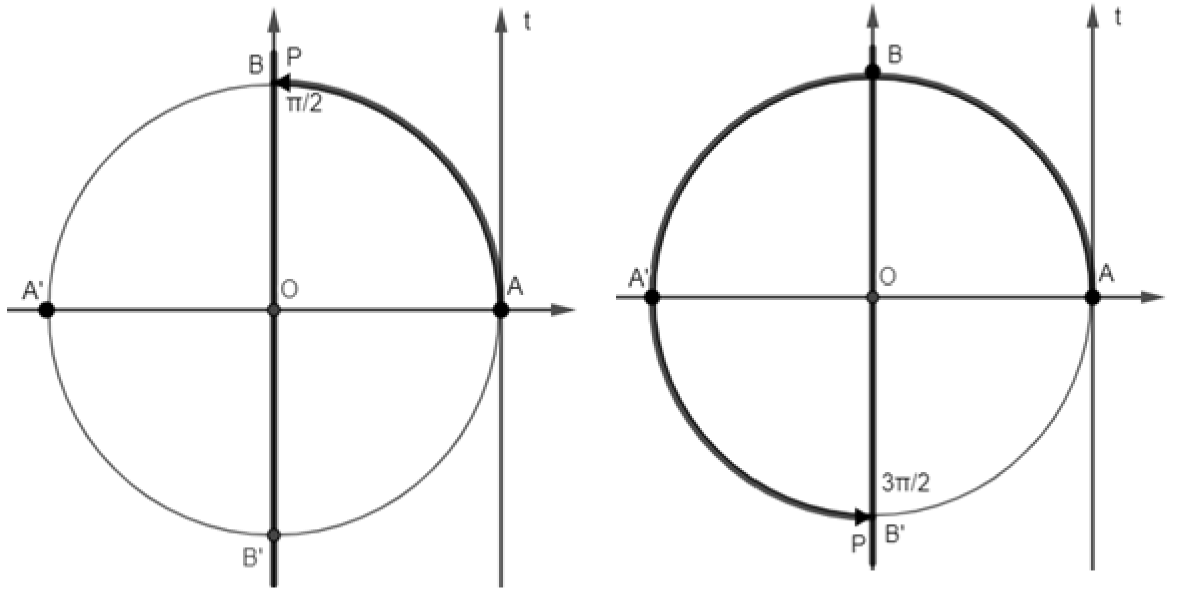
Desse modo, para todo x $\in [0,2\pi]$, têm-se $-1 \leq \cos x \leq 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de cos x.

- **Tangente**

Dado um número real x $\in [0,2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. É chamado de tangente de x (tg x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Perceba que para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Desse modo, nesses casos não existe o ponto T, então a tg x não está definida.

Figura 35: Situações de não definição da tangente.



$x = \frac{\pi}{2} \therefore \overline{OP} // t$

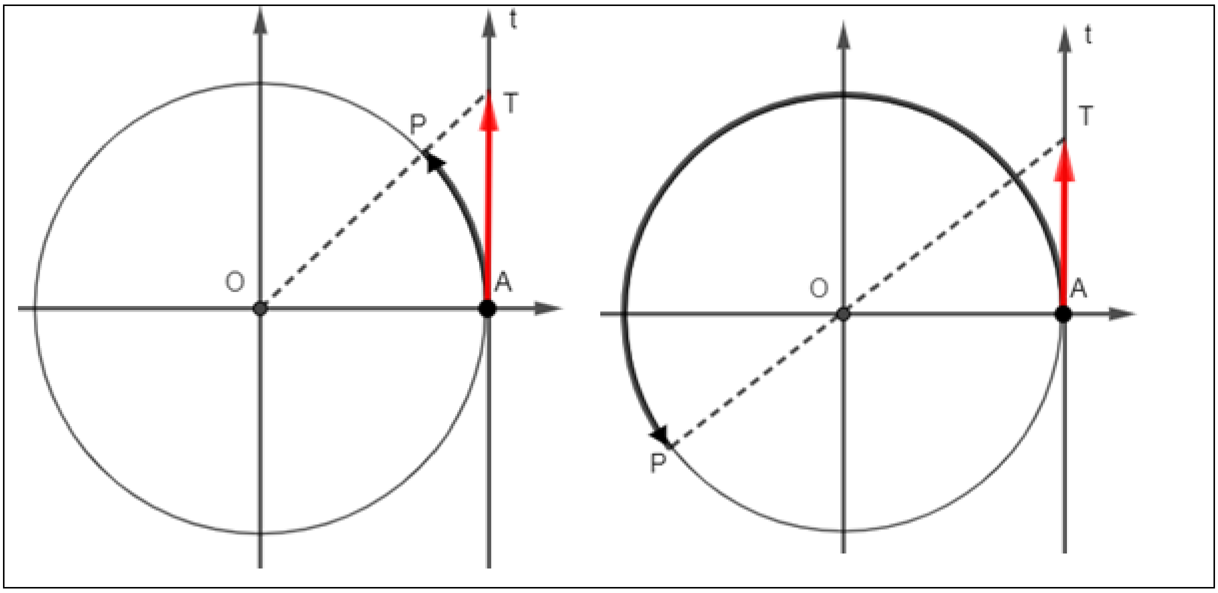
$x = \frac{3\pi}{2} \therefore \overline{OP} // t$

Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

.

Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então tg x é positiva.

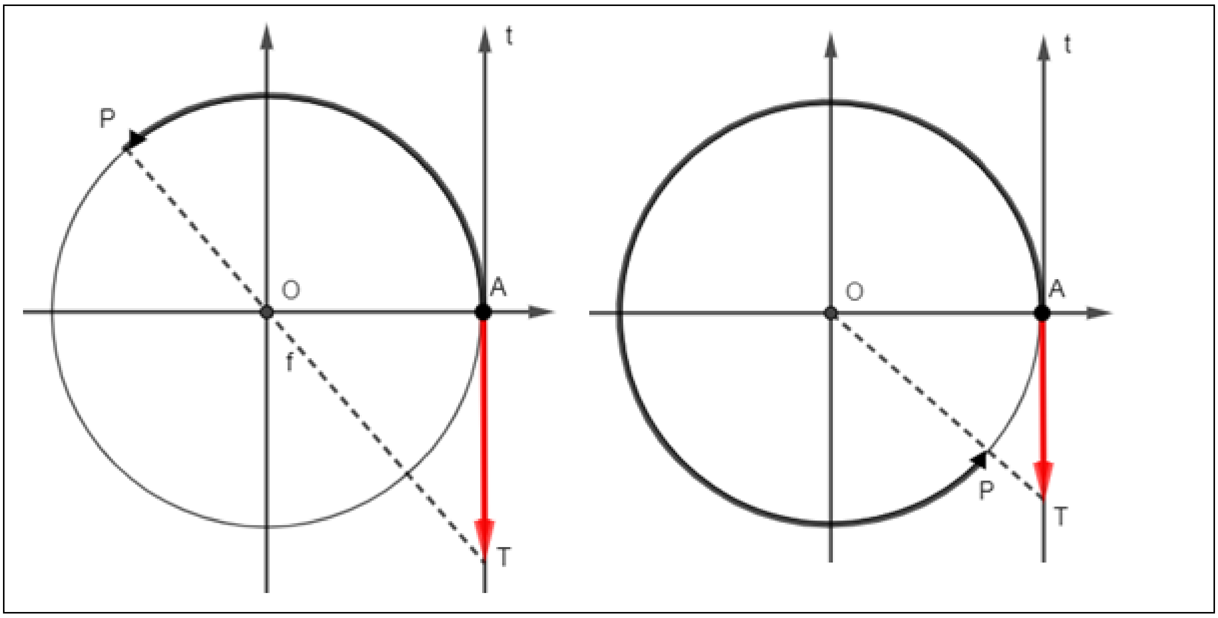
Figura 36: Valores positivos para tangente.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então tg x é negativa.

Figura 37: Valores negativos para tangente.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

5.7 REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Nesse tópico será descrito como deduzir valores para x não pertencentes ao 1º quadrante, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante. O objetivo é descobrir os arcos côngruos de valores reais circulares entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

- **Redução do 2° ao 1° Quadrante**

Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo simétrico a P em relação ao eixo dos senos (ordenadas), eixo dos cossenos (abscissas) e o eixo das tangentes. Então:

Figura 38: Redução do 2º ao 1º quadrante.

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PA'} = \pi$

como $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{PA'}$,

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AP'} = \pi$, portanto

$\overset{\frown}{AP'} = \pi - \overset{\frown}{AP}$, chamando $\overset{\frown}{AP} = x$,

tem-se

$\overset{\frown}{AP'} = \pi - x.$

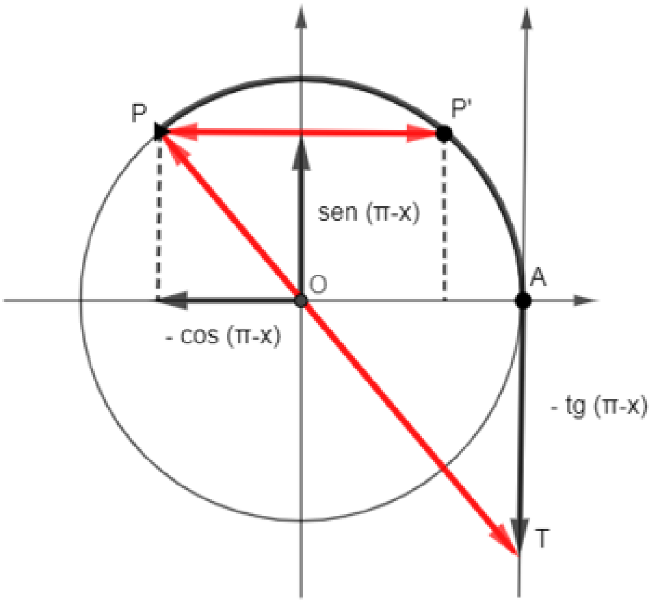
Logo,

$\boxed{sen x = sen(\pi - x)}$

$\boxed{\cos x = -\cos(\pi - x)}$

como $tg x = \frac{sen x}{\cos x} = \frac{sen x(\pi - x)}{-\cos(\pi - x)}$

$\boxed{tg x = -tg(\pi - x)}$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

- **Redução do 3º ao 1º Quadrante**

Dado o número real x tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro. Tem-se:

Figura 39: Redução do 3º ao 1º quadrante.

$$\overset{\frown}{AP} - \overset{\frown}{PA'} = \pi$$

$$como\ \overset{\frown}{PA'} = \overset{\frown}{AP'}$$

$$\overset{\frown}{AP} - \overset{\frown}{AP'} = \pi, \text{ chamando } \overset{\frown}{AP} = x$$

$$\overset{\frown}{AP'} = x - \pi$$

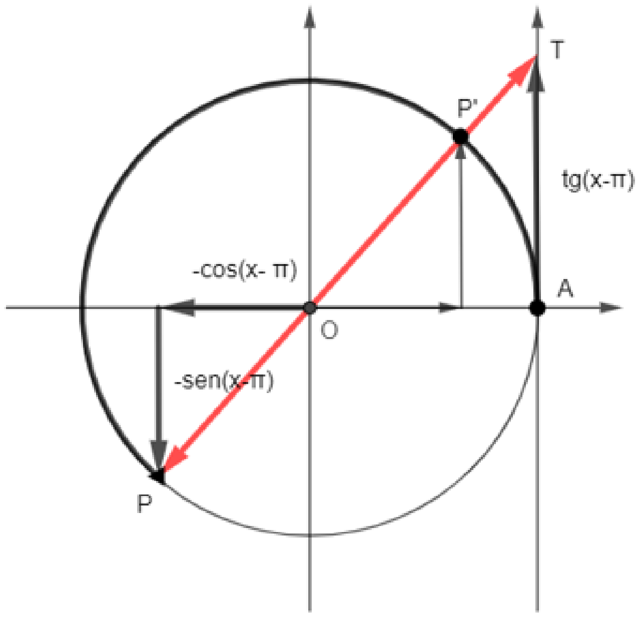
$$Logo,$$

$$\boxed{sen x = -sen(x - \pi)}$$

$$\boxed{\cos x = -\cos(x - \pi)}$$

$$como\ tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{-sen(x-\pi)}{-\cos(x-\pi)}$$

$$\boxed{tgx = tg(x - \pi)}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

- **Redução do 4º ao 1º Quadrante**

Dado o número real x tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação aos eixos do plano cartesiano, tem-se:

Figura 40: Redução do 4º ao 1º quadrante.

$$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PA} = 2\pi$$

$$como \ \overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{PA},$$

$$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AP'} = 2\pi,$$

$$\text{chamando } \overset{\frown}{AP} = x,$$

$$\text{então } \overset{\frown}{AP'} = 2\pi - x$$

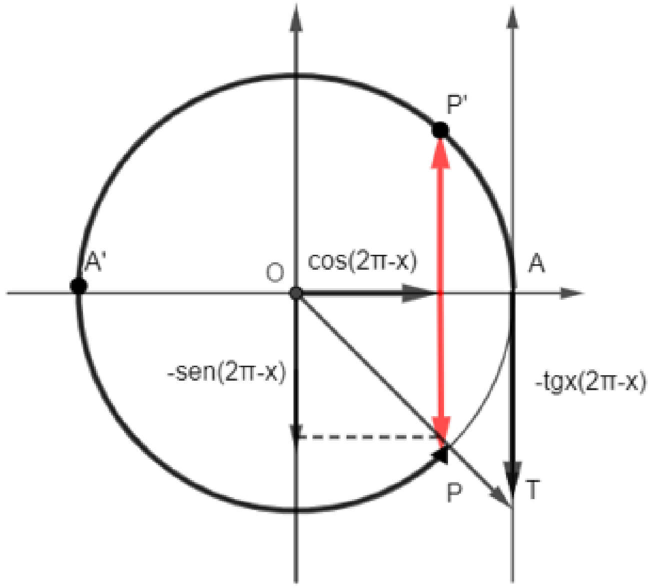
$$Logo,$$

$$\boxed{senx = -sen(2\pi - x)}$$

$$\boxed{\cos x = \cos(2\pi - x)}$$

$$tgx = \frac{senx}{\cos x} = \frac{-sen(2\pi - x)}{\cos(2\pi - x)}$$

$$\boxed{tgx = -tg\,(2\pi - x)}$$

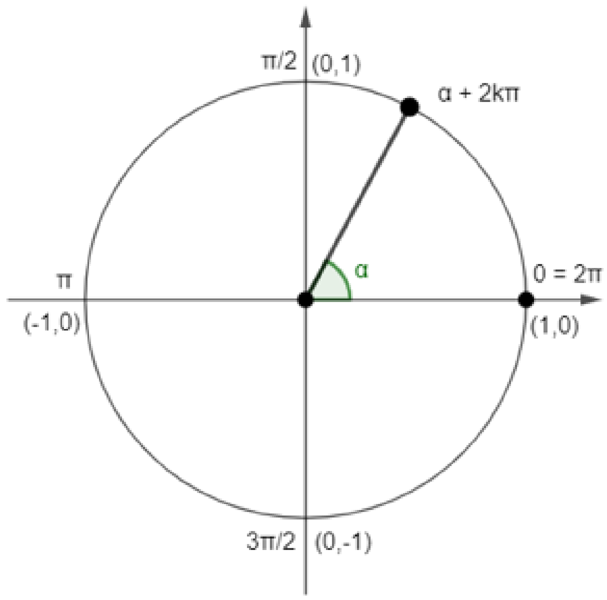


Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

5.7 ARCOS CÔNGRUOS E A PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA DE UM ARCO

Em um ciclo trigonométrico um ponto P define um ângulo α de acordo com a figura a baixo, este está associado a infinitos pontos. A partir de uma volta no ciclo, o ponto P quando parado no mesmo local de origem, ou seja, na sua primeira determinação positiva, gera arcos côngruos a ele, com valores múltiplos de 2π.

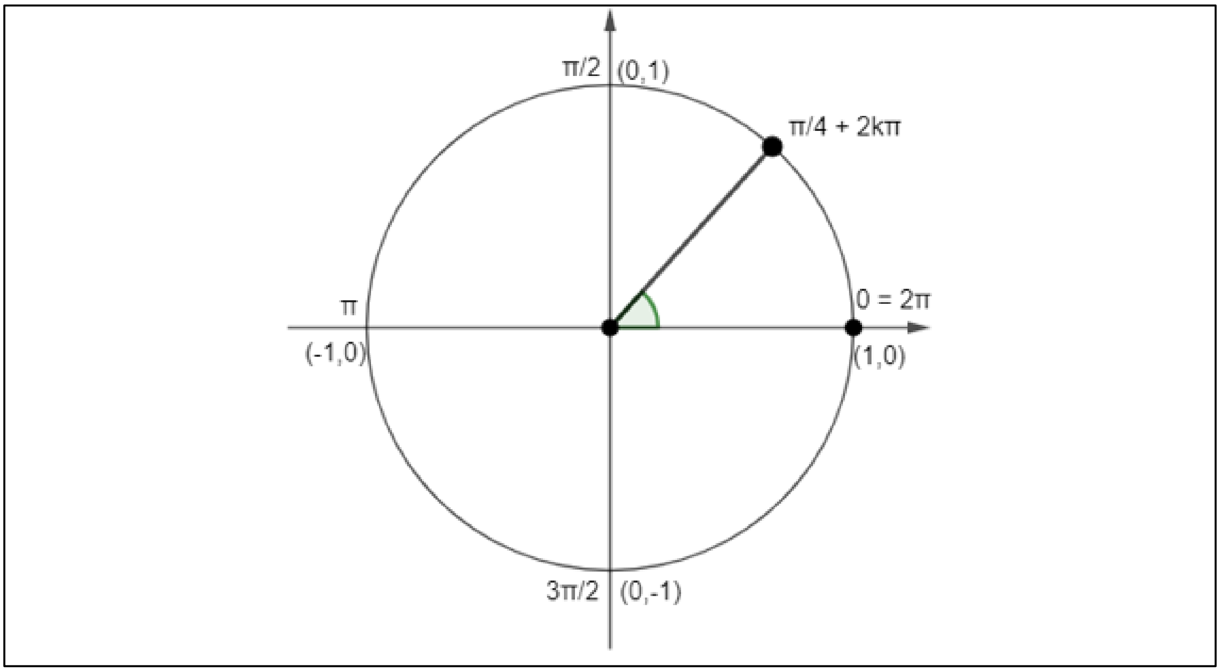
Figura 41: Arco côngruo.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Por exemplo, ao considerar que o ponto P gire no sentindo anti-horário partindo da origem do ciclo (1,0), define um arco $\frac{\pi}{4}$, a partir de uma volta no ciclo, o ponto P, ao parar no local do arco inicial, produzirá um arco $\frac{\pi}{4}+2.1.\pi=\frac{9\pi}{4}$, na segunda volta o arco será $\frac{\pi}{4}+2.2.\pi=\frac{17\pi}{4}$, a terceira volta definirá um arco de $\frac{\pi}{4}+2.3.\pi=\frac{25\pi}{4}$, todos côngruos ao arco $\frac{\pi}{4}$ (primeira determinação positiva). Pode-se generalizar todos os arcos côngruos de $\frac{\pi}{4}$, para k voltas, como $\frac{\pi}{4}+2k\pi, \forall k \in Z$.

Figura 42: Arcos côngruos do arco $\frac{\pi}{4}$.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

Exemplo 1: Calcular o valor de sen 840°.

Nesse caso, deve-se obter a primeira determinação positiva do arco de 840°. Como uma volta no ciclo trigonométrico equivale a 360º. Basta dividir o arco por 360, desse modo, é possível descobrir quantas voltas o arco de 840° deu no ciclo, bem como em qual quadrante o arco parou, então é possível definir o valor do seno do arco em questão.

Figura 43: 1ª determinação positiva de um arco

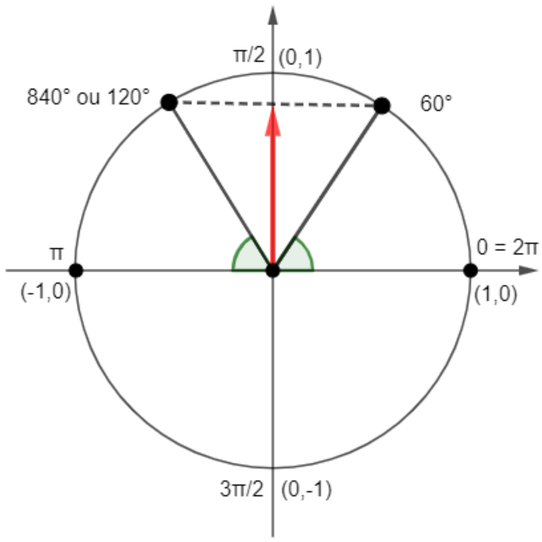
840	$\underline{\lvert 360}$
120	2
1ª determinação positiva	número de voltas

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como a extremidade do arco de 120º é no 2º quadrante, então:

Sen 840º = sen 120° = sen (180° - 120°) = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, sen 840° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

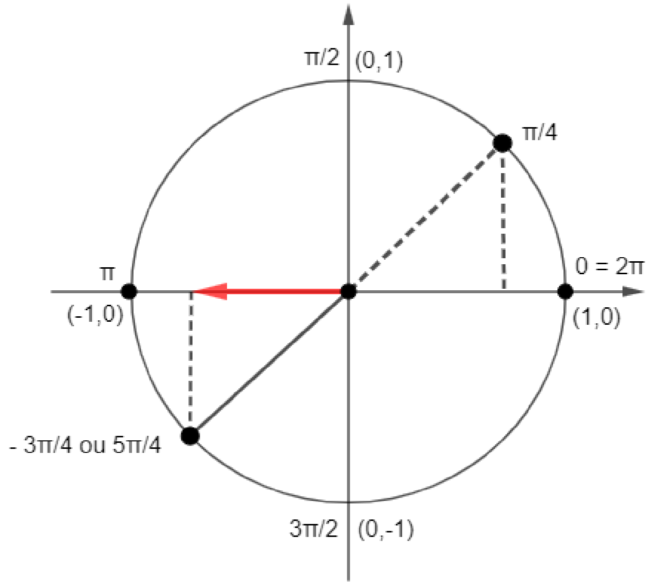


Exemplo 2: Calcular $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Inicialmente, é necessário calcular a 1ª determinação positiva do arco $-\frac{3\pi}{4}$.

$2\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$. Como a extremidade do arco de $\frac{5\pi}{4}$ é no 3° quadrante, então:

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



5.8. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nessa seção foi apresentado as Equações Trigonométricas Fundamentais, de acordo com o Fundamentos da Matemática Elementar (2013), volume 3, de Gelson Iezzi. Além de resoluções de questões de Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas.

- **Equações Fundamentais**

Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações fundamentais a seguir:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$$

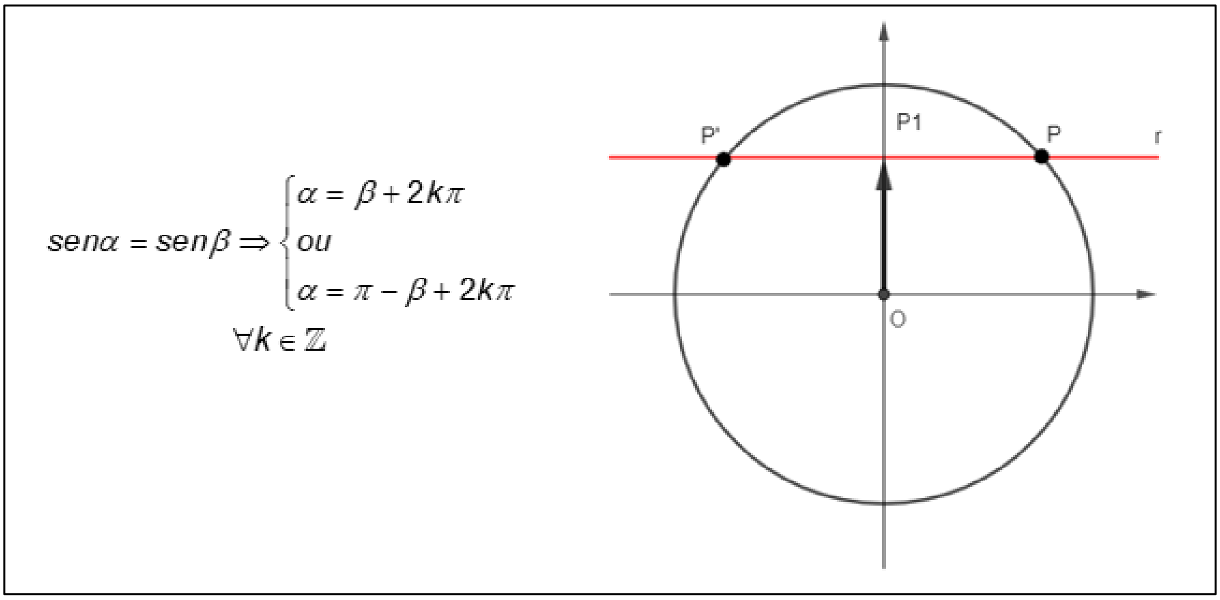
É importante que o estudante saiba resolver, antes de tudo, equações fundamentais para que consiga evoluir no conteúdo, para então, resolver equações trigonométricas de qualquer tipo.

- **Resolução da Equação sen $\boldsymbol{\alpha}$ = cos $\boldsymbol{\beta}$**

Se sen α = cos β = OP_1, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, ou seja, estão em P ou P'.

Há duas soluções para esse tipo de caso. O primeiro considera α e β possuírem a mesma imagem P, ou seja, são côngruos. O segundo caso destaca α e β com imagens simétricas, isto implica no fato de que α e β são suplementares.

Figura 44: Resoluções da equação de seno.



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

- **Resolução da Equação cos $\boldsymbol{\alpha}$ = cos $\boldsymbol{\beta}$**

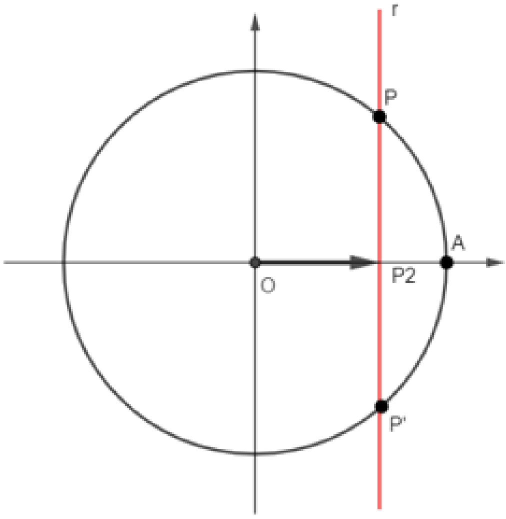
Se $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos, no ponto P_2, ou seja, estão em P ou P'.

Duas possibilidades são observadas para equações desse tipo. Na primeira situação, α e β são côngruos, o que implica dizer que esses arcos possuem a mesma imagem. No segundo caso, α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares, ou seja, $\alpha + \beta$ = 360° ou $\alpha + \beta$ = 2π.

Figura 45: Resoluções da equação de cosseno.

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \pm\beta + 2k\pi$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

- **Resolução da Equação tg α = tg β**

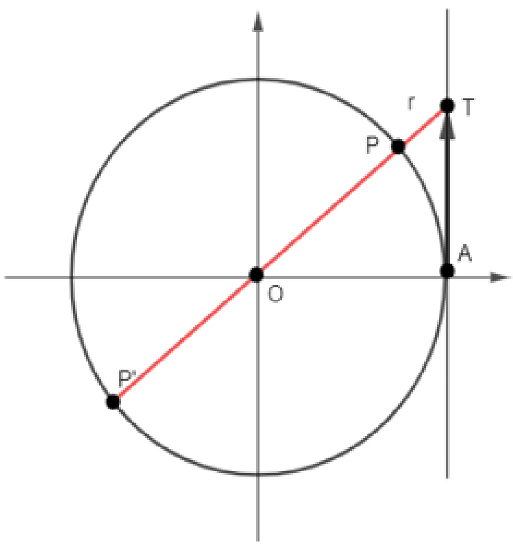
Se tg α = tg β = AT, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, ou seja, estão em P ou P'.

Há, desse modo, duas possibilidades para soluções desse tipo. A primeira α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos. A segunda α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, pode-se dizer que os arcos são explementares, ou seja, quando a diferença das suas medidas é igual a 180°.
(α - β = 180° ou α - β = π.).

Figura 46: Resoluções da equação da tangente.

$$tg\,\alpha = tg\,\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do Geogebra (2023).

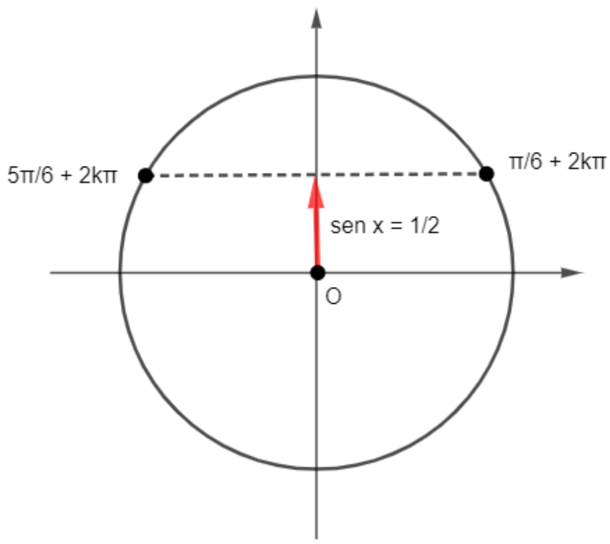
- **Questões Resolvidas**

Nesse tópico foi resolvido questões de Equações Trigonométricas Fundamentais, Equações Clássicas e questões de Funções Trigonométricas que recai em Equações Trigonométricas.

I) $senx = \frac{1}{2}$

Solução:

Deve-se buscar o seno do ângulo que o resultado seja igual a $\frac{1}{2}$. Esse ângulo é 30° ou $\frac{\pi}{6} rad$ e todos os arcos côngruos a ele. No segundo quadrante têm-se o arco com a imagem simétrica ao $\frac{\pi}{6} rad$, que seria o $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} rad$. A transformação do ângulo para radianos implica em uma transformação de graus para um valor real, então será utilizado a unidade radianos, para que a solução tenha um valor real. Desse modo, obtêm-se a seguinte solução:

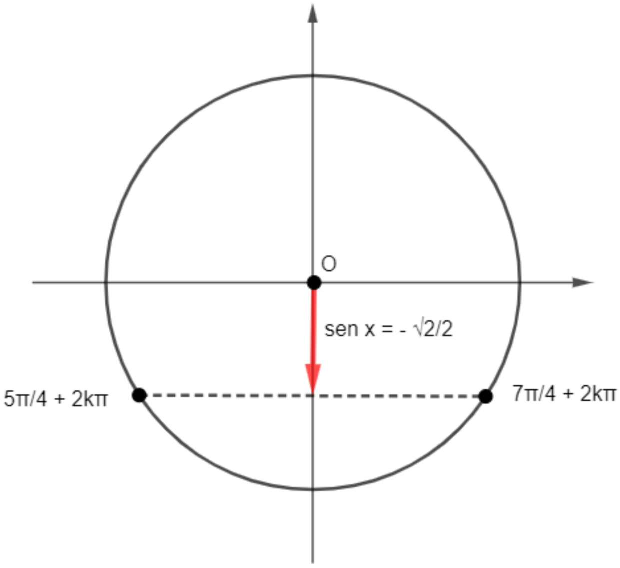


$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}, \forall k \in Z.$$

II) $senx = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solução:

Deve-se buscar o seno do ângulo que o resultado seja $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. Como o arco é negativo e o seno é determinado pelo eixo das ordenadas, então os ângulos só podem estar no terceiro e quarto quadrante. Sabe-se que seno de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\frac{\pi}{4}$, porém como o ângulo é negativo, o arco percorreu o ciclo trigonométrico no sentido horário, ou seja, o ângulo encontra-se no quarto quadrante. Então, $-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ e todos os arcos côngruos a esse ângulo. Porém, no terceiro quadrante existe um ângulo que produz uma imagem simétrica ao $\frac{7\pi}{4}$, sendo $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ e todos os arcos côngruos a esse ângulo. Logo, a solução dessa equação é:



$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\},\ \forall k \in Z.$$

III) $4sen^4x - 11sen^2 + 6 = 0$

Solução:

Fazendo a mudança de variável $sen^2x = t$, substituindo t na equação, têm-se:

$4t^2 - 11t + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-11)^2 - 4.4.6$

$\Delta = 121 - 96$

$\boxed{\Delta = 25}$

$t = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$t' = \dfrac{11+5}{8} = \dfrac{16}{8} = \boxed{t' = 2}$

$t'' = \dfrac{11-5}{8} = \dfrac{6}{8} = \boxed{t'' = \dfrac{3}{4}}$

$sen^2x = 2 \Rightarrow$

$senx = \pm\sqrt{2}$ (não convém)

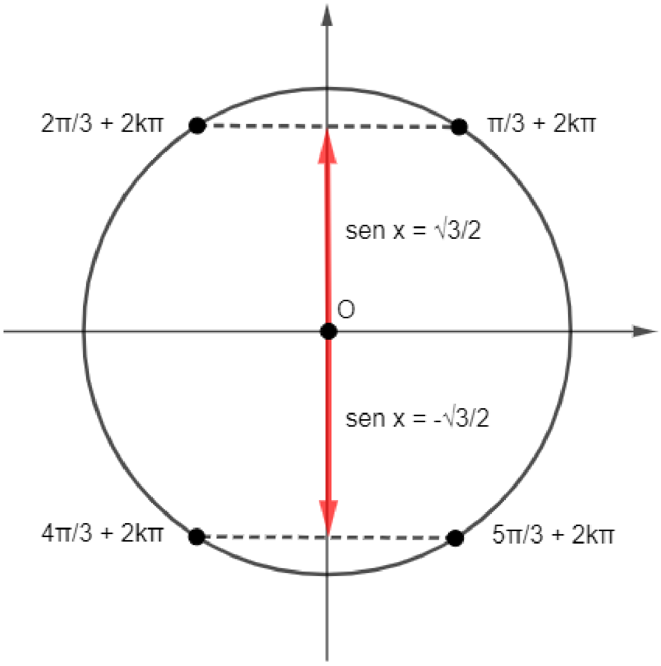
$sen^2x = \pm\dfrac{3}{2} \Rightarrow \boxed{senx = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Para senx = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, têm-se:

$senx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = sen\dfrac{\pi}{3}$ e os arcos côngruos a este ângulo. No segundo quadrante existe um ângulo com imagem simétrica a $\dfrac{\pi}{3}$. Fazendo $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$, encontra-se tal ângulo, bem como os seus arcos côngruos.

Para $senx = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, têm-se:

No terceiro quadrante o ângulo que produz a imagem negativa, $\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ e seus arcos côngruos. No quarto quadrante o ângulo que possui a imagem simétrica ao arco $\dfrac{4\pi}{3}$, pode ser encontrado com a operação $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ mais os arcos côngruos.



Então, a solução da equação em questão é:

$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

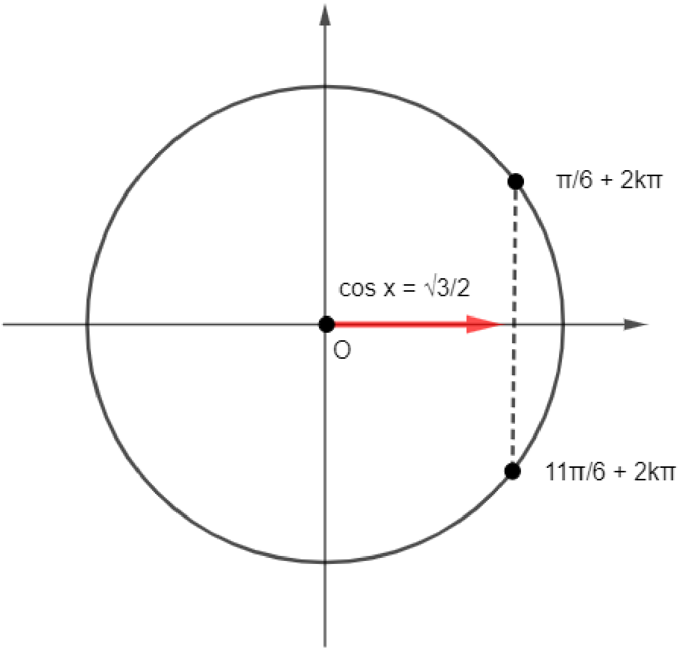
$$\forall k \in Z$$

IV) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solução:

Deve-se buscar os ângulos cujo seno seja igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então x = $\frac{\pi}{6}$ bem como os arcos côngruos a esse ângulo. No quarto quadrante existe um arco que possui imagem simétrica a $\frac{\pi}{6}$, sendo este -$\frac{\pi}{6}$, ou $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, então -$\frac{\pi}{6}$=$\frac{11\pi}{6}$

Desse modo, a solução da equação em questão é:



$$S=\left\{x\in R\perp x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\},\ \forall k\in Z.$$

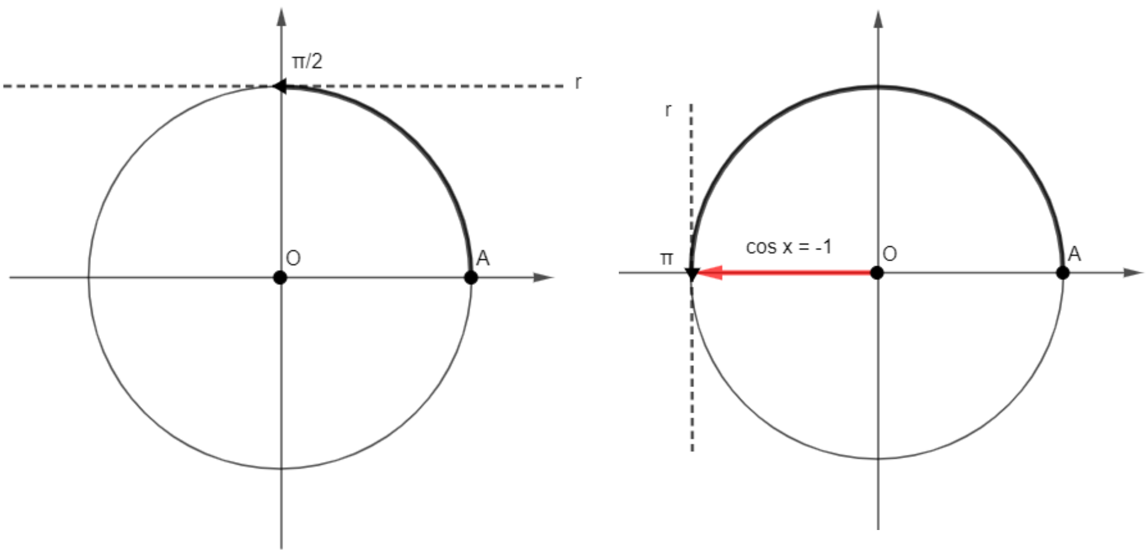
V) $\cos x^2+\cos x=0$

Solução:

$\cos x.(\cos x+1)=0$

$\cos x=0$ ou $\cos x=-1$

Desse modo, têm-se que cos x = 0, x = $\frac{\pi}{2}$ e cos x = -1, x = π. Então, a solução dessa equação é:

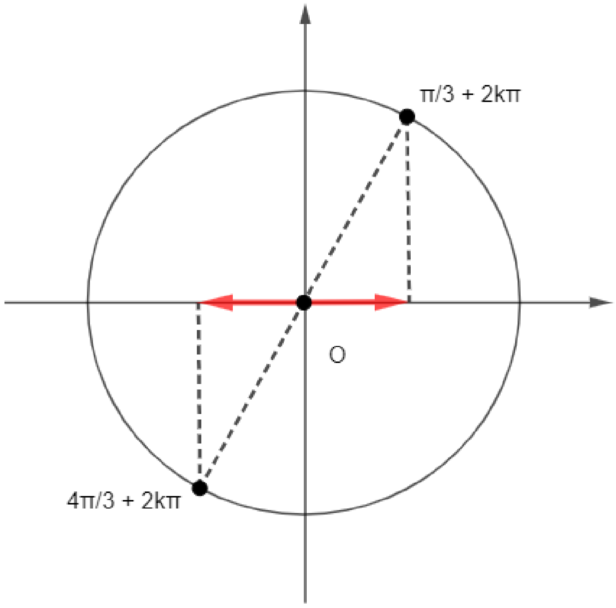


$$S=\left\{x\in R\perp x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\pi+2k\pi\right\},\ \forall k\in Z.$$

VI) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

Solução:

Como $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ está resultando em zero, então $x+\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\pi}{2}$ ou $x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$, isso implica em $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$ bem como, os arcos côngruos desses ângulos. Então, a solução para essa equação em questão é:

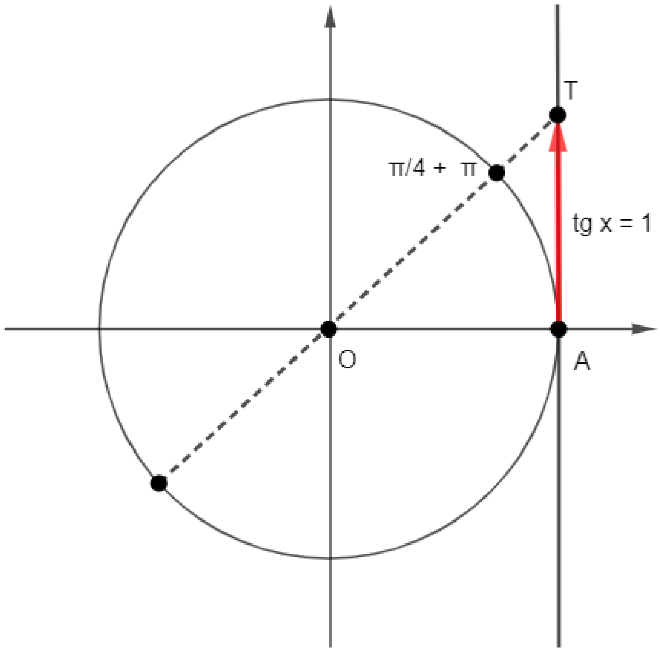


$$S=\left\{x\in R \perp x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\},\ \forall k\in Z.$$

VII) $tgx=1$

Solução:

Deve-se buscar o ângulo cuja a tangente seja igual a 1. É sabido que tg $\frac{\pi}{4}$ = 1, então x = $\frac{\pi}{4}$ e todos os arcos côngruos a esse ângulo. Logo, a solução para essa equação em questão é:

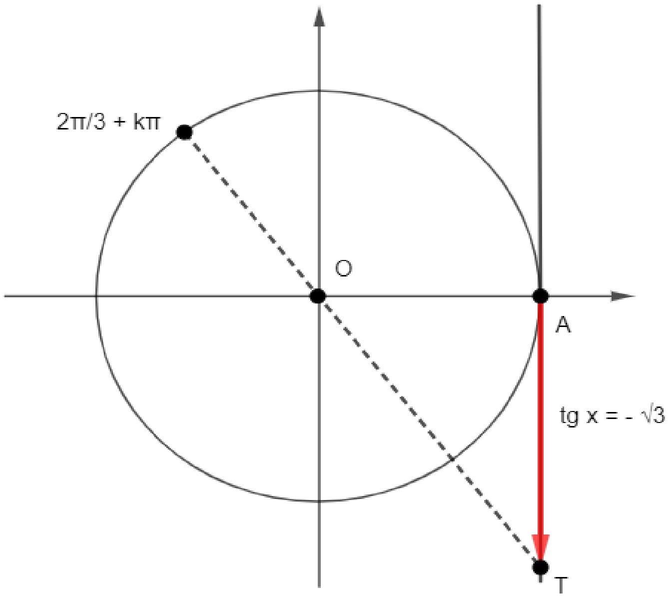


$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, \forall k \in Z.$$

VIII) $tgx = -\sqrt{3}$

Solução:

Deve-se buscar um ângulo cujo valor produza uma imagem no eixo da tangente de $-\sqrt{3}$. É sabido que a tangente é negativa no segundo e no quarto quadrante. Desse modo, $tgx = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$. Basta encontrar o arco que possui a imagem simétrica a $\frac{\pi}{3}$ no segundo quadrante. Então $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ e os arcos côngruos a esse ângulo. Logo, a solução da equação em questão é:



$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}, \forall k \in Z .$$

IX) $sen^2 x = \frac{1}{3}\cos^2 x$

Solução:

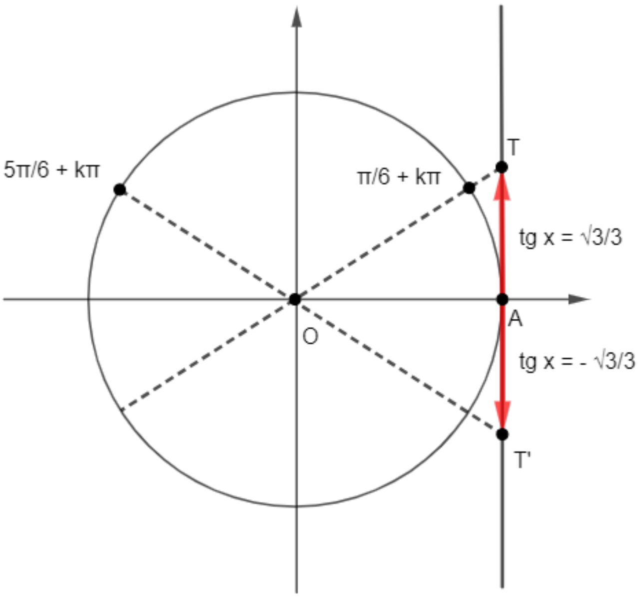
$$sen^2 x = \frac{1}{3}\cos^2 x \Rightarrow \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, têm-se:

Como $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então x = $\frac{\pi}{6}$ e os arcos côngruos a esse ângulo.

Para tg x = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, têm-se:

Como a tangente é negativa no segundo e no quarto quadrante, há a necessidade de encontrar um arco no segundo quadrante com imagem simétrica ao ângulo $\frac{\pi}{6}$. Desse modo, $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, x = $\frac{5\pi}{6}$. Então a solução da equação em questão é:



$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\}, \forall k \in Z.$$

x) $\sqrt{3}\cos x + sen x = 1$

Solução:

Chamando sen x = t e cos x = w, como $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, Então:

$$\begin{cases} t + \sqrt{3}w \\ t^2 + w^2 = 1 \end{cases}$$

Isolando t na 1ª equação, temos:

$t = 1 - \sqrt{3}w$.

Substituindo t na 2ª equação, obteremos:

$\left(1 - \sqrt{3}w\right)^2 + w^2 = 1 \Rightarrow 4w^2 - 2\sqrt{3}w = 0$

então, $\boxed{w' = 0}$, e $t = 1 - \sqrt{3}.0 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{t' = 1}$

$\boxed{w'' = \frac{\sqrt{3}}{2}}$, e $t = 1 - \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\boxed{t'' = -\frac{1}{2}}$

Desse modo, existem duas possibilidades para solução:

senx = 1 e cos x = 0 $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

ou

$senx = -\frac{1}{2}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

$$S = \left\{ x \in R \perp x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\},\ \forall k \in Z\ .$$

É importante destacar que as duas questões que serão resolvidas a seguir, mesmo apresentando modelos de funções trigonométricas, apenas com os conhecimentos de equações trigonométricas é possível resolvê-las.

XI) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

a) janeiro.

b) abril.

c) junho.

d) julho.

e) outubro.

Solução:

P(x) é o preço do produto, está em função do tempo (x) que representa os meses do ano. Como a pergunta quer o mês de produção máxima, pelo enunciado do problema, percebe-se que na produção máxima os preços dos produtos estão mais baixos, ou seja, preço mínimo. Então, para que P(x) seja mínimo é necessário que o $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ seja mínimo. O menor valor que o cosseno pode atingir é -1, sabe-se que o cosseno de – 1 é igual a π, então:

$$\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right)=-1\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right)=\cos\pi$$

Dessa forma, podemos igualar os arcos:

$$\frac{\pi x-\pi}{6}=\pi\Rightarrow\boxed{x=7}$$

Logo, o mês de produção máxima, com preços mínimos, será julho.

XII) A maré é um fenômeno periódico de elevação e diminuição do nível do mar, em decorrência das forças de atração exercidas pela lua e pelo sol. Além disso, esse fenômeno tem relação direta com as fases da lua, mês a mês: nas luas cheia e nova, o nível do mar está mais alto do que o normal, enquanto nas luas minguante e crescente, está mais baixo. Durante determinado mês, em uma cidade litorânea, modelou-se a oscilação das marés de acordo com a lei da função $h(t)=\frac{5}{2}+\frac{3}{3}.\cos\left(\frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}\right)$, em que h é a medida do nível do mar e t é o dia do mês em que ela ocorreu. Em quais dias desse mês ocorreram as luas minguante e crescente?

Solução:

Deve-se buscar os dias (t) nos quais ocorreram as luas minguante e crescente. O problema forneceu a informação de que nessas fases, o nível do mar está mais baixo do que o normal, ou seja, nível mínimo. Para que o nível do mar seja mínimo, o cosseno da função deve ser mínimo. Nessa perspectiva, $\cos\left(\frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}\right)$ deve ter o valor mínimo para que o nível do mar seja mínimo. É sabido que o valor mínimo que o cosseno pode atingir é -1, ou seja, quando $\cos=\pi$ e todos os arcos côngruos a π, então pode-se representar como $\cos=\pi+2k\pi$, sendo $k\in Z$, o número de voltas, a partir da inicial, o arco deu no círculo trigonométrico.

Para k = 0:

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\pi\Rightarrow\frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}=\pi$$

$$\frac{2\pi t}{15}=\pi-\frac{\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi t}{15}=\frac{2\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{t=5}$$

Para k = 1:

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{2\pi t}{15}+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi$$

$$\frac{2\pi t}{15}=3\pi-\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi t}{15}=\frac{8\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t=20}$$

Logo, os dias 5 e 20 do referido mês ocorreram as fases da lua minguante e crescente.

6. PERSPECTIVA METODOLÓGICA DA PESQUISA

Nesse capítulo, apresento os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. As ferramentas metodológicas utilizadas no processo de identificação de indícios de aprendizagem foram a Análise do Discurso, juntamente com a Análise Microgenética. Os dados da pesquisa foram angariados por intermédio de gravações de áudio e imagens durante a aplicação das atividades.

Foi escolhido uma forma de organizar metodologicamente o assunto de Equações Trigonométricas através de uma Sequência Didática com o intuito de proporcionar material suporte para professores utilizarem em suas aulas e na perspectiva do aluno, apresentar uma alternativa facilitadora para o aprendizado desse assunto que é considerado difícil, abstrato e em muitos casos é ensinado nas escolas de forma tradicional.

A Sequência Didática está organizada de acordo com o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC). As análises preliminares das dissertações e livros didáticos, bem como a concepção de professores de Matemática do Ensino Médio e de estudantes egressos sobre o objeto matemático dessa pesquisa, permitiram a definição dos objetivos de aprendizagem, as articulações necessárias com foco no desenvolvimento gradual de conceitos trigonométricos necessários para potencializar os resultados envolvendo o ensino e aprendizagem de Equações Trigonométricas.

O público-alvo que participou dessa pesquisa foram os meus alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Tenente Rêgo Barros situado em Belém do Pará. Foram selecionadas duas turmas, na turma de controle de processo o conteúdo foi ministrado de forma tradicional e na turma experimental foi aplicado a sequência didática. No final do processo, foi aplicado um teste de verificação de aprendizagem, para as turmas e os resultados foram comparados.

A turma experimental recebeu aulas dos assuntos básicos para o desenvolvimento da sequência didática, como as definições de arco, ângulo, características do ciclo trigonométrico, unidades de medidas (grau e radiano) e como converter essas unidades, ensinamentos sobre os softwares (Desmos e Geogebra), explicação das teorias que foram utilizadas no decorrer das atividades. Na turma de controle o objeto de conhecimento foi abordado com a explicação da teoria e exercícios de fixação.

Os encontros foram semanais, nos meses de agosto, setembro e outubro do ano de 2023. Como possuía dois tempos em cada turma, utilizei os tempos disponíveis para a aplicação das atividades da pesquisa. O conteúdo programático do colégio naquela ocasião não foi afetado, pois a trigonometria era o assunto que todas as turmas do 2º ano do colégio, necessariamente, precisavam estudar nesse mesmo período que apliquei as atividades. Todas as minhas atividades referentes a esse trabalho foram acordadas com os meus coordenadores de área e com o chefe da Divisão de Ensino do Colégio.

Nas questões envolvendo a trigonometria, usualmente o ângulo é dado em radianos, visto que a medida em radianos é um valor real, e para se trabalhar com funções trigonométricas necessariamente o domínio da função é um valor real, ou seja, não existe domínio de funções trigonométricas em graus. Então é interessante que o aluno consiga trabalhar com valores tanto em graus quanto em radianos. É observável que a maioria das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão (algumas conseguem trabalhar com graus, mas é preciso mudar o modo de operação). Nas atividades da sequência didática, assim como no teste de verificação de aprendizagem, foram abordadas as duas medidas (graus e radianos) para acostumar os alunos à transição entre uma e outra.

O quadro 10 fornece o quadro síntese das atividades da sequência didática, bem como as informações inerentes de cada dinâmica, sendo elas: título da atividade, objetivo de aprendizagem, carga horária prevista, conteúdo matemático envolvido por atividade.

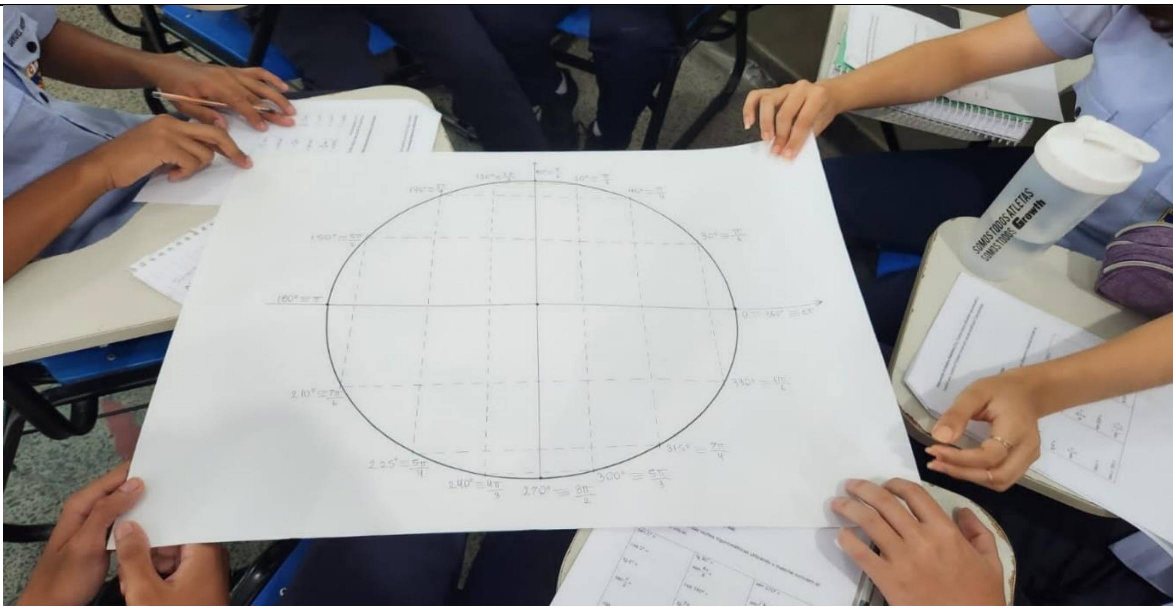
Quadro 10: Síntese das atividades da sequência didática

Título	Objetivo	Carga horária	Conteúdo
ATIVIDADE 1: Razões trigonométricas na circunferência.	Definir as razões trigonométricas na circunferência com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.	1h 30min	• Seno; • Cosseno; • Tangente.
ATIVIDADE 2: Redução ao 1º quadrante	Reduzir arcos ao 1º quadrante com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.	1h 30min	• Redução ao 1º quadrante de um arco.
ATIVIDADE 3: Arcos côngruos	Definir arcos côngruos com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.	1h 30min	• Definição de arcos côngruos; • 1ª determinação positiva de um arco.
ATIVIDADE 4: Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas	Resolver Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.	3h	• Seno, cosseno e tangente; • Redução ao 1º quadrante; • Arcos côngruos;

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As atividades foram feitas com o auxílio de material manipulável concreto e virtual. O material concreto foi o ciclo trigonométrico, produzido pelas equipes, com cartolina, com o intento de mensurar os valores das razões trigonométricas, além de materializar conceitos abstratos. A figura 47, mostra a produção do material de um dos grupos participantes.

Figura 47: Círculo trigonométrico no material concreto



Fonte: Pesquisa (2023).

Sobre o material virtual, as equipes receberam instruções para a produção do ciclo trigonométrico, na semana que antecedeu a aplicação da sequência didática, no Geogebra, como indica na figura 48. No aplicativo Desmos existe uma opção chamada de "trigonometria: círculo unitário" que ao ser clicada, gera o círculo trigonométrico e serviu como uma outra opção de ferramenta auxiliar para os participantes. Os alunos foram orientados e de fato aprenderam a utilizar esses materiais educacionais que, sem dúvidas, são ferramentas que agregaram, demasiadamente, na construção do conhecimento.

Figura 48: Círculo trigonométrico no Geogebra (utilizado pela aluna)

Fonte: Pesquisa (2023).

Em relação a natureza da pesquisa, pode-se inferir que na aplicação das atividades da sequência didática a abordagem é do tipo qualitativa, pois o enfoque está na verificação dos indícios de aprendizagem, através da busca pelo aprofundamento do aprendizado sobre os assuntos abordados na experimentação, conforme a perspectiva dos próprios sujeitos participantes. De acordo com Minayo (2008) na pesquisa qualitativa, o importante é a objetivação, pois durante a investigação científica é preciso reconhecer a complexidade do objeto de estudo, rever criticamente as teorias sobre o tema, estabelecer conceitos e teorias relevantes, usar técnicas de coleta de dados adequadas e, por fim, analisar todo o material de forma específica e contextualizada.

Para a referida autora, a objetivação contribui para afastar a incursão excessiva de juízos de valores na pesquisa: são os métodos e técnicas adequados que permitem a produção de conhecimento aceitável e reconhecido.

Entretanto, nas análises dos testes de verificação de aprendizagem, a abordagem dessa experimentação é do tipo quantitativa, verificar qual turma obteve a melhor pontuação, se a turma de controle de processo ou a turma experimental. Conforme Minayo (2008), os métodos quantitativos têm o objetivo de mostrar dados, indicadores e tendências observáveis, ou produzir modelos teóricos abstratos com elevada aplicabilidade prática. Suas investigações evidenciam a regularidade dos fenômenos.

A partir dos dados coletados, foi obtido a confirmação ou refutação das hipóteses previamente estabelecidas nessa pesquisa, com relação a utilização de uma sequência didática para potencializar o ensino de equações trigonométricas fundamentais. A sequência didática e o teste de verificação de aprendizagem, encontram-se em anexo nesse trabalho.

7. ANÁLISES DOS RESULTADOS

O início da experimentação dessa pesquisa começou no mês de agosto de 2023, na volta das férias, foram revisados assuntos trabalhados anteriormente e em meados do mês citado, o assunto previsto para ser ministrado para todas as turmas do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Tenente Rêgo Barros, coincidentemente, de acordo com o planejamento da instituição, seria trigonometria, que é o objeto de conhecimento desse trabalho. Eu não poderia perder a oportunidade de aplicar a minha sequência didática naquela ocasião, pois de certo modo, fiz a minha experimentação sem prejudicar o andamento dos conteúdos do colégio, sem precisar pedir aulas extras e outras interferências.

Inicialmente, escolhi duas turmas participantes, a turma 22A1 foi a turma experimental e a 22A2 a turma de controle de processo. Na turma experimental, expliquei toda a metodologia do trabalho, acrescentei que eles não seriam prejudicados, pois iriam estudar o assunto previsto para eles naquela ocasião, porém, a forma como o conhecimento seria mediado, seria diferente da maneira tradicional que eles estavam acostumados. Os alunos de imediato aceitaram o desafio e foram muito solícitos e participativos em todas as etapas do trabalho.

Na turma de controle de processo iniciei o assunto de trigonometria de modo tradicional, inicialmente apresentei a formalização dos conceitos e após formalizados, propus exercícios de fixação. Expliquei para a turma a metodologia, quais os objetivos e pretensões do trabalho. A turma aceitou o desafio, foram participativos e importantes na dinâmica do trabalho.

No final do processo, foi passado o mesmo teste de verificação de aprendizagem para as duas turmas, com o objetivo de avaliar a pontuação dos alunos e assim gerar dados e comparações pertinentes para essa pesquisa.

A turma experimental foi dividida em 6 grupos de 5 alunos cada, e para facilitar as transcrições dos áudios, codifiquei os grupos e alunos através do quadro a seguir:

Quadro 11: Codificação de grupos e alunos participantes da pesquisa

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Aluno 1	**AG1**	**AG2**	**AG3**	**AG4**	**AG5**	**AG6**
Aluno 2	**BG1**	**BG2**	**BG3**	**BG4**	**BG5**	**BG6**
Aluno 3	**CG1**	**CG2**	**CG3**	**CG4**	**CG5**	**CG6**
Aluno 4	**DG1**	**DG2**	**DG3**	**DG4**	**DG5**	**DG6**
Aluno 5	**EG1**	**EG2**	**EG3**	**EG4**	**EG5**	**EG6**

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

É importante salientar que nem todos os alunos codificados apareceram nos turnos, por fatores diversos, dentre eles, falta de interação nas atividades, interações que não foram importantes para as análises dessa pesquisa, interações sobre o assunto sem indícios de aprendizagem, interações sem problematização. Então, os recortes selecionados no subcapítulo a seguir, foram pontos importantes extraídos dos áudios, que evidenciam indícios de aprendizagem, progresso, regressão, retomada de ideias, intervenções orais com finalidades específicas em determinada etapa de construção conceitual.

7.1 ANÁLISE MICROGENÉTICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresento as interações verbais que ocorreram durante a aplicação da sequência didática nesse subcapítulo. Meu propósito é identificar os indícios de aprendizagem com o apoio da Análise do Discurso, conforme sugerido por Mortimer e Scott (2002) e pela Análise Microgenética nos moldes de Goés (2000), será considerado os recortes das transcrições verbais que ocorreram durante a aplicação da sequência didática.

Para organizar as interações verbais no momento da experimentação, foi separado cada atividade em episódios, que é um conjunto de segmentos, os segmentos entende-se como um conjunto de turnos e os turnos são as interações do professor e dos alunos. O quadro a seguir apresenta o esquema organizacional da sequência didática pela perspectiva da análise microgenética e Análise do Discurso.

Quadro 12: Esquema organizacional da sequência didática pela perspectiva das teorias

EPISÓDIO	SEGMENTO	TURNOS	PADRÕES DE INTERAÇÃO	ABORDAGEM COMUNICATIVA PREDOMINANTE	CONTEÚDO
UARC 1	1	1-22	IRFRA	Interativo/dialógica	razões trigonométricas no círculo trigonométrico.
	2	23-42			
UARC 2	1	43-63	IRFRA	Interativo/dialógica	Redução ao 1º quadrante.
	2	64-70	IRA	Interativo/de autoridade	
UARC 3	1	71-93	IRFRA	Interativo/dialógica	Arcos côngruos.
	2	94-107	IRA	Interativo/de autoridade	
UARC 4	1	108-124	IRFRA	Interativo/dialógica	Equações trigonométricas fundamentais e clássicas.
	2	125-144	IRA	Interativo/de autoridade	

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos protocolos de pesquisa (2023).

Desse modo, tem-se no subcapítulo a seguir as análises dos recortes dos áudios e as transcrições organizadas, bem como as considerações de cada etapa da experimentação. Os turnos serão representados pela letra **(T)** seguido da numeração referente a ordem cronológica das falas, a identificação do autor da interação no turno e os indícios de aprendizagem estão destacados no formato itálico.

7.1.1 Análise Microgenética da UARC 1

No mês de agosto, foi trabalhado com a turma conceitos iniciais como definição de arcos e ângulos, unidades para medir arcos e ângulos (grau e radiano), relação entre as unidades (conversão de grau para radiano e de radiano para grau), circunferência trigonométrica e suas características, bem como as orientações referentes aos aplicativos (Geogebra e Desmos) utilizados pelos alunos durantes as atividades, acrescento ainda que nos encontros preparatórios para a sequência didática, foi solicitado para que cada grupo produzisse o seu próprio círculo trigonométrico. Esses conhecimentos deram o suporte para o início da experimentação.

O episódio 1 ocorreu na primeira semana do mês de setembro de 2023, com duração de 2 horas-aula. A UARC 1 apresentou como objetivo definir as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no círculo trigonométrico, bem como os sinais (positivo ou negativo) e comportamentos dos valores dessas razões (crescente ou decrescente) nos quadrantes, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Episódio 1
Segmento 1 | Turnos 1 – 22

A intenção nesse segmento é aguçar a mente dos alunos para o que seriam as razões trigonométricas no círculo trigonométrico e as particularidades desse assunto. As intervenções iniciais, reflexivas e exploratórias foram as responsáveis por gerar interações importantes no ambiente pré-formal, entre os alunos e entre o professor/mediador e os alunos.

T (1) Professor: Olá pessoal! Vamos começar a nossa primeira UARC. O que seria seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico?

T (2) CG5: São funções trigonométricas que descrevem a relação entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

T (3) Professor: Então tem um triângulo retângulo dentro do círculo trigonométrico, pessoal?

T (4) Turma: Não, professor!

T (5) Professor: Gente, agora estamos querendo identificar as razões trigonométricas no círculo trigonométrico e não no triângulo retângulo. Alguém mais gostaria de responder?

***T (6) AG3:** Seno é o eixo das ordenadas, cosseno é o eixo das abscissas e tangente é a reta perpendicular à origem do círculo trigonométrico.*

T (7) Professor: Excelente! E onde você conseguiu perceber essa relação das razões com os eixos?

T (8) AG3: No círculo trigonométrico do aplicativo, professor.

T (9) Professor: Muito bem! Os aplicativos servem justamente para facilitar a visualização desses conceitos matemáticos, pessoal. Já que estamos falando sobre os aplicativos, vocês conseguem me responder se os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente podem assumir valores maiores que 1?

***T (10) DG2:** Seno e cosseno não podem possuir valores maiores que 1, pois o raio da circunferência é 1, porém a tangente pode, por exemplo, tangente de 64º vale 2,05, de acordo com o aplicativo.*

T (11) Professor: E sobre as razões trigonométricas possuírem valores negativos, isso é possível?

T (12) DG2: Sim, professor! No quadrante 2 o cosseno e a tangente são negativos, no quadrante 3 o seno e o cosseno são negativos e no quarto quadrante o seno e a tangente são *negativos.*

T (13) Professor: Muito bem! Sua análise está correta.

T (14) Professor: Pessoal, vamos agora verificar se vocês conseguiram identificar se os valores de seno, cosseno e tangente aumentam ou diminuem quando o arco percorre o círculo trigonométrico no sentido positivo. O grupo 6, até o momento está muito calado, alguém do grupo gostaria de responder essa pergunta?

T (15) EG6: No primeiro e segundo quadrante a função seno é crescente e no terceiro e quarto quadrante é decrescente. No primeiro e quarto quadrante a função cosseno é crescente e no segundo e terceiro decrescente. No primeiro e terceiro quadrante a função tangente é crescente e no segundo e quarto quadrante é decrescente.

T (16) Professor: Será que os valores de seno no segundo quadrante são crescentes e decrescentes no quarto quadrante? E com relação a tangente, será realmente, que no segundo e quarto quadrante os valores são decrescentes? Analise com calma aí no seu aplicativo e me responda novamente. Os integrantes do grupo, podem ajudar a colega.

T (17) BG6: *Professor, analisamos aqui e verificamos onde está o erro, a função seno é crescente no primeiro e quarto quadrantes e decrescente no segundo e terceiro quadrantes. E a tangente é crescente em todos os quadrantes.* Porém, nos ângulos de 90º e 270º aparece um ponto de interrogação no resultado da tangente, o que isso quer dizer?

T (18) Professor: Alguém poderia ajudar os colegas sobre esse questionamento?

T (19) DG5: A tangente não está definida nos ângulos que o cosseno é igual a zero. O seno e o cosseno estão sempre definidos para todos os ângulos, pois variam à medida que percorrem o círculo.

T (20) Professor: Eu entendi o que você quis dizer com relação a tangente não estar definida quando o cosseno for igual a zero. Certamente essa sua resposta está baseada na relação da tangente de um ângulo no triângulo retângulo. Porém, estamos querendo saber sobre a indefinição da tangente para os ângulos de 90º e 270°.

T (21) AG3: *Pelo que percebi, analisando o aplicativo, quando o arco para nos ângulos de 90º e 270º, esses pontos ficam paralelos ao eixo da tangente.*

T (22) Professor: É justamente por isso que a função nesses ângulos é indefinida, pois não existe encontro do eixo dos pontos com o eixo da tangente.

Os indícios de aprendizagem apareceram nos turnos 6, 10, 12, 17 e 21. No meu parecer as intervenções pré-formais foram importantes e contribuíram para a turma almejar os conhecimentos previstos para experimentação nesse segmento, além de ter dado o suporte necessário para a intervenção formalizante.

Segmento 2 | Turnos 23 – 42

Nesse segmento, foi analisado a UARC 1, no ambiente pós-formal, ou seja, os alunos nesse momento já tiveram os conhecimentos formais do assunto da atividade revelados, através das intervenções pré-formais e das mediações do professor/pesquisador. Vale ressaltar que as intenções no ambiente pós-formal é a de estabelecer parâmetros de aferição de aprendizagem e propor intervenções que tenham a aplicabilidade dos assuntos em resoluções de problemas até chegar em níveis mais elevados da reconstrução conceitual dos conceitos abordados.

T (23) Professor: Pessoal, vamos encontrar alguns valores de razões trigonométricas utilizando o material concreto ou o material virtual de vocês.

T (24) Professor: É importante que vocês saibam calcular os valores de arcos em graus, porém para nossa matéria é de fundamental importância que vocês saibam calcular as razões trigonométricas de arcos em radianos.

T (25) EG4: Professor, estou com dúvidas de como encontrar essa razão aqui no aplicativo. O valor do arco está negativo, como faço?

T (26) Professor: Quem poderia ajudar o colega nesse questionamento? Eu já conversei com vocês sobre esse caso, lá em agosto, lembram?

T (27) BG3: *Eu lembro professor! Quando o ponto descreve o arco no sentido anti-horário no círculo trigonométrico os arcos serão positivos e quando o arco percorre o círculo trigonométrico no sentido horário, os arcos serão negativos.*

T (28) Professor: Exatamente! Então nessa questão em que eu peço o valor do sen (- 70°), o que está acontecendo nessa situação?

T (29) BG3: *O ponto irá descrever o arco no sentido horário professor, então ele irá parar no 290º.*

T (30) Professor: Isso mesmo! Como o círculo trigonométrico têm 360º, desconta -se os 70º negativo e o arco irá parar no 290°. Ou seja, sen (-70°) é exatamente igual ao sen 290°.

T (31) Professor: Agora que sabemos que sen (-70°) = sen (290º). Qual é o valor numérico dessa operação? Utilizem as ferramentas de vocês.

T (32) EG4: Professor, a resposta é 0,9397.

T (33) Professor: Falta apenas um pequeno detalhe aí, que faz total diferença. Tente prestar atenção.

T (34) EG4: *Acabei esquecendo de colocar o sinal negativo.*

T (35) Professor: É um detalhe que se esquecermos de colocar em uma questão de equações trigonométricas, por exemplo, pode nos levar ao erro de toda a questão.

T (36) AG1: Professor, para encontrar o valor de $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$, primeiramente eu devo transformar para grau?

T (37) Professor: Exatamente! Umas das formas de resolução é essa. Vamos por parte, utilize a seguinte proporção, 180º está para π radianos, então $\frac{\pi}{5}$ radianos está para x graus. Após encontrar a conversão, utilize a mesma ideia da questão anterior para encontrar o arco positivo correspondente.

T (38) AG1: *Professor, eu fiz a regra de três e encontrei que* $\frac{\pi}{5}$ *radianos equivale a 36°, mas como o arco é negativo, terei que voltar o arco no sentido horário e descontar de 360°, o que resultará em 324°.*

T (39) Professor: Isso mesmo, aplicamos a mesma estratégia da situação anterior. Então podemos concluir que $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ é igual a cos 324°.

T (40) Professor: Pessoal, após essas discussões acredito que conseguiremos responder a seguinte intervenção. Existem arcos diferentes que possuem o mesmo valor numérico? Existem arcos com valores simétricos? Cite exemplos.

T (41) CG5: *O seno de 30° e o seno de 150° têm o mesmo valor. O cosseno de 60° e o cosseno de 300° também têm o mesmo valor. O seno de 45° e o seno de 135° têm valores simétricos, assim como o cosseno de 120° e o cosseno de 240° possuem valores simétricos.*

T (42) Professor: Excelente! Sua resposta está correta.

A abordagem comunicativa predominante nesse episódio é do tipo interativo/dialógica, pois o professor/pesquisador buscou interagir com os alunos e estimulá-los a encontrarem as respostas das intervenções, considerou as falas dos participantes, ajustou algumas respostas equivocadas, através de novos questionamentos, deu o feedback positivo quando os alunos conseguiram chegar nas respostas corretas.

O padrão interativo predominante nos segmentos é o IRFRA, pois o professor inicia **(I)** com a pergunta, o aluno responde **(R)**, em seguida o professor apresenta o feedback **(F)** através de uma nova pergunta, com o intuito de o aluno melhorar ou reformular a sua resposta, o aluno reformula e responde **(R)** corretamente e por fim o professor avalia **(A)** a resposta do aluno.

Os indícios de aprendizagem apareceram nos turnos 27, 29, 34, 38 e 41. Então, pode-se inferir que as intervenções utilizadas tanto no ambiente pré-formal quanto no ambiente pós-formal foram importantes para o cumprimento do objetivo previsto para a UARC.

7.1.2 Análise Microgenética da UARC 2

O episódio 2 ocorreu na segunda semana do mês de setembro de 2023, com duração de 2 horas-aula. A UARC 2 tem como objetivo reduzir arcos ao 1º quadrante com a técnica de simetria e formalização do método algébrico, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Episódio 2

Segmento 1 | Turnos 43 – 63

A pretensão nesse segmento é mediar os conhecimentos referentes a redução de arcos ao 1º quadrante de forma intuitiva, com a utilização das ferramentas de apoio, além de trabalhar os sinais das funções seno, cosseno e tangente em cada quadrante.

T (43) Professor: Olá pessoal! Vamos começar a nossa segunda UARC. Eu gostaria de saber o que seria reduzir um arco ao primeiro quadrante?

T (44) CG5: Se refere a diminuir o ângulo de um arco em um círculo trigonométrico que está localizado no primeiro quadrante, onde o valor de seno e cosseno são positivos.

T (45) Professor: Podemos melhorar essa ideia. Mais alguém para contribuir?

T (46) BG3: *É achar o seu ângulo correspondente no primeiro quadrante.*

T (47) Professor: Exatamente isso! Você poderia dar um exemplo para que a turma compreenda melhor essa sua ideia?

T (48) BG3: *Sim. Por exemplo, pelo que percebi aqui no aplicativo o seno de 135º é exatamente igual ao seno de 45°. É isso que é a chamada redução, professor?*

T (49) Professor: Sim, essa é uma redução do segundo quadrante para o primeiro. Turma, aí no material concreto de vocês identifiquem para mim os arcos de 45° e 135°. E vamos tentar achar além da função seno desses arcos, a função cosseno e tangente também e tentar perceber algumas coisas.

T (50) BG2: *Professor, pela aula anterior, eu sei que o seno é a imagem do ponto que produzir o arco no eixo das ordenadas. Então é fácil perceber que o seno de 45º é igual ao seno de 135° pois eles têm a mesmas imagens no eixo das ordenadas.*

T (51) Professor: Excelente! E em relação ao cosseno e a tangente desses arcos. Os valores são iguais?

T (52) BG2: Eu acho que não sei responder essa.

T (53) Professor: Você lembrou certinho a definição do seno, que falamos na aula passada, vamos relembrar o que seria o cosseno e tangente. O cosseno é a imagem do ponto que produz o arco em relação ao eixo das abscissas. O eixo das tangentes, é paralelo ao eixo das ordenadas e tangencia a origem do círculo trigonométrico, então a tangente é a imagem do ponto que produz o arco até o eixo das tangentes. Lembrou?

T (54) BG2: Lembrei.

T (55) Professor: Então agora você consegue me responder?

T (56) BG2: Professor, eu acho que vou responder errado.

T (57) Professor: Não tem problema se você errar, estamos construindo o conhecimento e é absolutamente normal errar, faz parte do processo.

T (58) BG2: *Então tá. Pelo que percebi aqui no meu material, quando é em relação ao cosseno dos arcos de 45º e 135°, os valores são os mesmos, porém o sinal é negativo para o cosseno de 145° e a mesma coisa acontece para a tangente desses arcos.*

T (59) Professor: Muito bem! Com o auxílio do material concreto foi bem melhor para você tirar essas conclusões, mas foi preciso relembrarmos a definição, para que dessa forma as análises pudessem acontecer. Nos casos de cosseno e tangente de 45º e 135º os valores são simétricos, ou seja, as funções possuem sinais diferentes para cada quadrante.

T (60) Professor: Pessoal, agora nessa intervenção eu gostaria de saber os sinais de seno, cosseno e tangente nos quadrantes. Vocês podem utilizar o material concreto ou o virtual para ajudar nas análises.

T (61) AG1: *No primeiro quadrante todas as razões são positivas, no segundo quadrante seno é positivo, mas o cosseno e a tangente são negativos, no terceiro quadrante o seno e cosseno são negativos, mas a tangente é positiva e no quarto quadrante seno e tangente são negativos e o cosseno é positivo.*

T (62) Professor: É isso mesmo! Pessoal, conseguiram ter essa mesma percepção que o colega teve?

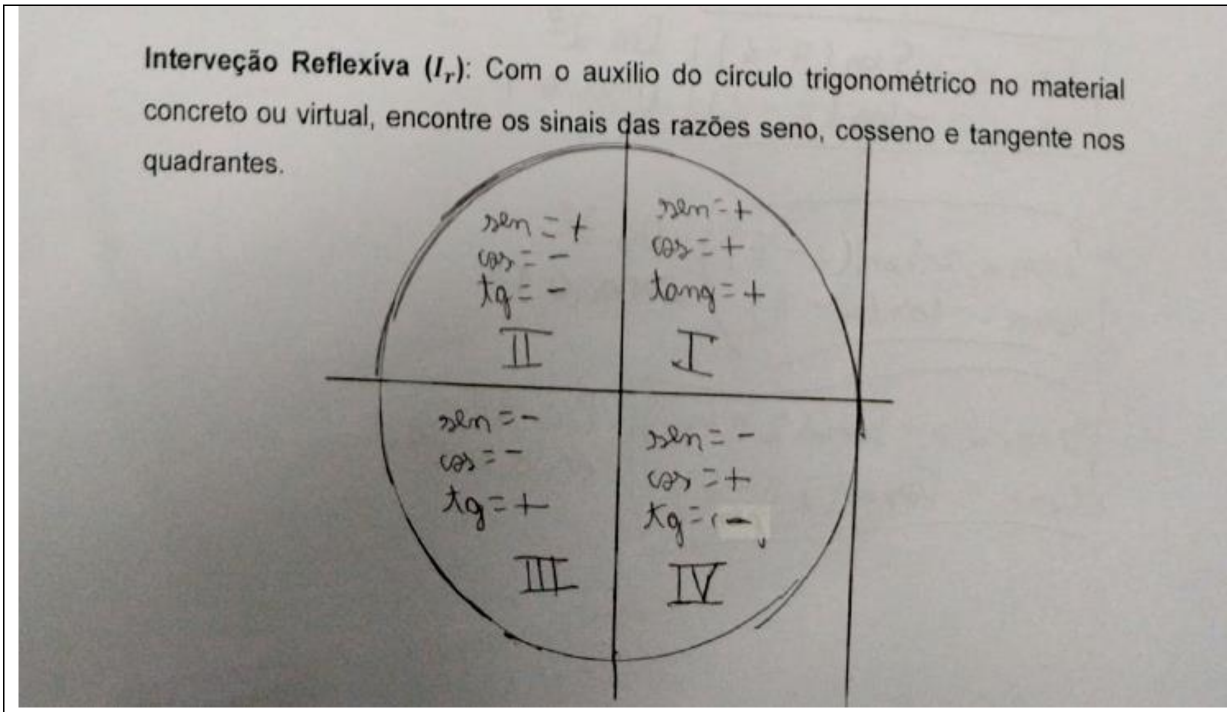
T (63) Turma: *Sim, professor.*

Nesse recorte microgenético, pôde-se notar uma zona de tensão discursiva do tipo beta, pois o aluno **BG2** no turno 50 respondeu corretamente a definição de seno no círculo trigonométrico, entretanto esqueceu as definições de cosseno e tangente, sendo que esse assunto foi trabalhado na UARC anterior. Naturalmente, o aluno se sentiu inseguro e com medo de responder, foi necessário relembrar os conceitos e encorajá-lo para que ele pudesse responder à pergunta.

A abordagem comunicativa predominante nesse segmento é do tipo interativo/dialógica e o padrão interativo é o IRFRA, pois segui a ordem de iniciar com uma pergunta, recebi a resposta de um aluno, senti a necessidade de buscar novas respostas para completar a resposta do aluno, ou senti a necessidade de dar o feedback fazendo um novo questionamento para a turma, recebi a resposta que estava esperando, então eu avaliei a resposta do aluno.

As ferramentas de apoio foram importantes para as intervenções inicial e reflexiva desse episódio. Elas auxiliaram os alunos na construção dos conhecimentos empírico-intuitivos, como pode-se perceber nos indícios de aprendizagem nos turnos 46, 48, 50, 58, 61 e 63.

Figura 49: Resposta do aluno AG1 (Turno 61).



Fonte: Pesquisa (2023).

Episódio 2

Segmento 2 | Turnos 64 – 70

Nesse momento, foi trabalhado com os alunos os conceitos de simetria no círculo trigonométrico, bem como a utilização do método algébrico para reduzir os arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes para o 1º.

T (64) Professor: Pessoal, agora iremos tentar compreender melhor o conceito de simetria no círculo trigonométrico. Utilizaremos, nas atividades, alguns arcos em radianos para que vocês comecem a se familiarizar com essa importante unidade de medida.

T (65) Professor: Então vamos buscar encontrar os arcos que possuem o mesmo valor numérico, em módulo, de $sen\frac{\pi}{6}$. Utilizem os materiais manipuláveis de vocês.

T (66) EG5: *Os arcos correspondentes ao seno de* $\frac{\pi}{6}$*, em módulo, nos outros quadrantes são* $\frac{5\pi}{6}$*,* $\frac{7\pi}{6}$ *e o* $\frac{11\pi}{6}$*.*

T (67) Professor: Isso mesmo. Como você conseguiu chegar nesses arcos?

T (68) EG5: *Com as ideias que o senhor nos passou sobre simetria, eu percebi que o arco* $\frac{\pi}{6}$ *radianos, no sentindo anti-horário, saindo da origem, percorre 30º no círculo trigonométrico. O arco* $\frac{5\pi}{6}$*, eu encontrei voltando 30º sentido horário saindo de* π *radianos. O arco* $\frac{7\pi}{6}$ *radianos, eu encontrei saindo de* π *radianos e somando com 30° e o arco* $\frac{11\pi}{6}$ *encontrei voltando 30°, no sentido horário, partindo da origem.*

T (69) Professor: Excelente! Pelo que percebi, você conseguiu compreender o conceito de simetria no círculo trigonométrico.

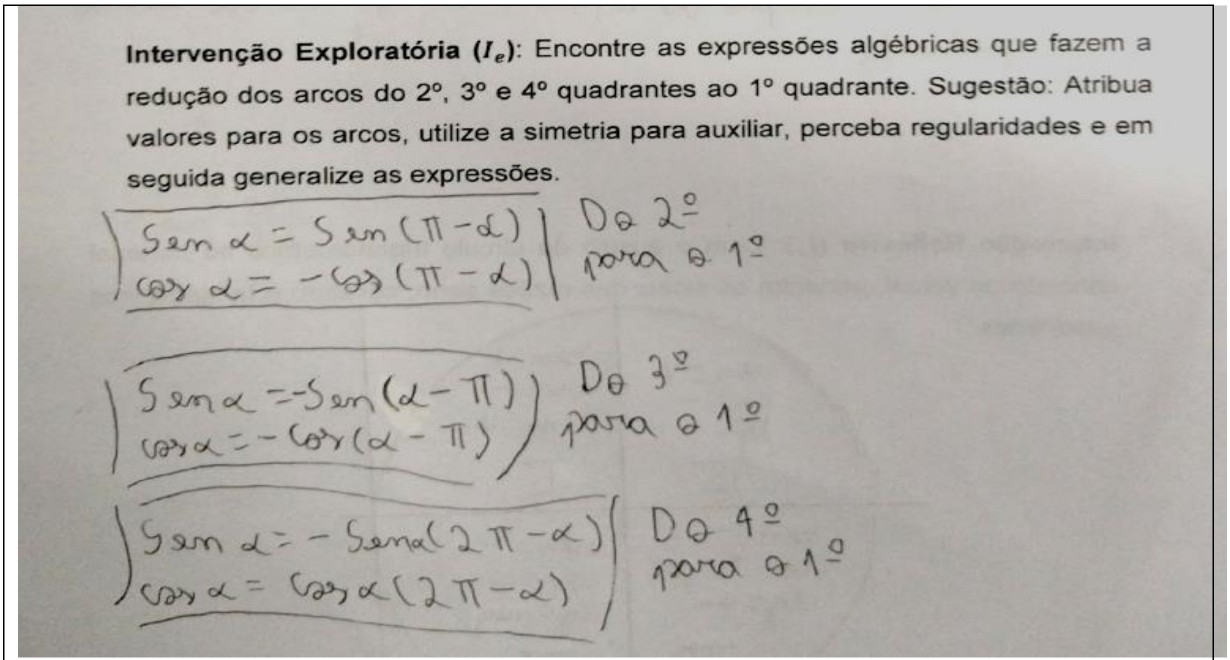
T (70) Professor: Pessoal, posso acrescentar ainda que podemos reduzir os arcos do segundo quadrante para o primeiro quadrante, fazendo a subtração de π radianos pelo arco, do terceiro para o primeiro quadrante, fazendo a subtração do arco por π radianos e do quarto para o primeiro quadrante, subtraindo 2 π radianos pelo arco.

A abordagem comunicativa predominante nesse segmento é do tipo interativo/ de autoridade pois precisei focar apenas nas interações pertinentes ao conteúdo que estava trabalhando, surgiram zonas de tensão discursiva no decorrer da atividade, essas zonas podem dispersar a atenção do aluno ou até mesmo fazer com que o aluno perca a vontade de participar da experimentação. O padrão interativo predominante desse segmento é o IRA, pois segui a ordem de iniciar **(I)** com uma pergunta, recebi a resposta **(R)** do aluno, avaliei **(A)** a resposta e a situação que aula precisaria se encaminhar.

Os indícios de aprendizagem, nesse recorte de transcrições, surgiram nos turnos 66 e 68, evidenciando que utilização das ferramentas de apoio foram muito importantes para os alunos nesse momento pré-formal da UARC.

Não foi encontrado áudio que possa ser transcrito sobre a generalização das expressões algébricas que fazem a redução dos arcos para o primeiro quadrante. Porém, a figura 50 mostra a forma como o aluno **EG2** respondeu a intervenção exploratória da sua sequência didática.

Figura 50: Resposta do aluno EG2 (Intervenção Exploratória).



Intervenção Exploratória (I_e): Encontre as expressões algébricas que fazem a redução dos arcos do 2°, 3° e 4° quadrantes ao 1° quadrante. Sugestão: Atribua valores para os arcos, utilize a simetria para auxiliar, perceba regularidades e em seguida generalize as expressões.

$\text{Sen}\,\alpha = \text{Sen}(\pi - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$
Do 2º para o 1º

$\text{Sen}\,\alpha = -\text{Sen}(\alpha - \pi)$
$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$
Do 3º para o 1º

$\text{Sen}\,\alpha = -\text{Sen}\,\alpha(2\pi - \alpha)$
$\cos\alpha = \cos\alpha(2\pi - \alpha)$
Do 4º para o 1º

Fonte: Pesquisa (2023).

Analisando as respostas do aluno, é perceptível que mesmo no ambiente pré-formal o aluno conseguiu apresentar as expressões com rigor matemático, teve o cuidado de colocar corretamente os sinais das expressões, no segundo quadrante o seno é positivo e o cosseno negativo, no terceiro quadrante as duas funções são negativas e no quarto quadrante seno é negativo e cosseno positivo. Esse fato evidencia que a construção dos conhecimentos referentes as intervenções da UARC foram eficientes e proporcionaram aprendizados.

Sobre o ambiente pós-formal, não foi possível transcrever os áudios visto que as intervenções avaliativas restritivas e aplicadas são resoluções de questões sobre o assunto, então os alunos pouco interagiram e se mantiveram focados em resolver as atividades. Percebi que a intervenção presente na sequência didática, figura 51, está em um nível acima do proposto para uma sequência didática inicial sobre o tema. A questão é excelente e pode ser utilizada para trabalhar o assunto de redução ao primeiro quadrante, em outras sequências didáticas com níveis de aprendizagem mais elevadas.

Figura 51: Intervenção Avaliativa Restritiva (UARC 2)

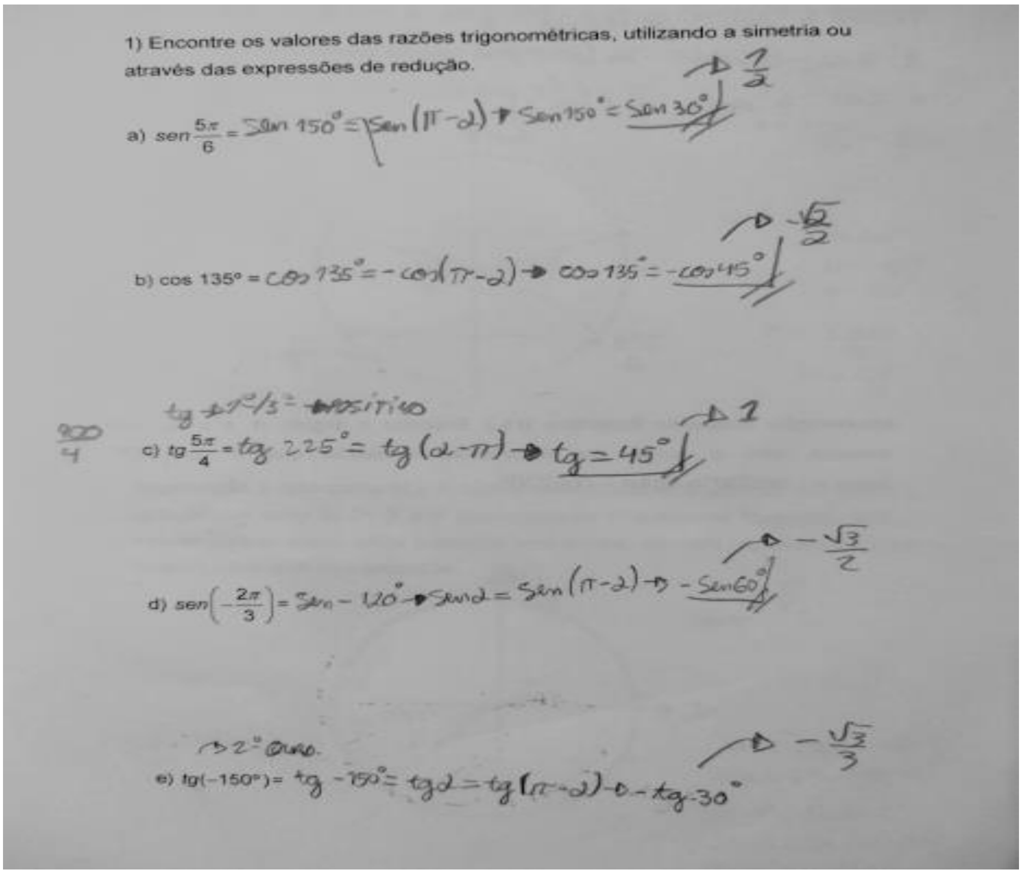
Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Encontre o ângulo α e o seu valor numérico, com o auxílio das ferramentas virtuais, tal que $0° \leq \alpha < 360°$, $sen\alpha = -sen230°$ e $\cos\alpha = \cos 230°$.

Fonte: Pesquisa (2023).

Sobre a Intervenção Avaliativa Aplicada, grande parte dos alunos conseguiram desenvolver as questões, foi pedido para eles encontrarem os valores das razões trigonométricas com arcos em graus e em radianos, arcos positivos e negativos, utilizando a simetria ou através das expressões algébricas de redução, com o intuito de verificar se ocorreu a construção de aprendizagem dos assuntos abordados na UARC. A figura 52, apresenta a atividade do aluno **BG3.**

Figura 52: Resposta do aluno BG3 (Intervenção Avaliativa Aplicada)

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):



1) Encontre os valores das razões trigonométricas, utilizando a simetria ou através das expressões de redução.

a) $sen\frac{5\pi}{6} = Sen\ 150° = Sen(\pi - \alpha) \rightarrow Sen\ 150° = Sen\ 30° \rightarrow \frac{1}{2}$

b) $\cos 135° = \cos 135° = -\cos(\pi - \alpha) \rightarrow \cos 135° = -\cos 45° \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg + \pi/5 =$ positivo

$\frac{900}{4}$ c) $tg\frac{5\pi}{4} = tg\ 225° = tg(\alpha - \pi) \rightarrow tg = 45° \rightarrow 1$

d) $sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = Sen -120° \rightarrow Sen\alpha = Sen(\pi - \alpha) \rightarrow -Sen 60° \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow$ 2º quad.

e) $tg(-150°) = tg -150° = tg\alpha = tg(\pi - \alpha) \rightarrow -tg\ 30° \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: Pesquisa (2023).

Analisando as respostas do aluno, percebe-se que ele conseguiu compreender a utilização das expressões algébricas de redução de arcos, na letra **a** ele transformou o arco que estava em radianos para graus, como o arco está no segundo quadrante ele subtraiu 180º pelo arco, ou seja, 180º - 150° = 30°, logo ele conseguiu fazer a redução. Na letra **b**, o aluno teve o cuidado de perceber que o arco 135º está no segundo quadrante, então o cosseno desse arco será um valor negativo. Na letra **c** ele utilizou a mesma estratégia de conversão de unidades da letra **a**, subtraiu o arco por 180°, reduziu o arco para o primeiro quadrante e chegou na resposta.

Na letra **d** e **e,** ele aplicou a fórmula de redução corretamente, fez a transformação de unidades corretamente, entretanto o aluno não se atentou que o arco das razões é negativo, desse modo, o arco percorre o sentido horário do círculo trigonométrico. O aluno resolveu as razões como se os arcos fossem positivos e no final acrescentou o sinal negativo na resposta. Na UARC anterior foi trabalhado com eles a forma correta de resolver esse tipo de situação. Talvez o aluno não se atentou para o sinal, ou não conseguiu assimilar ainda esse tipo de situação, mas para uma primeira sequência didática sobre o assunto o aluno foi muito bem e demonstrou que conseguiu angariar o máximo de conhecimentos com relação a essa UARC.

7.1.3 Análise Microgenética da UARC 3

O episódio 3 aconteceu na terceira semana do mês de setembro de 2023, com duração de 2 horas-aula. A UARC 3 tem como objetivo definir arcos côngruos com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Episódio 3

Segmento 1 | Turnos 71 – 93

Nesse segmento, foram transcritos recortes de áudios referentes as intervenções inicial, reflexiva e exploratória. As intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO) ocorreram em todas as etapas da atividade, bem como a utilização das ferramentas de apoio.

T (71) Professor: Olá pessoal! Vamos dar início a nossa terceira UARC. Gostaria de começar perguntando para vocês o que seriam arcos côngruos?

T (72) AG5: São dois arcos em diferentes partes do círculo, com a mesma origem e com seno, cosseno e tangente congruentes.

T (73) Professor: Será que esses arcos em diferentes posições no círculo conseguem possuir as razões trigonométricas congruentes?

T (74) AG5: Acho que não.

T (75) Professor: Pois bem, você acertou quando disse que os arcos são diferentes, mas para que eles sejam côngruos, ou seja, possuam uma correspondência entre si, eles necessariamente precisam ter uma característica em comum, alguém poderia ajudar a colega?

***T (76) BG2:** Eles precisam ter a mesma extremidade.*

T (77) Professor: Excelente! Pessoal, basicamente para dois arcos serem côngruos, as suas extremidades devem estar no mesmo ponto. Dessa forma, as razões trigonométricas desses arcos serão iguais, sendo essa a correspondência entre esses arcos.

T (78) Professor: Já que essa ideia inicial ficou bem clara para vocês, gostaria de saber se vocês conseguem me responder o que os arcos 45º, 405º, 765° e 1125º possuem em comum?

T (79) AG5: Todos os arcos são 45°, só muda o número de voltas.

T (80) Professor: Não são todos os arcos 45°, acredito que o que você quis dizer é que as extremidades desses arcos coincidem com o arco inicial de 45°.

T (81) AG5: Isso mesmo, professor.

T (82) Professor: Agora sim, então vou aproveitar para complementar a ideia do colega. O arco inicial é o 45°, quando o ponto percorrer um giro completo na circunferência, o arco correspondente ao 45° é 45 + 1. 360° = 405°, quando forem duas voltas, o arco correspondente será 45º + 2.360° = 765°, quando forem três voltas, o arco correspondente será 45° + 3.360° = 1125°. Conseguiram compreender essa ideia, turma?

T (83) Turma: Sim, professor.

T (84) Professor: Turma, vamos tentar generalizar uma expressão que represente a família de arcos côngruos a 60°, visto que o ponto que produz o arco no círculo trigonométrico pode dar infinitas voltas no círculo trigonométrico e ter a extremidade no arco de origem. Atribua k para o número de voltas.

***T (85) EG4:** Se chamarmos de k o número de voltas do ponto que produz os arcos, então a expressão fica 360°.k + 60°, ou em radianos* $2\pi.k+\frac{\pi}{3}$.

T (86) Professor: Muito bem! Só irei acrescentar que esse k pertence ao conjunto dos números inteiros, pessoal.

T (87) Professor: Agora vamos tentar construir uma nova ideia com relação aos arcos côngruos. Como seria possível encontrar o seno, cosseno e tangente do arco de 2550°?

***T (88) BG2:** Encontrando o arco côngruo dele, professor.*

T (89) Professor: E como seria, nesse caso?

***T (90) BG2:** Basta dividir o arco por 360°.*

T (91) Professor: É isso mesmo, fazendo essa divisão teremos outra informação importante. Você conseguiu perceber o que seria?

***T (92) BG2:** O número de voltas que o ponto precisa percorrer no círculo trigonométrico para gerar o arco 2550°. Nesse caso, foram 7 voltas, o resto da divisão deu 30°.*

T (93) Professor: Perfeito! Esse é o procedimento para encontrarmos o que chamamos de primeira determinação positiva de um arco.

Nesse recorte microgenético, os objetivos das intervenções pré-formais foram alcançados, as zonas de tensão discursivas foram do tipo gama, ou seja, os alunos conseguiram construir bases trigonométricas, através das UARC anteriores, que deram o suporte necessário para a construção dos conhecimentos exigidos nessa Uarc em análise. Foi necessário o professor/mediador corrigir algumas respostas equivocadas, com feedbacks através de novos questionamentos para que os alunos pudessem reformular as suas respostas.

A abordagem comunicativa desse segmento é do tipo interativo/dialógica, não houveram grandes tensões e regressões na construção conceitual, o padrão interativo nesse ponto da experimentação é do tipo IRFRA e os indícios de aprendizagem estão presentes nos turnos 76, 85, 88, 90 e 92.

Episódio 3
Segmento 2 | Turnos 94 – 107

Os recortes de áudio transcritos nesse segmento são das intervenções avaliativa restritiva e aplicada, ou seja, nesse momento os conceitos já foram formalizados pelo professor/mediador. Foi trabalhado com os participantes questões sobre a 1ª determinação positiva de um arco, redução ao 1º quadrante, para razões com arcos em graus e em radianos e para arcos negativos.

T (94) Professor: Pessoal, agora que os conceitos foram formalizados, encontrem para mim a primeira determinação positiva do arco $\frac{33\pi}{4}$.

T (95) Professor: Vocês poderão resolver essa intervenção de dois modos. O primeiro é transformar o arco que está em radianos para grau e encontrar o arco côngruo a ele em seguida, ou articular a fração para aparecer um múltiplo de 2π.

***T (96) CG1:** Eu substituí o π radianos por 180°, e encontrei que o arco equivale a 1485°. Fiz a divisão do arco por 360° e encontrei que o arco côngruo a ele é o 45° e o ponto precisou dar 4 voltas no círculo trigonométrico.*

T (97) CG1: Professor, o grupo não entendeu essa sugestão de articular a fração para aparecer um múltiplo de 2π. O senhor poderia nos explicar?

T (98) Professor: Claro que sim. Pensa em um número que seja divisível por 4 e seja próximo de 33.

T (99) CG1: O 32.

T (100) Professor: Muito bem. Agora eu posso reescrever o $\frac{33\pi}{4}$ como $\frac{32\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$?

T (101) CG1: Pode.

T (102) Professor: Fazendo a divisão de 32 por 4 termos 8 como resultado. Então, a expressão fica assim $8\pi+\frac{\pi}{4}$, que eu posso reescrevê-la como 4. $2\pi+\frac{\pi}{4}$.

T (103) Professor: O que essa expressão que eu encontrei está me informando?

T (104) CG1: *Que o arco deu 4 voltas no círculo trigonométrico e parou no* $\frac{\pi}{4}$ *radianos, ou seja, parou no arco de 45°.*

T (105) Professor: A turma compreendeu essa articulação?

T (106) Turma: *Sim.*

T (107) Professor: Esse modo é bem interessante para encontrarmos a primeira determinação positiva sem precisar converter o arco que está em radianos para graus.

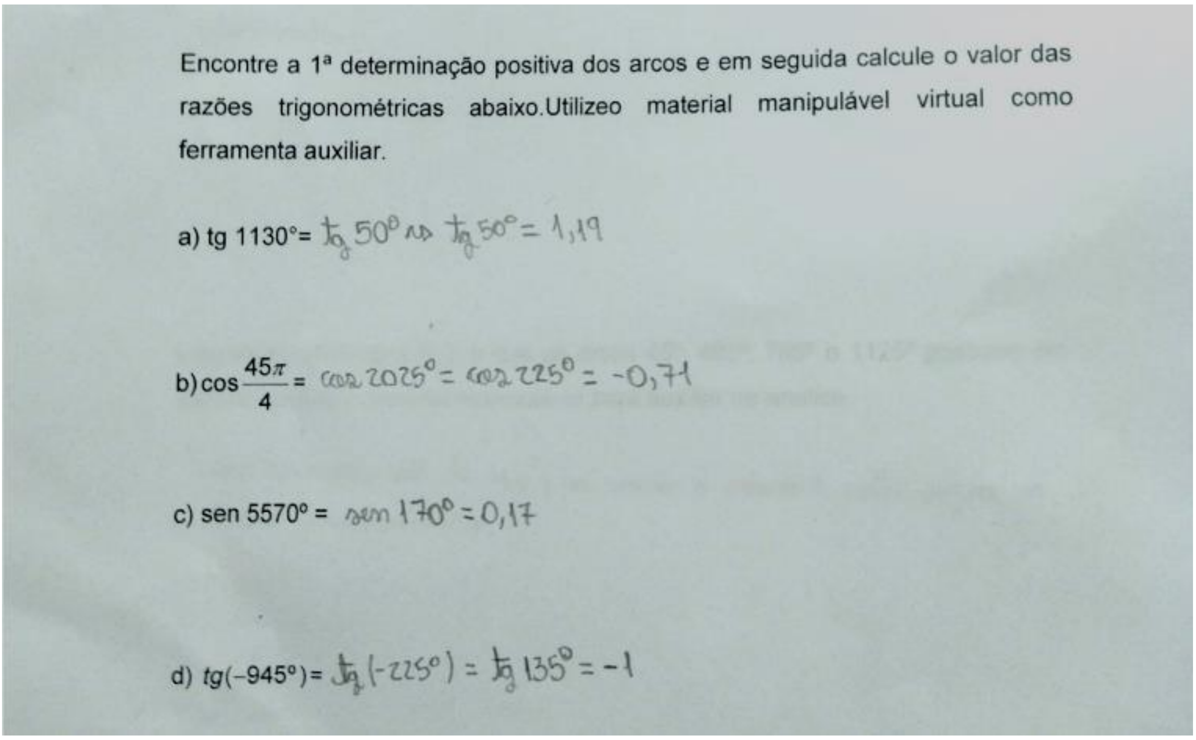
O tipo de abordagem comunicativa predominante nesse segmento é o interativo/ de autoridade, houve a necessidade de focar nas interações pertinente ao objeto matemático trabalhado na UARC e dessa forma, transmitir as informações necessárias para que os alunos pudessem desenvolver o conteúdo que no momento anterior foi revelado, formalmente. As zonas de tensão discursiva e as intervenções IOMO foram importantes para direcionar o aluno para o caminho correto e ajudou a manter o foco e concentração dos grupos. O padrão interativo IRA foi predominante nesse momento da experimentação.

Nesse recorte microgenético, os indícios de aprendizagem surgiram nos turnos 96, 104 e 106. Dessa forma, considero que a intervenção avaliativa transcrita nesse segmento, agregou positivamente para a construção de conhecimentos da turma.

Para a atividade avaliativa aplicada utilizei a figura 53, para mostrar os indícios de aprendizagem, pois no momento da atividade os alunos estavam concentrados e não se têm áudios com interações pertinentes para ser transcrito.

Figura 53: Resposta do aluno DG4 (Intervenção Avaliativa Aplicada).

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):



Encontre a 1ª determinação positiva dos arcos e em seguida calcule o valor das razões trigonométricas abaixo.Utilizeo material manipulável virtual como ferramenta auxiliar.

a) tg 1130°= tg 50° ⇒ tg 50° = 1,19

b) $\cos\frac{45\pi}{4}$ = cos 2025° = cos 225° = -0,71

c) sen 5570° = sen 170° = 0,17

d) $tg(-945°)$ = tg(-225°) = tg 135° = -1

Fonte: Pesquisa (2023).

O aluno **DG4**, apresentou os conhecimentos que foram trabalhados na UARC em análise, obteve êxito em todas as letras da intervenção avaliativa aplicada, evidenciado indícios de aprendizagem. Além do aluno em destaque, outros participantes dessa experimentação obtiveram resultados similares a esse, o que corrobora com o fato de que as articulações das intervenções foram eficientes na proposta em que estavam desempenhadas.

7.1.4 Análise Microgenética da UARC 4

O episódio 4 ocorreu na quarta semana do mês de setembro de 2023, com duração de 2 horas-aula. Após a construção dos conhecimentos presentes nas atividades anteriores, nessa UARC, foi trabalhado as Equações Trigonométricas. Essa preparação, objetivou dar a base trigonométrica necessária para que os alunos pudessem compreender e, de fato, aprender o objeto de conhecimento dessa pesquisa. Objetivou-se resolver Equações Trigonométricas Fundamentais e através das intervenções IOMO, projetar para os alunos técnicas de resoluções de alguns tipos de Equações Trigonométricas Clássicas.

Episódio 4

Segmento 1 | Turnos 108 – 124

Os recortes microgenéticos desse segmento são referentes as intervenções pré-formais da UARC. As intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO) ocorreram em todas as etapas da atividade, bem como a utilização das ferramentas de apoio.

T (107) Professor: Pessoal, vamos iniciar a nossa última UARC. E eu começarei com um questionamento. O que seria uma equação matemática, pra vocês?

T (108) DG5: *É uma igualdade entre termos, com uma incógnita ou mais.*

T (109) CG6: *Uma relação feita entre dois termos que resulta na igualdade e descobrimento de um dos termos.*

T (110) Professor: Muito bem, pessoal! Basicamente uma equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas com uma ou mais incógnitas, que são valores desconhecidos, representados por letras.

T (111) Professor: Vamos melhorar essa pergunta. Como você reconheceria uma equação trigonométrica?

T (112) BG3: *Para reconhecer uma equação trigonométrica, precisamos perceber uma razão trigonométrica. A incógnita é um arco (ângulo) a ser determinado. Onde envolve seno, cosseno e tangente.*

T (113) DG5: *Basicamente eu reconheceria pela presença do seno, cosseno e tangente na expressão.*

T (114) Professor: Excelente, pessoal.

T (115) Professor: Agora vamos tentar aprofundar um pouco mais as coisas. Para a equação $senx = \frac{1}{2}$, além da solução $x = \frac{\pi}{6}$ radianos ou $x = 30°$. Existem outras possíveis soluções?

T (116) BG3: *Sim, um exemplo que podemos citar é o arco de 150°, possui o mesmo seno de 30°.*

T (117) Professor: Isso mesmo. Mas será que só existem essas duas soluções?

T (118) BG3: *Não, todos os arcos côngruos a esses arcos também serão soluções, professor.*

T (119) Professor: Excelente! Após essas informações, acredito que vocês têm condições de me apresentar a solução dessa solução.

T (120) BG3: *De acordo com a nossa aula passada, para representar os arcos côngruos do 30°, a representação genérica é 30° + k. 360, e a do 150º é 150° + k.360°.*

T (121) Professor: Muito bem! Só pra deixar essa solução com um toque mais formal, nós podemos representá-la como: $S = \{x \in R \,/\, x = 30° + k.360° \text{ ou } x = 150° + k.360°\}$, para todo k pertencente aos inteiros.

T (122) Professor: Agora vamos fazer a mesma representação da solução com os arcos radianos. Alguém poderia me ajudar?

***T (123) AG1:** Professor, a solução fica assim:*

$$S = \left\{ x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

T (124) Professor: Exatamente!

Nesse momento da experimentação, percebe-se que os alunos estavam mais tranquilos com a dinâmica, os conhecimentos que eles precisavam para chegar na solução de uma equação trigonométrica fundamental, foram construídos no decorrer das aplicações das UARC. A abordagem comunicativa predominante nesse segmento é do tipo interativo/dialógica e o padrão interativo nesse momento é do tipo IRFRA.

Os indícios de aprendizagem, nesse segmento, estão presentes nos turnos 108, 109, 112, 113, 116, 118, 120 e 123. O que evidencia que as intervenções pré-formais utilizadas, foram eficientes e cumpriram com os objetivos traçados.

Episódio 4
Segmento 2 | Turnos 125 – 144

As intervenções transcritas nesse segmento são referentes aos áudios das interações das atividades no ambiente pós-formal. Nesse momento, os participantes já estavam com os conceitos formalizados com o rigor matemático e com a base trigonométrica necessária para eles pudessem evoluir das equações trigonométricas fundamentais que são as mais simples, para as clássicas, nesse tipo de equação é necessário utilizar artifícios matemáticos para a resolução da questão.

T (125) Professor: Pessoal, agora vamos subir um degrau em relação ao assunto que estamos trabalhando. Que tal, vocês aceitam o desafio?

T (126) Turma: sim!

T (127) Professor: Então, vamos buscar encontrar a solução geral da seguinte equação: $2.sen^2x + 3sen - 2 = 0$.

***T (128) AG4:** Não conseguimos resolver, professor. Mas essa expressão parece uma equação do segundo grau.*

T (129) Professor: Era essa percepção que eu estava esperando que alguém da turma tivesse.

T (130) Professor: Agora experimentem substituir o sen x por uma variável.

T (131) AG4: Como assim professor?

T (132) Professor: Chama o sen x de y, por exemplo. Ou seja, sen x = y.

T (133) AG4: Ficou desse jeito $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

T (134) Professor: Exatamente! Turma, todos compreenderam essa mudança de variável?

***T (135) Turma:** Sim, professor.*

T (136) Professor: Excelente! Agora resolvam para mim essa equação do segundo grau que surgiu.

T (137) CG6: *Professor, o nosso grupo descobriu as duas soluções da equação do segundo grau. No caso, a primeira raíz deu -2 e a segunda* $\frac{1}{2}$*.*

T (138) Professor: Você terá duas situações. Ou o sen x = -2, ou o sen x = $\frac{1}{2}$**.** Como não existe o seno de -2, então essa raíz não convém para essa resolução, então nós descobrimos que sen x = $\frac{1}{2}$**.** Agora virou uma equação trigonométrica fundamental. Quais são as soluções para sen x = $\frac{1}{2}$?

T (139) BG6: *x = 30º e seus côngruos ou x = 150° e os seus côngruos também.*

T (140) Professor: E como ficaria a representação do conjunto solução dessa equação trigonométrica?

T (141) BG6: *A representação da solução dessa equação é:*

$$S = \{x \in R \,/\, x = 30° + k.360° \text{ ou } x = 150° + k.360°\}$$

T (142) Professor: A sua solução está correta. Mais alguém poderia me responder a solução dessa questão com o arco em radianos?

T (143) DG2: *Sim. A solução em radianos é:*

$$S = \left\{x \in R \,/\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

T (144) Professor: Muito bem!

O tipo de abordagem comunicativa predominante nesse segmento é o interativo/ de autoridade, houve a necessidade de apresentar a técnica de mudança de variável, a equação trigonométrica transformou-se em uma equação do segundo grau, então após encontrarmos as soluções, fizemos a comparação com a incógnita trigonométrica. Como uma das soluções foi -2, concluímos que essa solução não convém, pois os valores possíveis para seno estão compreendidos no intervalo de -1 até 1. A outra solução deu 1/2, e esse resultado convém para seno, logo recaímos em uma equação trigonométrica fundamental.

O padrão interativo IRA foi predominante nesse momento da experimentação, os indícios de aprendizagem surgiram nos turnos 128, 135, 137, 139, 141 e 143. Dessa forma, com todos os indícios de aprendizagem apresentados nessas análises, considero que a sequência didática para o ensino de equações trigonométricas fundamentais e para alguns tipos de equações trigonométricas clássicas cumpriu os objetivos almejados e contribuiu para a construção de conhecimento, fugindo da metodologia tradicional.

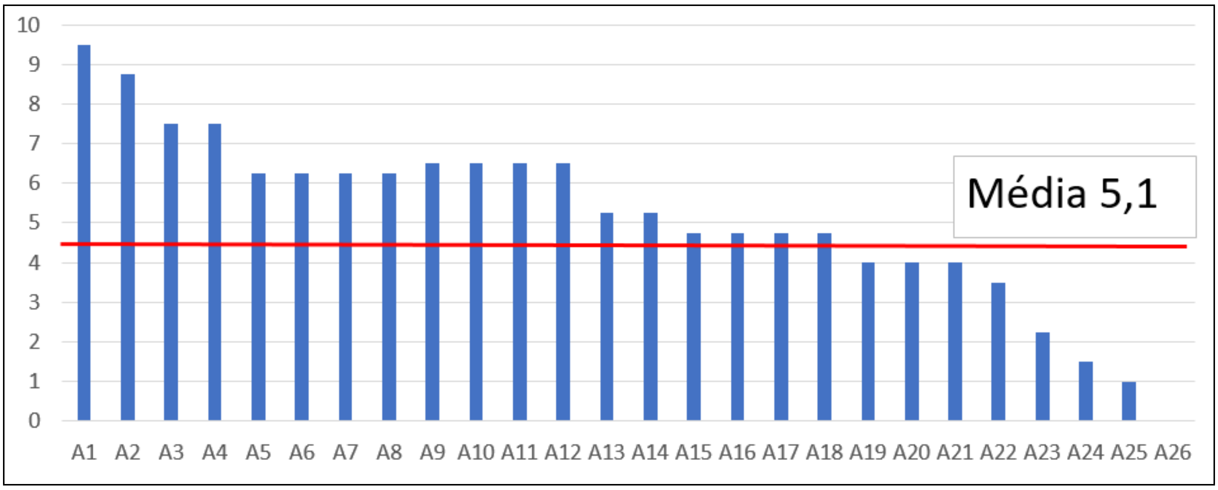
7.2 ANÁLISE DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Nessa seção foi feito a análise dos testes de verificação de aprendizagem, após a sequência didática. O teste é composto por 8 questões discursivas, as quatro primeiras são de equações trigonométricas fundamentais e as quatros últimas são de equações trigonométricas clássicas, todas as questões foram trabalhadas com os arcos em radianos, afinal essa era uma pretensão estabelecida desde o início da experimentação, fazer a transição das unidades. É importante salientar que o mesmo teste foi passado para as turmas experimental e controle de processo.

A análise é do tipo quantitativa, com foco voltado para a pontuação dos participantes, média das notas das turmas e comparativos importantes para essa pesquisa. Como o teste é composto de 8 questões discursivas, cada questão equivale a 1,25 pontos, totalizando 10 pontos. Se o aluno desenvolveu a questão corretamente até certo ponto, entretanto errou o resultado final, foi atribuído nota proporcional para as etapas que ele respondeu corretamente.

A figura 54 apresenta a média das notas dos alunos da turma de controle de processo, em rol decrescente.

Figura 54: Média das notas da turma de controle de processo (teste de verificação)

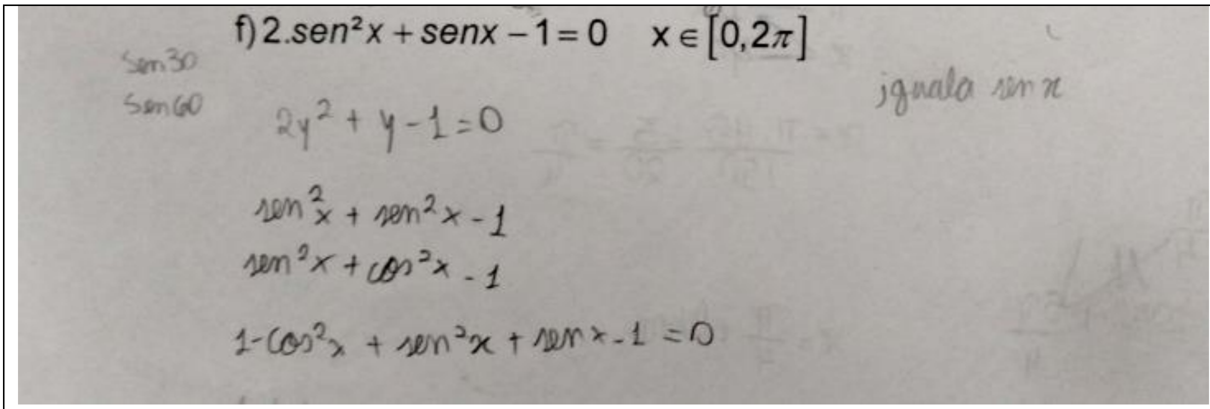


Fonte: Pesquisa (2023).

Na turma de controle de processo as aulas foram ministradas de modo tradicional, os assuntos trabalhados desde o início da trigonometria até a parte referente às equações trigonométricas foram ensinados partindo da definição, exemplos e exercícios de fixação. No momento das aulas, os feedbacks dos alunos foram positivos com relação as perguntas na dinâmica de sala de aula. Para um primeiro teste com a turma, o resultado foi dentro do esperado, poderia ter sido melhor, pois a turma tem grande potencial, porém senti alguns alunos tensos com o assunto no decorrer das aulas, eles internalizaram que a trigonometria é de complexa compreensão, além do mais, só aconteciam as interações com eles se eu puxasse as perguntas. No dia do teste, percebi que alguns alunos estavam com receio, de certa forma o medo pode tê-los prejudicado, mesmo eu informando que esse teste não seria valendo pontos para as notas do colégio.

Além do receio com o assunto, notei em alguns casos, que eles não conseguiram desenvolver certas questões, não por falta dos conhecimentos trigonométricos ensinados nas aulas, mas por falta de conhecimentos de assuntos de séries anteriores. Na figura 55, percebe-se que o aluno compreendeu a estratégia de trocar **sen x** pela variável **y**, dessa forma a equação trigonométrica transforma-se numa equação do segundo grau. Porém, não conseguiu evoluir na questão, o que evidencia que ele, provavelmente, naquele momento, não sabia resolver a equação do segundo grau, conteúdo ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental.

Figura 55: Resposta do aluno EG3 (teste de verificação de aprendizagem).



Fonte: Pesquisa (2023).

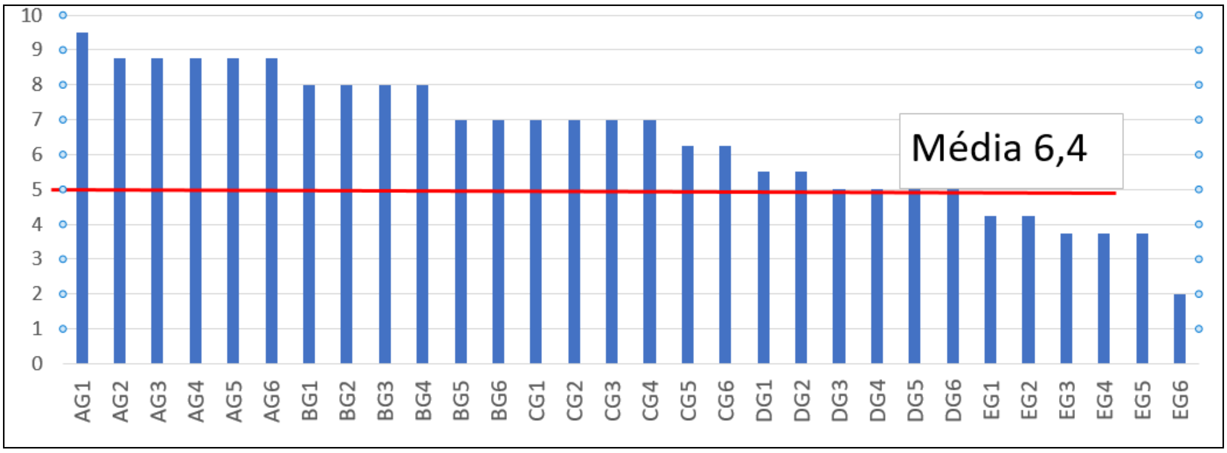
Na turma experimental, um ponto importante a ser destacado foi a divisão da turma em grupos, as interações sobre os assuntos trabalhados se intensificaram, os alunos trocavam ideias, perguntavam bem mais do que a turma de controle de processo, demonstravam-se mais motivados com a nova dinâmica de aprendizagem.

Outro ponto que ajudou bastante os alunos na turma experimental, foi a utilização dos materiais manipuláveis concreto e virtuais na sequência didática, essas ferramentas auxiliaram os alunos em diversas intervenções e foram importantes na construção desses saberes.

Além desses fatores, a organização da sequência didática pelo construto das UARC, proporcionou organização dos conteúdos, envolvimento dos alunos, que ao se depararem com o assunto, no ambiente pré-formal, através das intervenções, precisavam pensar e buscar as respostas de modo empírico-intuitivo, mediado pelo professor/pesquisador e então, reunir as verdades desses alunos e formalizar, com o rigor matemático, o conhecimento em foco na atividade.

A figura 56 apresenta a média das notas dos alunos da turma experimental em rol decrescente.

Figura 56: Média das notas da turma experimental (teste de verificação de aprendizagem)



Fonte: Pesquisa (2023).

A sequência didática mostrou-se eficiente para o ensino de equações trigonométricas, uma das evidências que corroboram com essa perspectiva, além dos indícios de aprendizagem verificados nos episódios microgenéticos, é a média de notas dos alunos da turma experimental em relação a turma de controle de processo. A média da turma de controle de processo foi de 5,15, enquanto a média da turma experimental foi de 6,4.

É importante salientar que essa análise não é para desmerecer o método tradicional de ensinar o conteúdo, e sim propor uma alternativa de metodologia dinâmica ao processo de ensino e aprendizagem, estimular os alunos a enxergarem o ensino por diferentes perspectivas e mostrar que mesmo que o assunto possar ser considerado de complexa compreensão, se eles estivem motivados, se dedicarem, se as dinâmicas para ensinar o conteúdo instigarem as interações certas em sala de aula, os resultados positivos surgirão.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Escolher o objeto de conhecimento para a minha pesquisa não foi uma tarefa fácil, buscar um tema que realmente precisasse ser estudado com mais profundidade e que fosse pouco abordado nos trabalhos acadêmicos era o desafio que eu estava disposto a encarar para contribuir com a educação matemática.

A minha experiência há 10 anos em sala de aula, trabalhando com turmas do Ensino Médio, além das análises que faço sobre os assuntos que mais os alunos têm dificuldades, foi o ponto de partida para buscar o tema de estudo dessa pesquisa.

A trigonometria é um assunto de complexa compreensão para os alunos e desafiadora para o professor ministrar. Confesso que por um longo tempo, ensinei trigonometria de forma tradicional, feedbacks positivos, muitos alunos na hora da aula compreendem e até desenvolvem bem as avaliações escolares. Mas quando passávamos para outro assunto, e por ventura precisássemos retomar com alguns conceitos trigonométricos para fluir a aula, os alunos já tinham esquecidos das aulas, ou não se sentiam confiantes em responder, sendo que em pouco tempo atrás eles haviam estudado o assunto. Ou seja, eu percebia que eles não tinham aprendido de fato o assunto, apenas gravado os conceitos para uma avaliação, logo, eles precisavam de uma metodologia diferenciada para que realmente pudessem aprender o conteúdo.

Especificamente sobre as equações trigonométricas, ministrar aulas desse conteúdo de forma tradicional, torna-se em muitos casos, cansativo para o aluno, principalmente para os que estão no 2° ano do Ensino Médio, porém apresentam lacunas de conteúdos de séries anteriores, pois é necessário que o aluno compreenda as base e técnicas matemáticas. Para corroborar com as minhas análises sobre o tema, foi encaminhado um formulário via Google Forms para professores de matemática do Ensino Médio e alunos egressos e os dados apontaram que os participantes aceitariam utilizar e participar de uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas.

Então, mediante todos esses indicativos, apliquei uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas utilizando o construto das UARC para organizar as atividades de forma que pudesse ser priorizado o ambiente pré-formal, buscar as verdades dos alunos de acordo com as percepções empírico-intuitivas estabelecidas através das intervenções, proporcionaram interações mais dinâmicas e propícias para a formalização dos conceitos abordados nas atividades.

A organização das atividades presentes na sequência didática desse trabalho seguiu a lógica de construção dos conceitos importantes que o aluno precisaria ter consolidado para possuir condições de resolver uma equação trigonométrica fundamental e alguns tipos de equações trigonométricas clássicas. Na primeira UARC, o objetivo era definir as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no círculo trigonométrico e esse objetivo foi alcançado com o auxílio dos materiais manipuláveis (concreto e virtual), os alunos puderam enxergar que quando o ponto P, parte da origem do círculo trigonométrico e percorre os quadrantes, a sua imagem nos eixos gera os valores das razões, além de perceberem os sinais das razões em cada quadrante.

Na segunda UARC, o objetivo da atividade foi reduzir arcos ao primeiro quadrante. O intuito nessa dinâmica era fazer com que o aluno percebesse que um arco no segundo, terceiro e quarto quadrante, ou seja, maior que 90º, possui um arco correspondente no primeiro quadrante, respeitando os sinais de cada razão em cada quadrante. As técnicas de simetria e a redução por expressões algébricas, foram dominadas pelos alunos, que se mostraram solícitos no dia da experimentação e apresentaram bons resultados nas intervenções da UARC.

O objetivo da terceira UARC foi definir arcos côngruos, bem como encontrar a 1ª determinação positiva de um arco. Nessa atividade, a ideia era mostrar para os alunos que para cada arco maior que 360°, existe um arco correspondente a ele no 1º quadrante, além de mostrar que existirão infinitos arcos de uma mesma família, ou seja, arcos com os mesmos valores trigonométricos e que podem ser diferenciados pelo número de voltas do ponto que produz os arcos no círculo trigonométrico. A experimentação dessa atividade foi bem dinâmica, produtiva, os alunos utilizaram as ferramentas auxiliares e os indícios de aprendizagem apontaram resultados positivos.

Após finalizar as três atividades, os alunos já estavam com a maturidade conceitual necessária para realizar a quarta e última UARC da experimentação. Nessa atividade, o objetivo foi resolver equações trigonométricas fundamentais e clássicas.

Sobre as intervenções das equações fundamentais, os alunos não apresentaram tanto trabalho para conseguir compreender e resolver, pois estavam com o entendimento das atividades anteriores, sendo necessário apenas mediar a forma correta de representar a solução das equações. Conforme Cabral (2017) em geral, essas intervenções orais tendem a ser mais intensas no início das atividades e posteriormente tendem a diminuir ao longo do processo. Isso ocorre porque à medida que os aprendizes vão compreendendo as articulações conceituais e algorítmicas se tornam mais independentes e, com isso, o professor que monitora o processo ameniza suas intervenções orais (CABRAL, 2017, p. 49).

Com relação as equações trigonométricas clássicas, que são aquelas que requerem algum recurso matemático para serem resolvidas, através das IOMO, as técnicas de alguns tipos de equações foram mediadas e os alunos conseguiram apresentar bons resultados nas atividades.

A dinâmica proporcionada pela experimentação, as interações entre os grupos, a utilização de ferramentas auxiliares, as intervenções organizadas com sequência lógica entre os assuntos, foram estratégias traçadas para dinamizar as aulas e, consequentemente, aumentar as perspectivas de aprendizagem. Além de todos os indícios de aprendizagem apresentados nessa pesquisa, um outro fator que favorece o objetivo dessa pesquisa é o fato de que a média das notas da turma experimental ter sido maior em relação a turma de controle de processo, no teste de verificação de aprendizagem. Esse indicativo reforça que a utilização de metodologias que fujam do tradicionalismo, pode gerar bons resultados.

Esse trabalho visa atingir alunos que estão iniciando os estudos sobre o assunto, preparar a base, fortalecer os conceitos prévios necessários para que possam ter condições de resolver uma equação trigonométrica fundamental. Além de ser um recurso metodológico para professores, podendo ser utilizado nas aulas, ser adaptado para realidade de cada turma, modelado de acordo com a metodologia de cada professor, além da possibilidade de ser utilizado em novas pesquisas, com o intuito de aprimorar o ensino e aprendizagem do conteúdo em foco.

Para a continuidade desse trabalho, sugiro o desenvolvimento de uma sequência didática de equações trigonométricas clássicas, com intervenções mais rebuscadas com o propósito de aprofundar os conhecimentos nessa área. As atividades podem ser separadas de acordo com a técnica de resolução de cada equação trigonométrica.

9. BIBLIOGRAFIA

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia.** 2ª ed. Vol 2; São Paulo: Leya, 2016.

BORTOLI, Gladis. **Um ollhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa.** Lajeado, 2012.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Vol. 03. Matemática. Ministério da Educação. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. MEC: Brasília, 1998.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **PCN + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ministério da Educação. SEMTEC. Brasília, 2002.

BRUMMELEN, Glen Van. **The Mathematics of the heavens and the earth:** The Early, History of Trigonometry. New Jersey: Princeton University, 2009.

BROUSSEAU, G. (1986b) , “La relation didactique : le milieu”, *Actes Je la IVème École J’été Je DiJactique Jes Mathématiques et Je l’informatique,* IREM de Paris VII, Universidad Paris VII.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Great Britain, Cornwall: Kluwer Publishers. 1997, 306p.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CASTELO BRANCO, Emerson Carlos. **A importância das deduções das fórmulas trigonométricas para a construção de uma aprendizagem significativa**/ Emerson Carlos Castelo Branco: UFMA, 2013.

CAVALCANTI, Zélia. Livros, etc...Brasília: Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação à Distância, 1996.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula** / Miguel Chaquiam. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CHAVANTE, Eduardo. **Quadrante matemática, 2º ano: ensino médio/** Eduardo Chavante, Diego Prestes – 1.ed. – São Paulo: Edições SM, 2016.

Conexões com a Matemática. Organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história.** 2 ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2006.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996,

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. Editora Ática. 1ª ed.

São Paulo, SP, 2003.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** – São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações:** Ensino Médio – 3.ed – São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: trigonometria e sistemas lineares**/ Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. – 1. ed – São Paulo: Ática, 2020.

DIAS, Maria de Fátima Castilho. **Uma abordagem para análise, classificação e resolução de problemas que envolvem Trigonometria. Exemplos de aplicação.** Mestrado em Matemática para o Ensino. Universidade de Évora, Portugal, 2010.

FLOOD, R. & WILSON, R. **A História dos Grandes Matemáticos:** As descobertas e a propagação das vidas dos grandes matemáticos, M. Books, São Paulo, 2013.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem Microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar, 3: Trigonometria.** – 9. ed. – São Paulo: Atual, 2013.

KATZ, Victor J. **História da Matemática.** Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LIBÂNEO, José Carlos. **Organização e gestão da escola.** Goiânia, GO: Alternativa, 2002.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

MARINHO, E. R. M. **A história da matemática como motivação para a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo**. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

MENDES, I. A. **Atividades históricas para o ensino da Trigonometria.** In: MIGUEL, A. et al. **Histórias da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

Mendes, Iran Abreu; Chaquiam, Miguel História nas aulas de Matemática: **fundamentos e sugestões didáticas para professores** / Iran Abreu Mendes; Miguel Chaquiam. Belém: SBHMat, 2016.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. O desafio do conhecimento. 11 ed. São Paulo: Hucitec, 2008

MORTIMER, E. F. e SCOTT, P**. Atividades discursivas nas salas de aulas de ciências: uma ferramenta sócio-cultural para analisar e planejar o ensino**. Revista Investigação no Ensino de Ciências, v.7, n.3, 2003.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** Viçosa – MG, 2013.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Ed. Vozes, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva 2.** 1 ed. São Paulo – SP: Moderna, 2009.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: LORENZATO, Sérgio Apparecido (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009.

PINHEIRO, Luizalba Santos e Souza. **A heurística de Pólya e a resolução de**

problemas de trigonometria / Luizalba Santos e Souza Pinheiro. – Boa Vista, 2017.

SANTOS, R.M.B. **Tics uma tendência no ensino da matemática**, 2011.

SILVA, R. M. L. **Jogos pedagógicos na aprendizagem de trigonometria do ensino médio**. 2018. 92p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2018.

SILVA, Wellington da. **O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio**/ Wellington da Silva- Rio Claro: [s.n.], 2013.

SOUSA, Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de. **Software Geogebra no Ensino da Trigonometria: proposta metodológica e revisão da literatura das produções de discentes nas dissertações do PROFMAT/** Francisco Deilson Rodrigues de Sousa, 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. **#Contato matemática, 2º ano**/ Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

TOZATTO, FRANCINE D. S. **Trigonometria no ensino médio e suas aplicações**. 2018. 97p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

WERTSCH, J.V. *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1985.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXO

UARC 1

Título: Razões trigonométricas na circunferência.

Objetivo: Definir as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no círculo trigonométrico, bem como os sinais dessas razões e comportamentos (crescente ou decrescente) nos quadrantes com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): As intervenções orais entre os participantes e o professor poderão ocorrer em todas as etapas da atividade.

Intervenção Inicial (I_i): O que seria seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico?

Intervenção Reflexiva (I_r): Os valores das razões trigonométricas são infinitos ou não? Podem ser maiores que 1?

Intervenção Reflexiva (I_r): As razões trigonométricas podem ter valores negativos?

Intervenção Exploratória (I_e): Os valores de seno, cosseno e tangente aumentam ou diminuem quando o arco percorre o círculo trigonométrico no sentido positivo? Faça uma análise de cada razão em cada quadrante.

Intervenção Exploratória (I_e): Existe algum ponto do círculo trigonométrico que as razões trigonométricas não são definidas?

Intervenção Formalizante (I_f):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r): Existem arcos diferentes que possuem o mesmo valor numérico? Existem arcos com valores simétricos? Cite exemplos.

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):

Encontre os valores das razões trigonométricas utilizando o material concreto e ou o material virtual.

sen 0 =	tg 90° =	sen 270º =
cos 0 =	$sen\,\frac{4\pi}{9} =$	$sen\left(\frac{4\pi}{5}\right) =$
tg 0 =	cos 160º =	$\cos(-270) =$
$sen\,\frac{\pi}{2} =$	$tg\,\frac{3\pi}{4} =$	tg 305º =
$\cos\pi =$	sen 220º =	cos 360º =
sen (– 70º) =	$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) =$	tg 255º=

UARC 2

Título: Redução ao 1º quadrante.

Objetivo: Reduzir arcos ao 1º quadrante, com a técnica de simetria e formalização do método algébrico, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): As intervenções orais entre os participantes e o professor poderão ocorrer em todas as etapas da atividade.

Intervenção Inicial ($\boldsymbol{I_i}$): O que seria reduzir um arco ao primeiro quadrante?

Intervenção Reflexiva ($\boldsymbol{I_r}$) : Com o auxílio do círculo trigonométrico no material concreto ou virtual, encontre os sinais das razões seno, cosseno e tangente nos quadrantes.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Busque encontrar os arcos que possuem o mesmo valor numérico, em módulo, de $sen\frac{\pi}{6}$. Utilize o círculo trigonométrico concreto e trace os pontos simétricos em cada quadrante

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Encontre as expressões algébricas que fazem a redução dos arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes ao 1º quadrante. Sugestão: Atribua valores para os arcos, utilize a simetria para auxiliar, perceba regularidades e em seguida generalize as expressões.

Intervenção Formalizante ($\boldsymbol{I_f}$):

Intervenção Avaliativa Restritiva ($\boldsymbol{IA_r}$): Encontre o ângulo α e o seu valor numérico, com o auxílio das ferramentas virtuais, tal que $0^\circ \leq \alpha < 360^\text{o}$, $sen\alpha = -sen230^\circ$ e $\cos\alpha = \cos 230^\circ$.

Intervenção Avaliativa Aplicada ($\boldsymbol{IAa}$):

1) Encontre os valores das razões trigonométricas, utilizando a simetria ou através das expressões de redução.

a) $sen\frac{5\pi}{6} =$

b) cos 135º =

c) $tg\frac{5\pi}{4} =$

d) $sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$

e) $tg(-150^\text{o}) =$

UARC 3

Título: Arcos côngruos

Objetivo: Definir arcos côngruos com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): As intervenções orais entre os participantes e o professor poderão ocorrer em todas as etapas da atividade.

Intervenção Inicial (I_i): O que seriam arcos côngruos?

Intervenção Reflexiva (I_r): o que os arcos 45º, 405º, 765º e 1125º possuem em comum? Utilize o material manipulável para auxiliar na análise.

Intervenção Exploratória (I_e): Busque generalizar uma expressão que represente a família de arcos côngruos a 60°.

Intervenção Exploratória (I_e): Seja o ponto P, o final do arco 2550º. Como seria possível encontrar o seno, o cosseno e a tangente desse arco? Qual seria o primeiro arco da família de arcos côngruos do 2550°? Quantas voltas o ponto P deu no círculo trigonométrico para gerar esse arco?

Intervenção Formalizante (I_f):

Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r):

Encontre a 1ª determinação positiva do arco $\frac{33\pi}{4}$

Sugestão: transformar o arco que está em radiano para grau, ou articular a fração para aparecer um múltiplo de 2π.

Intervenção Avaliativa Aplicada (IAa):

Encontre a 1ª determinação positiva dos arcos e em seguida calcule o valor das razões trigonométricas abaixo. Utilize o material manipulável virtual como ferramenta auxiliar.

a) tg 1130°=

b) $\cos\frac{45\pi}{4} =$

c) sen 5570º =

d) $tg(-945^{o}) =$

UARC 4

Título: Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas.

Objetivo: Resolver Equações Trigonométricas Fundamentais e Clássicas, utilizando o conhecimento adquirido nas atividades anteriores, com o auxílio de material manipulável concreto e virtual.

Material: Círculo trigonométrico no material concreto (produção de cada equipe), círculo trigonométrico nos softwares (Desmos ou Geogebra) que serão utilizados nos smatphones dos alunos, tablets ou notebooks. Esses materiais darão o suporte para as intervenções.

Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO): As intervenções orais entre os participantes e o professor poderão ocorrer em todas as etapas da atividade.

Intervenção Inicial ($\boldsymbol{I_i}$): O que é uma equação matemática?

Intervenção Reflexiva ($\boldsymbol{I_r}$): Como você reconheceria uma equação trigonométrica?

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $senx = \frac{1}{2}$, além da solução $x = \frac{\pi}{6}$ ou x = 30º. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $\cos x = \frac{1}{2}$, além solução $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 60^\circ$. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Exploratória ($\boldsymbol{I_e}$): Para a equação $tgx = 1$, além da solução $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = 45°$. Existem outras possíveis soluções? Caso possua, cite exemplos. Busque uma maneira de generalizar a solução dessa equação.

Intervenção Formalizante ($\boldsymbol{I_f}$):

Intervenção Avaliativa Restritiva ($\boldsymbol{IA_r}$):

Encontrar a solução geral de:

$$\cos x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$$

Sugestão: Dividir a relação fundamental da trigonometria por $\cos^2 x$.

Intervenção Avaliativa Restritiva ($\boldsymbol{IA_r}$):

A soma das raízes da equação $\cos x + sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$, com $0 \leq x < 4\pi$.

Intervenção Avaliativa Aplicada ($\boldsymbol{IAa}$):

1) Encontre a solução geral das seguintes Equações Trigonométricas e represente no círculo trigonométrico. Utilize o material manipulável passa auxiliar nas resoluções.

a) $\operatorname{cossec} x = \sqrt{2}$

b) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $3.tg^2 x = 1$

TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Busque encontrar as soluções das seguintes equações trigonométricas.

a) $sen\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $Tg\ \mathrm{x} = 1$.

c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$.

d) $senx = \cos\dfrac{\pi}{3}$

e) $2.senx.\cos x - \cos x = 0$ $x \in [0, 2\pi]$

f) $2.sen^2x + senx - 1 = 0$ $x \in [0, 2\pi]$

g) $2.sen^2x + \cos x = 1$ $x \in [0, 2\pi]$

f) $tgx = tg\,\dfrac{7\pi}{5}$ $x \in [0, 2\pi]$

UEPA
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66050-540
Belém (PA)