UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCIANA DA FONSECA CRUZ

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ENVOLVENDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI E GIBONACCI

CURITIBA

2024

LUCIANA DA FONSECA CRUZ

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ENVOLVENDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI E GIBONACCI

A proporsal of activities involving the Fibonacci and Gibonacci sequences

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/32965>.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientadora: Profa. Dra. Mari Sano
Coorientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani

CURITIBA

2024

# RESUMO

A sequência de Fibonacci é uma das mais belas e perfeitas sequências existentes na Matemática. Considerando este fato buscamos apresentar neste recurso educacional atividades que permeiam o estudo referente às sequências de Fibonacci e Gibonacci incluindo as suas ocorrências. Estas atividades podem ser aplicadas na Educação Básica onde procuramos enfatizar uma abordagem diferenciada utilizando jogos matemáticos, resolução de problemas e tecnologia da informação utilizando o *software* GeoGebra.

Palavras-chave: Fibonacci; Gibonacci; quebra-cabeça; resolução de problemas; sequências.

ABSTRACT

The Fibonacci sequence is one of the most beautiful and perfect sequences in Mathematics. Considering this fact, we seek to present in this educational resource activities that permeate the study related to Fibonacci and Gibonacci sequences including their occurrences. These activities can be applied in elementary school where we seek to emphasize a differentiated approach using mathematical games, problem solving and information technology using GeoGebra software.

Keywords: Fibonacci; Gibonacci; puzzle; problem solving; sequences.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 ATIVIDADES DIDÁTICAS ENVOLVENDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, GIBONACCI E SUAS OCORRÊNCIAS

Nesta capítulo apresentamos atividades nas quais podemos visualizar as aplicações envolvendo as sequências de Fibonacci, Gibonacci e suas ocorrências.

1.1 ATIVIDADE 1 - QUEBRA-CABEÇA

Este quebra- cabeça foi proposto por Edmark (2014), é gratuito e o link para acesso está disposto nas referências do referido trabalho. Em um quebra-cabeça usual as peças possuem aproximadamente o mesmo tamanho e formatos diferentes, neste quebra-cabeça no entanto, as peças tem o mesmo formato e tamanhos diferentes, conforme podemos visualizar pela Figura 1.1.

Figura 1.1 – Peças em ordem decrescente

Fonte: Autora.

A colocação das peças é baseada no ângulo dourado ($\approx 137,5°$). O quebra-cabeça tem 8 espirais em uma direção e 13 na outra, sabemos que estes números são, respectivamente, F_6 e F_7 na sequência de Fibonacci.

Conteúdo: Sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Abstrair o conceito da sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

1) Possibilitar aos educandos a compreensão da sequência de Fibonacci de forma lúdica;

2) Desenvolver o raciocínio lógico;

3) Estimular concentração e cooperação.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, onde já foi trabalhado o conceito de sequências.

Material didático: Quebra-cabeça.

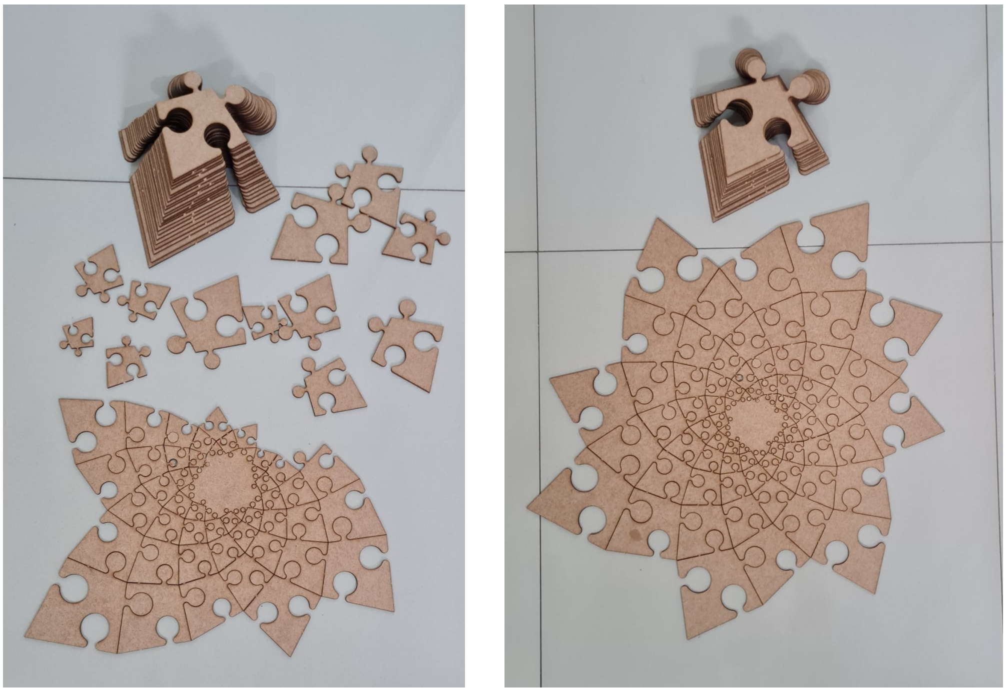
Metodologia: O encaminhamento da aula se dará de forma expositiva e dialogada. Onde será apresentado o quebra-cabeça confeccionado em MDF e será aguardada a interação dos alunos com o jogo. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci, tendo como base o conceito de sequências numéricas.

No desenvolvimento desta aula, o professor poderá dividir a sala de aula em grupo de dois ou três alunos e cada grupo receberá um quebra-cabeça. Por meio das Figuras 1.2 e 1.3 visualizamos o processo de resolução e na Figura 1.4 temos o quebra-cabeça completo.

Figura 1.2 – Montagem inicial

Fonte: Autora.

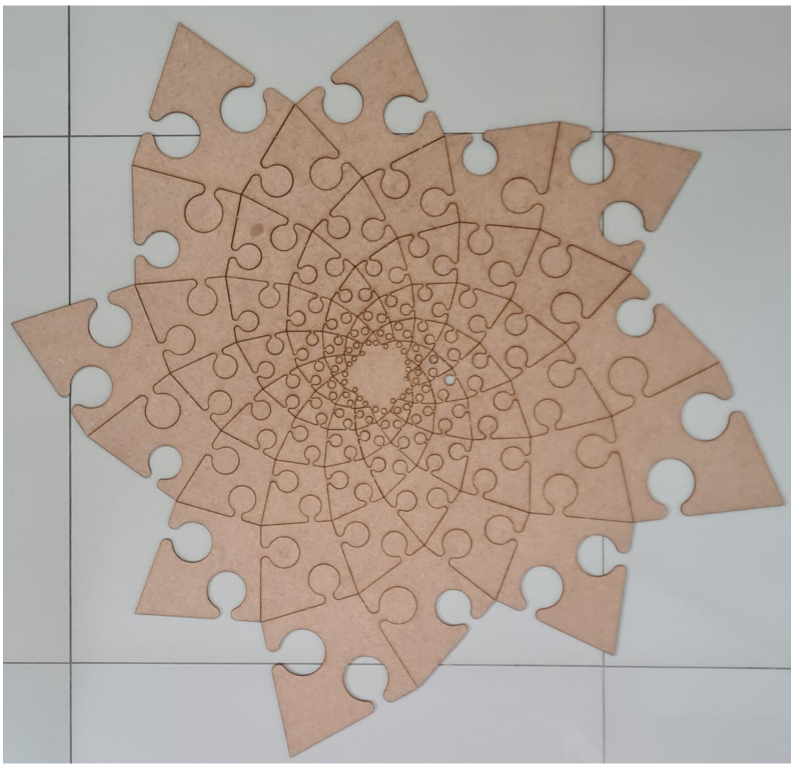
Figura 1.3 – Quebra-cabeça: (a) Processo de montagem; (b) Processo de montagem final



(a) (b)

Fonte: Autora.

Figura 1.4 – Quebra-cabeça completo



Fonte: Autora.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos com o jogo.

1.2 ATIVIDADE 2 - DESVENDANDO SEQUÊNCIAS

Para a elaboração desta atividade nos baseamos em uma situação obordada por Benjamin e Quinn (2004).

Conteúdos: Sequência de Fibonacci e Gibonacci.

Objetivo Geral: Reconhecer a sequência de Fibonacci e sua relação com a sequência de Gibonacci.

Objetivos Específicos:

1) Possibilitar que os alunos tenham contato com atividades envolvendo a investigação matemática e a resolução de problemas;
2) Desenvolver a capacidade de compreensão a cerca das sequências de Fibonacci e Gibonacci;
3) Fazer com que os alunos aprimorem a sua concentração.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, nas quais já foram trabalhados os conceitos de números primos, sequência de Fibonacci e os números de Gibonacci. Salientamos que a aula não contempla toda a sequência de aulas envolvendo os conteúdos de sequências numéricas.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários quadro, lápis e/ou caneta e uma folha contendo alguns direcionamentos e questionamentos pertinentes à atividade (Apêndice A).

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da investigação matemática e resolução de problemas. Espera-se contar com a participação dos alunos para a explanação dos conteúdos. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci e Gibonacci, tendo como base o conceito de sequências.

A seguir, apresentamos uma possibilidade de condução da aula por parte do professor.

Em um primeiro momento, peça para que os alunos pensem em dois números naturais e coloque-os nas duas primeiras linhas do Quadro 1.1. Por exemplo, os números 7 e 8. Oriente os alunos para que preencham o Quadro 1.1 da seguinte forma: a terceira linha é composta pela soma dos números colocados na primeira e segunda linha; a quarta linha é composta pela soma dos números colocados na segunda e na terceira linhas, a quinta linha é composta pela soma dos números da terceira e quarta linhas. E, assim por diante, até a décima linha.

Quadro 1.1 – Desvendando sequências - I

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	7
2	8
3	15
4	23
5	38
6	61
7	99
8	160
9	259
10	419

Fonte: Autora.

Em seguida, peça para responder as seguintes questões:

a) Registre a soma dos 10 primeiros números.

A resposta esperada para o item a) é:

$$7 + 8 + 15 + 23 + 38 + 61 + 99 + 160 + 259 + 419 = 1089$$

b) Decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

A resposta desejada para o item b) é:

$$1089 = 3^2 \cdot 11^2$$

c) Em seguida, repita todo o processo descrito anteriormente. Ou seja, escolha outros dois números naturais e, preencha o Quadro 1.2. Efetue a soma dos 10 primeiros números e, decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

Neste caso escolhemos, por exemplo, os números 4 e 9 para repetirmos este processo.

Quadro 1.2 – Desvendando sequências II

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	4
2	9
3	13
4	22
5	35
6	57
7	92
8	149
9	241
10	390

Fonte: Autora.

A soma dos números fica determinada por:

$$4 + 9 + 13 + 22 + 35 + 57 + 92 + 149 + 241 + 390 = 1012.$$

Decompondo o número 1012 em fatores primos, temos: $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$.

d) Qual o número que aparece em ambas as decomposições em fatores primos dos números obtidos nos itens b) e c)?

Considerando os itens b) e c) podemos notar que este número é 11.

e) O número que é comum na decomposição em fatores primos dos itens b) e c), pode ser multiplicado por um dos elementos presentes na sequência. De modo que, o resultado obtido por meio desta multiplicação é o mesmo da soma. Qual a posição deste número, em cada um dos casos?

Logo após algumas tentativas, conseguimos identificar que a posição correspondente é a sétima. No primeiro caso, se multiplicarmos o número 11 por 99 obtemos 1089. E, no segundo caso, se multiplicarmos 92 por 11 temos 1012, que é o resultado da segunda soma indicada.

f) Agora, vamos fazer o mesmo processo substituindo por letras os valores iniciais (por exemplo, as letras x e y). Dessa forma, vamos preencher o Quadro 1.3.

Quadro 1.3 – Desvendando sequências III

ETAPA	**SEQUÊNCIA**
1	x
2	y
3	$x + y$
4	$2x + y$
5	$3x + 2y$
6	$5x + 3y$
7	$8x + 5y$
8	$13x + 8y$
9	$21x + 13y$
10	$34x + 21y$

Fonte: Autora.

g) Efetue a soma dos 10 elementos obtidos em cada umas das etapas do item f). Logo após, reescreva o resultado colocando em evidência o termo comum aos dois coeficientes (x e y). O que podemos inferir?

Resposta: A soma é dada por $88x + 55y$, colocando em evidência segue que: $11(5x + 8y)$. Conforme podemos observar o termo em evidência é 11, o qual multiplicado por $5x + 8y$, que é o sétimo termo da sequência que resulta na soma indicada.

Este resultado é um caso particular (para $n = 3$) da identidade $\sum_{i=1}^{4n-2} G_i = L_{2n-1}G_{2n+1}$.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos. Dessa forma, o professor verificará se há necessidade de complementar mais o assunto.

1.3 ATIVIDADE 3 - PARADOXO DE CASSINI

Nesta atividade fazemos uma abordagem com relação ao Paradoxo de Cassini, o qual foi abordado por Koshy (2017). Neste contexto, nos propomos a realizar um encaminhamento que busque trabalhar com o *software* Geogebra estabelecendo um paralelo com a resolução de problemas como metodologia em sala de aula.

Conteúdo: Paradoxo de Cassini

Objetivo Geral: Reconhecer a diferença entre as áreas presentes no paradoxo de Cassini.

Objetivos Específicos:

1) Possibilitar aos alunos o trabalho com o software Geogebra;

2) Compreender a relação entre as áreas presentes no paradoxo de Cassini.

Contexto didático: Essa atividade foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, nas quais já foi trabalhado o conceito da sequência de Fibonacci.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários um computador contendo a atividade no *software* Geogebra e o caderno para que sejam registradas as informações, cálculos e conclusões.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da utilização do *software* Geogebra. Espera-se contar com a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula. Nesta atividade, será explorado o conceito do Paradoxo de Cassini, tendo como base o conceito de sequências.

No decorrer, propomos uma direção para desenvolver a aula. Primeiramente, os alunos deverão clicar no link em que a atividade é disponibilizada. O link da referida atividade é dado por

<https://www.geogebra.org/m/zeyacx9k>.

Por meio da Figura 1.5, constatamos a existência de um quadrado que tem como medida do lado um número da sequência de Fibonacci (F_n). Este quadrado foi decomposto em quatro peças: dois triângulos retângulos congruentes e dois trapézios retângulos congruentes. A tarefa é:

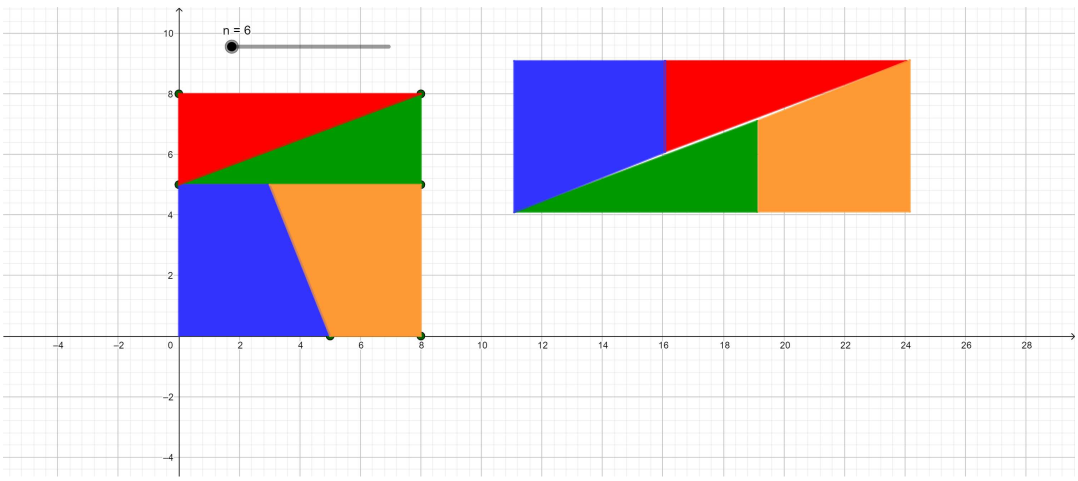
Figura 1.5 – Atividade: Paradoxo de Cassini

Fonte: Autora.

a) Primeiramente, selecione no controle deslizante um número par. Logo após, movimente os triângulos e trapézios, de modo a formar um retângulo.

A Figura 1.6 ilustra um caso possível com $n = 6$.

Figura 1.6 – Atividade: Paradoxo de Cassini onde $n = 6$



Fonte: Autora.

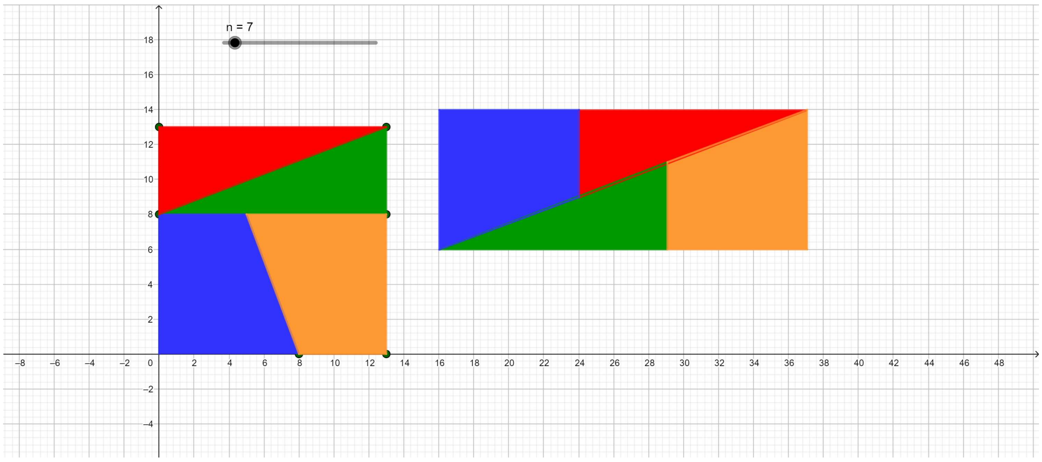
b) Calcule o valor da área do quadrado e do retângulo obtido obedecendo a restrição de que n é um número par.

Se $n = 6$, temos que o lado do quadrado é dado por $F_6 = 8$, a largura do retângulo é $F_5 = 5$ e o comprimento é $F_7 = 13$. Dessa forma, a área do quadrado será igual a 64 e a área do retângulo 65.

c) Agora, selecione no controle deslizante um número ímpar. Novamente, movimente os triângulos e trapézios, de modo a formar um retângulo.

Na Figura 1.7 temos a representação para o caso em que $n = 7$.

Figura 1.7 – Atividade: Paradoxo de Cassini em que $n = 7$



Fonte: Autora.

d) Calcule o valor da área do quadrado e do retângulo obtido na condição em que n é ímpar.

Considerando $n = 7$, por exemplo, o lado do quadrado é dado por $F_7 = 13$, a largura do retângulo é $F_6 = 8$ e o comprimento é $F_8 = 21$. A área do quadrado será igual a 169 e a área do retângulo 168.

Neste momento, os alunos serão convidados a perceber que nos dois casos as áreas do quadrado e do retângulo não são iguais. Constatando ainda, que quando o valor de n é par temos o acréscimo de uma unidade na área do retângulo em relação à área do quadrado. E, quando o valor de n é ímpar a área do retângulo tem uma unidade a menos comparado-se com a área do quadrado.

Ao solicitar para que os alunos ampliem os retângulos em cada um dos casos de modo a investigar o que está ocorrendo, os mesmos podem chegar as seguintes conclusões:

i) Quando n é um número par observa-se a existência de um paralelogramo no retângulo.

ii) Quando n é um número ímpar ocorre uma sobreposição de áreas no retângulo.

Este fato é conhecido como o Paradoxo de Cassini. Para entendê-lo, o Quadro 1.4 deve ser preenchido. Nele são apresentados os valores de n e as áreas correspondentes dos quadrados e retângulos.

Quadro 1.4 – Trigêmeos de Fibonacci e relação entre as áreas

	Trigêmeos de Fibonacci				
n	F_{n-1}	F_n	F_{n+1}	Área do quadrado	Área do retângulo
4	2	3	5	9	10
5	3	5	8	25	24
6	5	8	13	64	65
7	8	13	21	169	168
8	13	21	34	441	442
9	21	34	55	1156	1155
10	34	55	89	3025	3026
11	55	89	144	7921	7920
12	89	144	233	20736	20737

Fonte: Autora.

Em seguida, os alunos serão indagados sobre qual seria a generalização relacionando F_{n+1}, F_n e F_{n-1} e o valor obtido para a área de cada uma das situações. Neste instante, os educandos serão levados a concluir que com $n \geq 1$, temos que $F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n-1}$. A qual é a relação do Paradoxo de Cassini.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em conta a interação dos alunos. Dessa forma, o professor verificará se há necessidade de complementar mais o assunto.

1.4 ATIVIDADE 4 - DOMINÓS

Nesta atividade utilizamos uma situação problema envolvendo dominós baseado no exercício de Morgado e Carvalho (2015).

Conteúdo: Sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Identificar e formular a ocorrência da sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

1) Proporcionar aos educandos a compreensão da sequência de Fibonacci com a abstração do conceito por meio da resolução de um problema;

2) Desenvolver o raciocínio lógico.

Contexto didático: Essa aula foi planejada e pode ser utilizada na introdução do conceito de sequências numéricas (especificamente, no estudo da sequência de Fibonacci) nas aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Material didático: No desenvolvimento desta aula serão necessárias cinco peças de dominó para cada dupla, quadro, lápis e/ou caneta, uma folha (Apêndice B).

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da resolução de problemas. Aguardamos a interação dos alunos na explanação dos conteúdos. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci, tendo como base o conceito de sequências.

Em seguida, apresentamos uma forma de direcionamento da aula por parte do professor.

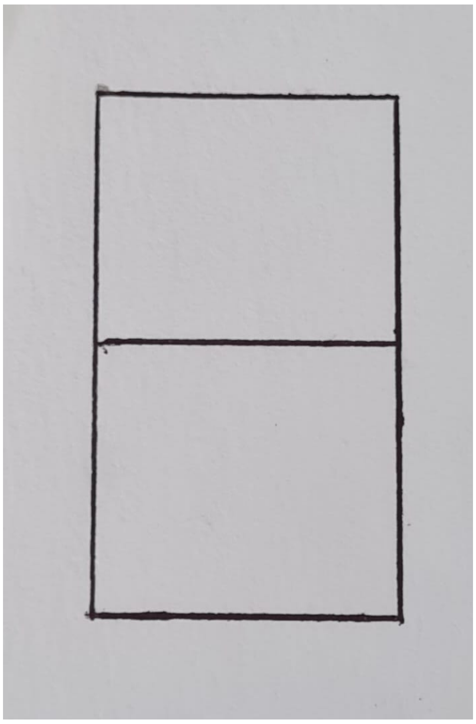
Em um primeiro instante, o professor inicia sua aula propondo o Problema 1.1 à turma:

Problema 1.1. *De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro* $2 \times n$ *com* n *com dominós* 2×1 *iguais?"*

Como a resposta para esta pergunta não se mostra de maneira clara, vemos que se torna necessário um estudo de casos. Ou seja, vamos analisar algumas etapas para então verificarmos se há uma possível generalização e, consequentemente, a resposta para esta pergunta.

a) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×1 com um dominó 2×1?

Figura 1.8 – Tabuleiro 2×1



Fonte: Autora.

A Figura 1.8 mostra o tabuleiro 2×1 a ser preenchido. Conforme podemos perceber só há uma forma de cobrir o tabuleiro e esta é obtida colocando o dominó na posição vertical. Pois, se colocarmos a peça na posição horizontal ficará um espaço que não será preenchido o que não pode ocorrer, já que a malha deve ser preenchida inteiramente. A Figura 1.9 expressa as duas situações descritas.

Figura 1.9 – Dominó: (a) Peça na posição vertical; (b) Peça na posição horizontal

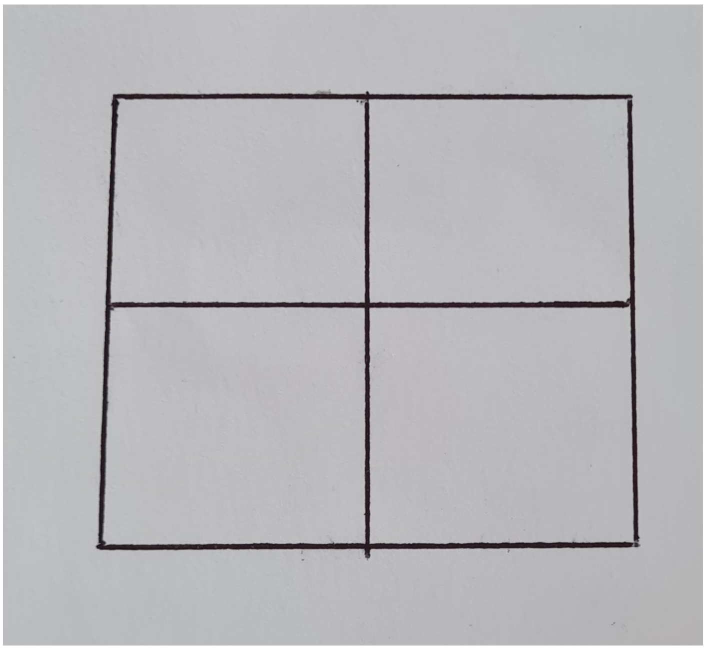
(a)

(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

b) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×2 com dois dominós 2×1?

Figura 1.10 – Tabuleiro 2×2



Fonte: Autora.

Por meio da Figura 1.10 visualizamos o tabuleiro 2×2. E na Figura 1.11 observamos as duas maneiras de preencher o tabuleiro: a primeira é obtida com as duas peças na vertical e a segunda com as duas peças na horizontal.

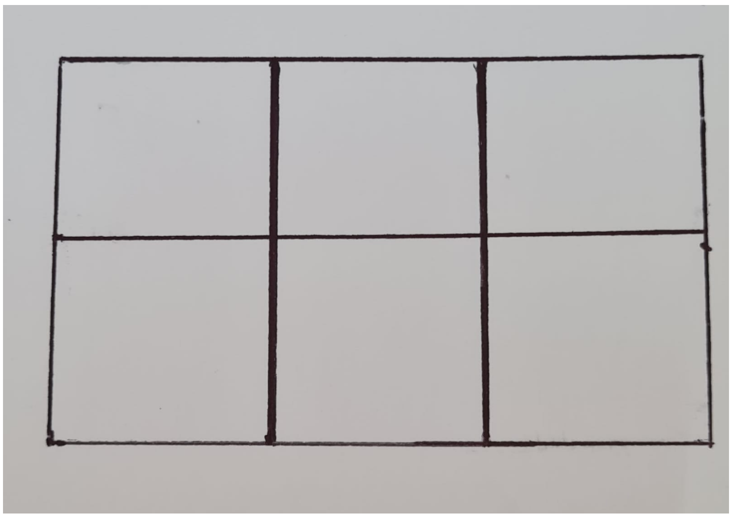
Figura 1.11 – Dominó: (a) Duas peças na posição vertical; (b) Duas peças na posição horizontal

(a) (b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

c) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×3 com três dominós 2×1?

Figura 1.12 – Tabuleiro 2×3



Fonte: Autora.

Pela Figura 1.12 observamos o tabuleiro 2×3 a ser preenchido. A primeira forma é obtida com as três peças na posição vertical. A segunda forma ocorre quando a primeira peça se encontra na vertical e as duas últimas estão na horizontal. E, a terceira duas primeiras peças na horizontal e a terceira peça na vertical. Logo, a resposta é três. Nas Figuras 1.13 e 1.14 podemos visualizar cada uma das situações indicadas anteriormente.

Figura 1.13 – Dominó: três peças na posição vertical

Fonte: Autora.

Figura 1.14 – Dominó: (a) Primeira peça na vertical e as duas últimas na posição horizontal; (b) Duas primeiras peças na horizontal e terceira peça na posição vertical

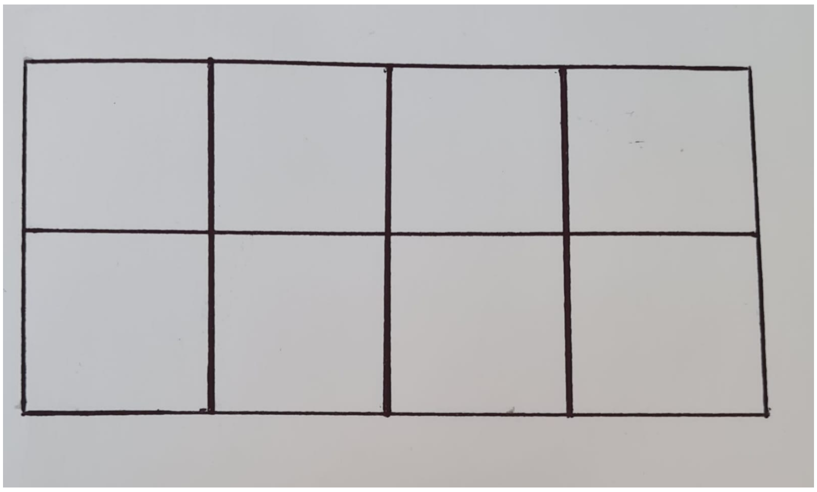
(a)

(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

d) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 2×4 com quatro dominós 2×1?

Figura 1.15 – Tabuleiro 2×4



Fonte: Autora.

A Figura 1.15 mostra o tabuleiro 2×4. Para este caso observamos as seguintes maneiras:

i) As quatro peças na vertical;
ii) As duas primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal;
iii) A primeira e quarta peças na vertical, segunda e terceira na posição horizontal;
iv) As quatro peças na horizontal;
v) As duas primeiras peças na horizontal e as duas últimas na vertical.

Portanto, são 5 formas de colocar os dominós. As Figuras 1.16, 1.17, 1.18 e 1.19 ilustram cada uma das possibilidades propostas acima.

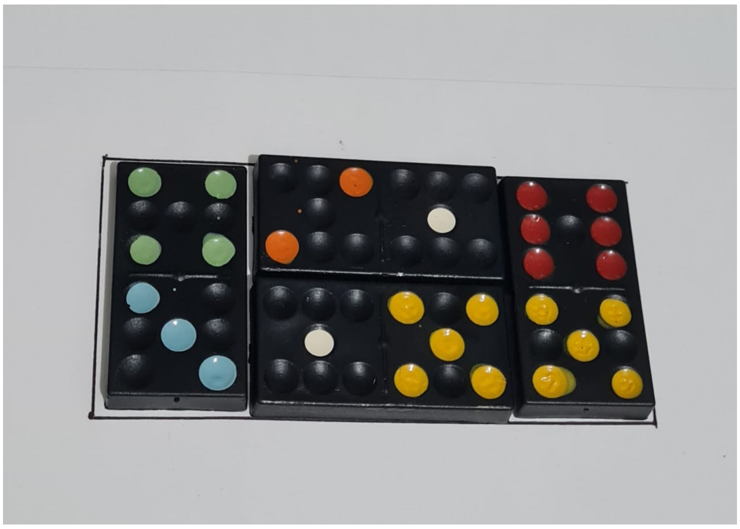
Figura 1.16 – Quatro peças na posição vertical

Fonte: Autora.

Figura 1.17 – Duas primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal

Fonte: Autora.

Figura 1.18 – Dominó: (a) A primeira e quarta peças na vertical, segunda e terceira na posição horizontal; (b) As quatro peças na horizontal



(a)

(b)

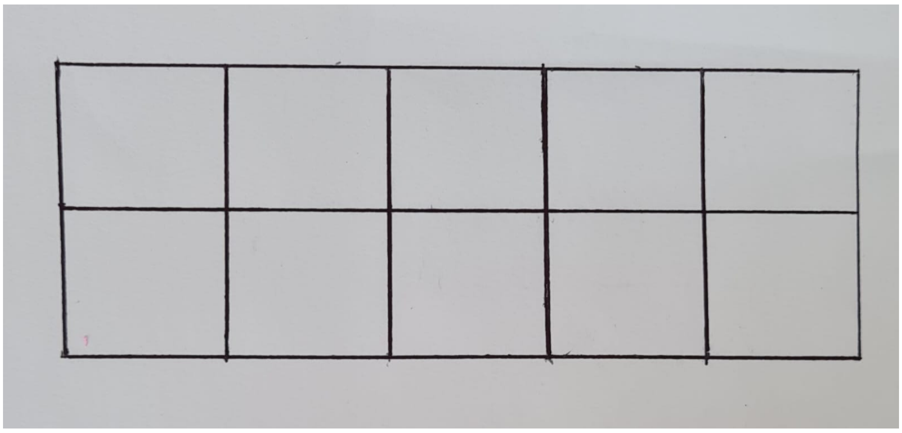
Fonte: (a) e (b) Autora.

Figura 1.19 – Dominó: duas primeiras peças na horizontal e duas últimas na vertical

Fonte: Autora.

e) De quantas formas podemos cobrir um tabuleiro 2×5 com cinco dominós 2×1?

Figura 1.20 – Tabuleiro 2×5



Fonte: Autora.

Pela Figura 1.20 notamos o tabuleiro 2×5. Depois de algumas tentativas podemos verificar que existem oito formas. Abaixo, descrevemos as possibilidades:

i) As cinco peças na vertical;

ii) A primeira peça na vertical e as quatro últimas na horizontal;

iii) As três primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal;

iv) A primeira peça na vertical, duas peças na horizontal e as duas últimas na vertical;

v) As duas primeiras peças na vertical, terceira e quarta peças na horizontal e a última peça na vertical;

vi) As quatro primeiras peças na horizontal e a quinta peça na vertical;

vii) As duas primeiras peças na hotizontal e as três últimas na vertical;

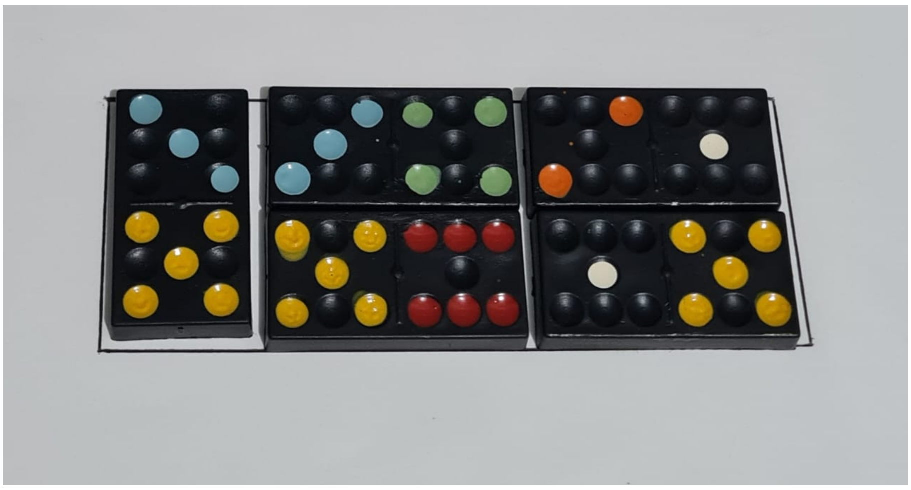
viii) As duas primeiras peças na horizontal, a terceira peça na vertical e as duas últimas peças na horizontal.

Por meio das Figuras 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26 e 1.27 dispomos a ilustração para cada uma das possibilidades elencadas anteriormente.

Figura 1.21 – Cinco peças na posição vertical

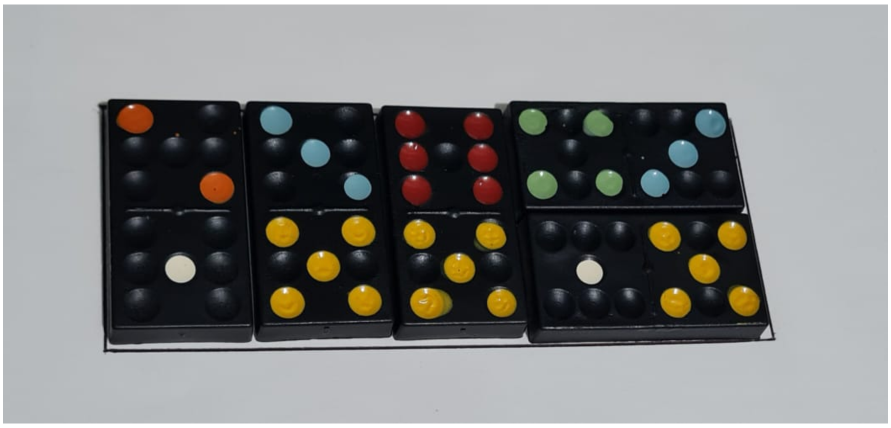
Fonte: Autora.

Figura 1.22 – A primeira peça na vertical e as quatro últimas na horizontal



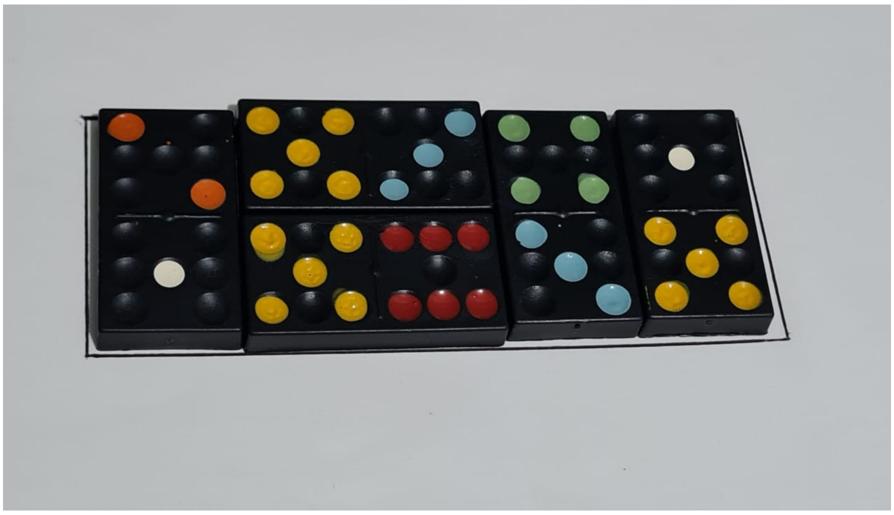
Fonte: Autora.

Figura 1.23 – As três primeiras peças na vertical e as duas últimas na horizontal



Fonte: Autora.

Figura 1.24 – A primeira peça na vertical, duas peças na horizontal e as duas últimas na vertical



Fonte: Autora.

Figura 1.25 – As duas primeiras peças na vertical, terceira e quarta peças na horizontal e quinta peça na vertical

Fonte: Autora.

Figura 1.26 – Quatro primeiras peças na posição horizontal e quinta peça na vertical

Fonte: Autora.

Figura 1.27 – Dominó: (a) As duas primeiras peças na horizontal e as três últimas peças na vertical; (b) As duas primeiras peças na horizontal, terceira na vertical e as duas últimas na horizontal

(a)

(b)

Fonte: (a) e (b) Autora.

Em seguida, o professor irá solicitar para que os alunos preencham o Quadro 1.5 onde consta a quantidade de peças na primeira coluna e na segunda coluna a quantidade de formas de preencher o tabuleiro de altura 2 e largura n.

Quadro 1.5 – Dominós

QUANTIDADE DE PEÇAS	**FORMAS DE COLOCAR OS DOMINÓS**
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8

Fonte: Autora.

f) Qual é a relação entre a quantidade de peças e o número de formas de preenchimento do tabuleiro?

   A resposta deve ser encaminhada ao fato de que a quantidade de formas de preenchimento da malha quando acrescentada uma peça é obtida por meio da soma das maneiras dadas nas duas etapas anteriores.

g) Como poderíamos responder à questão inicial? Ou seja, "De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com n dominós de altura 2×1 iguais?"

   Considere um tabuleiro de tamanho $2 \times n + 2$ colunas. Em seu preenchimento devemos tomar os seguintes casos:

   i) Colocar um dominó no canto esquerdo na posição vertical, restando um tabuleiro $2 \times n + 1$ a ser preenchido.

   ii) Ainda no lado canto esquerdo, a outra forma é obtida colocando dois dominós na horizontal restando um tabuleiro $2 \times n$.

   Dessa forma, indicando F_n, F_{n+1} e F_{n+2} como o número de formas de colocar os dominós no tabuleiro segue que a generalização desta situação é dada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

   Esta é uma sequência recursiva onde os primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 2$. A qual é exatamente a sequência de Fibonacci.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta, levando-se em consideração a interação dos alunos.

1.5 ATIVIDADE 5 - PROBABILIDADE

Para a elaboração desta atividade buscamos uma situação problema ralacionada as sequências binárias a qual foi sugerida por Boodey (2020). Na descrição da atividade optamos pela resolução de problemas como encaminhamento metodológico.

Conteúdo: Probabilidade e a sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Estabelecer uma conexão entre a sequência de Fibonacci e Probabilidade.

Objetivos Específicos:

1) Proporcionar o trabalho com a resolução de problemas;
2) Resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

Contexto didático: Essa aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do segundo ano do Ensino Médio, nas quais já foram trabalhados os conceitos da sequência de Fibonacci e Probabilidade. Salientamos que a atividade não contempla toda a sequência de aulas envolvendo os conteúdos de sequências e probabilidade.

Material didático: Para o desenvolvimento desta aula, serão necessários uma folha (Apêndice C), lápis, caneta e borracha.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará por meio da resolução de problemas. Nesta atividade, será explorado o conceito de sequência de Fibonacci e Probabilidade.

Abaixo, apresentamos uma forma de encaminhamento da aula por parte do professor. Inicialmente será feita uma breve explicação sobre o uso de números binários.

Uma palavra é um arranjo ordenado de símbolos, os quais não precisam ter um significado. Por exemplo, fgh é uma palavra que usa as letras do alfabeto. Nesse contexto, a sequência 001101 é uma palavra binária. Um bit corresponde a 0 ou 1. Onde, a palavra bit é a contração da expressão *bynary digity* (da Língua Inglesa). O comprimento de uma palavra representada na sequência binária é dada pela quantidade de símbolos nela contidos.

Dessa forma, podemos considerar que a palavra 001101 tem comprimento 6, pois em sua composição são apresentados 6 símbolos. Tendo em vista o exposto, vamos analisar o número de palavras com n $bits$ que não contêm dois $1's$ consecutivos, o qual será denotado por b_n. Para tanto, vamos responder aos itens a seguir:

a) Quando $n = 1$ qual é a quantidade de palavras em que não temos dois $1's$ consecutivos?

   A resposta é 2. Logo, $b_1 = 2$. Pois, as palavras são 0 e 1.

b) Para $n = 2$?

A resposta é 3 o que implica em $b_2 = 3$. São elas: 00, 01 e 10.

c) Para $n = 3$?

Observamos que, $b_3 = 5$. Tem-se que: 000, 001, 100, 010 e 101.

d) E com $n = 4$?

Encontramos $b_4 = 8$. São elas: 0000, 0001, 0100, 0010, 0101, 1010, 1001 e 1000.

Em seguida, os alunos serão indagados sobre qual seria o padrão a ser observado na quantidade de palavras e, se existe uma conexão entre a quantidade de palavras em cada etapa e qual seria esta conexão. Neste momento, os educandos serão direcionados ao fato de que estes são os números presentes na sequência de Fibonacci.

Posteriormente, vamos tomar uma palavra arbitrária de n $bits$, a qual denominaremos de z, onde $n \geq 2$. Observamos dois casos a serem analisados:

i) A palavra em questão z, termina em 0 o que equivale a $z = a_1a_2...a_{n-1}0$ (com n $bits$). O penúltimo dígito da palavra pode ser 0 ou 1. Temos as seguintes situações: $a_1a_2...a_{n-2}00$ ou $a_1a_2...a_{n-2}10$ ambas com n $bits$. Portanto, não há restrições com relação ao penúltimo dígito da palavra. Logo, verificamos a existência de b_{n-1} palavras de n $bits$ terminando em 0, não contendo $1's$ consecutivos.

ii) Supondo, agora que z termine em 1, o que implica em $z = a_1a_2...a_{n-1}1$ (com n $bits$). Neste caso, o penúltimo termo deve ser 0, ou seja, $a_1a_2...a_{n-2}01$ (n $bits$). Contudo, não há restrições para o antepenúltimo termo da palavra, o qual pode ser 0 ou 1. De onde temos $a_1a_2...a_{n-3}001$ ou $a_1a_2...a_{n-3}101$. O que nos mostra que existem b_{n-2} palavras de n $bits$ terminando em 1, não contendo $1's$ consecutivos.

Como os dois casos são mutuamente exclusivos, utilizando o princípio da adição, segue que:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2},$$

para $n \geq 3$, onde $b_1 = 2$ e $b_2 = 3$. Assim, $b_n = F_{n+2}$ e $n \geq 1$.

Agora, transpondo esta situação utilizando as sequências binárias, para um acontecimento com moedas.

Suponhamos que n moedas honestas sejam lançadas sequencialmente ao acaso. Com base neste fato, a probabilidade de que duas moedas adjacentes não dêem cara é $\frac{F_{n+2}}{2^n}$. Onde o número total de resultados de forma que duas moedas consecutivas não dêem cara é F_{n+2} e 2^n é o número total de lançamentos.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação direta deste, levando-se em consideração a interação dos alunos.

1.6 ATIVIDADE 6 - SUDOKU DE FIBONACCI

O Sudoku é um jogo matemático. De acordo com Neves (2005) a criação do jogo é dada ao matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783). No século *XVII Euler* elaborou um jogo denominado "Quadrados latinos", neste jogo cada algarismo deveria aparecer uma vez em cada linha e em cada coluna. O formato padrão com 9 linhas e 9 colunas, aparentemente elaborado pelo arquiteto Howard Garns, começou a ser publicado nos Estados Unidos na década de 1970. Atualmente, o mesmo pode ser encontrado em revistas próprias e até disponível como aplicativo de celular.

O jogo é constituído por um quadrado com 9 linhas e 9 colunas o qual pode ser subdividido em quadrados menores 3×3. Sendo que, certas células já contêm números, chamados de dados. Segundo Percília (2023) a finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 apenas uma vez.

Como estamos trabalhando com a sequência de Fibonacci não devem ser repetidos na mesma linha, coluna e retângulo 2×3 marcado, um mesmo número pertencente à sequência de Fibonacci, com excessão do número 1, o qual irá figurar duas vezes. Ou seja, cada célula vazia na grade deve ser preenchida com os números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8$.

Nas duas opções de Sudoku Fibonacci sugeridos por Kumar (2018) temos duas tabelas com 6 linhas e 6 colunas, onde são empregados em seu preenchimento os seis primeiros números da sequência de Fibonacci. Logo, podemos concluir que no preenchimento de uma tabela com n linhas e n colunas devem ser utilizados os n primeiros números da sequência de Fibonacci, obedecendo as mesmas regras iniciais.

Conteúdo: Raciocínio Lógico e a sequência de Fibonacci.

Objetivo Geral: Desenvolver o raciocínio lógico em paralelo com a sequência de Fibonacci.

Objetivos Específicos:

1) Aprimorar a concentração e o raciocínio lógico;

2) Formalizar com os alunos o conceito envolvido na sequência de Fibonacci.

Contexto didático: Essa atividade foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de Matemática do sétimo ano do Ensino Fundamental, onde já foi trabalhado o conceito da sequência de Fibonacci.

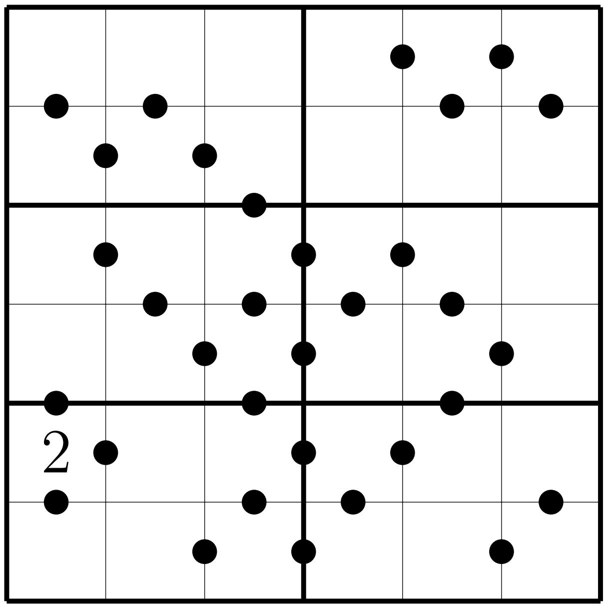
Material didático: Para o desenvolvimento desta aula serão necessárias uma folha contendo o jogo (Apêndice D), lápis e borracha.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará de maneira expositiva onde será realizada a explicação do jogo. Contamos com a participação dos alunos durante a realização desta atividade.

No decorrer, trazemos duas possibilidades de direcionamento e no Apêndice D apresentamos outro exemplo de jogo (criado pela autora) considerando os critérios para a resolução da atividade.

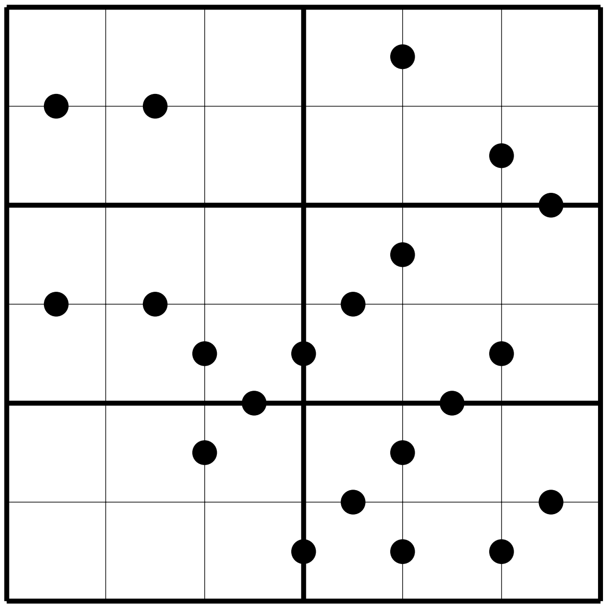
As Figuras 1.28 e 1.29 mostram duas possibilidades para o jogo, em cada uma delas podemos notar um círculo entre duas células vizinhas o que indica que estas possuem dois números consecutivos de Fibonacci.

Figura 1.28 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1



Fonte: Autora.

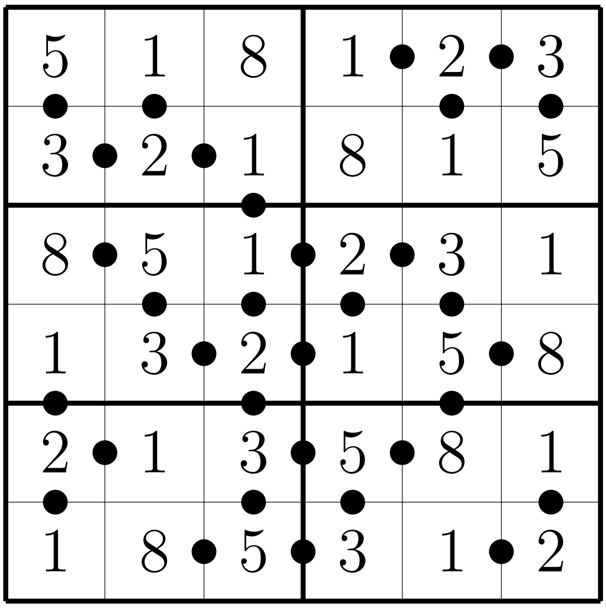
Figura 1.29 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2



Fonte: Autora.

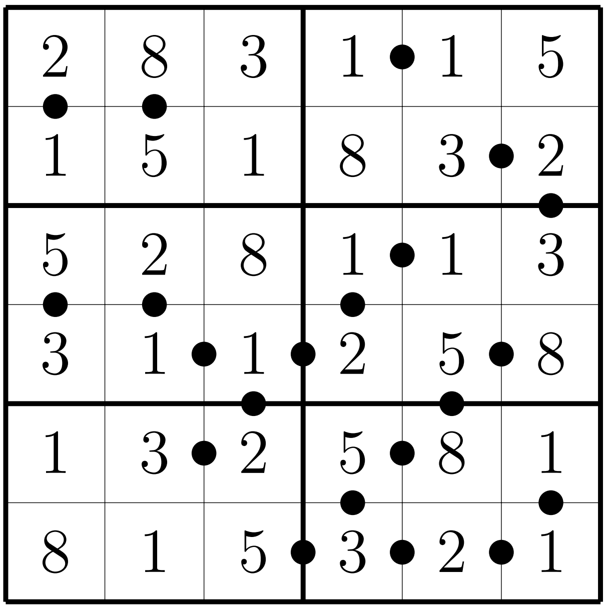
As Figuras 1.30 e 1.31 apresentam as soluções em cada caso.

Figura 1.30 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 1



Fonte: Autora.

Figura 1.31 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 2



Fonte: Autora.

De acordo com Kumar (2018) o primeiro quebra-cabeça Sudoku Fibonacci é mais fácil, pois temos o número 2 presente e ele irá auxiliar o aluno a compreender as regras do jogo. No entanto, o segundo quebra-cabeça Sudoku Fibonacci não contém nenhum dígito dado e fará com que os alunos se sintam desafiados.

Avaliação: Será realizada uma avaliação diagnóstica por parte do professor. Ela ocorrerá durante toda a aula por meio da observação da participação e da interação dos alunos.

REFERÊNCIAS

BENJAMIN A. T.; QUINN, J. J. **Proofs that really count: the magic of Fibonacci numbers and more**. The University of Utah: Departament of Mathematics, 2004. Disponível em: <http://www.math.utah.edu/~ptrapa/math-library/benjamin/benjamin-quinn-fibonacci.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023. 11

BOODEY, M. **An exploration of the use of the Fibonacci sequence in unrelated mathematics disciplines**. 50 f. Tese (Doutorado) — University of New Hampshire, Durham, Carolina do Norte, 2020. Disponível em: <https://scholars.unh.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1522&context=honors>. Acesso em: 11 fev. 2023. 29

EDMARK, J. **Fibonacci spiral jigsaw puzzle**. S.l.: Autodesk Instructables, 2014. Disponível em: <https://www.instructables.com/Fibonacci-Spiral-Jigsaw-puzzle/>. Acesso em: 25 jul. 2023. 8

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2017. v. 1. 689 p. 14

KUMAR, R. **Consecutive Fibonacci sudoku puzzles**. S.l.: Fun with puzzles, 2018. Disponível em: <https://www.funwithpuzzles.com/2018/05/consecutive-fibonacci-sudoku-puzzles.html>. Acesso em: 05 ago. 2023. 31, 34

MORGADO A. C. E CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. único. 294 p. 17

NEVES, L. **O que é sudoku?** Super Interessante, 2005. Disponível em: <https://super.abril.com.br/historia/o-que-e-sudoku>. Acesso em: 6 set. 2023. 31

PERCÍLIA, E. **Sudoku**. Brasil Escola, 2023. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/sudoku.htm>. Acesso em: 6 set. 2023. 31

APÊNDICE A - ATIVIDADE: DESVENDANDO SEQUÊNCIAS

Inicialmente, pense em dois números naturais e coloque-os nas duas primeiras linhas do Quadro .6.

Quadro .6 – Desvendando sequências IV

ETAPA	SEQUÊNCIA
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

Posteriormente, o Quadro acima deve ser preenchido da seguinte forma: a terceira linha deve ser composta pela soma dos números colocados na primeira e segunda linha; a quarta linha deve ser composta pela soma dos números colocados na segunda e na terceira linhas, a quinta linha deve ser composta pela soma dos números da terceira e quarta linhas. E, assim por diante, até a décima linha.

Em seguida, responda às questões abaixo:

a) Registre a soma dos 10 primeiros números.

b) Decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

c) Em seguida, repita todo o processo descrito anteriormente. Ou seja, escolha outros dois números naturais e, preencha o Quadro .7. Efetue a soma dos 10 primeiros números e, decomponha o resultado desta soma em fatores primos.

Quadro .7 – Desvendando sequências

ETAPA	**SEQUÊNCIA**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

d) Qual o número que aparece em ambas as decomposições em fatores primos dos números obtidos nos itens b) e c)?

e) O número que é comum na decomposição em fatores primos dos itens b) e c), pode ser multiplicado por um dos elementos presentes na sequência. Assim, o resultado obtido por meio desta multiplicação é o mesmo da soma. Qual a posição deste número, em cada um dos casos?

f) Agora, vamos fazer o mesmo processo substituindo por letras os valores iniciais (por exemplo, as letras a e b). Dessa forma, vamos preencher o Quadro .8.

Quadro .8 – Desvendando sequências

ETAPA	**SEQUÊNCIA**
1	a
2	b
3	$a+b$
4	$2a+b$
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autora

g) Efetue a soma dos 10 elementos obtidos em cada umas das etapas do item f). Logo após, reescreva o resultado colocando em evidência o termo comum aos dois coeficientes (a e b). O que podemos inferir?

APÊNDICE B - ATIVIDADE: DOMINÓS

Problema .2. *De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura* 2 *e largura* 1 *com dominós altura* 2 *e largura* 1?”

Análise dos casos:

a) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 1 com uma peça de dominó de altura 2 e largura 1?

b) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 2 com duas peças de dominó de altura 2 e largura 1?

c) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 3 com três peças de dominó de altura 2 e largura 1?

d) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 4 com quatro peças de dominó de altura 2 e largura 1?

e) E com cinco peças de dominó, de quantas formas podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura 5?

Preencha o Quadro .9 onde consta a quantidade de peças na primeira coluna e na segunda coluna a quantidade de formas de preencher a malha de altura 2 e largura n, onde n é a quantidade de peças.

Quadro .9 – Dominós

QUANTIDADE DE PEÇAS	**FORMAS DE COLOCAR O DOMINÓ**
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Autora

f) Qual é a relação entre a quantidade de peças e o número de formas de preenchimento da malha?

g) Como poderíamos responder à questão inicial? Ou seja, "De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de altura 2 e largura n com dominós altura 2 e largura 1?”

APÊNDICE C - ATIVIDADE: PROBABILIDADE

Uma palavra é um arranjo ordenado de símbolos, os quais não precisam ter um significado. Por exemplo, fgh é uma palavra que usa as letras do alfabeto. Nesse contexto, a sequência 001101 é uma palavra binária. Um bit corresponde a 0 ou 1. Onde, a palavra bit é a contração da expressão *bynary digity* (da Língua Inglesa). O comprimento de uma palavra representada na sequência binária é dada pela quantidade de símbolos nela contidos.

Dessa forma, podemos considerar que a palavra 001101 tem comprimento 6, pois em sua composição são apresentados 6 símbolos.

Analise o número de palavras com n $bits$ que não contêm dois $1's$ consecutivos, a qual será denotada por b_n.

a) Quando $n = 1$ qual é a quantidade de palavras em que não temos dois $1's$?

b) Para $n = 2$?

c) Para $n = 3$?

d) E com $n = 4$?

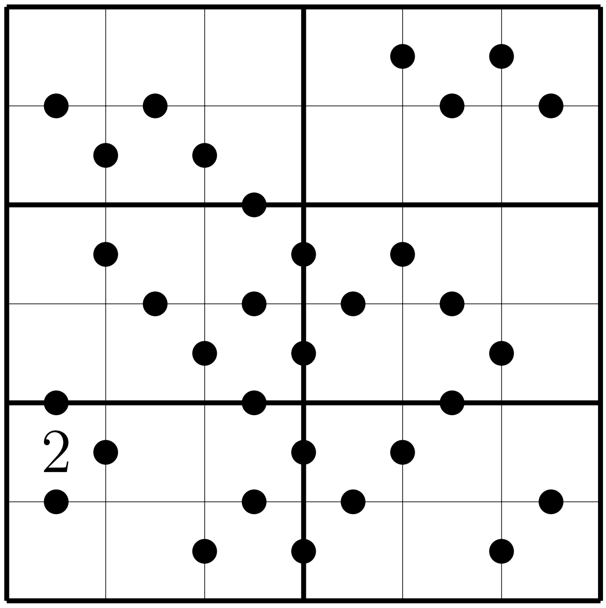
Vamos tomar uma palavra arbitrária de n $bits$, a qual denominaremos de z, onde $n \geq 2$.

O que podemos concluir?

APÊNDICE D - ATIVIDADE: SUDOKU

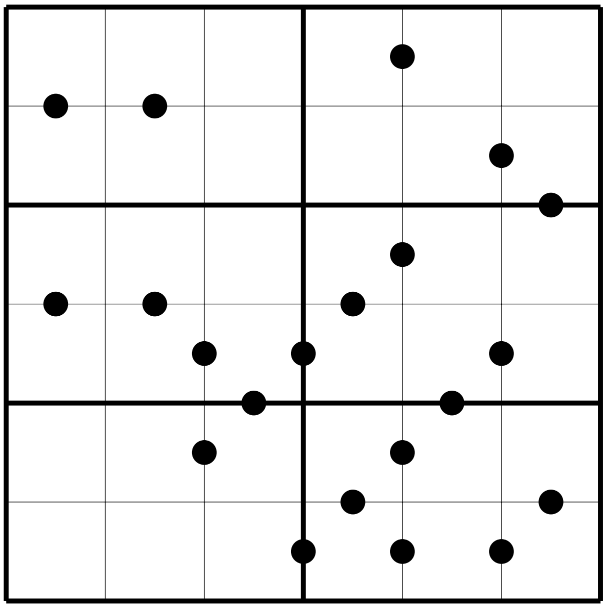
Vamos trabalhar com o Sudoku envolvendo os números da sequência de Fibonacci. Conforme sabemos, não devem ser repetidos na mesma linha, coluna e retângulo 2×3 marcado, um mesmo número pertencente à sequência de Fibonacci, com excessão do número 1, o qual irá figurar duas vezes. Ou seja, cada célula vazia na grade deve ser preenchida com os números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8$.

Figura .32 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 1



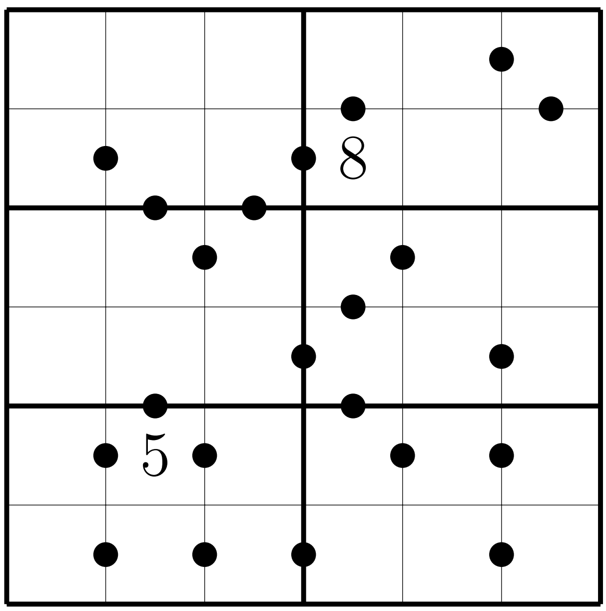
Fonte: Autora

Figura .33 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 2



Fonte: Autora

Figura .34 – Sudoku e Fibonacci: Exemplo 3



Fonte: Autora

Figura .35 – Sudoku e Fibonacci: Solução-Exemplo 3

8	3	1	5	1	2
2	1	5	8	3	1
5	2	3	1	1	8
1	8	1	2	5	3
3	5	8	1	2	1
1	1	2	3	8	5

Fonte: Autora