Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

**Albina Poyares de Mello Bhering**

# A MATEMÁTICA E O SOM

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT PUC-Rio.

Orientador: Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro

**Rio de Janeiro,**

**Julho 2024**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

**Albina Poyares de Mello Bhering**

# A Matemática e o Som

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro**
Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Mauro Benayon Menezes**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

**Profª. Dania González Morales**

PUC-Rio

**Profª. Renata Martins Rosa**

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de julho de 2024

**Albina Poyares de Mello Bhering**

Graduada em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Extensão Universitária em Análise de Sistemas pela Puc-Rio. Pós-graduação em Tecnologia da Informação pela Universidade Santa Úrsula, Pós-graduação em Docência do Ensino Superior e Médio. Curso técnico de música (piano clássico) pela Escola de Música Villa Lobos. Atualmente exerce o cargo de Docente em Matemática da Secretaria Municipal de Educação do Município do Rio de Janeiro – RJ, ministrando aula para o Ensino Fundamental.

Ficha catalográfica

Bhering, Albina Poyares de Mello

A Matemática e o som / Albina Poyares de Mello Bhering ; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2024.

56 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Matemática. 3. Música. 4. Física. 5. Metodologia integrativa. 6. Interdisciplinaridade. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos meus filhos

Pedro, João Paulo e Ana Clara, vocês são a minha maior fonte de inspiração.

Que este esforço sirva de exemplo para vocês sempre seguirem seus sonhos.

## Agradecimentos

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”.

Agradeço a Deus, pela força, sabedoria e proteção concedidas ao longo da minha vida.

Aos meus pais, Paulo Elmo (in memória) e Sinara, pela educação, amor e exemplos de caráter, força e esperança.

Aos meus filhos Pedro, João Paulo e Ana Clara pelo apoio e incentivo.

Às minhas irmãs Ana Paula e Viviane e sobrinhos Arnon, Lorena, Ian e Isadora, Karina, Karoline e Kamila pela torcida.

Ao meu orientador, Eduardo Barbosa Pinheiro, pela orientação, paciência e incentivo, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao corpo docente pela dedicação e pelo conhecimento compartilhado, que enriqueceram minha formação acadêmica.

Aos meus colegas, pela parceria e troca de experiências. Em especial, agradeço à Camila Guimarães por estar sempre ao meu lado.

Aos meus alunos que vibraram comigo em cada etapa realizada deste mestrado.

## Resumo

Bhering, Albina Poyares de Mello; Pinheiro, Eduardo Barbosa. **A Matemática e o Som**. Rio de Janeiro, 2024. 56p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho de conclusão de mestrado mostra uma forma de ensinar conceitos matemáticos, tais como frações, proporções, séries geométricas de maneira interdisciplinar, com a Música e a Física, utilizando a cultura maker. Para isso, são apresentados conceitos matemáticos existentes na Música, tais como: ritmo, harmonia, acordes e escalas musicais. Apresentam-se também conceitos matemáticos presentes nas ondas sonoras de tubos. Este trabalho interdisciplinar culminou na construção de instrumentos musicais como aplicação prática de conceitos físicos e matemáticos. O instrumento tubofone foi feito com tubos PVC, no qual conceitos aprendidos foram aplicados na sua construção com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, buscando incentivar o protagonismo do aluno no ambiente escolar. O instrumento flauta de pan foi feito com conceitos de fração. Ao final, evidencia-se que a integração entre os conceitos da Matemática aplicados à Música podem ser uma oportunidade de ensino e aprendizagem com uma abordagem metodológica integrativa, uma vez que desperta a curiosidade e interesse dos alunos, além estimular situações em que professores e alunos atuam juntos em situações concretas, usando a filosofia maker, cultura "faça você mesmo".



## Palavras-chave

Matemática; música; física; metodologia integrativa; interdisciplinaridade; cultura maker.

# Abstract

Bhering, Albina Poyares de Mello; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Advisor). **Mathematics and Sound**. Rio de Janeiro, 2024. 56p. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This master's thesis presents a way to teach mathematical concepts, such as fractions, proportions, and geometric series, in an interdisciplinary manner with Music and Physics, using the maker culture. To this end, mathematical concepts found in Music, such as rhythm, harmony, chords, and musical scales, are presented. Additionally, mathematical concepts present in the sound waves of tubes are introduced. This interdisciplinary work culminated in the construction of musical instruments as a practical application of physical and mathematical concepts. The tubophone instrument was made with PVC pipes, in which the concepts learned were applied in its construction with eighth-grade students, aiming to encourage student protagonism in the school environment. The pan flute instrument was made using fraction concepts. In the end, it is evident that the integration of mathematical concepts applied to Music can be an opportunity for teaching and learning with an integrative methodological approach, as it arouses students' curiosity and interest, besides stimulating situations where teachers and students work together in concrete situations, using the maker philosophy, a "do-it-yourself" culture.

## Keywords

Mathematics; music; physics; integrative methodology; interdisciplinarity; maker culture.

## Sumário

## Listas de Tabelas

## Lista de Figuras

## Lista de Siglas

## 1.Introdução

Desenvolver conteúdos de matemática tem sido um desafio para docentes que trabalham no Ensino Fundamental. De acordo com Pereira, Moura e Oriosvaldo[1] (2009, p.99):

> Para que o trabalho escolar possa constituir-se em mediador entre o conhecimento que o estudante possui e os conhecimentos teóricos elaborados historicamente, faz-se necessária uma adequada organização do ensino.

Dessa forma, reporta-se a um ensino e aprendizagem com inúmeros problemas devido aos métodos que ainda são usados no espaço escolar. Em particular, conteúdos envolvendo frações, em sala de aula, se transformam em um grande desafio.

Geralmente, o conceito de todo/parte é passado por meio de figuras geométricas planas divididas e pintadas. Muitas vezes, essas figuras são desenhadas no quadro e copiadas no caderno, tornando-se difícil de respeitar as relações de distâncias, por exemplo. Consequentemente, é comum o aluno não compreender o conceito, comprometendo sua aprendizagem.

A notação de uma fração, assim como de suas operações básicas são de difícil aprendizagem para alunos do 6º ano. Com isso, os discentes acumulam dificuldades e chegam aos anos finais do Ensino Fundamental sem dominar as noções básicas desse conteúdo, o que para eles será uma dificuldade ao chegarem ao 9º ano, quando irão estudar, por exemplo, razões, escalas e porcentagens. O problema traz também consequências ao Ensino Médio. Corroborando a ideia de Pereira (2009), Bertoni[2] (2009, p.33) defende que

> As propostas usualmente desenvolvidas para o ensino de frações parecem estar somente ligadas a figuras divididas e nomeação de partes consideradas. O sentido de número, associado a uma quantificação necessária e passível de ser colocado na reta numérica, fica oculto.

---

[1] PEREIRA, G. M; MOURA, S.; ORIOSVALDO, M. *Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática*: contribuições da teoria histórico-cultural, p.99.
[2] BERTONI, N.E. *Educação e linguagem matemática*, p.33.

Dessa maneira, explica-se por que a maioria dos alunos do Ensino Fundamental não possuem o domínio das operações básicas com as frações, o que se tornará um problema para eles ao chegarem aos anos escolares posteriores, quando precisarão trabalhar com outros ramos da Matemática como Estatística, Probabilidade, Matemática Financeira, entre outros.

Para tentar minimizar essa dificuldade de aprendizado, apresentamos neste trabalho uma proposta de integração entre a Matemática e a Música, explorando os conceitos de razão e proporção existentes nos sons de uma escala musical. É uma proposta prática de aplicabilidade dos conceitos de fração no estudo da teoria musical e construção de instrumentos, através de uma atividade pedagógica interdisciplinar.

Bacich e Moran[3] (2018, p.38) afirmam que a aprendizagem do indivíduo, seja criança, seja adulto, só ocorre de maneira ativa, com o suporte do contexto no qual está inserido e daquilo que se apresenta de forma significativa, relevante e conforme as suas competências inerentes.

Nesse contexto, vale recuperar o que a Base Nacional Comum Curricular[4] (Brasil, 2017, p. 265) propõe a respeito do ensino de Matemática:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Estes sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Assim, percebe-se que a Matemática transcende à quantificação de fenômenos determinísticos e das técnicas de cálculo. Ela se aplica à compreensão de fenômenos, à construção de representações e a

---

[3] BACICH, L.; MORAN, J. (org.) *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática, p.38.

[4] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular,* 265.

argumentações consistentes em diversos contextos da vida e do conhecimento humano.

## 2. Metodologias de ensino

As metodologias de ensino matemático são diversas e visam atender as diferentes necessidades dos alunos, promovendo a compreensão dos conceitos matemáticos e desenvolvendo habilidades de pensamento crítico e de resolução de problemas. A escolha da metodologia apropriada depende de vários fatores, incluindo os objetivos educacionais, o conteúdo a ser ensinado, o contexto do ensino e as características dos alunos.

### 2.1 A interdisciplinaridade como uma abordagem pedagógica

A interdisciplinaridade é uma abordagem pedagógica que busca integrar conhecimentos de diferentes disciplinas, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. Essa integração entre áreas do conhecimento possibilita desenvolver a curiosidade dos estudantes e a realidade com os conteúdos, superando as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

Essa abordagem permite que professores trabalhem assuntos reais os quais os alunos possam discutir, analisar, questionar e verificar a veracidade dos fatos. No ensino de razão e proporção, a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Música pode ser explorada mediante às relações existentes entre as diferentes frequências do som. Tal metodologia apresenta como vantagem a contextualização, pois, ao utilizar a música como elemento de estudo, os estudantes podem compreender melhor os conceitos do tema.

O estudo dos fenômenos físicos, como as frequências das diversas notas musicais, também são fascinantes e despertam a curiosidade do educando e o seu interesse pela Matemática como uma ferramenta para entendê-los. A aplicação da Matemática para explicar e entender as frequências sonoras geradas pelos instrumentos musicais dão sentido ao seu estudo, o que é fundamental para o avanço do conhecimento científico. Assim, as disciplinas se complementam e se beneficiam mutuamente, proporcionando uma compreensão mais profunda e precisa das três áreas de conhecimento.

A música é uma forma de expressão cultural muito presente no cotidiano das pessoas e, ao trazê-la para a sala de aula, os alunos se sentem mais motivados e engajados com o tema, o que facilita a aprendizagem.

Observa-se, assim, que a interdisciplinaridade possibilita diversas conexões entre diferentes áreas do conhecimento e que contribui para uma aprendizagem mais autônoma, crítica e duradoura. Incentivar o estudo de tópicos matemáticos através da música pode propiciar aos discentes uma melhor compreensão dos saberes envolvidos e uma visão mais globalizada das interseções e transferências que podem ser realizadas inclusive com outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Radford e Gobara[5] (2020, p.266) consideram que

> Teorias educacionais mais recentes da base teórica histórica cultural, como a Teoria da Objetivação - TO, considera as ferramentas culturais como artefatos que são utilizados na realização de uma atividade, esta considerada como a menor unidade que reproduz a sociedade como um todo e responsável pela mediação ocorrida em sala de aula.

Na educação matemática, a Teoria da Objetivação (TO) possibilita um rompimento com as barreiras das teorias individualistas e compreende o estudante e o professor como seres histórico-culturais. Nesse contexto, educador e educando trabalham juntos na produção de saberes, conforme explicam Radford e Gobara[6] (2020, p.59):

> Na definição de saber que apresentamos falamos de processos corporais, sensíveis e materiais de ação. Tratam-se dos processos de ação aos quais nos referimos e que não são cogitações mentais que ocorrem dentro da cabeça dos indivíduos, mas ações de indivíduos concretos que atuam e vivem no mundo social e cultural. Tais ações são constituídas através do corpo, dos sentidos humanos e do uso de objetos físicos e artefatos culturais.

---

[5] RADFORD; GOBARA. *Teoria da objetivação:* fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática, p.266.
[6] Ibid., p.59.

Pereira, Santos e Cruz[7] (2023, p.8) explicam a importância do uso de metodologias diversificadas no ensino-aprendizagem:

> (...) a utilização de metodologias diferenciadas com sentido lúdico estimula o aprendizado e contribui para a construção da autonomia acadêmica dos educandos. Essas metodologias de ensino colaboram para que o aluno adquira confiança em seu potencial, tornando-o protagonista do seu aprendizado.

A respeito da interdisciplinaridade, Thiesen[8] (2008, p.547) considera o seguinte:

> O que se pode afirmar no campo conceitual é que a interdisciplinaridade será sempre uma reação alternativa à abordagem disciplinar normalizadora (seja no ensino ou na pesquisa) dos diversos objetos de estudo. Independente da definição que cada autor assuma, a interdisciplinaridade está sempre situada no campo onde se pensa a possibilidade de superar a fragmentação das ciências e dos conhecimentos produzidos por elas e onde simultaneamente se exprime a resistência sobre um saber parcelado.

Portanto, os ganhos da interdisciplinaridade são visíveis em relação à abordagem tradicional de ensino, pois permite uma integração de saberes por meio de uma visão ampla do conhecimento, algo mais coerente e viável à aprendizagem do indivíduo.

A interdisciplinaridade no ensino da matemática, através da integração com a música, estimula o aprendizado e desperta a curiosidade, além de aumentar a autonomia e protagonismo do aluno no seu processo de aprendizado.

## 2.2 A Cultura Maker como ferramenta para o ensino da matemática

A cultura maker, também conhecida como movimento maker, tem suas origens em uma combinação de tradições, ideias e movimentos ao longo do tempo. Dentre esses podemos citar as tradições artesanais e a cultura da manufatura, nas quais as pessoas criavam objetos, ferramentas e produtos por conta própria, muitas vezes usando métodos

---

[7] PEREIRA, G. M; SANTOS, A. S; CRUZ, J. M. F. S. *Aplicação de metodologias diferenciadas no ensino de Ciências, Matemática e Química*: da Educação Básica ao Ensino Superior, p.8.
[8] THIESEN J. S. *A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem*, p.547.

tradicionais e técnicas manuais. O “Faça Você Mesmo” é uma filosofia que enfatiza a capacidade das pessoas de criar, consertar, modificar e construir coisas por si mesmas, muitas vezes de forma independente e com recursos limitados. A respeito disso, Raabe e Gomes[9] (2018, p.7) explicam:

> (...) geralmente a pessoas que costumam construir coisas (faça você mesmo), consertar objetos, compreender como estes funcionam, em especial os produtos industrializados. A reunião destas pessoas em comunidades passou a criar bases para o que veio a se chamar de Movimento Maker, que desenvolveu um conjunto de valores próprios e que tem chamado a atenção de educadores pelo potencial de engajar os estudantes em atividades de aprendizagem muito diferentes da educação tradicional.

A filosofia “open source”, que defende o compartilhamento aberto de informações, projetos e recursos, também desempenhou um papel significativo na cultura maker, dentre outras influências combinadas que deram origem à cultura maker como conhecida nos dias de hoje, que é caracterizada pela criatividade, colaboração, inovação, experimentação, aprendizado prático e a capacidade de criar soluções personalizados de forma acessível.

A cultura maker proporciona ao ambiente de aprendizado uma oportunidade de integrar conceitos e prática, possibilitando a experimentação nos processos de ensino e aprendizado conforme as concepções dos espaços maker em detrimento dos conceitos empregados nas aulas expositivas. A utilização da cultura maker no ensino e no aprendizado pode propiciar ao professor um ambiente que estimule o aluno a se motivar, a criar, a discutir e a ampliar suas ideias de uma maneira simples empregando materiais de baixo custo.

Nesse contexto, os alunos terão oportunidades de aprender o trabalho em equipe, desenvolver a criatividade, o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas através do aprender fazendo com o apoio conceitual de diferentes disciplinas. A respeito dessa forma de aprendizagem, Bacich e Moran[10] (2018, p.19) esclarecem que

---

[9] RAABE, A.; GOMES, E.B. *Maker*: uma nova abordagem para tecnologia na educação, p.7.
[10] Ibid., p.19.

> A aprendizagem ativa aumenta a nossa flexibilidade cognitiva, que é a capacidade de alternar e realizar diferentes tarefas, operações mentais ou objetivos e de adaptar-nos a situações inesperadas, superando modelos mentais rígidos e automatismos pouco eficientes.

A cultura maker estimula situações em que professores e alunos atuam juntos em situações concretas, como jogos, experiências e problemas, utilizando os recursos disponíveis, desde materiais simples até os mais modernos. Nesse sentido, o objetivo é proporcionar descobertas e criatividade nas formas de pensar possíveis soluções. Assim, a cultura maker favorece uma nova maneira de ensinar e aprender. Não se trata exclusivamente de ensinar, mas de proporcionar mecanismos para que cada estudante construa seu aprendizado. Sobre isso, Raabe e Gomes[11] (2016, p.10) elucida o seguinte:

> Do ponto de vista pedagógico, a maioria das atividades maker se fundamenta na abordagem Construcionista, que enaltece os benefícios do envolvimento do estudante em projetos em que ele assume o protagonismo e promove a criação de algum objeto que possa ser socializado.

Várias práticas pedagógicas buscam o protagonismo discente no ambiente escolar, utilizando metodologias orientadas a projetos e à resolução de problemas, influenciadas pelo movimento maker, que valoriza a cultura da "mão na massa" ou "faça você mesmo", estimulando alunos e professores a construírem, a modificarem e a aprimorarem seus próprios objetos.

Para Blinkstein[12] (2016, p.4), "para garantir o aprendizado, não deve-se olhar apenas para o produto, mas para todo o processo". Uma das coisas mais importantes na educação "mão na massa" é estimular o professor a focar principalmente nas soluções apresentadas pelo aluno, nas oportunidades de aprendizado durante o desenvolvimento e não no resultado. O foco está no fazer, no desenvolver, no desenrolar da solução, explorando, assim, todas as possibilidades de aprendizado, da criatividade e do trabalho em equipe.

---

[11] Ibid., p.10.

[12] BLINKSTEIN, P. *Educação mão na massa*, p.4.

A cultura maker, com seu enfoque em “mão na massa”, traz inúmeros benefícios para o ensino da matemática, transformando o aprendizado em uma experiência mais prática, envolvente e significativa. Ao integrar atividades de criação e experimentação, a cultura maker permite que os alunos visualizem conceitos abstratos, como geometria e álgebra, de maneiras concretas e tangíveis. Essa abordagem prática não apenas facilita a compreensão e retenção dos conteúdos matemáticos, mas também o pensamento crítico, a criatividade e a resolução de problemas.

## 3. A Música e os conceitos matemáticos e físicos

A relação entre Música e Matemática é profunda e fascinante. A música é uma manifestação organizada de sons e ritmos, e a matemática fornece a estrutura necessária que permite essa organização.

Segundo Med[13] (1996, p.11) ,"Música é a arte de combinar os sons simultâneo e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo". Vamos desenvolver três partes as quais a Música e a Matemática estão fortemente relacionadas.

### 3.1 Ritmo

Ritmo, segundo a definição de Med[14] (1996, p.11), é "ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia".

A duração das notas, das pausas e das batidas são organizadas em padrões rítmicos. A matemática dos compassos musicais é um estudo que busca compreender a relação entre os tempos e os compassos da música, utilizando conceitos matemáticos para organizar e medir essas estruturas.

Ainda de acordo com Med (1996, p.114), "compasso é a divisão de um trecho musical em séries regulares de tempos". O mesmo autor (Med, 1996, p.117) afirma também que:

> Fórmula de compasso, colocada no começo de cada peça musical, indica, geralmente por números em forma de fração, o tamanho do compasso e sugere as possíveis interpretações. O numerador indica quantas figuras cabem no compasso e o denominador a sua espécie.

Portanto, o compasso é a organização básica do ritmo na música e é composto por uma determinada quantidade de tempos. Cada tempo é uma unidade de duração que pode ser subdividida em partes menores, como semínimas, colcheias, etc. A organização dos compassos e dos

---

[13] MED, Bohumil. *Teoria da música*, p.11.
[14] Ibid., p.114.

tempos é fundamental para a interpretação e execução correta de uma peça musical.

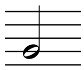
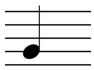
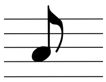
| Nome | Desenho da nota | Duração de cada nota | Notas para preencher um compasso 4/4 | |
|---|---|---|---|---|
| Semibreve |  | 4 | 1 | 1x4=4 |
| Mínima |  | 2 | 2 | 2x2=4 |
| Semínima |  | 1 | 4 | 4x1=4 |
| Colcheia |  | $\frac{1}{2}$ | 8 | 8x$\frac{1}{2}$=4 |
| Semicolcheia |  | $\frac{1}{4}$ | 16 | 16x$\frac{1}{4}$=4 |
| Fusa |  | $\frac{1}{8}$ | 32 | 32x$\frac{1}{8}$=4 |
| Semifusa |  | $\frac{1}{16}$ | 64 | 64x$\frac{1}{16}$=4 |

Tabela 1 - Duração do tempo de execução das notas musicais
Fonte: Própria autoria (2023)

A matemática dos compassos musicais envolve diversos conceitos, como frações, proporções e sequências. Por exemplo, o compasso $\frac{4}{4}$, também chamado de quaternário, é um dos mais comuns na música ocidental e indica que cada compasso é composto por quatro tempos, ou seja, para preenchê-lo, precisamos de quatro notas com duração de um tempo. Observamos que o desenho da duração do tempo das notas musicais segue uma progressão geométrica com razão $\frac{1}{2}$ e o primeiro termo igual a 4. A Tabela 1 mostra a distribuição das notas num compasso quaternário. Nesse caso, a matemática é utilizada para medir e organizar os tempos dentro de um compasso.

### 3.2 Harmonia

Harmonia, de acordo com a definição de Med[15] (1996, p.11), é o "conjunto de sons dispostos em ordem simultânea". A harmonia na música envolve a combinação de diferentes notas para criar acordes e progressões harmônicas.

Os sons que soam simultaneamente produzem um efeito agradável, e a matemática desempenha um papel importante. Por exemplo, uma série harmônica é uma sequência de múltiplos inteiros de uma frequência fundamental. Exemplo de uma série harmônica de uma frequência fundamental $\boldsymbol{f}$ será: $f$, $2f$, $3f$, $4f$ ...

Segundo Med[16] (1996, p.11),

> Som é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. Estas atingem a membrana do tímpano fazendo-a vibrar. Transformadas em impulsos nervosos, as vibrações são transmitidas ao cérebro que as identifica como tipos diferentes de sons.

Logo, uma nota musical é uma frequência de som que ouvimos pela propagação de uma onda pelo ar. A escala atual possui 7 notas e 12 sons. Os símbolos # (sustenido) ou b (bemol), adicionado à esquerda da nota, representa um deslocamento de um semitom ascendente ou descendente, respectivamente.

A melodia é uma combinação de sons de diferentes frequências, ritmos e altura dos sons (graves ou agudos). Segundo Med[17] (1996, p.11), "melodia é o conjunto de sons dispostos em **ordem sucessiva**".

De acordo com Guest[18] (2020, p.20), "a distância entre duas notas é chamada intervalo", o que também é a distância entre frequência de sons. Esses intervalos são nomeados de acordo com a quantidade de

---

[15] Ibid., p.11.
[16] Ibid., p.11.
[17] Ibid., p.11.
[18] GUEST, Ian. *Harmonia*: Método Prático, p.20.

tons e semitons existentes entre eles, nos quais um tom equivale a dois semitons, conforme exemplificado na Tabela 2.

| Intervalo | Distância de notas | Nome do intervalo | Intervalo |
|---|---|---|---|
| dó - ré | 2 | SEGUNDA | 2 SEMITONS |
| dó - mi | 3 | TERÇA | 4 SEMITONS |
| dó - fá | 4 | QUARTA | 5 SEMITONS |
| dó - sol | 5 | QUINTA | 7 SEMITONS |
| dó - lá | 6 | SEXTA | 9 SEMITONS |
| dó - si | 7 | SÉTIMA | 11 SEMITONS |
| dó - dó | 8 | OITAVA | 12 SEMITONS |

Tabela 2: Exemplificação de intervalos musicais.
Fonte: Própria autoria (2023).

Os acordes são sons obtidos quando tocamos mais de uma nota musical simultaneamente. Eles são capazes de transmitir sensações diferentes ao ouvido humano. A Matemática é fundamental para se desenvolver musicalmente e está muito presente nos acordes e na harmonia. Vamos exemplificar um acorde composto por 3 sons, ou seja, 3 notas musicais, no qual, a partir da nota mais grave para a mais aguda, as notas estão separadas por intervalos de 5 semitons e 4 semitons. Essa sequência forma um acorde que chamamos de tríade (3 sons) Maior, ou simplesmente, um acorde maior.

### 3.3 Escalas musicais

A escala musical possui muitas relações com a matemática, pois envolve conceitos de frequência, proporção, logaritmos e séries harmônicas. As escalas são construídas pelas relações entre frequências sonoras. Por exemplo, o intervalo de uma oitava ascendente é construído pela razão 2:1 entre as frequências. O intervalo de quinta ascendente é construído pela razão 3:2 entre as frequências. As escalas musicais diatônicas possuem 7 notas e as escalas musicais cromáticas possuem 12 notas.

### 3.3.1 A Escala Pitagórica

Abdounur[19] (2006, p.5) nos apresenta uma interessante explicação acerca da escala pitagórica:

> Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda em relação a sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a $\frac{3}{4}$ do teu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Analogamente, exercida a pressão a $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda ouvia-se uma quinta acima e $\frac{1}{2}$ obtinha-se a oitava do som original.

Pitágoras[20] dividiu a escala de maneira que a cada nota fosse associada a uma fração como pode ser visualizado na Tabela 3.

| Intervalo | Razão | Razão ajustada |
|---|---|---|
| Fundamental | 1 | 1 |
| Segunda | 9/8 | 9/8 |
| Terça | 81/64 | 5/4 |
| Quarta | 4/3 | 4/3 |
| Quinta | 3/2 | 3/2 |
| Sexta | 27/16 | 5/3 |
| Sétima | 243/128 | 15/8 |
| Oitava | 2 | 2 |

Tabela 3: Razão entre comprimento de corda na escala de Pitágoras (continua)
Fonte: Própria autoria (2023).

Abdounur[21] (2006, p.6) relata que

> Pitágoras estabeleceu relações entre a matemática e a música associando, respectivamente, aos intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas – oitava, quinta e quarta – às relações simples : $\frac{1}{2}$ , $\frac{2}{3}$ $e$ $\frac{3}{4}$ .

Os experimentos de Pitágoras deram origem à escala musical. Pitágoras, usando um monocórdio, instrumento de uma só corda para experiências acústicas e com um suporte móvel entre as extremidades

[19] ABDOUNUR, O. J. Matemática e música, p.5.
[20] Nascido na ilha grega de Samos, 570 a.C, foi treinado pelos melhores professores. Tocava lira, aprendeu aritmética, geometria, astronomia e poesia.
[21] Ibid., p.6.

fixas da corda vibrante, identificou as relações entre as frequências como fator preponderante para a consonância dos sons.

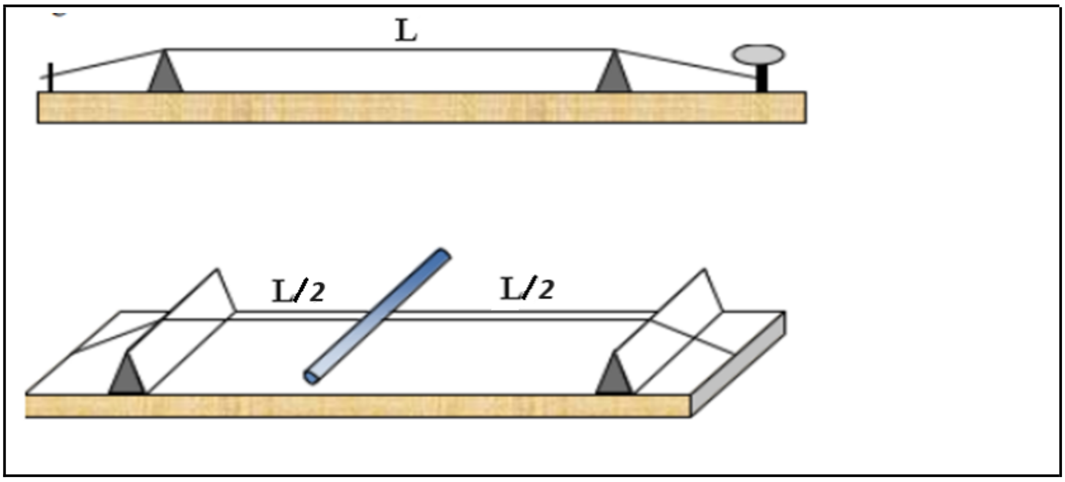



Figura 1: Ilustração do monocórdio dos experimentos de Pitágoras
Fonte: De própria autoria, 2024.

A Figura 1 ilustra um monocórdio com uma corda de tamanho L e o mesmo monocórdio com o suporte móvel dividindo a corda em duas partes iguais. Pitágoras percebeu, em seu experimento, que os sons produzidos pelas partes com relações de comprimentos L e L/2 (igual a $\frac{2}{1}$) produziam um som correspondente a um intervalo de uma oitava, ou seja, por exemplo: de dó4 a dó5. Isso registra que a frequência de uma nota musical é o dobro da frequência da mesma nota quando possui um intervalo de uma oitava ascendente em relação à nota anterior.

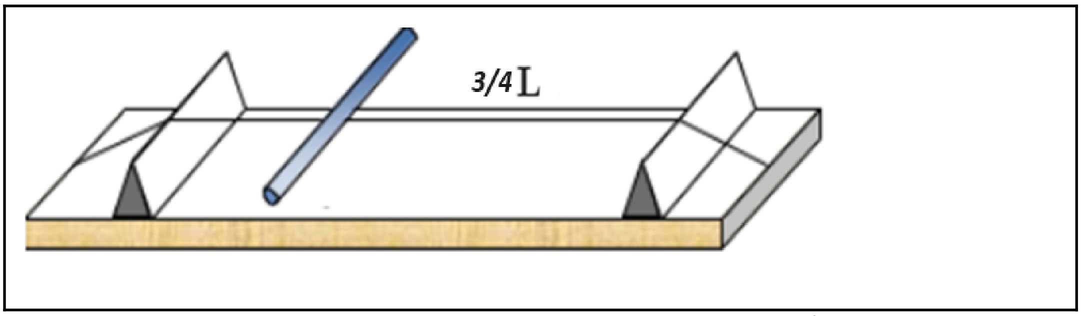



Figura 2 - Ilustração do monocórdio dos experimentos de Pitágoras igual a $\frac{3}{4}$ de L
Fonte: De própria autoria, 2024.

Seguindo o experimento de Pitágoras, com o suporte móvel com distância igual a $\frac{3}{4}$ de L e vibrando esta corda, produzia-se um som correspondente a um intervalo de uma quarta, ou seja, de dó a fá. Isso registra a frequência de uma nota musical $\frac{3}{4}$ da frequência da nota anterior (Figura 2).

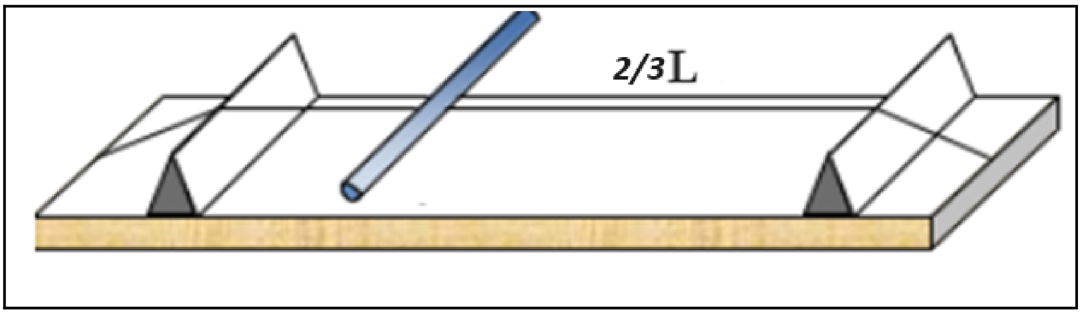



Figura 3 - Ilustração do monocórdio dos experimentos de Pitágoras igual a $\frac{2}{3}$ de L
Fonte: De própria autoria, 2024.

Seguindo o experimento de Pitágoras, com o suporte móvel com distância igual a $\frac{2}{3}$ de L e vibrando esta corda, produzia-se um som correspondente a um intervalo de uma quinta, ou seja, de dó a sol. Isso registra a frequência de uma nota musical $\frac{2}{3}$ da frequência da nota anterior (Figura 3).

Partindo de um comprimento L e aplicando as razões de Pitágoras, encontramos as demais notas da escala, lembrando que os intervalos dos comprimentos devem ser entre L e $\frac{1}{2}$ L , pois representam a extensão de uma oitava na escala musical.

Iniciando a vibração de uma corda de comprimento L – chamaremos de nota fundamental –, aplicamos ($\frac{3}{4}$ =0,75) do comprimento original, encontramos a nota, que está num intervalo de quarta ascendente em relação à nota anterior dentro do intervalo - grau IV = $\frac{3}{4}L$. Ressalta-se que os graus representam a ordem dos sons dentro da escala musical . Por exemplo, na escala de dó Maior, temos: grau I - dó.

Assim, os graus subsequentes seguem a escala: Grau II - ré, Grau III - mi, Grau IV - fá, Grau V - sol, Grau VI - lá e Grau VII - si.

Aplicamos $\frac{2}{3}$ do comprimento original e obtemos a nota com um intervalo de quinta ascendente em relação à nota fundamental: grau V = $\frac{2}{3}L$ .

Se aplicarmos $\frac{2}{3}$ novamente, teremos $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}L = \frac{4}{9}L$, encontramos uma nota fora do intervalo, pois $\frac{4}{9}L$ não está entre ( $\frac{1}{2}L \;\; e\, L$). Para ajustar a nota dentro do intervalo, multiplicamos o comprimento da corda por 2 e encontramos a mesma nota: uma oitava descendente. Assim, multiplicando por 2, obtemos $2\times \frac{4}{9}L \;\; = \frac{8}{9}L$, logo grau II $= \frac{8}{9}L$.

Aplicando $(\frac{2}{3})$ novamente, obtemos $\frac{2}{3} \times \frac{8}{9}L$ = $\frac{16}{27}L$, também dentro do intervalo entre ( $\frac{1}{2}L \;\; e\, L$ ) e num intervalo de quinta ascendente em relação à nota anterior, encontramos o grau VI = $\frac{16}{27}L$.

Aplicando $(\frac{2}{3})$, obtemos $\frac{2}{3} \times \frac{16}{27}L$ = $\frac{32}{81}L$, novamente esse comprimento de corda está fora do intervalo entre ( $\frac{1}{2}L \;\; e\, L$ ). Sendo assim, temos de multiplicar por 2 para encontrar a mesma nota: uma oitava descendente. Dessa forma, multiplicando por 2, obtemos $2 \times \frac{32}{81}L$ = $\frac{64}{81}L$, encontramos grau III = $\frac{64}{81}L$.

Aplicando $(\frac{2}{3})$, obtemos $\frac{2}{3} \times \frac{64}{81}L$ = $\frac{128}{243}L$, dentro do intervalo. Essa nota representa a quinta ascendente em relação ao grau III, encontramos o grau VII= $\frac{128}{243}L$.

Essa é a escala encontrada segundo o experimento de Pitágoras. A partir da nota fundamental foi aplicada a razão $\frac{2}{3}$, que gerou a quinta ascendente em relação à fundamental. Essa sucessão de quintas deu origem aos graus da escala, que chamamos na teoria musical de ciclo das quintas. Transformando em sistema de frações, os graus ficam representados conforme coluna 2 da Tabela 4.

A Figura 4 resume o ciclo das quintas, que são obtidas aplicando a razão $\frac{2}{3}$ sobre os graus da escala, multiplicando por 2 quando a razão sai do intervalo entre ($L$, $L/2$ ).

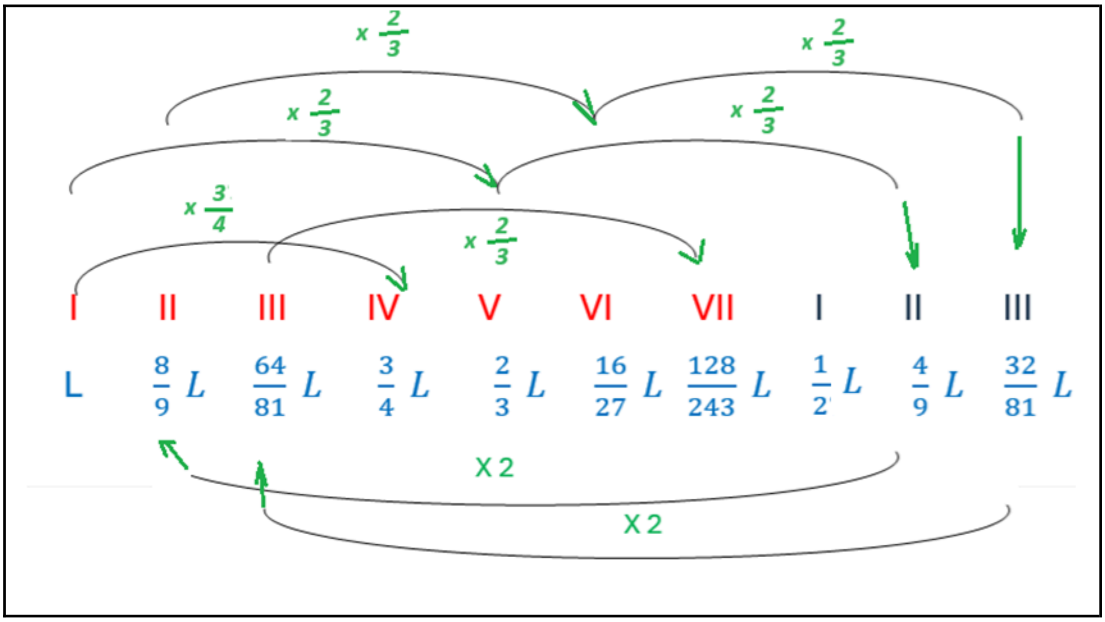



Figura 4 – Esquema das razões de Pitágoras
Fonte: De própria autoria, 2024.

Arquitas de Tarento[22], como seguidor da tradição pitagórica, combinou filosofia, matemática e música em suas investigações, avançando o entendimento da teoria musical além das descobertas iniciais de Pitágoras. Tarento ajustou as proporções de Pitágoras introduzindo conceitos como a média harmônica. Desenvolveu teorias sobre as médias aritmética e geométricas. Conforme Abdounur[23] (2006, p.16),

> A partir de observação motivadora da mudança no nome da média subcontrária, Arquitas de Tarento generalizou tal processo calculando analogicamente o comprimento da corda correspondente a um intervalo de terça maior acima de uma determinada nota como a média harmônica entre o comprimento gerador de tal nota e aquele que produzia uma quinta acima.

[22] Foi um filósofo, cientista, estratega, estadista, matemático e astrônomo grego, considerado o mais ilustre dos matemáticos pitagóricos. Nasceu em 428 a. C.
[23] Ibid., 16.

Com a mudança no comprimento das cordas usando intervalos de terça maior em alguns graus, o comprimento das cordas foi ajustado e foi incluído na coluna Razão ajustada, da Tabela 4. O comprimento da corda do grau III foi calculado através da média harmônica entre o grau I e o grau V. Logo o grau III = $\frac{2}{\frac{1}{1L}+\frac{1}{\frac{2L}{3}}}$ = $\frac{4}{5}$ L. Essa razão está na Tabela 4, coluna 3 (Razão ajustada).

Para encontrar o grau VII, foi aplicada uma terça ascendente sobre o grau V, então o grau VII = $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ L = $\frac{8}{15}$ L. Essa razão está na Tabela 4, coluna 3 (Razão ajustada).

Para encontrar o grau VI, foi aplicada uma terça ascendente sobre o grau IV, então o grau VI = $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$ L = $\frac{3}{5}$ L. Essa razão está na Tabela 4, coluna 3 (Razão ajustada).

Resumindo:

grau I = $L$; grau II $= \frac{8}{9}L$; grau III = $\frac{4}{5}$ L; grau IV = $\frac{3}{4}L;$ grau V = $\frac{2}{3}L$;

grau VI= $\frac{3}{5}$ L; grau VII = $\frac{8}{15}$ L; grau VIII = $\frac{1}{2}L$

### 3.3.2 A Escala Temperada

Essa divisão de Pitágoras dificultava a construção de escalas, logo dificultava também a transposição de uma melodia para outro tom, pois os intervalos entre os sons eram diferentes. Muitos matemáticos e músicos estudaram e apresentaram vários modelos. O desenvolvimento do sistema de temperamento igual, que é a divisão da oitava em doze semitons iguais, não pode ser creditado a um único criador, mas ao trabalho de vários matemáticos, músicos e teóricos ao longo dos séculos. No entanto, foi através da consagrada obra de J. S. Bach[24] no final do século XVIII, com sua obra “O Cravo Bem Temperado”, composta por 48 prelúdios e fugas, que o sistema temperado ganhou popularidade.

Atualmente, a escala temperada consagrada por Bach é uma escala musical que divide a oitava em 12 semitons de igual tamanho, não

[24] Compositor, cantor, maestro, professor, organista, cravista, violista e violinista da Alemanha mundialmente conhecido.

através de frações como fez Pitágoras, mas através dos logaritmos. A escala foi desenvolvida para permitir que a música seja tocada em diferentes tonalidades sem a necessidade de ajuste da afinação dos instrumentos. É amplamente utilizada atualmente e é considerada o padrão de afinação na música ocidental.

Como a razão entre as frequências de 2 notas do intervalo de uma oitava é igual a 2 (observado na Tabela 2), e o intervalo entre uma oitava possui 12 semitons (distribuição da escala temperada de Bach), podemos escrever as frequências das notas musicais como uma progressão geométrica conforme abaixo.

Considerando $f_0$ a frequência do primeiro grau da escala e *r* a razão entre duas frequências consecutivas, construímos uma sequência $\{f_0, f_1, \dots, f_{12}\}$, em que

$f_0$ a frequência do primeiro semitom da escala,

$f_1$ a frequência do segundo semitom da escala,

$f_2$ a frequência do terceiro semitom da escala,

...

$f_{11}$ a frequência do décimo segundo semitom da escala,

$f_{12}$ a frequência do primeiro semitom da oitava seguinte e

*e*

$$\frac{f_1}{f_0} = r$$

$$\frac{f_2}{f_1} = r$$

$$\frac{f_3}{f_2} = r$$

$$\frac{f_4}{f_3} = r$$

$$\frac{f_5}{f_4} = r$$

$$\frac{f_6}{f_5} = r$$

$$\frac{f_7}{f_6} = r$$

$$\frac{f_8}{f_7} = r$$

$$\frac{f_9}{f_8} = r$$

$$\frac{f_{10}}{f_9} = r$$

$$\frac{f_{11}}{f_{10}} = r$$

$$\frac{f_{12}}{f_{11}} = r$$

Multiplicando ambos os lados das igualdades acima, temos:

$$\frac{f_1}{f_0}\cdot\frac{f_2}{f_1}\cdot\frac{f_3}{f_2}\cdot\frac{f_4}{f_3}\cdot\frac{f_5}{f_4}\cdot\frac{f_6}{f_5}\cdot\frac{f_7}{f_6}\cdot\frac{f_8}{f_7}\cdot\frac{f_9}{f_8}\cdot\frac{f_{10}}{f_9}\cdot\frac{f_{11}}{f_{10}}\cdot\frac{f_{12}}{f_{11}} = r^{12}$$

Simplificando as razões com numeradores e denominadores iguais, temos:

$$\frac{f_{12}}{f_0} = r^{12} \qquad \text{(equação 1)}$$

Porém, considerando as notas musicais no intervalo de uma oitava, as frequências possuem a razão = 2, ou seja,

$$f_{12} = 2.f_0 \qquad \text{(equação 2)}$$

é a frequência da nota musical que está a uma oitava ascendente. Substituindo a equação 2 na equação 1, encontramos:

$\frac{2.f_0}{f_0} = r^{12}$ logo $r = \sqrt[12]{2}$ ou $r = 2^{1/12}$.

Assim, as frequências de uma escala musical seguem uma progressão geométrica, na qual a razão $r = 2^{1/12}$ e, com isso, podemos definir a frequência de uma nota como uma função do tipo

$$f(k) = f_0 .\ 2^{k/12} \qquad \text{(equação 3)}$$

em que:

- $f(k)$ é a frequência da k-ésima nota musical.

- $f_0$ é a frequência da nota de referência, LÁ4 (440 Hz).

A variável $k$ acima pertence ao conjunto dos números inteiros e é o número de semitons que existe entre a nota e a nota de referência LA4. Observa-se que essa variável pode assumir valor positivo ou negativo, dependendo se a nota está acima ou abaixo na nota referência LA4.

Em 1936, a conferência internacional recomendou que o LÁ4, LÁ que pertence à 4 oitava do piano e se encontra à direita do dó central, fosse afinado na frequência igual a 440 Hz. Esse padrão foi adotado pela Organização Internacional para Padronização em 1955, como a norma ISO 16. Desde então, essa é a frequência de referência para a afinação dos instrumentos musicais.

Partindo da nota padrão LÁ4 com frequência 440 Hz, encontramos as frequências das notas que compõem o intervalo de uma oitava. Na Tabela 4, foram calculadas as frequências da oitava DÓ4 a DÓ5, partindo da frequência do LÁ4 e considerando a razão $r = 2^{1/12}$.

| | Nota | Razão | Frequência |
|---|---|---|---|
| f0 | dó | 1 | 261,626 |
| f1 | dó# | $2^{(1/12)}$ | 277,183 |
| f2 | ré | $2^{(2/12)}$ | 293,665 |
| f3 | ré# | $2^{(3/12)}$ | 311,127 |
| f4 | mi | $2^{(4/12)}$ | 329,628 |
| f5 | fá | $2^{(5/12)}$ | 349,228 |
| f6 | fá# | $2^{(6/12)}$ | 369,994 |
| f7 | sol | $2^{(7/12)}$ | 391,995 |
| f8 | sol# | $2^{(8/12)}$ | 415,305 |
| f9 | lá | $2^{(9/12)}$ | 440 |
| f10 | lá# | $2^{(10/12)}$ | 466,164 |
| f11 | si | $2^{(11/12)}$ | 493,883 |
| f12 | dó | 2 | 523,251 |

Tabela 4: Frequência em Hz das notas musicais entre DÓ4 e DÓ5.
Fonte: De própria autoria, 2023.

## 3.3 Música e Física

O som é a percepção da propagação da onda sonora produzida pela vibração de objetos. O estudo dos tubos sonoros faz parte da acústica, que é um dos ramos da Física, e nos permite saber qual o comprimento dos tubos necessários para produzir uma determinada frequência, gerando uma nota musical. Os tubos de PVC abertos ressoam em frequências bem definidas, dependendo do seu comprimento, e o som é emitido ao gerar a onda sonora através da percussão na extremidade do tubo.

Abdounur[25] (2006, p.91) declara que:

> Tanto uma corda como coluna de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos etc. Do ponto de vista matemático, observa-se que a força de cada harmônico contribuirá para a construção da forma da vibração periódica que, por sua vez, relaciona-se com o timbre do som.

Dessa forma, a onda sonora gerada em um tubo tem a frequência calculada pelas equações:

$f = \frac{v}{2L}$ (1) para tubos abertos nas duas extremidades; (equação 4)

$f = \frac{v}{4L}$ (2) para tubos com uma extremidade fechada; (equação 5)

em que a velocidade (v) da onda no tubo é aproximadamente igual a 340m/s quando propagada pela atmosfera, e (L) é o comprimento do tubo.

## 3.4 Influência da Matemática na construção de instrumentos

O estudo das ondas sonoras que ocorrem em cordas (violão, guitarra, violino), colunas de ar (flauta, trompete) e membranas (tambores, pandeiros) são de fundamental relevância na construção e precisão dos instrumentos musicais.

---

[25] Ibid., 91.

Este trabalho relata a experiência em sala de aula nas atividades de construção de instrumentos musicais. Durante a construção, os alunos realizaram pesquisas de como a razão e a proporção são utilizadas nesse processo. Dessa forma, a atividade envolveu a investigação sobre a aplicação desses conceitos na confecção de instrumentos musicais. Isso permitiu que os estudantes compreendessem a importância da matemática na música e na construção de instrumentos tais como:

1. Comprimento das cordas: o comprimento das cordas dos instrumentos de corda, como violão e violino, afeta a altura das notas produzidas. A relação entre o comprimento da corda e a frequência da nota é inversamente proporcional. Por exemplo, se uma corda é dividida ao meio, a frequência da nota produzida será o dobro da frequência da nota original. Quanto menor for o comprimento da corda, maior será a frequência do som emitido, ou seja, mais agudo será o som. Esse mesmo raciocínio se aplica ao tamanho dos tubos na confecção de instrumentos com tubos.
2. Tambores e instrumentos de percussão: o tamanho e as proporções dos tambores e de outros instrumentos de percussão também influenciam no som que é produzido. Por exemplo, o tamanho e diâmetro do tambor afetam a ressonância e a frequência das notas produzidas quando ele é tocado.
3. Afinação dos instrumentos: a afinação dos instrumentos musicais é realizada através de ajustes das proporções entre as notas em relação a um padrão de referência, como o LÁ4.

# 4. Percursos metodológicos - Oficinas

Na busca de integrar as disciplinas Matemática, Música e Física, foram realizadas 2 oficinas com alunos da turma do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal do Rio de Janeiro. Participaram da atividade 10 alunos voluntários, com idades entre 13 e 15 anos. Os encontros foram realizados em sala de aula e no auditório da escola durante o mês de outubro de 2023.

## 4.1. Construção do tubofone

*1º Dia de oficina*

No primeiro encontro, foi feita uma breve introdução sobre as relações entre Matemática e Música. Em sala de aula, utilizando slides, foi apresentado o experimento de Pitágoras com o desenho do monocórdio e demonstrado aos alunos como Pitágoras encontrou as frações que representam os intervalos entre as notas musicais na escala Pitagórica.

Durante esse encontro, os estudantes fizeram várias perguntas mostrando interesse sobre o descobrimento de Pitágoras. Revisamos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações, reproduzindo os cálculos do experimento de Pitágoras. Os discentes ficaram muito curiosos e fascinados com a relação entre as frações e o som da escala musical Pitagórica.

Nesse mesmo encontro, foram exploradas as habilidades definidas na BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017):

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

(EF69AR21) Explorar e analisar fontes e materiais sonoros em práticas de composição/criação, execução e apreciação musical, reconhecendo timbres e características de instrumentos musicais diversos.

*2º Dia de oficina*

O segundo encontro aconteceu no auditório da escola, e os alunos assistiram ao filme “Donald no País da Matemágica”. Essa película, além de mostrar a relação entre Música e Matemática, também mostra muitas curiosidades da geometria e da relação da matemática com os jogos.

Após o filme, houve uma roda de discussão sobre a presença da Matemática em diversas áreas do conhecimento. Falamos da possibilidade de aplicar conhecimentos matemáticos para desenvolver um instrumento, e os alunos ficaram bastante motivados. Como os educandos não conheciam a teoria musical, foi necessário o planejamento de algumas explicações sobre esse tema, tais como escala e intervalos. Nesse momento, foi bastante enriquecedora a presença de um professor de arte com unidade temática de Música, explorando a habilidade contida na BNCC (Brasil, 2017) (EF15AR16) - Explorar diferentes formas de registro musical não convencional (representação gráfica de sons, partituras criativas etc.), bem como procedimentos e técnicas de registro em áudio e audiovisual, e reconhecer a notação musical convencional.

A partir disso, decidimos que faríamos um instrumento utilizando tubos de PVC. Por fim, registramos as definições feitas pelo grupo e encerramos o encontro.

*3º Dia de oficina*

Começamos a aula com os conceitos necessários sobre teoria musical e decidimos que nosso instrumento teria uma oitava na escala de dó Maior, por serem apenas de notas naturais. Assim, a partir da frequência padrão 440 Hz da nota LÁ4, utilizamos a equação 1 e encontramos a frequência da nota DÓ4 através da fórmula:

Frequência (DÓ4) = Frequência (LÁ4) x $2^{-9/12}$, pois, entre a nota LÁ4 e a nota DÓ4, existem 9 semitons descendentes. Nesse momento, usamos a reta numérica para mostrar a distância de cada nota a partir do LÁ4.

Na Figura 5, apresentamos a ilustração no teclado musical.

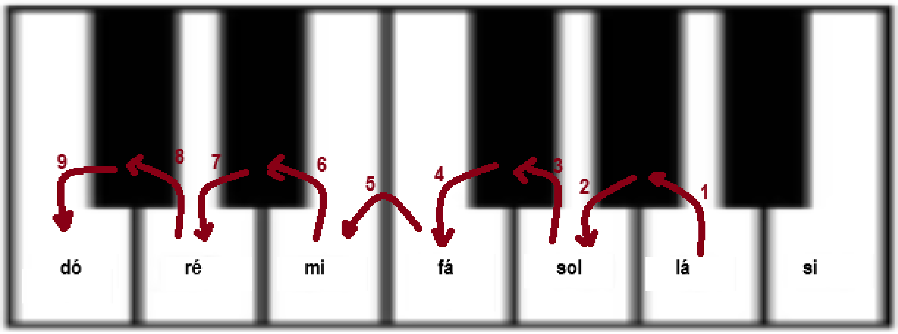



Figura 5 – Teclado musical indicando os semitons existentes entre DÓ4 e LÁ4
Fonte: De própria autoria, 2024.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dó | dó# | ré | ré# | mi | fá | fá# | sol | sol# | lá | lá# | si | dó |
| 261,6 | 277,2 | 293,7 | 311,1 | 329,6 | 349,2 | 370 | 392 | 415 | 440 | 466,2 | 493,9 | 523,2 |
| -9 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 64,96 | 61,32 | 57,88 | 54,64 | 51,57 | 48,68 | 45,94 | 43,36 | 40,96 | 38,63 | 36,46 | 34,41 | 32,49 |

Tabela 5: Memória de cálculo da construção do tubofone.
Fonte: De própria autoria, 2023.

A Tabela 5 possui, na primeira linha, o nome das notas, os 12 semitons existentes. Na terceira linha, estão os números inteiros que serão usados para substituir o numerador do expoente, que representa a quantidade de semitons entre cada nota desejada, e a nota padrão LÁ4. A partir da frequência encontrada da nota dó (261,63), cada aluno calculou a frequência do semitom superior multiplicando a frequência anterior por $r = 2^{1/12}$, na qual utilizamos 1,05946 (encontrado na calculadora). As frequências encontradas foram registradas na segunda linha da Tabela 5.

A quarta linha da Tabela 5 foi preenchida com o comprimento do tubo necessário para emitir as frequências dos 12 semitons existentes na escala musical de DÓ4 até DÓ5. Nesse momento, foi utilizada a Equação 4 para esse cálculo. Com a escolha de construir apenas as notas naturais, as 8 frequências das notas naturais foram destacadas. Registramos, na quarta linha da Tabela 5, o comprimento dos tubos necessários para emitir as notas desejadas.

Com isso, falamos sobre sequência numérica, razão, potência com expoente fracionário, positivo e negativo, operações com números decimais e critérios de arredondamento. Foram exploradas as seguintes habilidades da BNCC (Brasil, 2017):

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma grandeza ou três partes de outra grandeza.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF15AR14) Perceber e explorar os elementos constitutivos da música (altura, intensidade, timbre, melodia, ritmo etc.), por meio de jogos, brincadeiras, canções e práticas diversas de composição/criação, execução e apreciação musical.

(EF15AR15) Explorar fontes sonoras diversas, como as existentes no próprio corpo (palmas, voz, percussão corporal), na natureza e em objetos cotidianos, reconhecendo os elementos constitutivos da música e as características de instrumentos musicais variados.

*4º Dia de oficina*

Para este encontro, foi necessária a obtenção do material projetado no encontro anterior: 3m de tubo com 4 cm de diâmetro, 16 joelhos 90 graus, serra para cortar o tubo, lixa para acabamento e ajuste. Como são crianças do oitavo ano, para evitar algum acidente com os cortes do tubo, levei os tubos já serrados nas medidas encontradas no 3º encontro, na planilha de projeto, registradas na quarta linha da Tabela 5.

Figura 6: Medição dos tubos
Fonte: De própria autoria, 2023.

Figura 7: Montagem e teste da frequência do tubofone no *app Tuner T1*
Fonte: De própria autoria, 2023.

Montamos os tubos já cortados, conforme a Figura 6, e testamos a afinação utilizando o *app* no celular *Turner T1* (*software* gratuito que indica a frequência do som emitido pelo tubo), conforme mostra a Figura 7. Com a imprecisão dos cortes manuais dos canos e de encaixes de joelhos 90 graus, alguns tubos não mediram as frequências exatas, sendo necessário um ajuste com a lixa até chegar à frequência desejada.

O tubofone ficou afinado e conseguimos tocar algumas músicas simples. Para facilitar o manuseio do tubofone e o apoio sobre a mesa dos alunos, decidimos quebrar o tubo em 2 partes unidas pelo joelho de 90 graus, sendo uma das partes igual a 20 cm.

Figura 8: Montagem do tubofone
Fonte: De própria autoria, 2023.

Tivemos de adaptar uma peça de curva 90° para facilitar a execução nos tubos deitados sobre a mesa e uma peça que serviria como junção, dividindo os canos em duas partes, conforme Figura 8. Os alunos ficaram muito felizes e realizados por participarem da construção do instrumento.

Figura 9: Tubofone usado sobre a mesa da escola
Fonte: De própria autoria, 2023.

Com as adaptações, o tubofone ficou mais didático de se trabalhar em sala de aula, pois pôde ser apoiado sobre a mesa do aluno (Figura 9). Como os tubos eram soltos, foi possível a separação, apoiando parte dos tubos em mesas de alunos diferentes. Nesse dia, foram exploradas as habilidades (EF69AR06), (EF69AR08), (EF69AR20) e (EF69AR22) da BNCC (Brasil, 2017).

Os 4 encontros nas oficinas mostraram que os alunos ficaram interessados pelo projeto de construção do tubofone e participaram entusiasmados dos cálculos dos comprimentos dos tubos necessários para reproduzir as frequências das notas da escala musical. Foi usada para isso a razão da escala temperada de Bach $r = 2^{1/12}$.

Entendendo a escala musical na qual as frequências se comportam como uma progressão geométrica crescente de razão $r = 2^{1/12}$, e $L = \frac{v}{2f}$ , assim, temos que os comprimentos dos tubos seguem uma progressão geométrica decrescente, na qual a razão $r = 2^{-1/12}$, pois as grandezas frequência e comprimento do tubo são inversamente proporcionais. Essa progressão geométrica sai dos exemplos comuns em sala de aula em que a razão geralmente são valores racionais. Essa razão $r = 2^{-1/12}$ é um número irracional. Para facilitar esse processo, foi permitido o uso da calculadora como auxílio ao cálculo preciso. Foi arbitrado um número de casas decimais e foi utilizada a técnica de arredondamento.

Com o término do ano letivo, decidimos deixar o nosso instrumento no pátio da escola, para ser utilizado no recreio dos alunos. Para isso, fixamos os tubos em uma madeira através de uma braçadeira de encaixe para tubo PVC.

Figura 10 - Fixação dos tubos com braçadeira
Fonte: De própria autoria, 2023.

Essa atividade foi inspirada no instrumento de tubos existente na praça da ciência em Vitória, ES, onde crianças brincam, experimentam e estimulam a criatividade e curiosidade, ingredientes fundamentais para uma aprendizagem sólida e prazerosa.

Figura 11 - Tubos na praça da ciência em Vitória, ES
Fonte: Prefeitura de Vitória, 2023.

A construção do tubofone, apesar de inspiradora e fascinante, teve alguns pontos de difícil execução, por exemplo: manejo do tubo de 3 metros de comprimento, corte dos tubos nos tamanhos calculados utilizando a serra, uso de furadeira para fixar os tubos. Para superar essas dificuldades e não perder o entusiasmo dos alunos, iniciamos outra oficina, utilizando o mesmo princípio de ondas sonoras em tubos e planejamos a construção de uma flauta pan.

### 4.2. Construção da flauta pan

A flauta de pã ou flauta de pan é um instrumento constituídos por um conjunto de tubos fechados numa extremidade, ligados uns aos outros em feixe ou lado a lado. Os tubos possuem diferentes tamanhos e são soprados com os lábios tangenciando as extremidades superiores dos tubos.

Na construção da flauta pan, foram trabalhados conceitos como razão e proporção, seguindo os conceitos de Pitágoras. Através do tamanho de um tubo que será a nota fundamental, foram encontrados os tamanhos dos demais tubos da flauta utilizando as razões e proporções de Pitágoras.

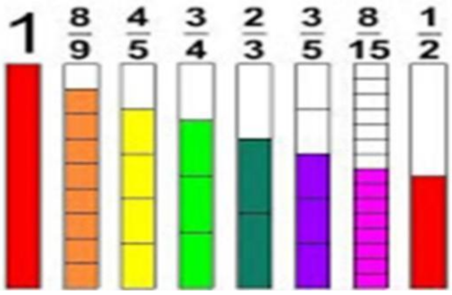



Figura 12- Razões de Pitágoras na escala
Fonte: Wikipedia, 2024.

Pitágoras parte da nota fundamental e encontra as notas das escalas utilizando as razões da Tabela 4 ilustradas na Figura 12. Nesse momento, estávamos planejando construir uma flauta cujo tubo maior propaga uma escala musical qualquer, e, para isso, bastava seguir as razões de Pitágoras.

Sendo assim, a frequência da nota fundamental não foi aferida, pois o que importava nessa atividade eram apenas os intervalos entre as frequências, e estes foram alcançados apenas seguindo as frações para dimensionar os tubos.

Assim, começamos com os mesmos alunos e combinamos não utilizar a calculadora, pois os números eram racionais e não apresentavam grandes dificuldades nos cálculos.

Assim, resolvemos construir uma flauta pan utilizando o mesmo princípio de razão e proporção existente entre as notas musicais.

*1º Dia de oficina*

Esta oficina mostrou menor dificuldade, pois os alunos já estavam familiarizados com alguns conceitos da teoria musical, tais como escala, intervalos e notas musicais. Esses termos foram definidos na oficina anterior durante a construção do Tubofone. Nesse dia, foi apresentado o histórico da flauta pan, sua origem e suas características.

Definimos o material utilizado, que foram canudos de milkshake que os alunos levaram no encontro seguinte. O material utilizado foi: 8 canudos de plástico de milkshake, 1 canudinho de plástico comum, 1 rolha de garrafa, 2 tiras de papelão, cola branca, régua, tesoura e caneta.

*2º Dia de oficina*

No segundo encontro, selecionamos oito canudos de milkshake e vedamos uma das extremidades.

Figura 13 - Pedaço de rolha utilizada na vedação dos canudos
Fonte: De própria autoria, 2023.

Figura 14 - Canudos após vedação feita com pedaços de rolha
Fonte: De própria autoria, 2023.

O material utilizado para essa vedação foram pedaços de rolha, conforme Figura 13. Uma rolha foi subdividida em vários pedaços em formato de cunha para facilitar a vedação de cada canudo. Após todos os oito canudos vedados, conforme Figura 14, iniciamos a medição dos canudos. A partir daí, medimos o tamanho livre do canudo, excluindo a parte coberta pela rolha, conforme ilustração na Figura 15.

Figura 15 – Medição do canudo
Fonte: De própria autoria, 2023.

Registramos a medida encontrada da parte livre do canudo, pois ela foi a base para encontrar a medida de todos os outros canos da flauta. Esse canudo foi a nossa nota fundamental da flauta, ou seja, o som mais grave da escala. Como foi definido inicialmente, não medimos a frequência da nota emitida pelo canudo. Esta oficina produziu um instrumento com uma escala maior, independente da nota produzida como fundamental.

Com a medida do canudo escolhido como fundamental, aplicamos as razões de Pitágoras para encontrar a medida dos demais canudos que formaram as outras notas da escala.

A partir do tamanho escolhido como fundamental, foram aplicadas as razões apresentadas na Figura 12 para encontrar a medida dos outros canudos que formaram os graus dessa escala. Inicialmente, fizemos de maneira algébrica o dimensionamento dos canudos a partir do que chamamos de fundamental

Em nosso exemplo, após fechar um dos lados do canudo, o cano ficou com 22,5 cm de comprimento. Esse foi considerado o canudo da nota fundamental da escala. A partir desse tamanho, encontramos os tamanhos dos outros canos dos graus da escala maior.

As medidas dos canudos dos graus da escala se fazem com a medida do cano que escolhemos para ser a nota fundamental; as razões estão na Figura 12. Logo, todos os canudos foram dimensionados a partir da fundamental, que nesse caso foi medido 22,5 cm.

Usamos a propriedade fundamental das proporções que ressalta: em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Dicionário de dados das incógnitas:

- dim_fund = dimensão do canudo que será a nota fundamental da escala;
- dim_grau_ii = dimensão do canudo que será o segundo grau da escala;
- dim_grau_iii = dimensão do canudo que será o terceiro grau da escala;
- dim_grau_iv = dimensão do canudo que será o quarto grau da escala;
- dim_grau_v = dimensão do canudo que será o quinto grau da escala;
- dim_grau_vi = dimensão do canudo que será o sexto grau da escala;
- dim_grau_vii = dimensão do canudo que será o sétimo grau da escala;
- dim_grau_viii = dimensão do canudo que será o oitavo grau da escala.

Logo, o cálculo da medida do canudo que fará o grau II da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_ii}{dim\_fund} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{dim\_grau\_ii}{22{,}5} = \frac{8}{9}$$

$$dim\_grau\_ii = \frac{8 \times 22{,}5}{9}$$

$$dim\_grau\_ii = \frac{180}{9}$$

$$dim\_grau\_ii = 20 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau III da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_iii}{dim\_fund} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{dim\_grau\_iii}{22{,}5} = \frac{4}{5}$$

$$dim\_grau\_iii = \frac{4 \times 22{,}5}{5}$$

$$dim\_grau\_iii = \frac{90}{5}$$

$$dim\_grau\_iii = 18 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau IV da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_iv}{dim\_fund} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dim\_grau\_iv}{22{,}5} = \frac{3}{4}$$

$$dim\_grau\_iv = \frac{3 \times 22{,}5}{4}$$

$$dim\_grau\_iv = \frac{67{,}5}{4}$$

$$dim\_grau\_iv = 16,875 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau V da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_v}{dim\_fund} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{dim\_grau\_v}{22{,}5} = \frac{2}{3}$$

$$dim\_grau\_v = \frac{2 \times 22{,}5}{3}$$

$$dim\_grau\_v = \frac{67{,}5}{3}$$

$$dim\_grau\_v = 15 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau VI da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_vi}{dim\_fund} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{dim\_grau\_vi}{22{,}5} = \frac{3}{5}$$

$$dim\_grau\_vi = \frac{3 \times 22{,}5}{5}$$

$$dim\_grau\_vi = \frac{67{,}5}{5}$$

$$dim\_grau\_vi = 13,5 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau VII da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_vii}{dim\_fund} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{dim\_grau\_vii}{22{,}5} = \frac{8}{15}$$

$$dim\_grau\_vii = \frac{8 \times 22{,}5}{15}$$

$$dim\_grau\_vii = \frac{67{,}5}{5}$$

$$dim\_grau\_vii = 12 \text{ cm}$$

O cálculo da medida do canudo que fará o grau VIII da escala é:

$$\frac{dim\_grau\_viii}{dim\_fund} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dim\_grau\_viii}{22{,}5} = \frac{1}{2}$$

$$dim\_grau\_viii = \frac{1 \times 22{,}5}{2}$$

$$dim\_grau\_viii = \frac{22{,}5}{2}$$

$$dim\_grau\_viii = 11,25 \text{ cm}$$

| Fundamental | Grau-II | Grau-III | Grau-IV | Grau-V | Grau-VI | Grau-VII | Grau-VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22, 5 cm | 20 cm | 18 cm | 16, 875 cm | 15 cm | 13, 5 cm | 12 cm | 11, 25 cm |

Tabela 6: Resultados dos cálculos dos tamanhos dos canudos.
Fonte: De própria autoria, 2023.

Após todos os canudos dimensionados, com uma régua e uma caneta, marcamos a medida de cada cano para formar o grau da escala. Lembrando que, em cada canudo, essa medida foi iniciada no canudo livre, ou seja, iniciamos a medida após o término da rolha utilizada como vedação da extremidade do canudo. Feita a marcação, utilizamos uma tesoura para cortar cada canudo no tamanho calculado.

Figura 16: canudos ordenados do mais grave ao mais agudo
Fonte: De própria autoria, 2023.

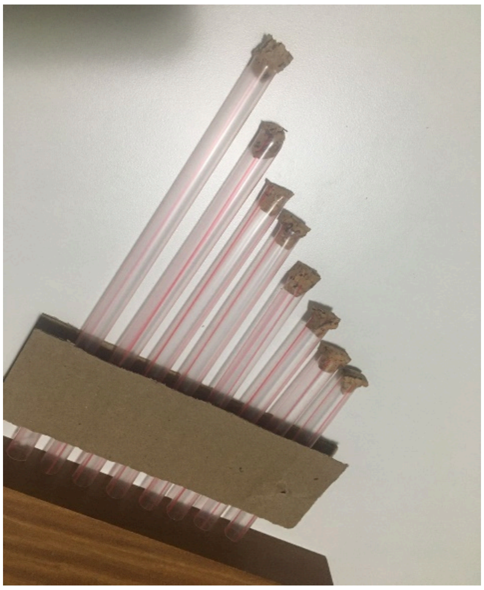


Figura 17: canudos ordenados unidos após colagem em papelão
Fonte: De própria autoria, 2023.

Para unir os tubos, todos os canudos foram nivelados na parte superior de forma ordenada e colados a uma tira de papelão embaixo, conforme a Figura 16. Foi utilizado um pedaço de outro canudinho como separador entre os canudos. Uma outra tira de papelão foi colada em cima dos canudos, conforme a Figura 17.

## 5. Considerações Finais

Este trabalho é uma tentativa de mostrar que o uso de recursos didáticos adequados ao conteúdo a ser transmitido aos alunos permite aprimorar e diversificar a forma de ensino-aprendizagem. Adicionalmente, permite ampliar as relações entre o professor e o estudante, estimulando a integração em favor da capacidade de abstração do educando, contribuindo para a sua evolução em diferentes áreas do conhecimento.

A música, uma das principais formas de expressão cultural, de significativa presença no cotidiano dos adolescentes, motiva, engaja e dá significância aos conteúdos a serem transmitidos, facilitando a aprendizagem. Incorporar a música nas aulas pode transformar o ambiente educacional, tornando-o mais atrativo e dinâmico, o que favorece a retenção de informações e o interesse contínuo dos alunos. A música possui uma linguagem universal que pode ser explorada para conectar diferentes áreas do conhecimento, promovendo uma aprendizagem mais holística e significativa.

A interdisciplinaridade aplicada à Matemática mostra que as disciplinas se complementam e se beneficiam mutuamente, proporcionando uma poderosa ferramenta ao professor e uma compreensão mais profunda e real aos alunos a respeito dos conceitos matemáticos. A integração da Matemática com a Música, por exemplo, não apenas ilustra a aplicação prática de conceitos teóricos, como também estimula a criatividade, o raciocínio lógico e a resolução de problemas. Essa abordagem interdisciplinar pode despertar nos alunos um interesse maior pela Matemática, ao evidenciar sua relevância em contextos culturais e artísticos.

As atividades trabalhadas nas oficinas do tubofone e da flauta pan estimulam a socialização, uma vez que as atividades são desenvolvidas em equipe e desenvolvem também a criatividade. Como a atividade atrai a atenção dos alunos, desperta a curiosidade e o interesse no aprendizado. Trabalhar em grupo promove habilidades sociais importantes, como comunicação, cooperação e empatia, além de incentivar a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento. A criação de instrumentos musicais a partir de princípios matemáticos fornece uma experiência prática que reforça o entendimento teórico, ao mesmo tempo em que valoriza a participação ativa e colaborativa dos alunos.

As duas oficinas, apesar de trabalharem o mesmo conceito da sonoridade e tubos, utilizam princípios diferentes. O tubofone partiu da nota musical LÁ4 e, usando a razão da progressão geométrica, as demais notas musicais foram encontradas. Foi um cálculo mais complexo, sendo necessária a utilização da calculadora. As frequências das notas musicais formam uma progressão geométrica de razão $r = 2^{1/12}$. Trabalhar com expoente fracionário trouxe uma complexidade para o cálculo das frequências e dos tamanhos dos tubos, oferecendo aos alunos um desafio intelectual que exige precisão e atenção aos detalhes. Esta atividade, apesar de sua complexidade, proporciona um entendimento mais profundo sobre a relação entre frequência sonora e comprimento dos tubos, demonstrando na prática como os conceitos matemáticos podem ser aplicados de forma criativa e inovadora.

A flauta pan utilizou as razões de Pitágoras para cálculo das notas musicais, foi uma execução mais simples, não sendo necessária a utilização de calculadora, fazendo com que os alunos tivessem maior facilidade na execução. Os tamanhos dos tubos foram encontrados a partir do conceito de fração como divisão de parte inteira. O tamanho maior do canudo definiu a nota mais grave da flauta, e, a partir desse comprimento, foram definidos os tamanhos das notas mais agudas da escala. Essa técnica, diferentemente da utilizada no tubofone, não define o nome da escala maior, pois não foi encontrado o tamanho do tubo a partir da frequência. Pela simplicidade da execução e baixo custo do material, todos os alunos conseguiram construir uma flauta pan, o que reforça a ideia de que projetos educacionais podem ser acessíveis e inclusivos, permitindo que todos os alunos participem ativamente.

Ao final da pesquisa, pode-se acreditar que a integração entre os conceitos da Matemática aplicados à Música pode ser uma oportunidade de ensino e aprendizagem com uma abordagem metodológica integrativa, especialmente para os alunos que apresentam afinidade com a Música. Esta abordagem não só enriquece o conhecimento dos alunos em ambas as áreas, mas também promove um ambiente de aprendizado mais envolvente e motivador. A interdisciplinaridade, nesse contexto, destaca-se como uma estratégia pedagógica valiosa, capaz de transformar a experiência educacional e contribuir significativamente para o desenvolvimento integral dos estudantes. Ao aliar a precisão da Matemática com a expressividade da Música, os alunos têm a oportunidade de explorar novas formas de entender e aplicar o conhecimento, o que pode resultar em uma formação mais completa e diversificada.

## Referências

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras, 2006.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.) **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

BERTONI, N.E. **Educação e linguagem matemática**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009. 95p.

BLINKSTEIN, P. **Educação mão na massa**. São Paulo, USP - Universidade de São Paulo, setembro de 2016. Entrevista para o site porvir durante a Conferência FabLearn Brasil. Disponível em: http://porvir.org/especiais/maonamassa/?gclid=Cj0KCQjwnNvaBRCmARIsAOfZq3osMD1faI72ktI-caMXwySkVQsMnq3EBpDwHCJOg5Fa187ZpY-kk8aApqIEALw_wcB. Acesso em: 02 jun. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesso em: 29 ago. 2023.

DANTAS, J. D.; CRUZ, S. da S. Um olhar físico sobre a teoria musical**.** **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.41, n.1. 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0099. Acesso em: 29 ago. 2023.

FLAUTA DE PÃ. **Wikipédia, a enciclopédia livre**, 2024. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Flauta_de_p%C3%A3. Acesso em: 23 mar. 2024.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

RADFORD, Luis. GOBARA, Shirley Takeco (org.) **Teoria da objetivação**: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

GUEST, Ian. **Harmonia**: Método Prático. São Paulo: Lumiar, 2020. 159p.

MED, Bohumil. **Teoria da música**. Brasília,DF: Musimed,1996. 212p.

PEREIRA, G. M; MOURA, S.; ORIOSVALDO, M. Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria histórico-cultural. **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 33, p. 97-116, 2009. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2960. Acesso em: 29 ago. 2023.

PEREIRA, G. M; SANTOS, A. S; CRUZ, J. M. F. S. Aplicação de metodologias diferenciadas no ensino de Ciências, Matemática e Química: da Educação Básica ao Ensino Superior. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 23, n. 15, 25 de abril de 2023. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/23/15/aplicacao-de-metodologias-diferenciadas-no-ensino-de-ciencias-matematica-e-quimica-da-educacao-basica-ao-ensino-superior. Acesso em: 29 ago. 2023.

RAABE, A.; GOMES, E.B. Maker: uma nova abordagem para tecnologia na educação. **Revista Tecnologias na Educação**, Ano 10, n./v.26, Edição Temática VIII – III Congresso sobre Tecnologias na Educação. Disponível em: https://www.tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2018/09/Art1-vol.26-EdicaoTematicaVIII-Setembro2018.pdf. Acesso em 29 ago. 2023.

ROSSI, B. F.; SANTOS, E. M. da S.; OLIVEIRA, L. da S. A Cultura Maker e o Ensino de Matemática e Física. **Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online**, [*S.l.*], v. 8, n. 1, dez. 2019. ISSN 2317-0239.

SILVA, Domiciano Corrêa Marques. Tubos Sonoros. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/tubos-sonoros.htm. Acesso em: 13 nov. 2023.

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

THIESEN J. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n. 39, p. 545-598, set./dez. 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010. Acesso em: 29 ago. 2023.

VALENTE, J. A. Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. *In*: VALENTE, J. A.; FREIRE, F. M. P.; ARANTES, F. L.. (Org). **Tecnologia e educação: passado, presente e o que está por vir**. Campinas, SP: NIED/UNICAMP, 2018. 406 p. Disponível em: https://www.nied.unicamp.br/wpcontent/uploads/2018/11/Livro-NIED-2018-final.pdf. Acesso em: 3 nov. 2023.