



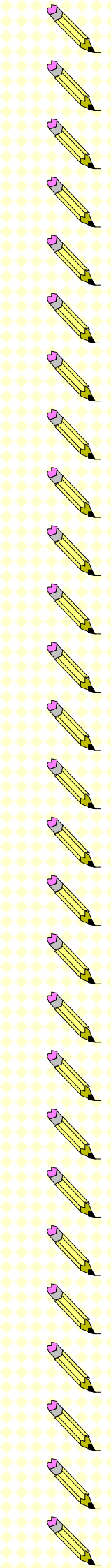
*Uma sequência de atividades para trabalhar o
Teorema de Bayes na escola básica*

Produto Educacional

Luciana Gregorio de Moraes

Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
2024



Sumário

Apresentação.....	2
O Teorema de Bayes.....	3
Atividade 1: As 14 Maravilhas do Mundo	4
Atividade 2: As Claves Musicais	9
Atividade 3: As Constelações da bandeira do Brasil.....	16
Atividade 4: A partida de Xadrez	21
Referências bibliográficas.....	26
Sugestão de Gabarito	29

Apresentação

O produto educacional aqui apresentado trata-se de uma sequência de atividades derivada do trabalho de conclusão de curso do programa de mestrado profissional de Matemática em rede (Profmat) intitulado *Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas*.

Tem como fundamentação teórica questões sobre a interdisciplinaridade entre conceitos matemáticos e outras áreas do conhecimento e a teoria da aprendizagem através da resolução de problemas. O recorte matemático utilizado foi o teorema de Bayes, muito utilizado no campo probabilístico e com aplicações possíveis no ensino básico.

Essa sequência de atividades tem como público-alvo alunos do ensino médio e é constituída por 4 atividades que provocam conexões entre a Matemática e, as Artes e a Geografia, a Música, a Astronomia e a História e também o jogo de Xadrez. Em todos esses saberes é possível construir conexões diversas, em alguma medida, com a Matemática. Algumas dessas conexões estão descritas no decorrer deste produto. Cada atividade é composta por um texto explicativo sobre o saber abordado e, baseado nas informações desse texto, é proposta uma situação-problema com alguns questionamentos que buscam provocar reflexão, construir compreensão e aplicar o teorema de Bayes.

Esse ensino interdisciplinar pela abordagem da resolução de problemas busca promover ao alunado uma aprendizagem significativa, integrada e colaborativa à medida que aborda contextos em que o alunado se encontra inserido e enriquece sua aprendizagem com saberes reais de outras áreas do conhecimento.

As atividades são propostas como uma sequência, mas podem ser aplicadas parcialmente e sem ordem específica, então, fique a vontade para utilizá-las do modo mais apropriado a atender seu alunado e seu planejamento. Cada atividade apresenta um tempo estimado para sua realização e a sugestão de gabarito encontra-se no final deste produto.

A seguir é apresentado o teorema de Bayes, conteúdo base dessa sequência de atividades.

O Teorema de Bayes

O teorema de Bayes foi assim nomeado em referência ao pastor presbiteriano e matemático inglês Thomas Bayes, que viveu no século XVIII. É um teorema muito utilizado no campo probabilístico e seu conceito inicial é frequentemente introduzido no ensino médio.

Em linhas gerais, o teorema considera dois eventos dependentes e calcula a probabilidade de um desses eventos acontecer perante o conhecimento prévio da ocorrência do outro evento.

Considerando que:

- A e B são eventos dependentes, ou seja, a ocorrência de um evento afeta a probabilidade de ocorrência do outro evento;
- $P(A)$ e $P(B)$ são as probabilidades a priori (a probabilidade a priori de um evento é calculada sem o conhecimento prévio da ocorrência de qualquer outro evento dependente a ele) de A e B;
- $P(B) \neq 0$;
- $P(A | B)$ é a probabilidade a posteriori de A condicional a B, ou seja, a probabilidade de A ocorrer, dado que B já ocorreu (a probabilidade do evento A ocorrer é calculada ao se levar em consideração a ocorrência prévia do evento B);
- $P(B | A)$ é a probabilidade a posteriori de B condicional a A, ou seja, a probabilidade de B ocorrer, dado que A já ocorreu;
- $P(B) = P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)$ (Teorema da Probabilidade Total, onde $\sim A$ significa a não ocorrência do evento A).

A expressão matemática que descreve o Teorema de Bayes é a seguinte:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}$$

Atividade 1: As 14 Maravilhas do Mundo

Tempo estimado: 1h40

Texto explicativo:

Galileu (2019) diz que as sete maravilhas do mundo antigo foram listadas inicialmente pelo poeta Antípatro de Sídon¹, no século II a.C. Posteriormente, a lista ganhou algumas contribuições de Filão de Bizâncio². Os monumentos da lista eram grandiosas construções da época que se destacavam por sua importância e beleza.

7 maravilhas do mundo antigo



Fonte: Brasil Escola

Legenda: Acima e da esquerda para direita temos, o Mausoléu de Halicarnasso (Turquia), o Colosso de Rodes (Grécia) e a Grande pirâmide de Gizé (Egito). No centro está o Templo de Ártemis (Turquia) e abaixo, da esquerda para direita, estão os Jardins Suspensos da Babilônia (Irake), a Estátua de Zeus (Grécia) e o Farol de Alexandria (Egito).

¹ Poeta e escritor grego do século II a.C.

² Matemático, engenheiro e inventor nascido em Bizâncio no século III a.C.

Já as sete maravilhas do mundo moderno foram definidas em 2007, através de uma enquete pública realizada por uma empresa suíça. Segundo Resende (2022), a enquete era composta por 21 monumentos com relevância histórica que foram selecionados sob a liderança de Federico Mayor, ex-diretor da UNESCO.

7 maravilhas do mundo moderno



Fonte: Stud História

Legenda: Acima e da esquerda para direita estão a Muralha da China (China), Machu Picchu (Peru) e As ruínas de Petra (Jordânia). Abaixo a partir da esquerda temos o Cristo Redentor (Brasil), o Coliseu de Roma (Itália), Taj Mahal (Índia) e Chichén Itzá (México).

O Brasil está representado nas 7 maravilhas do mundo moderno através do Cristo Redentor, e junto com Peru (Machu Picchu) e México (Chichén Itzá), forma o trio representante do continente americano nas 14 maravilhas do mundo, antigas e modernas.

Problema: Um aluno precisa construir uma maquete de uma das 14 maravilhas do mundo, antiga ou moderna. No dia em que a tarefa foi dada, ele se comprometeu em construir uma maravilha que esteja localizada no continente americano. Passado um tempo, o aluno iniciou o trabalho, porém, esqueceu que deveria construir uma das maravilhas localizadas no continente americano e acreditou ter se comprometido apenas em construir uma maquete de uma das 14 maravilhas, seja ela do mundo antigo ou do mundo moderno. Então, feita a escolha e terminada a maquete, mostrou a construção a um colega.

- a) Com base no comprometimento do aluno, antes do esquecimento, quais os monumentos que ele poderia escolher? Classifique cada um deles em maravilha do mundo antigo ou maravilha do mundo moderno.

- b) Pelas informações do problema, é possível saber se a maravilha que o aluno escolheu é uma maravilha do mundo antigo? E é possível saber se é do mundo moderno? Explique sua resposta.

- c) Baseado na resposta do item (b), qual a probabilidade do aluno ter cumprido o compromisso, e assim, escolhido uma maravilha localizada no continente americano?

- d) O colega do aluno contou que a maravilha escolhida é do mundo moderno. O espaço amostral se reduz? Se sim, para quantas possibilidades?

- e) Todos os 3 monumentos localizados no continente americano encontram-se nas 7 maravilhas do mundo moderno. Assim, após sabermos pelo colega do aluno que a maravilha escolhida é do mundo moderno, a probabilidade dessa maravilha estar localizada no continente americano, aumenta, diminui ou não se modifica?

- f) Então, qual a probabilidade dele ter escolhido uma maravilha localizada no continente americano e assim cumprido o compromisso, sabendo que ele contou ao colega que escolheu uma maravilha do mundo moderno?

- g) Leia o que cada dado a seguir representa e depois, aplique o teorema de Bayes.

A: ser uma maravilha localizada no continente americano

$\sim A$: não ser uma maravilha localizada no continente americano

B: ser uma maravilha do mundo moderno

$P(A)$: probabilidade de ser uma maravilha localizada no continente americano

$P(\sim A)$: probabilidade de não ser uma maravilha localizada no continente americano

$P(B)$: probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno

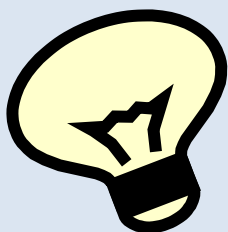
$P(A|B)$: probabilidade de ser uma maravilha localizada no continente americano, sabendo que é uma maravilha do mundo moderno

$P(B|A)$: probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno, sabendo que é uma maravilha localizada no continente americano

$P(B|\sim A)$: probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno, sabendo que não é uma maravilha localizada no continente americano

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} =$$

h) Os resultados dos itens (f) e (g) foram iguais ou diferentes? O que você concluiu?



Você sabia?

Segundo Tagliani (2023), a Proporção Áurea³, encontrada em diversos elementos da natureza, foi utilizada na construção das Pirâmides de Gizé, no Egito.

³ Constante real algébrica irracional. Também chamada número de ouro.

Atividade 2: As Claves Musicais

Tempo estimado: 1h40

Texto explicativo:

Nota musical é o menor elemento de um som. Existem 7 notas musicais: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si. Segundo Aleiteia (2018), as 7 notas musicais foram assim nomeadas pelo monge beneditino italiano Guido D'Arezzo, no século XI, que baseou-se no hino católico a São João Batista composto no século VIII.

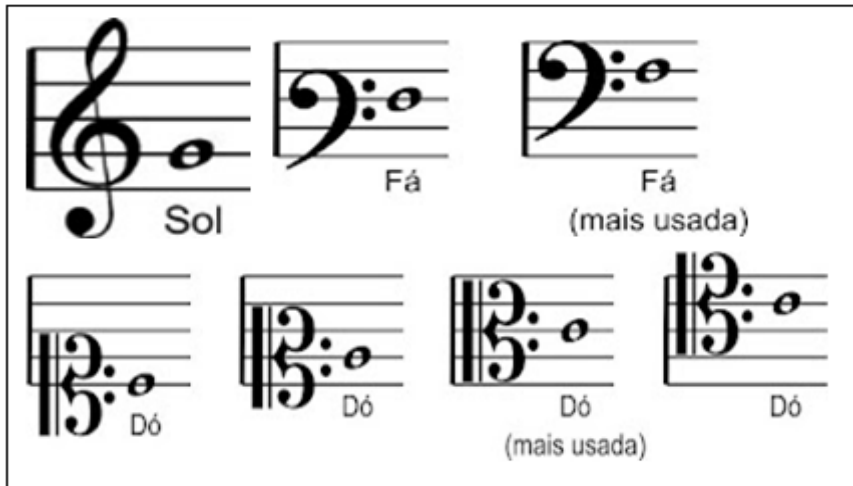
As notas musicais podem ser agudas ou graves e definidas por claves. Chama-se pentagrama ou pauta musical, a disposição de 5 linhas horizontais, paralelas e equidistantes, que formam 4 espaços intermediários. Nessas linhas e espaços escrevem-se as notas musicais. A Clave é um elemento muito importante na teoria musical já que serve para orientar a leitura do pentagrama ou pauta musical, indicando a localização da nota musical.

As claves musicais se classificam em Clave de Sol, Clave de Fá e Clave de Dó.



Fonte: Deus Criou a Música (2017)

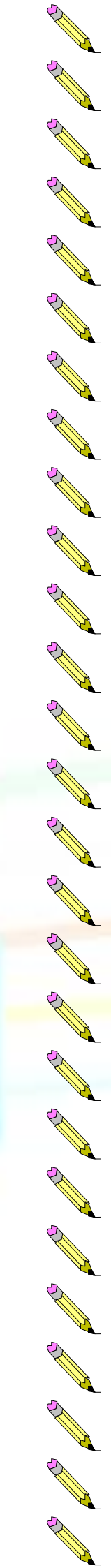
Existe uma clave de Sol, duas claves de Fá e quatro claves de Dó, totalizando 7 claves.



Fonte: Fig. montada pela autora (2024). Imagens retiradas de *Deus Criou a Música* (2017)

Problema: Para um show de talentos, um aluno que conhece as 7 claves informou que iria fazer a leitura cantada (solfejo) de uma delas para sua apresentação. Após treinar todas as claves, ele decidiu que solfejaria no show a clave de Fá mais usada que era, entre todas, a que mais se sentia confortável para solfejar. Ele, porém, esqueceu de dar essa informação ao organizador do evento. No cenário reservado para o evento havia um projetor e o organizador preparou para as apresentações, sete arquivos de imagens de pautas musicais, cada uma com um tipo diferente de clave. O aluno chegou atrasado para o show de talentos e se posicionou para iniciar sua apresentação. Na pressa, o organizador projetou aleatoriamente para o público uma das sete imagens no telão. O aluno realizou sua apresentação.

a) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada?



b) Sabendo que a imagem projetada não era uma pauta musical de clave de Dó, o espaço amostral se reduz para quantas possibilidades?

c) Então, sabendo que não foi projetada uma pauta de clave de Dó, a probabilidade de ele ter solfejado a clave desejada, aumenta, diminui ou não se modifica? Explique.

d) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a pauta projetada não era de clave de Dó?

e) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (d).

A:

$\sim A$:

B:

$P(A)$:

$P(\sim A)$:

$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} =$$

- f) E se ao invés de sabermos que a pauta projetada não era de clave de Dó, soubermos que a pauta projetada não era de clave de Sol, qual seria o número de possibilidades? Nesse caso, a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, aumentaria, diminuiria ou não se modificaria em relação a sabermos não ser de clave de Dó?

- g) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a pauta projetada não era de clave de Sol?

- h) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (g).

A: _____

$\sim A$: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} =$$

- i) E se o que soubermos for que a pauta projetada era de clave de Fá, quantas seriam as possibilidades? A probabilidade de ser a clave

desejada aumentaria, diminuiria ou não se modificaria em relação aos resultados dos itens (d) e (g)?

j) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a imagem projetada era de clave de Fá?

k) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (j).

A: _____

$\sim A$: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} =$$

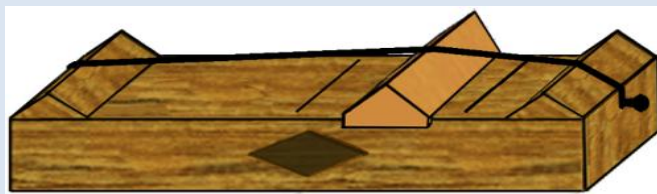
l) Você chegou a alguma conclusão após esses questionamentos?



Você sabia?

Segundo Mingatos (2006), um dos registros da relação entre a matemática e a música desde a antiguidade, é o experimento com os sons do monocórdio⁴, realizado por Pitágoras de Samos⁵ e com grandes contribuições à música.

Monocórdio



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP

* Acesse o link abaixo para assistir o vídeo: *Construindo em Família - Episódio 09 - O Monocórdio de Pitágoras*, do canal Sesi Cultura Paraná (YouTube)

Link: https://www.youtube.com/watch?v=o9vO_1GMVCg

* Quer aprender o passo a passo de como construir um Monocórdio?

Acesse: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>

* **Quer saber mais?** Você também pode assistir o vídeo: *Música Quase por acaso*. O vídeo encontra-se na página Matemática Multimídia.

É só acessar o link: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135>



⁴ Instrumento composto por uma caixa de ressonância na qual é estendida uma única corda presa a dois cavaletes móveis.

⁵ Filósofo e matemático grego nascido no século VI a.C.

Atividade 3: As Constelações da bandeira do Brasil

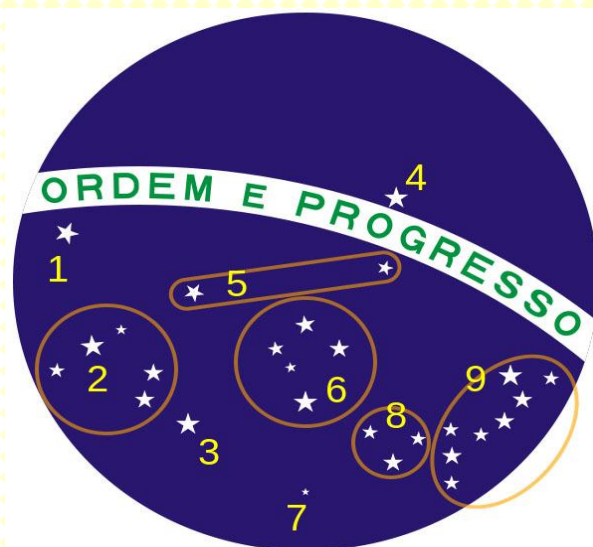
Tempo estimado: 1 h

Texto explicativo:

Constelação é um agrupamento aparente de estrelas. Segundo a International Astronomical Union (2018), no Universo existem 88 constelações, sendo 13 destas constelações chamadas de constelações do zodíaco.

Dentre as 88 constelações do Universo, 9 constelações estão representadas na bandeira do Brasil, algumas completas e outras parcialmente. Segundo Costa (2022), elas estão representadas na bandeira do Brasil por fazerem parte da composição do aspecto do céu na cidade do Rio de Janeiro às 8h30 de 15 de novembro de 1889, local e data da Proclamação da República. O horário considera a passagem do Cruzeiro pelo meridiano local.

Constelações representadas na Bandeira do Brasil



Fonte: Galeria do Meteorito (2018)

São elas: Cão Menor (1), Cão Maior (2), Quilha (3), Hidra Fêmea (5), Cruzeiro do Sul (6), Oitante (7), Triângulo Austral (8) e duas constelações do zodíaco: Constelação de Escorpião (9) e Constelação de Virgem (4).

Problema: Em determinada turma de um colégio, cada aluno apresentará um pequeno seminário sobre uma das constelações do Universo. O 1º aluno da lista de alunos (chamada) da turma quer apresentar uma constelação do zodíaco que esteja na bandeira do Brasil, porém a fim de não haver constelações repetidas entre os alunos, a professora decidiu escolher aleatoriamente uma constelação para cada aluno, seguindo a ordem de chamada da turma. E assim, foi informando para a turma cada uma das escolhas.

- a) Qual a probabilidade do 1º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco?
- b) Qual a probabilidade do 1º aluno da chamada não receber uma constelação do zodíaco?
- c) O 1º aluno da chamada recebeu uma constelação do zodíaco. Qual a probabilidade dessa constelação estar na bandeira do Brasil?

d) O 1º aluno da chamada não recebeu uma constelação do zodíaco. Qual a probabilidade dessa constelação estar na bandeira do Brasil?

e) Utilizando os resultados dos itens anteriores, aplique o teorema de Bayes e responda: Qual a probabilidade do 1º aluno da chamada ter recebido uma constelação do zodíaco, sabendo que a constelação recebida está na bandeira do Brasil?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} =$$

f) Qual a probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada já recebeu uma constelação desse tipo?

g) Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (f).

A: _____

~A: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} =$$

h) Qual a probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada não recebeu uma constelação desse tipo?

i) Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (h).

A: _____

$\sim A$: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

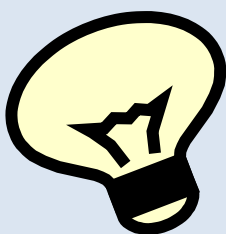
$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} =$$



Você sabia?

O losango da bandeira do Brasil representa as mulheres que lutaram pela independência do país e homenageia a imperatriz D. Maria Leopoldina, que teve grande relevância nessa luta.

Fonte: EDUCA+BRASIL (Link: <https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/historia-e-significado-da-bandeira-do-brasil> . Acesso em 16 jan. 2024)

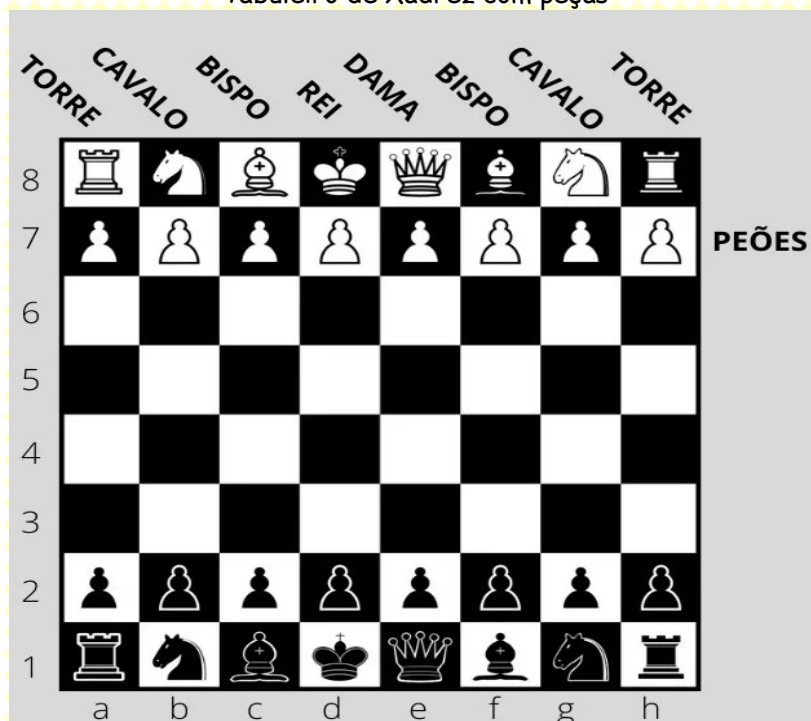
Atividade 4: A partida de Xadrez

Tempo estimado: 1h

Texto explicativo:

O Xadrez é um jogo de estratégia disputado por 2 jogadores. Utiliza um tabuleiro dividido em 64 casas alternadas em escuras e claras, contendo 32 peças, 16 peças para cada jogador. As 16 peças de cada jogador são constituídas por oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma rainha (ou dama), tendo cada um dos seis tipos de peça, seu modo específico de movimentar-se no tabuleiro. Ao jogar uma partida, o objetivo é atacar o rei do oponente de modo que ele não possa se defender, dando assim xeque-mate e vencendo a partida.

Tabuleiro de Xadrez com peças



Fonte: Enciclopédia Significados

Segundo o website de xadrez online, *Chess.com*, o xadrez e outros jogos utilizam um sistema que calcula a força relativa de um jogador, chamado Sistema de Rating Elo. Esse sistema foi adotado pela Federação de Xadrez dos EUA em 1960 e pela Federação Internacional de Xadrez (FIDE) em 1970, sendo também utilizado por sites de jogo de xadrez.

Chess.com diz que o Sistema de Rating Elo mostra o resultado provável de partidas entre jogadores, baseando-se no histórico dos resultados de partidas anteriores, com a atualização constante a cada nova partida. Diz também que espera-se que um jogador com:

- 100 pontos a mais que seu adversário, vença cinco partidas em oito disputadas, ou seja, o jogador tem cerca de 62,5% de chance de vencer o jogo;
- 200 pontos a mais que seu adversário, vença três partidas em quatro, ou seja, o jogador tem cerca de 75% de chance de vencer o jogo.

Assim, percebe-se que a "força" de um jogador não é absoluta, podendo um jogador com rating inferior vencer um jogador com rating superior em determinada partida. O que se evidencia é o fato de que se forem jogadas várias partidas entre esses jogadores, é provável que o jogador de rating superior vença a maioria dessas partidas.

O sistema também analisa os jogadores para definir a pontuação de cada partida. Quando um jogador vence um adversário de rating superior ao seu, ele pontua mais do que quando vence um adversário de rating inferior.

Problema: Quinzenalmente em uma escola, são oferecidas aulas de xadrez aos sábados como atividade extraclasse para os alunos interessados. Certo dia três alunos (X, Y e Z) que participam das aulas de xadrez da escola, decidiram divulgar a atividade durante o recreio, a fim de aumentar o

número de participantes da atividade. O aluno X iniciou uma partida com um dos dois colegas de xadrez (Y ou Z), escolhido aleatoriamente. O colega de xadrez não escolhido pelo aluno X ficou responsável em chamar os outros alunos da escola e divulgar a atividade extraclasse.

Os três alunos já jogaram entre si várias vezes durante o ano letivo e essas partidas eram pontuadas. O aluno X tem 100 pontos a mais do que o aluno Y e o aluno Z tem 200 pontos a menos do que o aluno X.

- a) Sabendo que o aluno X venceu a partida disputada no recreio, qual a probabilidade de seu adversário ter sido o aluno Y? Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para calcular o resultado.

A: _____

$\sim A$: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

$P(B)$: _____

$P(A | B)$: _____

$P(B | A)$: _____

$P(B | \sim A)$: _____



$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} =$$

- b) Sabendo que o aluno X venceu a partida disputada no recreio, qual a probabilidade de seu adversário ter sido o aluno Z? Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para calcular o resultado.

A: _____

$\sim A$: _____

B: _____

$P(A)$: _____

$P(\sim A)$: _____

$P(B)$: _____

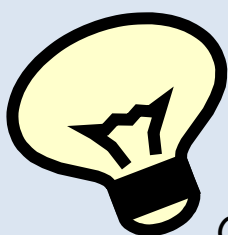
$P(A|B)$: _____

$P(B|A)$: _____

$P(B|\sim A)$: _____



$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} =$$



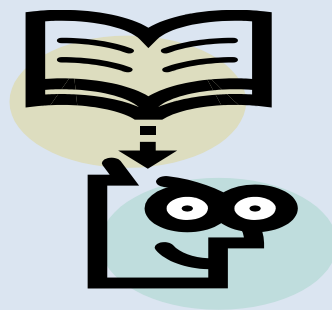
Você sabia?

O Xadrez é disciplina escolar obrigatória na Romênia e as notas em Matemática dependem em 33% do desempenho no xadrez.

Fonte: Dia-a-dia educação. Portal Educacional do Estado do Paraná. (Link: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/portal/xadrez/x_curiosidades.php . Acesso em 16 jan. 2024)

* *Quer jogar uma partida de xadrez?*

Acesse o link: <https://www.escolagames.com.br/diversao/xadrez>



Referências bibliográficas

A origem dos nomes das notas musicais: um hino católico a São João Batista! **Aleteia**, 27 jun. 2018. Disponível em: <<https://pt.aleteia.org/2018/06/27/a-origem-dos-nomes-das-notas-musicais-um-hino-catolico-a-sao-joao-batista/>>.

Acesso em: 18 jan. 2024.

Aplicando a matemática básica - Construção de um Monocórdio. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em:

<<http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

As Constelações. **International Astronomical Union**, 03 de setembro de 2018. Disponível em: <<https://www.iau.org/public/themes/constellations/brazilian-portuguese/>>. Acesso em: 27 out. 2023.

As "novas" sete maravilhas do mundo. **Stud História**. Disponível em: <<https://studhistoria.com.br/historia-das-coisas/as-novas-sete-maravilhas-do-mundo/>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

As sete maravilhas do mundo antigo são reconstruídas em fotos 3D: veja. **Galileu**, 07 mai. 2019. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/noticia/2019/05/sete-maravilhas-do-mundo-antigo-sao-reconstruidas-em-fotos-3d-veja.html>>. Acesso em: 18 jan. 2024.

CARVALHO, A. 11- As claves. **Deus Criou a Música**, 19 fev. 2017. Disponível em: <<https://deuscriouamusica.blogspot.com/2017/02/8-as-claves.html>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

COSTA, A. Astronomia e a Bandeira Nacional. **Museu De Astronomia e Ciências Afins - MAST**, Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações, 08 ago. 2022. Disponível em: <<https://www.gov.br/mast/pt-br/assuntos/noticias/2022/agosto/astronomia-e-a-bandeira-nacional#:~:text=Conforme%20determinado%20por%20decreto%2C%20as,8h30%20de%2015%20de%20novembro>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

FREEPIK, c. 2010-2024. Créditos: Imagem de rawpixel.com no Freepik . Disponível em: <https://br.freepik.com/vetores-gratis/mao-desenho-ilustracao-de-lideranca-conceito_3111002.htm#page=2&query=peça%20de%20xadrez&position=10&from_view=search&track=ais&uuid=92611813-5e41-46b2-b3ae-51cf0d98b75d>. Acesso em: 18 jan. 2024.

FREEPIK, c. 2010-2024. Créditos: Imagem de brgfx no Freepik . Disponível em: <https://br.freepik.com/vetores-gratis/simbolos-musicais-ondulam-em-fundo-branco_21197613.htm#query=claves%20musicais&position=28&from_view=search&track=ais&uuid=367cf30d-5b2a-4de5-9b26-a27bea832921>. Acesso em: 18 jan. 2024.

FREEPIK, c. 2010-2024. Créditos: Imagem de rawpixel.com no Freepik . Disponível em: <https://br.freepik.com/vetores-gratis/vetor-de-ilustracao-de-fundo-cinza-de-conexao-em-todo-o-mundo_3439375.htm#page=2&query=mapa%20do%20mundo&position=7&from_view=search&track=ais&uuid=29cc2741-322d-4466-aa00-e50ce43590c1>. Acesso em: 18 jan. 2024.

FREEPIK, c. 2010-2024. Créditos: Imagem de Freepik . Disponível em: <https://br.freepik.com/vetores-gratis/fundo-realista-de-estrelas-prateadas_34592016.htm#query=estrelas&position=44&from_view=search&track=sph&uuid=0a816b0c-d5d5-46f9-8f59-05dbf1bc42f8>. Acesso em: 17 jan. 2024.

História e significado da bandeira do Brasil. **Educa+Brasil**, postado em 25 out. 2022 e atualizado pela última vez em 03 nov. 2022. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/historia-e-significado-da-bandeira-do-brasil>. Acesso em: 16 jan. 2024.

MAIA JR., A. et al. Música quase por acaso. **Matemática Multimídia**, Unicamp. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1135>. Acesso em: 16 jan. 2024.

MINGATOS, D.S. Matemática e Música a partir do estudo do Monocórdio e de figuras musicais. **III BIENAL DA SBM - IME/UFG**, 2006. Disponível em: <https://ime.ufg.br/bienal/2006/poster/daniellemingatos.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2024.

PINTO, Tales dos Santos. "As Sete Maravilhas do Mundo Antigo"; **Brasil Escola**, c2024. Disponível em: <https://brasilestela.uol.com.br/historia/sete-maravilhas-mundo.htm>. Acesso em: 17 de janeiro de 2024.

Projeto Xadrez nas Escolas. **Dia a Dia Educação**, Portal Educacional do Estado do Paraná, c2003. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/porta1/xadrez/x_curiosidades.php>. Acesso em: 16 jan. 2024.

Qual é o significado das estrelas da bandeira do Brasil? **Galeria do Meteorito**, 05 jul. 2018. Disponível em: <<https://www.galeriadometeorito.com/2018/07/qual-significado-das-estrelas-bandeira-brasil.html>>. Acesso em: 05 dez. 2023.

RESENDE, R. As 7 Maravilhas do Mundo Moderno. **Espaço do Conhecimento**, UFMG, 26 abr. 2022. Disponível em: <<https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/as-7-maravilhas-do-mundo-moderno/>>. Acesso em: 18 jan. 2024.

Sesi Cultura Paraná (YouTube). Construindo em Família - Episódio 09 - O Monocórdio de Pitágoras, 22 abr. 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=o9vO_1GMVCg>. Acesso em: 17 jan. 2024.

Sistema de rating Elo. Termos de Xadrez. **Chess.com**, c2024. Disponível em: <<https://www.chess.com/pt-BR/terms/sistema-rating-elo-xadrez>>. Acesso em: 18 jan. 2024.

TAGLIANI, S. A forma das coisas: entenda o que é Proporção Áurea e como ela se aplica à Arquitetura. **Engenharia 360**, publicado em 14 abr. 2021 e atualizado em 16 jan. 2023. Disponível em: <<https://engenharia360.com/proporcao-aurea-e-as-formas-da-arquitetura/>>. Acesso em: 20 jan. 2024.

WORD. **Clip-Art**. BD18217_.wmf

WORD. **Clip-Art**. j0299125.wmf

Xadrez: jogo divertido. **Escola Games**, c2023. Disponível em: <<https://www.escolagames.com.br/diversao/xadrez>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

Xadrez: o que é, regras, objetivo e história. **Enciclopédia Significados**, c.2011-2024. Disponível em: <<https://www.significados.com.br/xadrez/>>. Acesso em: 17 jan. 2024.

Sugestão de Gabarito

Atividade 1: As 14 Maravilhas do Mundo

- a) Cristo Redentor, Machu Picchu ou Chichén Itzá. Todos esses monumentos são maravilhas do mundo moderno.
- b) Não. Também não. Essas informações não foram dadas.
- c) Como não se sabe se ele escolheu uma maravilha do mundo antigo ou uma maravilha do mundo moderno, então a probabilidade de ser uma maravilha localizada no continente americano é $\frac{3}{14}$.
- d) Sim, se reduz para 7 possibilidades.
- e) Aumenta.
- f) $\frac{3}{7}$
- g)

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} = \frac{1 \cdot \frac{3}{14}}{1 \cdot \frac{3}{14} + \frac{4}{11} \cdot \frac{11}{14}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{14} + \frac{4}{14}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{14}} = \frac{3}{7}$$

- h) Iguais. Conclui-se que dados dois eventos dependentes, ao ter o conhecimento prévio da ocorrência de um desses eventos, foi reduzido o espaço amostral e em seguida calculada a probabilidade de ocorrência do outro evento pelo método clássico de probabilidade, chegando assim, ao mesmo resultado encontrado através da aplicação do teorema de Bayes.

Atividade 2: As Claves Musicais

a) $\frac{1}{7}$

b) 3 possibilidades.

c) Aumenta, pois neste caso só há três possibilidades.

d) $\frac{1}{3}$

e) A: ser a clave de Fá mais usada

$\sim A$: não ser a clave de Fá mais usada

B: não ser clave de Dó

$P(A)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada

$P(\sim A)$: probabilidade de não ser a clave de Fá mais usada

$P(B)$: probabilidade de não ser clave de Dó

$P(A | B)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada, sabendo que não é clave de Dó

$P(B | A)$: probabilidade de não ser clave de Dó, sabendo que é a clave de Fá mais usada

$P(B | \sim A)$: probabilidade de não ser clave de Dó, sabendo que não é a clave de Fá mais usada

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{7}}{1 \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

f) 6 possibilidades. Diminuiria.

g) $\frac{1}{6}$

h) A: ser a clave de Fá mais usada

$\sim A$: não ser a clave de Fá mais usada

B: não ser clave de Sol

$P(A)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada

$P(\sim A)$: probabilidade de não ser a clave de Fá mais usada

$P(B)$: probabilidade de não ser clave de Sol

$P(A | B)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada, sabendo que não é clave de Sol

$P(B | A)$: probabilidade de não ser clave de Sol, sabendo que é a clave de Fá mais usada

$P(B | \sim A)$: probabilidade de não ser clave de Sol, sabendo que não é a clave de Fá mais usada

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \sim A) P(\sim A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{7}}{1 \cdot \frac{1}{7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + \frac{5}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{6}$$

i) 2 possibilidades. Aumentaria.

j) $\frac{1}{2}$

k) A: ser a clave de Fá mais usada

$\sim A$: não ser a clave de Fá mais usada

B: ser clave de Fá

$P(A)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada

$P(\sim A)$: probabilidade de não ser a clave de Fá mais usada

$P(B)$: probabilidade de ser clave de Fá

$P(A | B)$: probabilidade de ser a clave de Fá mais usada, sabendo que é clave de Fá

$P(B | A)$: probabilidade de ser clave de Fá, sabendo que é a clave de Fá mais usada

$P(B | \sim A)$: probabilidade de ser clave de Fá, sabendo que não é a clave de Fá mais usada

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{7}}{1 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{2}$$

- l) A probabilidade da pauta musical projetada ser da clave de Fá mais usada, se modificou ao considerarmos, caso a caso, a ocorrência prévia de diferentes eventos dependentes ao evento "ser a clave de Fá mais usada".

Atividade 3: As Constelações da bandeira do Brasil

a) $\frac{13}{88}$

b) $\frac{75}{88}$

c) $\frac{2}{13}$

d) $\frac{7}{75}$

e) $P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} = \frac{\frac{2}{13} \cdot \frac{13}{88}}{\frac{2}{13} \cdot \frac{13}{88} + \frac{7}{75} \cdot \frac{75}{88}} = \frac{\frac{2}{88}}{\frac{2}{88} + \frac{7}{88}} = \frac{\frac{2}{88}}{\frac{9}{88}} = \frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{87}$

g)

A: receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$\sim A$: não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

B: receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(A)$: probabilidade de receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(\sim A)$: probabilidade de não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B)$: probabilidade de receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(A|B)$: probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B|A)$: probabilidade do 1º aluno da chamada ter recebido uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 2º aluno da chamada recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B|\sim A)$: probabilidade do 1º aluno da chamada ter recebido uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 2º aluno da chamada não recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\sim A) P(\sim A)} = \frac{\frac{1}{87} \cdot \frac{2}{88}}{\frac{1}{87} \cdot \frac{2}{88} + \frac{2}{87} \cdot \frac{86}{88}} = \frac{\frac{2}{88} \cdot \frac{1}{87}}{\frac{2}{88} \left(\frac{1}{87} + \frac{86}{87} \right)} =$$

$$\frac{\frac{2}{88} \cdot \frac{1}{87}}{\frac{2}{88} \cdot \frac{87}{87}} = \frac{\frac{2}{88} \cdot \frac{1}{87}}{\frac{2}{88} \cdot 1} = \frac{\frac{2}{88} \cdot \frac{1}{87}}{\frac{2}{88}} = \frac{1}{87}$$

h) $\frac{2}{87}$

i)

A: receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$\sim A$: não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

B: não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(A)$: probabilidade de receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(\sim A)$: probabilidade de não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B)$: probabilidade de não receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(A|B)$: probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada não recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B|A)$: probabilidade do 1º aluno da chamada não ter recebido uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 2º aluno da chamada recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$P(B|\sim A)$: probabilidade do 1º aluno da chamada não ter recebido uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 2º aluno da chamada não recebeu uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\sim A)P(\sim A)} = \frac{\frac{86}{87} \cdot \frac{2}{88}}{\frac{86}{87} \cdot \frac{2}{88} + \frac{85}{87} \cdot \frac{86}{88}} = \frac{\frac{86}{87} \cdot \frac{2}{88}}{\frac{86}{87} \left(\frac{2}{88} + \frac{85}{88} \right)} =$$

$$\frac{\frac{86}{87} \cdot \frac{2}{88}}{\frac{86}{87} \cdot \frac{87}{88}} = \frac{\frac{86}{88} \cdot \frac{2}{87}}{\frac{86}{88}} = \frac{2}{87}$$

Atividade 4: A partida de Xadrez

a)

A: aluno Y ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$\sim A$: aluno Y não ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

B: aluno X vencer a partida

$P(A)$: probabilidade do aluno Y ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(\sim A)$: probabilidade do aluno Y não ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(B)$: probabilidade do aluno X vencer a partida

$P(A|B)$: probabilidade do aluno Y ser o jogador que disputou a partida com o aluno X, sabendo que o aluno X venceu a partida

$P(B|A)$: probabilidade do aluno X ter vencido a partida, sabendo que o aluno Y foi o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(B|\sim A)$: probabilidade do aluno X ter vencido a partida, sabendo que o aluno Y não foi o jogador que disputou a partida com o aluno X

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\sim A)P(\sim A)} = \frac{0,625 \cdot 0,5}{0,625 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,5} =$$

$$\frac{0,3125}{0,3125 + 0,375} = \frac{0,3125}{0,6875} \approx 0,45. \text{ Ou seja, aproximadamente 45\%.}$$

b)

A: aluno Z ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$\sim A$: aluno Z não ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

B: aluno X vencer a partida

$P(A)$: probabilidade do aluno Z ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(\sim A)$: probabilidade do aluno Z não ser o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(B)$: probabilidade do aluno X vencer a partida

$P(A|B)$: probabilidade do aluno Z ser o jogador que disputou a partida com o aluno X, sabendo que o aluno X venceu a partida

$P(B|A)$: probabilidade do aluno X ter vencido a partida, sabendo que o aluno Z foi o jogador que disputou a partida com o aluno X

$P(B|\sim A)$: probabilidade do aluno X ter vencido a partida, sabendo que o aluno Z não foi o jogador que disputou a partida com o aluno X

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\sim A)P(\sim A)} = \frac{0,75 \cdot 0,5}{0,75 \cdot 0,5 + 0,625 \cdot 0,5} =$$

$$\frac{0,375}{0,375 + 0,3125} = \frac{0,375}{0,6875} \approx 0,55. \text{ Ou seja, aproximadamente 55\%.}$$