Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Luciana Gregorio de Morais

Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2024

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Luciana Gregorio de Morais

Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Profa. Christine Sertã Costa
Orientadora
Departamento de Matemática – Profmat - PUC-Rio

Profa. Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática – Profmat - PUC-Rio

Prof. Francisco Roberto Pinto Mattos
Departamento de Matemática – MPPEB-CPII
UERJ

Rio de Janeiro, 27 de fevereiro de 2024

Luciana Gregorio de Morais

Licenciou-se em Matemática na UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro) e especializou-se em Ensino de Matemática na UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro). Atua como professora de Matemática na Seeduc-RJ e como professora de Informática Educativa na Prefeitura Municipal de Duque de Caxias.

Ficha Catalográfica

Morais, Luciana Gregorio de

Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas / Luciana Gregorio de Morais ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2024.
74 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Interdisciplinaridade. 3. Resolução de problemas. 4. Teorema de Bayes. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A Deus por todas as graças concedidas.

Agradecimentos

A Deus por todas as graças e misericórdia concedidas em minha vida.

Aos meus pais, Ronaldo e Ana Lucia, pelo carinho, apoio e incentivo.

À minha orientadora Christine pela atenção e contribuição.

A todos os professores que fizeram parte de minha formação.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

À PUC-Rio pela excelente formação e pelos auxílios concedidos.

Ao Profmat pela oportunidade.

À Capes pelo apoio financeiro.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001."

Resumo

Morais, Luciana Gregorio de; Costa, Christine Sertã. **Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas.** Rio de Janeiro, 2024, 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho se fundamenta teoricamente na importância da inserção, na escola básica, tanto da interdisciplinaridade como da abordagem da resolução de problemas. O principal objetivo é dar significado a conceitos matemáticos fazendo conexões com outras áreas do saber. O conceito matemático aqui desenvolvido é o teorema de Bayes, muito utilizado no campo probabilístico e frequentemente estudado no ensino médio. O produto educacional, fruto dessa pesquisa, consiste numa sequência de atividades que conectam o referido teorema com conteúdos de áreas diversas como Artes, Geografia, Astronomia, História, Música e até mesmo com o jogo de xadrez. Todas as atividades se baseiam na abordagem da resolução de problemas e promovem a interdisciplinaridade, na busca de um estudo de Matemática motivador e carregado de significado na escola básica.

Palavras-chave

Interdisciplinaridade; Resolução de Problemas; Teorema de Bayes.

Abstract

Morais, Luciana Gregorio de; Costa, Christine Sertã (Advisor). **An interdisciplinary view for Bayes' theorem in high school through problem solving.** Rio de Janeiro, 2024, 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work is theoretically based on the importance of including, since the beginning of education levels, both interdisciplinarity and a problem-solving approach. The main objective is to give meaning to mathematical concepts by making connections with other areas of knowledge. The mathematical concept developed here is Bayes' theorem, widely used in the probabilistic field and frequently studied in high school. The educational product, the result of this research, consists of a sequence of activities that connect the aforementioned theorem with subjects from different areas such as Arts, Geography, Astronomy, History, Music and even the chess game. All activities are based on a problem-solving approach and promote interdisciplinarity, in the search for a motivating and meaningful study of Mathematics in high school.

Keywords

Interdisciplinarity; Problem Solving; Bayes' theorem.

Sumário

1. Introdução 11

2. O ensino interdisciplinar 14
2.1. A prática interdisciplinar na educação básica 14
2.2. Interdisciplinaridade e o ensino de Matemática na educação básica: PCNs e BNCC 19

3. A abordagem da Resolução de Problemas 25

4. O Teorema de Bayes na Educação Básica 31
4.1. Proposta da BNCC (Brasil, 2018) para o estudo da Estatística e da Probabilidade 31
4.2. Teorema de Bayes 34
4.2.1. O Teorema 34
4.2.2. Contribuições do teorema de Bayes para outros campos 36
4.2.3. O problema de Monty Hall 42
4.2.4. *The Harvard Medical School Test* 45

5. Produto Educacional 47
5.1. O produto: elaboração e objetivos 47
5.2. Análise das atividades segundo as bases teóricas 49
5.2.1. As 14 Maravilhas do Mundo 50
5.2.2. As Claves Musicais 54
5.2.3. As Constelações da bandeira do Brasil 59
5.2.4. A partida de Xadrez 62
5.2.5. Análise geral do produto educacional 65

6. Considerações Finais 67

7. Referências bibliográficas 69

Lista de figuras

Figura 1 - Esquema resumo do trabalho 13
Figura 2 - Linha do Tempo “Movimento Interdisciplinar” 15
Figura 3 - Etapas: Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR) 18
Figura 4 - Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas 29
Figura 5 - Habilidades de probabilidade e estatística das competências específicas para o ensino médio segundo a BNCC (Brasil, 2018) 33
Figura 6 - O Problema de Monty Hall 42
Figura 7 - Sete maravilhas do mundo antigo 51
Figura 8 - Sete maravilhas do mundo moderno 51
Figura 9 - Claves musicais 55
Figura 10 - Constelações representadas na bandeira do Brasil 59
Figura 11 - Jogo de Xadrez 63

Lista de quadros

Quadro 1 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As 14 Maravilhas do Mundo” 53
Quadro 2 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As Claves Musicais” 58
Quadro 3 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As Constelações da bandeira do Brasil” 62
Quadro 4 - Etapas de Polya (1995): Atividade “A partida de xadrez” 65

1
Introdução

Em minha experiência como professora atuante na educação básica da rede pública, percebo que uma prática de ensino, embasada no diálogo de saberes e na atribuição de sentido ao que é ensinado, pode despertar no alunado maior interesse pelos estudos, com isso, este trabalho reflete sobre o ensino de Matemática de modo contextualizado e não fragmentado.

Os processos educacionais, ao longo do tempo, sofrem diversas mudanças à medida que estudos e diferentes linhas de pensamento se desenvolvem. Antigamente o ensino tradicional, fragmentado e conteudista era predominante, mas essa não é a vertente em que caminha a educação na sociedade contemporânea. No fim do século XX, Leão (1999) já apontava que era possível afirmar que o paradigma de ensino tradicional tinha influenciado o ensino por meio de uma prática formal e centrada no professor detentor do conhecimento. A autora acrescenta que devido aos novos padrões de ensino exigidos pela atualidade (da época), a "invasão" do construtivismo na sociedade se tornou uma realidade.

Já naquela década surgiu o olhar para um ensino que buscasse valorizar o papel do aluno em seu processo de aprendizagem, respeitando sua realidade e seu conhecimento prévio e incentivando sua autonomia e pensamento crítico.

Nos dias atuais, além desse protagonismo dado ao alunado, um assunto muito defendido pelos estudiosos do ensino é a interdisciplinaridade dos saberes, que proporciona ao aluno uma formação não fragmentada, ampla e sólida. Nela, os conhecimentos dialogam de modo harmonioso, agradável e significativo. Outro caminho que colabora na construção de um ensino enriquecedor e com atribuição de significado é o ensino através da abordagem da resolução de problemas. Por meio da resolução de problemas, os conteúdos podem se desenvolver de maneira contextualizada, levando a uma melhor compreensão do que é aprendido na medida em que aborda situações práticas e próximas da realidade dos alunos.

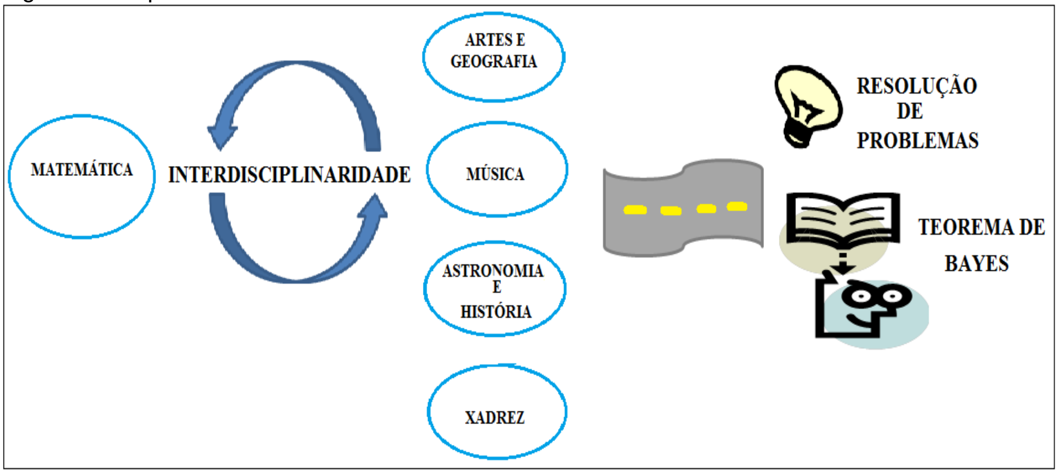
A prática interdisciplinar e o ensino através da abordagem da resolução de problemas, inseridos na educação básica, podem proporcionar ao aluno, desde o início de sua formação, a compreensão de que o conhecimento não precisa ser subdividido em compartimentos, mas sim, ser algo que possa atuar em parceria com diversas áreas e atribuir significado prático ao que se está aprendendo. Essas duas bases teóricas fundamentam, neste trabalho, a construção de conceitos matemáticos na escola básica com o intuito de que sejam desenvolvidos de forma não isolada e que fiquem explícitas as importantes contribuições e conexões que esta disciplina exerce em conjunto com outras áreas do conhecimento.

São apresentadas reflexões críticas e propostas pedagógicas que contemplam a importância do ensino interdisciplinar na educação básica em parceria com a abordagem da resolução de problemas. O ensino interdisciplinar aqui proposto relaciona a Matemática com outras áreas de conhecimento em situações práticas e tem, como conteúdo unificador, um teorema muito utilizado no campo probabilístico, o Teorema de Bayes. Em linhas gerais, o teorema calcula a probabilidade de um evento ocorrer, dado que outro evento já ocorreu.

O trabalho está organizado conforme descrito a seguir. Os capítulos dois e três contemplam a fundamentação teórica da pesquisa nas suas duas bases principais: a interdisciplinaridade e a abordagem pela resolução de problemas. No capítulo dois, são tratadas as questões pertinentes à interdisciplinaridade à luz de pesquisas de teóricos e de documentos norteadores da educação brasileira para o ensino da Matemática. O terceiro capítulo discute a abordagem da resolução de problemas matemáticos como estratégia para promover uma aprendizagem contextualizada, buscando atribuir ao alunado sentido prático e teórico ao que é estudado. O quarto capítulo aborda o campo probabilístico, com ênfase no Teorema de Bayes. Ele se inicia com o estudo da probabilidade na educação básica segundo as orientações da Base Nacional Comum Curricular, BNCC (Brasil, 2018). Posteriormente, o teorema é apresentado, demonstrado e elucidado sua aplicação em situações práticas. No decorrer do quinto capítulo é descrita a elaboração do produto educacional (PE) derivado deste trabalho que busca, através da resolução de problemas, contribuir na construção do conceito do Teorema de Bayes. Para cada uma das 4 atividades interdisciplinares construídas no PE, são apresentados seus objetivos e a base teórica utilizada na sua elaboração.

A figura 1 ilustra a ideia do trabalho e os outros saberes contemplados em cada uma das 4 atividades do PE.

Figura 1 - Esquema resumo do trabalho



Fonte: Figura elaborada pela autora (2024)

2
O ensino interdisciplinar

O ensino interdisciplinar busca a interação entre diversos saberes, abordando duas ou mais áreas de conhecimento e promovendo a associação desses conhecimentos a fim de desenvolver um estudo integrado e significativo. Segundo Gattás & Furegato (2006)

> Interdisciplinaridade pode ser entendida como qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas objetivando-se a compreensão de um objeto a partir da confluência de pontos de vista diferentes cujo objetivo final seria a elaboração de síntese relativa ao objeto comum; implica alguma reorganização do processo ensino/aprendizagem e supõe trabalho contínuo de cooperação entre os professores envolvidos (Gattás; Furegato, 2006, p. 325).

A prática interdisciplinar planejada e com objetivos definidos pode proporcionar ao alunado, desde a educação básica, um ensino enriquecedor. Baseada no compartilhamento de conhecimentos, a interdisciplinaridade pressupõe a implementação de uma educação integrada e colaborativa onde saberes de diversas áreas trabalham em parceria e desenvolvam uma aprendizagem fluida e sem delimitações rígidas.

2.1
A prática interdisciplinar na educação básica

A interdisciplinaridade propõe um ensino não fragmentado, em que diferentes áreas possam se reunir no estudo de determinado assunto, tornando o ensino mais sólido e estimulador.

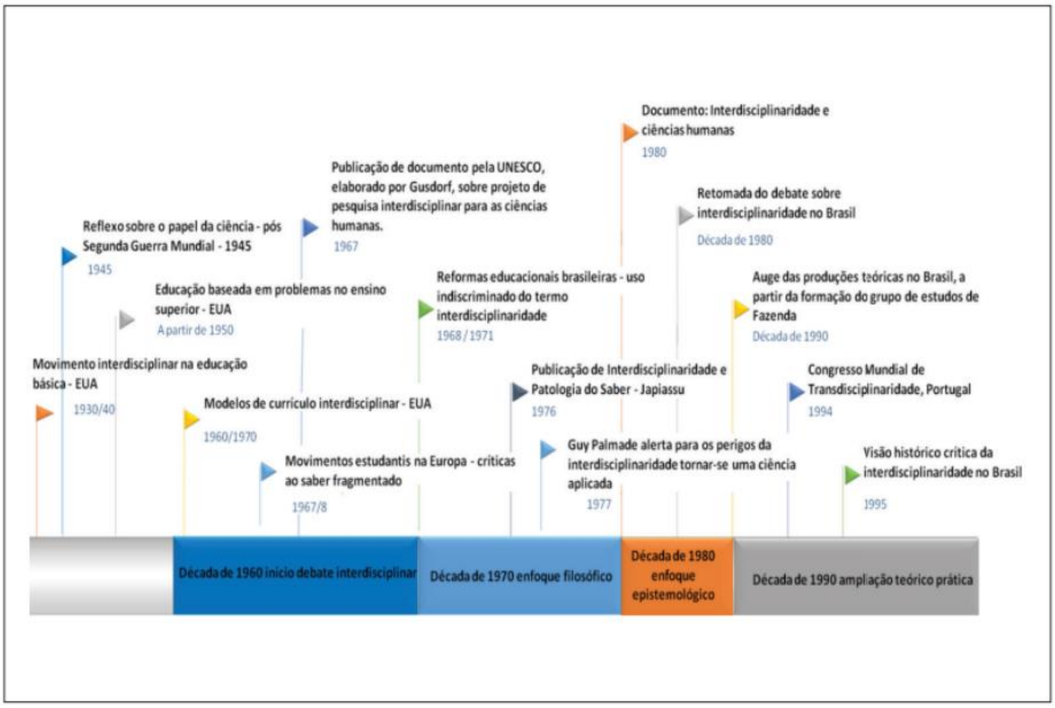
Segundo Assis (2010), a segunda metade do século XX foi marcada por um movimento que reagiu à fragmentação de saberes e através das fundamentações de Georges Gusdorf[1] foram realizados debates sobre os excessos dessa fragmentação na formação acadêmica da época. Assis (2010) menciona Hilton Japiassu[2] e Ivani Fazenda[3] como os percursores do conceito interdisciplinar no Brasil.

---

[1] Filósofo e epistemólogo francês nascido em 1912.
[2] Doutor em Filosofia pela Université des Sciences Sociales de Grenoble, França. Nascido em 1934.
[3] Doutora em Antropologia pela USP (1984).

Satolo et al. (2019) construíram uma linha do tempo, expressa na figura 2, que descreve o processo histórico do estudo sobre interdisciplinaridade. Através dessa linha é possível perceber que o ensino interdisciplinar é defendido há tempos e que teóricos nela citados contribuem, até os dias atuais, para as pesquisas e debates sobre o tema, elucidando os benefícios que esse ensino pode proporcionar no processo de aprendizagem dos alunos.

Figura 2 - Linha do Tempo “Movimento Interdisciplinar”



Fonte: Satolo et al. (2019, p.10)

Corroborando as ideias de Piaget (1972) apud Bicalho (2011), também defendemos aqui projetos interdisciplinares que propiciem cooperação entre saberes, acarretando enriquecimento para todas as partes envolvidas.

Através da prática interdisciplinar todas as áreas envolvidas se engrandecem com novos saberes e as habilidades desenvolvidas trabalharão para a construção de uma formação mais rica e produtiva aos alunos e consequentemente à sociedade. Neste círculo virtuoso, os alunos, desde cedo, se beneficiam com um processo de ensino-aprendizagem baseado na ideia de contribuição entre saberes de áreas distintas e, através desse processo, poderão compreender melhor a utilidade do que é ensinado, por meio dessa ação em diferentes contextos. Traz a reflexão que o conhecimento não precisa ser algo compartimentado, mas sim, fluido, simultâneo e natural, reconhecendo a constante interação de diferentes saberes na vida cotidiana. Esse ensino tem como objetivo promover o diálogo entre diversos saberes, proporcionando uma educação mais interativa, estimulante e colaborativa por meio do compartilhamento de conhecimentos.

A interdisciplinaridade também é relevante ao trabalho docente, pois ela colabora na compreensão de que um educador não precisa se isolar em seu campo de formação. “(...) os professores muitas vezes não trabalham determinado conteúdo, pois consideram pertinentes a outra disciplina e deste modo cada qual faz seu planejamento e não permite que este seja flexível” (Umbelino; Zabini, 2014, p.4).

O ensino interdisciplinar estimula o educador a ultrapassar essas barreiras, compartilhando e adquirindo novos saberes com professores de outras áreas do conhecimento. “A produção em parceria, quando revestida do rigor, da autenticidade e do compromisso amplia a possibilidade de execução de um projeto interdisciplinar” (Fazenda, 2003, p.85).

Corroborando o pensamento de Pombo (2005), é fundamental que no processo de inserção da interdisciplinaridade no ambiente escolar, haja o planejamento responsável em tornar esse processo significativo e não simplesmente fazer uso da interdisciplinaridade sem objetivos.

Durante a execução de um planejamento de atividades escolares é comum o surgimento de obstáculos. No decorrer da prática interdisciplinar isso também poderá ocorrer ao longo do caminho, como por exemplo, a possível resistência de alguns espaços escolares em se adotar a interdisciplinaridade. Thiesen (2008) destaca essa dificuldade quando afirma que

> Embora a temática da interdisciplinaridade esteja em debate tanto nas agências formadoras quanto nas escolas, sobretudo nas discussões sobre projeto político-pedagógico, os desafios para a superação do referencial dicotomizador e parcelado na reconstrução e socialização do conhecimento que orienta a prática dos educadores ainda são enormes (Thiesen, 2008, p.550).

No intuito de minimizar as barreiras encontradas no processo de implementação de projetos interdisciplinares, é essencial buscar a colaboração entre toda a comunidade escolar, incentivando e compartilhando conhecimentos e experiências. Não se espera ser repentino que as fronteiras pré-estabelecidas entre as ciências sejam flexibilizadas, mas é positivo o encorajamento dos profissionais de educação em buscar uma prática de ensino mais dialógica e integrada, pois essa poderá promover uma educação com maior fluidez e voltada à aprendizagem autônoma e, ao mesmo tempo, colaborativa.

Fazenda (2003) faz uma análise de várias de suas próprias pesquisas sobre interdisciplinaridade e apresenta seis fundamentos que, como ela mesma diz, surgiram do "exercício de vida em teorizar a interdisciplinaridade na educação" (Fazenda, 2003, p. 89). Os fundamentos apresentados são: movimento dialético, memória, parceria, perfil de uma sala de aula interdisciplinar, projetos interdisciplinares e possibilidade da efetivação de pesquisas interdisciplinares. A autora, ao iniciar sua fundamentação com o movimento dialético, explica que sempre buscou o diálogo entre suas próprias pesquisas, o que cabe muito bem na prática docente, descobrindo ser muito produtivo que os docentes revisitem suas experiências anteriores, pois possivelmente, nessa revisita surgirá um novo olhar para algo que talvez tenha passado desapercebido. Também seria positivo avaliar as experiências bem sucedidas vividas durante a prática docente, a fim de elencar os fatores comuns entre elas para nortear a criação de novas atividades.

Para que isso ocorra é importante o registro das experiências vividas pelo docente. Daí o próximo fundamento, a memória. Fazenda (2003) divide esse fundamento em memória-registro e memória vivida. A escrita em livros e artigos, as anotações de aulas e os resumos de cursos são alguns exemplos que constituem uma memória-registro, sendo desse modo, a memória vivida por meio do diálogo entre todos os registros.

Sobre parceria, Fazenda (2003) cita que, em um projeto interdisciplinar, a parceria surge como necessidade de troca entre os indivíduos e também contribui para minimizar possíveis inseguranças na aplicação de projetos.

A respeito da sala de aula interdisciplinar, Fazenda (2003) a difere de uma sala comum. A autora destaca que sentimentos de satisfação, humildade, cooperação e generalidade, além do trabalho com grupos heterogêneos e o incentivo à produção de conhecimento, devem estar presentes. Quanto aos projetos interdisciplinares, ressalta a necessidade de se estar atento para não deixar que a interdisciplinaridade se torne um "modismo" e que os projetos criados não sejam sem objetivo e significado.

No último fundamento mencionado, possibilidade de efetivação de pesquisas interdisciplinares, Fazenda (2003) ressalta a importância de aprender a pesquisar produzindo pesquisa. Diz que isso é uma característica da educação interdisciplinar e que seria bom ser exercido desde a pré-escola.

Fourez (1997) apud Siqueira & Gaertner (2015) propõe uma metodologia de ensino denominada Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR). Segundo Siqueira & Gaertner (2015), essa metodologia caracteriza uma modelização ou representação teórica de uma situação particular. Siqueira & Gaertner (2015) traduzem a definição da Ilha Interdisciplinar de Racionalidade da seguinte maneira: "Trata-se de inventar, frente a um projeto, um modelo adequado, suficientemente simples, utilizando conhecimentos provenientes de diversas disciplinas – **e também saberes da vida cotidiana** – indispensáveis em situações concretas" (Fourez, 1997, p. 69, grifo do autor apud Siqueira; Gaertner, 2015, p. 163).

Fourez (1997) apud Siqueira & Gaertner (2015) propõe 8 etapas para a construção da Ilha Interdisciplinar de Racionalidade. O autor ressalta que tais etapas são flexíveis e que não precisam ocorrer necessariamente na ordem como apresentada na figura 3.

Figura 3 - Etapas: Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR)

Fonte: Chaves et al. (2021, p.4)

Tais etapas descritas acima visam chegar à alfabetização científica e técnica onde "Uma pessoa que é capaz de representar situações específicas, poderá tomar decisões razoáveis e racionais contra uma série de situações problemas” (Fourez, 1997, p. 61 apud Siqueira; Gaertner, 2015, p. 161).

2.2 Interdisciplinaridade e o ensino de Matemática na educação básica: PCNs e BNCC

Cardoso & Oliveira (2019) explicam que, atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento de referência nacional que norteia os currículos e as propostas pedagógicas para as redes públicas e privadas de ensino da educação básica. Ressaltam que devido ao fato dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) apresentarem como foco a orientação didática para a organização e desenvolvimento do currículo, não foram revogados após a implantação da BNCC, assim, também permanecem em vigor como documento orientador, norteador e metodológico de como desenvolver a Base. Estes são os principais documentos norteadores da educação básica e trazem a valorização e incentivo pela adoção da interdisciplinaridade no currículo educacional.

Os PCNs (Brasil, 1998) da Matemática para o terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental mencionam que muitos professores praticam a interdisciplinaridade em situações do cotidiano somente após os conteúdos matemáticos terem sido muito bem compreendidos pelos alunos. O documento traz argumentações que concluem que quando os conteúdos matemáticos são apresentados de modo linear e rígido, apenas em função de sua complexidade, os alunos não têm muitas oportunidades de explorar esses conteúdos em outras áreas e contextos. Além disso, os PCNs ressaltam que raramente situações-problema são apresentadas como ferramenta de construção de conhecimento aos alunos.

Tal documento questiona a realidade da época, que mantinha a proposta de organização linear dos conteúdos. É importante salientar que os PCNs, desde 1998, já incentivavam o professor a buscar transformar essa realidade através da elaboração de um planejamento de aula pautado na conexão da matemática com outras áreas. Exemplos destas conexões são apresentados a seguir.

Para o ensino de *Número Racional: significados*, o documento apresenta como alguns dos possíveis contextos das situações-problema:

- notícias de jornal, em particular as que envolvem índices econômicos – leitura, interpretação, cálculos;
- guias de cidade e atlas – leitura, compreensão e utilização de escalas;
- medições envolvendo as diferentes grandezas (comprimento, área, volume, massa, tempo, temperatura) – interpretação das medidas obtidas;
- bulas de remédio, receitas (massa, capacidade) – interpretação, cálculos, transformação de unidades;
- problemas históricos (Brasil, 1998, p.139).

Também cita o ensino de *Espaço e formas: o lugar em que se vive, os objetos do entorno* por meio dos seguintes contextos:

- formas e órbitas dos planetas;
- as embalagens das coisas – planificações, construções;
- construção de maquetes;
- as pirâmides do Egito;
- guias da cidade e mapas;
- decomposição da luz – prismas (Brasil, 1998, p.142).

E para o aprendizado de *Variação de grandezas: medidas*, menciona como exemplos de contextualização:

- planta baixa de uma casa – interpretação, desenho, cálculos, ampliação, redução;
- índices relacionados a saúde (taxas de mortalidade, doenças endêmicas etc.) – interpretação, cálculos, gráficos;
- índices relacionados ao trabalho (taxas de desemprego, salários) – interpretação, cálculos, gráficos;
- questão da terra (reforma agrária, erosão, preço, desmatamento) – unidades de medida, cálculos;
- produção agrícola (produção de grãos, exportação, importação, custo, lucro, impostos) – unidades de medidas, gráficos e cálculos;
- construção de uma horta (planejamento de canteiros, obtenção das medidas de um canteiro retangular de maior área entre vários de mesmo perímetro) – cálculos, gráficos;
- tabelas de fatores de conversão (unidades de diferentes grandezas, moedas) elaboração, interpretação, cálculos;
- energia elétrica – unidades, cálculo do custo em função do consumo;
- custo de uma quantidade de uma mercadoria a ser comprada (preços no varejo e no atacado) – cálculos, descontos, impostos;
- problemas históricos dos números racionais e medidas;
- renda *per capita* e densidade demográfica (de diferentes países e estados) – interpretação, cálculos;

- velocidade em estradas — velocidade máxima, consumo de combustível – unidades, cálculos (tempos, distâncias) (Brasil,1998, p.140-141).

Já está posto nos PCNs (Brasil, 1998), como exemplo de trabalho interdisciplinar, a interação da matemática com o meio ambiente e com a saúde. O documento diz que a matemática pode favorecer uma visão mais clara de problemas ambientais ao quantificar aspectos que provocam esses problemas. Sugerem que, ao realizar um estudo detalhado de questões ambientais, o aluno faça uso de conceitos e procedimentos matemáticos como, por exemplo, a coleta, organização e interpretação de dados estatísticos. Em relação à interdisciplinaridade com a saúde, o documento dá um exemplo citando o elevado número de médicos/população de várias cidades, naquela época. Diz que em um primeiro momento esse número leva a pensar que o sistema de saúde seguia em bom funcionamento, mas após ser realizada a análise de outros dados como, as várias horas de trabalho dos profissionais da saúde do setor público, a falta de medicamentos e as condições de atendimento neste setor, conclui que o dado inicial não é determinante para concluir de modo amplo, a qualidade de funcionamento da área da saúde pública daquela época. Assim, ressalta que a aplicação da matemática em situações como essa, pode contribuir com a reflexão sobre a relatividade das medidas estatísticas. Através dessas conexões, o aluno estuda a matemática ao mesmo tempo em que debate assuntos pertinentes à sociedade em geral. Os PCNs (Brasil, 1998) também sugerem que os conteúdos do bloco Tratamento da Informação sejam trabalhados de modo interdisciplinar por meio de projetos mais amplos e que envolvem outras áreas do currículo.

Como conceitos e procedimentos para o terceiro ciclo do ensino fundamental, o documento propõe para o bloco Tratamento da Informação:

- Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
- Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
- Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa.
- Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.

- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão (Brasil, 1998, p.74 e 75).

Para o quarto ciclo do ensino fundamental, o documento propõe o aprofundamento do ensino do bloco Tratamento da Informação, através da:

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de freqüência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.
- Compreensão de termos como freqüência, freqüência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
- Distribuição das freqüências de uma variável de uma pesquisa em classes de modo que resuma os dados com um grau de precisão razoável.
- Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.
- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas (Brasil, 1998, p.90).

Os PCNs (Brasil, 2000), documento das áreas Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, também refletem a importância da interdisciplinaridade e da contextualização no ambiente escolar. Menciona a necessidade de suprir as carências de propostas interdisciplinares para o aprendizado da época que, como já dito, propiciam uma educação científica extremamente compartimentada, sobretudo no ensino médio. Porém, ressalta o avanço alcançado através da reflexão sobre a necessidade de transformar tal realidade, trazida por algumas leis e diretrizes recentes à época.

> Felizmente, pelo menos no plano das leis e das diretrizes, a definição para o Ensino Médio estabelecida na LDB/96, assim como seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98, apontam para uma revisão e uma atualização na direção correta. Vários dos artigos daquela Resolução são dedicados a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando

> uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizado (Brasil, 2000, p. 48).

Os PCNs (Brasil, 2000) difundiram, através de suas bases legais, a proposta da reforma curricular do Ensino Médio que valoriza a interdisciplinaridade e a contextualização a fim de proporcionar aos alunos um ensino em que os conhecimentos não sejam isolados, mas sim, interajam e enriqueçam sua formação com significado e autonomia.

> Partindo de princípios definidos na LDB, o Ministério da Educação, num trabalho conjunto com educadores de todo o País, chegou a um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender (Brasil, 2000, p. 4).

Com o passar do tempo muito foi sendo discutido a respeito da interdisciplinaridade na prática escolar e atualmente a BNCC (Brasil, 2018) é o principal documento de política pública que rege o ensino na escola básica. Tal documento cita como uma de suas decisões que caracterizam o currículo em ação a proposta de

> decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil, 2018, p.16).

A BNCC (Brasil, 2018) para o ensino médio, apresenta a área da Matemática como *Matemática e suas Tecnologias* e é definida através de competências específicas. Tal documento afirma que a nova estrutura valoriza o protagonismo juvenil já que oferta itinerários formativos variados que atendem a diversos interesses dos alunos. Podemos notar que atualmente há a preocupação em valorizar as habilidades e competências do aluno e que este tenha papel relevante na construção de seu conhecimento. Ao relacionar a Matemática com tecnologias, o documento já provoca uma interdisciplinaridade, o que ajudará o aluno a compreender que as áreas de conhecimento não precisam ser saberes isolados nem compartimentados, mas sim, uma união de saberes mutuamente importantes que se reconhecem como ferramentas acessíveis na solução de uma determinada questão.

Assim, o ensino interdisciplinar, além de possivelmente promover um processo de aprendizagem mais dinâmico e estimulador ao aluno, também contribui em uma formação mais sólida e com saberes interativos.

Ainda sobre a BNCC (Brasil, 2018), pode-se encontrar trechos que incentivam o chamado letramento matemático através de um ensino contextualizado desde o ensino fundamental.

> Segundo a Matriz do Pisa 2012, o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias." (Brasil, 2018, p. 266).

Para o documento, o letramento matemático pode auxiliar o aluno a compreender que os conhecimentos matemáticos proporcionam caráter de raciocínio lógico, crítico e investigativo na medida em que são utilizados em situações do cotidiano. Traz o letramento matemático como compromisso a ser trabalhado no contexto escolar e define o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação matemática, como competências e habilidades a serem desenvolvidas.

Assim, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas encontram-se na busca por uma educação enriquecedora, com atribuição de sentido e não fragmentada. A seguir apresentamos uma reflexão sobre a resolução de problemas no contexto escolar.

3
A abordagem da Resolução de Problemas

Um caminho importante na busca pela educação que promove a contextualização dos saberes é o ensino através da abordagem da resolução de problemas. Por meio dessa abordagem, o aluno pode assimilar com maior facilidade o que é ensinado, através da atribuição de significado que emerge quando se aplica o conteúdo estudado em situações práticas e cotidianas.

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (Polya, 1995, p.V).

Tratando especificamente sobre a resolução de problemas matemáticos, Romanatto (2012) destaca que, em um problema matemático, a solução não está acessível de início, mas há a possibilidade de construí-la. Destaca a importância de incentivar os alunos a refletirem e desenvolverem a curiosidade e a autonomia durante o processo de resolução do problema:

> Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos (Romanatto, 2012, p.302-303).

Romanatto ressalta que durante a resolução de problemas os alunos exercitam diversas capacidades e elaboram estratégias que levem à resolução. O autor considera que a resolução de problemas como uma metodologia de ensino da Matemática, pode proporcionar ao alunado uma aprendizagem com maior compreensão à medida que os alunos participam do processo de resolução de modo ativo e significativo.

Também destaca a importância do professor atuar como um orientador, uma espécie de mentor nessa metodologia de ensino. Propor problemas desafiadores e estimular os alunos na busca de estratégias no processo de resolução dos mesmos são ações fundamentais.

> Thompson (1989) afirma que um problema inclui quebra-cabeças, labirintos e atividades envolvendo ilusões com imagens e considera que problemas devem possibilitar uma variedade de abordagens para a sua solução, não devem depender só de elementos conhecidos, mas conduzir à busca e descoberta de novas ideias e, em geral, envolvem desafios, diversões e também frustrações (Romanatto, 2012, p.301).

Romanatto explica que na resolução de problemas, o professor não deve pedir aos alunos que o façam perguntas para que lhes dê as respostas, mas sim, criar questionamentos e indagações que levem os alunos à reflexão e elaboração de estratégias de resolução, atuando o professor desse modo, como problematizador de conteúdos.

O ensino através da resolução de problemas busca, a partir das orientações do professor, propiciar ao aluno um ensino por ele construído, desenvolvendo assim, seu raciocínio e sua criatividade.

A resolução de problemas apresenta conteúdos matemáticos inseridos em contextos que, muitas vezes, antes da realização do cálculo matemático, necessitam da interpretação do enunciado do problema. Pode ser que os alunos não resolvam o problema por não compreenderem a situação proposta, por isso a importância de desenvolver com os alunos a leitura do problema. “(...) a questão da leitura de um problema pode ser um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes. Dificuldades com o vocabulário ou com o simbolismo matemático podem ser determinantes para a compreensão ou não do enunciado do problema” (Romanatto, 2012, p.305).

Romanatto destaca que os processos de ensinar e aprender Matemática necessitam transformar-se, deixando de ser um treinamento técnico e tornando-se ferramentas de interpretação de diversos contextos relacionados à realidade dos alunos formando, desse modo, alunos criativos e críticos no exercício da cidadania. “Nessa perspectiva podemos afirmar que a resolução de problemas não é apenas outra metodologia de ensino, mas sim uma filosofia de ensino” (Romanatto, 2012, p.310).

> A resolução de problemas é uma parte integrante de todo aprendizado matemático. Não deveria ser uma parte isolada do programa matemático. A resolução de problemas na Matemática deve envolver todos os níveis de ensino da escolarização básica. Os contextos dos problemas podem variar de experiências cotidianas envolvendo a vida dos alunos ou o dia a dia escolar, bem como as ciências do mundo do trabalho. Bons problemas integrarão tópicos múltiplos e envolverão matemáticas significativas (Romanatto, 2012, p.307).

Dante (2002) apud Cardoso & Oliveira (2019) classifica os problemas como: problemas-padrão; problemas-processo ou heurísticos, problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeças. Cardoso & Oliveira explicam cada classificação do seguinte modo:

- Problemas-padrão: consistem na aplicação direta de algoritmos, não exigindo estratégia de resolução. Esses problemas abordam a reescrita da linguagem coloquial em linguagem matemática e a identificação e aplicação do algoritmo que resolve o problema.
- Problemas-processo ou heurísticos: geralmente não são resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, já que exigem a elaboração de estratégias que possibilitem a resolução. Dizem que esse tipo de problema inicia o aluno no campo da resolução de situações-problema, podendo contribuir para o desenvolvimento da criatividade e da iniciativa do aluno devido à necessidade de desenvolver estratégias e métodos de resolução.
- Problemas de aplicação: são problemas que abordam situações reais e necessitam de pesquisas e levantamento de dados que podem ser organizados em tabelas e gráficos.
- Problemas de quebra-cabeças: são desafiadores e geralmente a solução de um problema desse tipo baseia-se na sorte ou na percepção de algum truque que seja a chave de solução do problema.

Polya (1995) divide o processo de resolução de um problema matemático em quatro etapas: a compreensão do problema; o estabelecimento de um plano para resolver o problema; a execução do plano e o retrospecto. Segundo Polya há alguns questionamentos que podem ajudar no processo de desenvolvimento de cada uma dessas etapas. Esses questionamentos ajudam a esclarecer os objetivos de cada etapa.

Na etapa onde se desenvolve a compreensão do problema, o autor ressalta reflexões como: "*Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*" (Polya, 1995, p.4). Após essa etapa, a fim de estabelecer um plano para resolver o problema, surgem questionamentos que podem ser muito eficazes durante o processo, entre eles, o autor menciona: "*Conhece um problema correlato?* (...) *Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizá-lo?* (...) *É possível reformular o problema?*" (Polya, 1995, p.6).

Na etapa de execução do plano elaborado, duas indagações se destacam: "*É possível perceber claramente que o passo está certo?* Mas pode também *demonstrar que o passo está certo?*" (Polya, 1995, p. 9). Essas indagações podem auxiliar na reflexão sobre o que foi realizado até o momento.

Finalmente, na etapa do retrospecto, fundamental para a resolução de um problema, seria produtivo refletir sobre questões tais como: "*É possível verificar o argumento?* (...) *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?* (...) *É possível percebê-lo num relance?* (...) *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*" (Polya, 1995, p. 10 e 11).

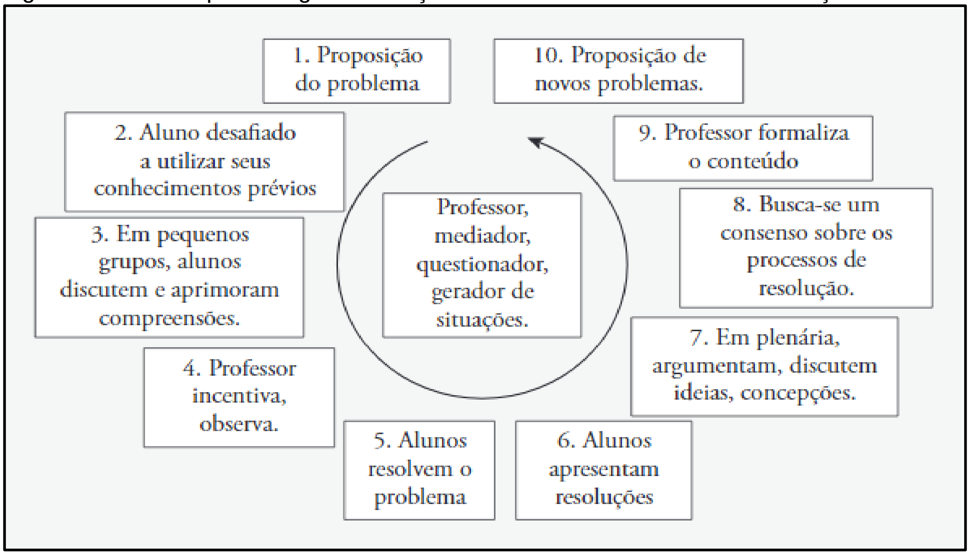
As etapas e questionamentos definidos por Polya (1995) para a resolução de problemas matemáticos são extremamente produtivos, pois esclarecem todo o funcionamento e processo que se percorre na busca de uma resolução. Os questionamentos estimulam o aluno a interpretar e refletir a respeito da situação-problema proposta e auxiliam na organização das informações e estratégias de resolução. Também lembram ao aluno a importância de conferir seus resultados e associar um problema analisado a outro já conhecido.

A resolução de problemas matemáticos inserida na sala de aula pode ser muito enriquecedora, pois através dela o aluno é estimulado a, antes de realizar qualquer cálculo matemático, (i) refletir sobre uma situação apresentada, (ii) analisar qual a melhor ferramenta matemática a ser utilizada para se chegar à solução do problema proposto, (iii) executar a ferramenta escolhida e (iv) conferir se ela atendeu ao que estava posto no enunciado do problema. A partir da problemática motivadora, é criado um "cenário" desafiador onde a estratégia de solução e o cálculo matemático envolvido são desenvolvidos e assim, a aplicabilidade do novo conceito fica contextualizada e ganha significado.

É importante que durante todo o processo de resolução de um problema, o aluno seja incentivado a questionar a respeito da situação apresentada, pois a formulação de questionamentos torna sua aprendizagem mais construtiva e sólida, visto que, o próprio aluno reflete em busca de uma estratégia para resolução. Por vezes, o resultado final esperado até pode ser o mesmo, mas, na maioria das vezes, os caminhos para alcançar a solução não são únicos e a discussão sobre eles é rica e traz muitos conhecimentos e trocas valiosas ao processo de ensino-aprendizagem.

Onuchic (1999) apud Allevato & Vieira (2016) propõe algumas etapas para implementar o ensino de Matemática através da resolução de problemas em sala de aula. Tais etapas ajudam a orientar o trabalho docente durante esse processo de execução. Allevato & Vieira dizem que, após várias pesquisas, esse roteiro foi aprimorado, sendo atualmente constituído por 10 etapas, as quais estão sintetizadas na figura 4.

Figura 4 - Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: Allevato & Vieira (2016, p. 119)

Por meio desse roteiro o professor poderá se orientar durante o planejamento e formulação de suas atividades ao ter em mente as etapas que ajudam o aluno a construir uma solução para um problema proposto.

Esse roteiro incentiva o professor a, durante a execução da atividade baseada na resolução de problemas, criar questionamentos e incentivos que levem o aluno à reflexão do problema, sempre se lembrando de propor ao alunado a resolução de problemas que lhe traga significado e que desafie sua curiosidade.

A aprendizagem por meio da resolução de problemas pode contribuir para um ensino motivador, sendo o aluno despertado a utilizar seus conhecimentos e habilidades para a construção de estratégias que atendam ao que é proposto, desenvolvendo sua iniciativa e tornando-o sujeito ativo desse processo. Romanatto (2012) ressalta que a resolução de problemas não é a única metodologia de ensino para a Matemática que proporciona um aprendizado produtivo e que outras tendências com objetivos semelhantes também devem ser valorizadas, pois assim, o aprendizado da Matemática se beneficiará cada vez mais.

> Vale destacar que essas características e possibilidades de um aprendizado mais amplo e produtivo não são exclusivas somente da resolução de problemas como metodologia de ensino para a Matemática. Elas estão também presentes em outras tendências diferenciadas para processo de ensinar e de aprender Matemática. E pensamos que o aprendizado da Matemática ganhará muito se caminhos diferenciados forem trilhados desde que fundamentos teóricos e metodológicos do trabalho habitual nessa área do conhecimento sejam revistos, aplicados e refletidos. A nossa proposta diferenciada é a resolução de problemas (Romanatto, 2012, p.310).

Com base na reflexão a respeito da interdisciplinaridade e da abordagem da resolução de problemas na educação, no próximo capítulo é abordado o conteúdo matemático deste trabalho que, por meio das duas bases teóricas mencionadas, constituirá o produto educacional proposto em sequência.

4
O Teorema de Bayes na Educação Básica

Neste capítulo é apresentada a proposta da BNCC (Brasil, 2018) para o ensino de estatística e probabilidade como uma introdução para chegar ao conteúdo matemático escolhido para o desenvolvimento do trabalho, o Teorema de Bayes.

4.1
Proposta da BNCC (Brasil, 2018) para o estudo da Estatística e da Probabilidade

Como mencionado no capítulo dois, a BNCC (Brasil, 2018) propõe, através do letramento matemático, um ensino em que ocorra o reconhecimento dos conteúdos matemáticos em situações do cotidiano. Na BNCC (Brasil, 2018) da Matemática, o Teorema de Bayes encontra-se inserido na unidade temática denominada Probabilidade e Estatística.

Para esta unidade, o documento apresenta uma proposta que se inicia no Ensino Fundamental 1. Os seguintes objetos de conhecimento são colocados para esse segmento: a noção de acaso; leitura e interpretação de tabelas e gráficos de colunas, barras, linhas e pictóricos; coleta, organização, classificação e representação de dados em tabelas e gráficos, com e sem uso de tecnologia; análise da ideia de aleatório em situações do dia a dia; análise de chances de eventos aleatórios; espaço amostral e cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis. A noção de acaso, introduzida no 1º ano do Fundamental 1, refere-se a classificar a ocorrência de eventos envolvendo o acaso em "com certeza", "talvez" ou "impossível de ocorrer" e no 2° ano deste ciclo é estimulado que o aluno reconheça eventos aleatórios presentes em seu cotidiano, classificando suas ocorrências como muito prováveis, improváveis ou impossíveis. Após esse reconhecimento, para o 3° e 4° ano do Fundamental 1 é proposto que o aluno se aproprie de habilidades como estimar e identificar os eventos que têm maiores ou menores chances de ocorrer. Já no 5° ano, último ano do Fundamental 1, é realizado o estudo do espaço amostral, apresentando todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, estimando se tais resultados são igualmente prováveis ou não e, finalmente, o ciclo se encerra com o estudo da probabilidade de ocorrência de eventos equiprováveis.

Analisando o Ensino Fundamental 2, percebe-se que a leitura, interpretação, coleta e representação de dados em tabelas e gráficos também é desenvolvida. Além disso, há o ensino de medidas de tendência central e de dispersão e do princípio multiplicativo.

No campo probabilístico, no fundamental 2, o documento propõe o trabalho com o cálculo de probabilidades com abordagens diversas: (i) como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis (em um espaço amostral equiprovável), (ii) por meio de muitas repetições de um experimento (iii) por meio de frequência de ocorrências de experimentos aleatórios, (iv) com base na construção do espaço amostral, fazendo uso do princípio multiplicativo, e reconhecendo o número 1 como o resultado da soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral. No 9° ano, último ano do Fundamental 2, é desenvolvida a análise de probabilidade de eventos aleatórios, eventos dependentes e independentes.

Dessa forma, espera-se que o aluno que inicia o ensino médio, já tenha tido contato com todos os conceitos apresentados nos parágrafos anteriores.

A BNCC (Brasil, 2018) apresenta 5 competências específicas para área Matemática e suas Tecnologias no ensino médio. O documento ressalta que tais competências específicas não seguem uma sequência de execução, mas sim, estão conectadas em modo amplo. Assim, mesmo que uma habilidade seja associada à determinada competência, não se impede que esta habilidade contribua para as demais.

As competências específicas buscam levar o alunado a adquirir habilidades matemáticas através do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos em contextos cotidianos, no qual esses conhecimentos matemáticos podem contribuir para a análise crítica de fatos sociais e para a resolução de problemas relacionados a temas comuns à sociedade em geral, como por exemplo, saúde e sustentabilidade.

A figura 5 apresenta as habilidades desenvolvidas pelas competências específicas em relação à Probabilidade e Estatística.

Figura 5 - Habilidades de probabilidade e estatística das competências específicas para o ensino médio segundo a BNCC (Brasil, 2018)

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
HABILIDADES
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Brasil (2018, p. 546)

Assim, espera-se que o aluno tenha desenvolvido no decorrer de seu processo de aprendizagem na educação básica, as habilidades citadas na figura 5.

A próxima seção se concentra no conteúdo matemático base deste trabalho, o teorema de Bayes. O objetivo emanado pela reflexão até aqui proposta é que a introdução da ideia do teorema de Bayes no ensino médio se dê através de sua construção por meio da interdisciplinaridade e da abordagem da resolução de problemas.

4.2 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é um teorema amplamente utilizado no campo das probabilidades. Foi assim denominado em referência a Thomas Bayes, pastor presbiteriano e matemático inglês que viveu no século XVIII. Segundo Pena (2006), Thomas Bayes escreveu o 'Ensaio buscando resolver um problema na doutrina das probabilidades', documento em que se encontra o referido teorema. Richard Price[4], amigo de Thomas Bayes, teria encontrado tal documento entre os papéis do colega, após seu falecimento, e apresentado o documento à *Royal Society*.

4.2.1 O Teorema

Fórmula geral do Teorema de Bayes:

$$P(A_j | B) = \frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)}\ ,\ j= 1, 2, ... , k$$

onde:

- $P(A_j)$ e $P(A_i)$ são as probabilidades a priori (a probabilidade a priori de um evento é calculada sem o conhecimento prévio da ocorrência de qualquer outro evento) de A_j e A_i;
- $P(A_j | B)$ é a probabilidade a posteriori de A_j condicional a B, ou seja, a probabilidade de A_j ocorrer, dado que B já ocorreu (a probabilidade do evento A_j ocorrer é calculada ao se levar em consideração a ocorrência prévia do evento B);
- $P(B | A_j)$ é a probabilidade a posteriori de B condicional a A_j, ou seja, a probabilidade de B ocorrer, dado que A_j já ocorreu;
- $P(B | A_i)$ é a probabilidade a posteriori de B condicional a A_i, ou seja, a probabilidade de B ocorrer, dado que Ai já ocorreu.

[4] Filósofo, ministro da igreja dissidente da Inglaterra e político republicano liberal do século XVIII.

Com base em Souza (2022) e Farias (2010), a seguir é demonstrado o Teorema de Bayes.

Demonstração:

A probabilidade condicional calcula a probabilidade de um evento A ocorrer perante o conhecimento prévio da ocorrência de um evento B. O cálculo se dá seguinte maneira:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 \tag{1}$$

De modo análogo, calcula a probabilidade de um evento B ocorrer perante o conhecimento prévio da ocorrência de um evento A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0 \tag{2}$$

Como $A \cap B = B \cap A$ pela comutatividade, então, $P(A \cap B) = P(B \cap A)$.

Logo, por (1) e (2), temos:

$$P(A \mid B)\, P(B) = P(B \mid A)\, P(A) \text{ e consequentemente,}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)} \quad \rightarrow \text{Fórmula Simples do Teorema de Bayes} \tag{3}$$

Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ uma partição do espaço amostral S e seja B um evento qualquer em S.

Como S é a união de todos os A_i's, então,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$$

Os A_i's são mutuamente exclusivos dois a dois (pela definição de partição), assim, os eventos $A_i \cap B$ também são. Desse modo, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)]$$
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots + P(A_k \cap B)$$

E pela regra da multiplicação:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) + \ldots + P(A_k)P(B \mid A_k),$$

Teorema da probabilidade total.

(4)

Por (3) temos:

$P(A_j \mid B) = \dfrac{P(B \mid Aj)\, P(Aj)}{P(B)}$, e substituindo P(B) por (4):

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid Aj)P(Aj)}{P(A1)P(B \mid A1) + P(A2)P(B \mid A2) + P(A3)P(B \mid A3) + \ldots + P(Ak)P(B \mid Ak)}$$

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid Aj)\, P(Aj)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid Ai)P(Ai)}\text{ , j= 1, 2, ..., k}$$

C. Q. D.

4.2.2 Contribuições do teorema de Bayes para outros campos

O teorema de Bayes é frequentemente aplicado em outros campos além da Matemática. Alguns deles são bem interessantes e inusitados. Nessa seção apresentamos algumas dessas aplicações com o objetivo de ampliar o espectro de conhecimento sobre o tema e, quem sabe, provocar o interesse por pesquisas mais detalhadas sobre as ocorrências apresentadas.

BBC News Brasil (2021) menciona a importância do teorema na análise de testes diagnósticos e no estudo do Universo, por exemplo. Em relação a testes diagnósticos, a página cita a ajuda do teorema em analisar possíveis resultados falso-positivos, ao se levar em consideração informações prévias como o índice de determinada doença na população. A fim de esclarecer, supõe um teste diagnóstico de determinada doença. Esse teste apresenta resultado correto em 99% dos casos, mas essa doença é muito rara, então, se uma pessoa for selecionada aleatoriamente na população, realizar o teste e apresentar resultado positivo, a probabilidade de que ela, de fato, tenha a doença é muito pequena. Ressalta que sem o raciocínio bayesiano, talvez a pessoa se assustasse com o resultado e se submetesse a procedimentos arriscados devido a um diagnóstico erroneamente avaliado.

A BBC também destaca que o estudo do Universo foi revolucionado através do raciocínio bayesiano, pois, combinado com a computação avançada, as estatísticas bayesianas contribuíram para calcular a idade do Universo com maior precisão. Campos (2008) cita a já utilização da teoria das probabilidades bayesianas por Laplace[5]:

> Laplace utilizou a teoria de probabilidades Bayesianas para estimar a massa de Saturno, utilizando a informação orbital de diversos observatórios e as leis físicas, seu resultado foi tão bom que em mais de 150 anos de observações posteriores, só modificaram o valor estimado por Laplace em 0,63% (Campos, 2008, p.6).

A página da BBC traz relatos de Bertsch McGrayne, autora do livro ‘A Teoria que Nunca Morreu’, que mencionam a aplicação do referido teorema na informática e na inteligência artificial. Reis (2022) explica que atualmente são realizados os registros de fenômenos físicos e humanos de modo cada vez mais preciso e minucioso e que através desses registros, se produz dados que podem ser utilizados em tempo real. Devido ao avanço da capacidade computacional é possível que esses dados sejam utilizados para realizar recálculos constantes e com grande rapidez.

> Algoritmos que usam o Teorema de Bayes, hoje, podem produzir previsões mais acuradas em diferentes campos como: a criação de vacinas, tradução de idiomas estrangeiros, predição de crimes, investigações sobre doenças, quebra de senhas, análise de discursos, busca por novos planetas, busca e resgate em acidentes ocorridos em áreas remotas, etc (Reis, 2022).

[5] Pierre-Simon Laplace, matemático e físico francês nascido no século XVIII.

Outra contribuição do teorema é atribuída aos tribunais de justiça. Esta contribuição se dá através do esclarecimento que o raciocínio bayesiano proporciona em processos jurídicos, impedindo que pessoas inocentes sejam condenadas. A essa condenação indevida deu-se o nome de Falácia do promotor (ou do advogado de defesa). Yamashita (2023) explica que a falácia do promotor ocorre ao se realizar um cálculo estatístico, omitindo parte do contexto. A fim de explicar como o raciocínio bayesiano é empregado para evitar condenações injustas cita como exemplo dois casos que viraram processos de acusação. O primeiro caso refere-se a uma enfermeira acusada de matar os pacientes da unidade onde trabalhava, baseado no elevado número de mortes de pacientes por ataques cardíacos no período em que estava de plantão, atuando como enfermeira primária. Essa taxa de mortalidade estava acima da média considerando períodos semelhantes e outras enfermeiras. Outro dado utilizado neste processo foi que a probabilidade de ocorrência de mortes em condições similares às da enfermeira foi estimada como sendo de uma chance em cem trilhões. Mesmo tudo levando a acreditar que ela seria condenada, a enfermeira foi absolvida. O outro caso é de um médico acusado do mesmo crime. Foi observada uma alta taxa de mortalidade em pacientes sob seus cuidados, mas, além disso, também se verificaram alterações suspeitas nos testamentos das vítimas, incluindo o médico como herdeiro das mesmas e doses letais de sedativos encontradas em pacientes saudáveis. O médico foi declarado culpado e condenado. Neste caso, além do alto número de mortes, outras evidências foram levadas em consideração. Comparando as duas situações, Yamashita (2023) explica que os dois processos surgiram a partir do elevado número de pacientes mortos, mas a diferença entre eles é que no caso da enfermeira esse era o único dado, já no caso do médico havia também uma série de evidências, as quais Yamashita chama de condicionantes. Desse modo, no caso do médico, o cálculo da probabilidade da alta taxa de mortalidade acontecer dada a existência dessas condicionantes deve ser diferente do cálculo para o caso da enfermeira, onde o alto número de mortes era o único dado em questão. As condicionantes do caso do médico teriam atribuído “peso” a acusação, levando-o a ser considerado culpado. Já para o caso da enfermeira, Yamashita ressalta que coincidências acontecem e a probabilidade de algo acontecer, mesmo que seja pequena, deve levar em conta a totalidade da amostra que está sendo considerada. O autor destaca que além da má interpretação dos dados estatísticos, outros fatores como a possibilidade de alguns profissionais da saúde serem mais eficientes do que outros ao registrarem no sistema as mortes em seus plantões, podem dificultar a avaliação correta de um caso.

Na área das linguagens, especialmente na tradução de idiomas, o teorema de Bayes também realiza suas contribuições. Segundo Ordóñez (2023), a tradução automática estatística (SMT ou StatMT) consiste em uma tradução automática na qual é produzida, para cada elemento de uma frase, a saída mais provável (tradução). Diz que a SMT é baseada no uso de modelos estatísticos que a partir de dois textos que apresentem o mesmo conteúdo (um na língua de origem e outro na língua de destino), analisam as relações entre eles.

> Um texto é traduzido com base na probabilidade de que uma seqüência de palavras na língua de destino seja a tradução da seqüência de palavras na língua de origem. Ou seja, com base na probabilidade *p(e|f)*, onde:
> - *e: é* a string da língua de origem.
> - *f: é* a string da língua de destino (Ordóñez, 2023).

Ordóñez diz que o teorema de Bayes é a abordagem mais implementada neste modelo de distribuição probabilística e que o teorema divide o modelo em dois subproblemas. Ao escolher o resultado com a maior probabilidade é obtida a melhor tradução.

O teorema também ajuda na localização de objetos perdidos. A BBC News Brasil (2014) menciona que o raciocínio bayesiano já ajudou nas buscas por aeronaves acidentadas no mar. Diz que para a busca do voo AF447 da Air France, a Autoridade Francesa de Investigações de Acidentes (BEA, em francês) decidiu pedir ajuda a uma equipe de especialistas em estatística que trabalham na localização de objetos perdidos no mar e destaca que tal equipe se baseou no teorema de Bayes. Foi avaliado o grau de incerteza de cada dado disponível, e a partir disso, dividiu-se a área de busca em quadrados a fim de calcular a probabilidade de encontrar destroços em cada uma dessas seções. Para esse cálculo analisaram, por exemplo, as várias falhas mecânicas que poderiam ocorrer, o que acarretou em diferentes graus de probabilidade para cada cenário. Também foi feito o estudo de dados históricos a respeito de outros acidentes já ocorridos e a redução da probabilidade dos locais onde buscas já haviam sido feitas sem sucesso. BBC News também destacou que, Collen Keller, um dos integrantes da equipe de especialistas que ajudou a BEA durante a busca do voo

AF447, descreveu a técnica de Bayes como flexível, na medida em que o mapa das probabilidades se atualiza a cada novo dado incorporado. Menciona que o mapa das probabilidades feito por Keller, ajudou a limitar a área de busca. “Há dois componentes que fazem da matemática de Bayes algo único. Por um lado, permite considerar toda a informação incluindo diferentes graus de incerteza e combinar dados, até mesmo probabilidades excludentes” (Keller apud BBC News Brasil, 2014).

O teorema também está presente na Teoria da Resposta ao Item (TRI). Segundo Kilhian (2011), o teorema de Bayes foi a principal ferramenta utilizada pelos criadores da TRI. O Ministério da Educação (MEC) utiliza a TRI no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), durante a correção das provas e pontuação dos candidatos no exame. A Secretaria de Comunicação Social (2022) destaca que o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) criou um documento a fim de esclarecer como o desempenho de candidatos no ENEM era calculado. O Inep (Brasil, 2021) define a TRI do seguinte modo:

> A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que busca representar a relação entre a probabilidade de o participante responder corretamente a uma questão, seu conhecimento na área em que está sendo avaliado e as características (parâmetros) dos itens (Brasil, 2021, p.8).

A Secretaria de Comunicação Social diz que o documento explica que, no ENEM, a nota de uma pessoa não é calculada somente com base no número de erros e acertos que obteve, já que duas pessoas podem obter o mesmo número de erros e acertos e ainda assim apresentarem notas distintas, pois depende de quais foram as questões erradas e quais foram as acertadas. Explica também que a TRI “mede o peso” de uma questão de acordo com:

> 1.Parâmetro de discriminação: poder que cada questão possui de diferenciar participantes que dominam a habilidade avaliada daqueles que não dominam.
> 2.Parâmetro de dificuldade: quanto mais difícil a questão, maior seu valor.
> 3.Parâmetro de acerto casual: probabilidade de um participante acertar a questão no "chute", sem necessariamente ter domínio do tema (Secretaria de Comunicação Social, 2022).

Kilhian esclarece como a TRI funciona a partir do seguinte raciocínio. Suponha que em determinado exame, um candidato (nomeado pelo autor como

Isaac Newton) tenha resolvido as questões de matemática que sabia e chutado as que não sabia. Ao ver o gabarito do exame, esse aluno descobriu ter acertado uma das questões chutadas, porém ao acessar sua nota individual, perceberia que o Inep utilizou seus computadores a fim de analisar suas respostas e gerar um relatório, no qual indiretamente apresentava a seguinte mensagem: "É muito alta a chance de que nosso amigo Isaac Newton tenha acertado essa questão no chute. Nós, computadores, recomendamos desconsiderar essa questão na nota final do Isaac Newton” (Kilhian, 2011). A fim de explicar a mensagem, Kilhian propõe a análise das respostas de cinco alunos em cinco questões de uma avaliação. Se nessa avaliação, um aluno acerta todas as cinco questões, provavelmente este aluno sabe 100% do que deveria; se acerta quatro questões, provavelmente sabe 80% do que deveria; se acerta três questões, provavelmente sabe 60% e assim, sucessivamente. Porém, Kilhian destaca que a TRI também analisa, por exemplo, o possível fato de só um aluno ter acertado a questão 1, considerando-a desse modo, muito difícil para 80% dos alunos. Seguindo o raciocínio, se três alunos acertam a questão 2, então ela seria difícil para 40% dos alunos. Se quatro pessoas acertaram a questão 3, então ela seria difícil para apenas 20% dos alunos, sendo assim, considerada uma questão fácil. Considere as questões 4 e 5 também classificadas como fáceis. Se um sexto aluno realizar o teste e acertar duas questões, provavelmente sabe 40% do que deveria. Porém, sendo a questão 1, uma das duas questões acertadas, Kilhian questiona qual seria a lógica em um aluno acertar uma questão difícil e errar questões fáceis. Kilhian explica que ao realizar um teste comum, o MEC só tem como informação adquirida, o número de acertos e de erros de um candidato, já utilizando todas as ferramentas estatísticas da TRI, consegue descobrir, com maior grau de precisão, o que um candidato sabe ou não. Tufi Machado Soares[6] apud Kilhian explica que em um modelo estatístico baseado na TRI:

> dá para ajustar o grau mínimo de conhecimento para responder a uma questão com 50% de chance, dá para ajustar até que ponto a questão vai discriminar entre quem sabe e quem ignora, e dá para saber a probabilidade de que alguém acerte a questão por acaso (chutando) (Kilhian, 2011).

[6] Professor da Universidade Federal de Juiz de Fora (MG) e coordenador de pesquisa do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação.

Kilhian ressalta que especialistas independentes e técnicos do Inep mencionam inúmeras vantagens da Teoria da Resposta ao Item. Dizem que através dela, em uma avaliação, é possível cancelar uma questão errada sem que nenhum candidato saia prejudicado, já que as questões válidas são a base do cálculo das probabilidades e afirma que os computadores podem perceber que, se muitos candidatos com elevado conhecimento erram determinada questão, provavelmente tal questão não tenha sido escrita com clareza. Kilhian cita médicos, esportistas, propagandistas, militares e administradores de empresas como outros profissionais que utilizam o método estatístico TRI.

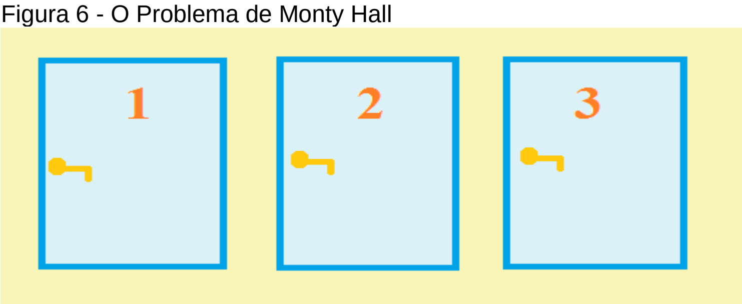
Essas são algumas das contribuições que o raciocínio bayesiano proporciona a outras áreas, muitas outras estão presentes no nosso cotidiano. Para encerrar as discussões sobre o teorema, nas próximas duas seções apresentamos a aplicação do teorema de Bayes em dois problemas conhecidos na literatura.

4.2.3
O problema de Monty Hall

Segundo o Portal Clubes de Matemática da OBMEP, esse problema matemático foi inspirado no jogo de um programa de televisão americana dos anos 70. Esse jogo era chamado *Let's Make a Deal* e apresentado por Monty Hall[7].

O problema consiste na seguinte situação: São apresentadas três portas fechadas a um participante e informado que atrás de uma das portas há um carro e atrás das outras duas, um bode em cada. O participante deve escolher uma das portas a fim de levar o que estiver na porta escolhida.

Figura 6 - O Problema de Monty Hall



Fonte: Figura elaborada pela autora (2024)

[7] Monte Halperin, canadense conhecido pelo nome artístico de Monty Hall. Foi um mestre de cerimônias, produtor de televisão, cantor, ator e comentarista esportivo.

Após a explicação o participante realiza sua escolha, mas a porta escolhida permanece fechada. A partir disso, e sabendo em qual porta está o carro, o apresentador abre uma das duas portas não escolhida e que contém um bode e então pergunta ao participante se ele continua com a porta escolhida inicialmente ou se gostaria de trocá-la pela outra porta fechada. Qual seria a melhor decisão para o participante?

O Portal diz que, em um primeiro momento, muitas pessoas podem pensar não importar a decisão do participante após a pergunta, pois erroneamente calculam que naquela etapa do jogo cada porta tem a mesma chance de conter o carro, 50%. O portal apresenta uma solução que reconhece parecer contra intuitiva, mas justifica a verdadeira resposta do problema de Monty Hall.

Analisando os dados do problema, tem-se que, ao serem apresentadas inicialmente ao participante as três portas fechadas, a chance que a porta escolhida pelo participante seja a porta com o carro é igual a $\frac{1}{3}$. Assim, as outras duas portas consistem juntas em $\frac{2}{3}$ de chance de o participante não ganhar o carro, ou seja, $\frac{2}{3}$ de chance de o carro estar em uma porta não escolhida pelo participante.

Quando o apresentador abre uma das portas não escolhidas pelo participante e que contém um bode, os $\frac{2}{3}$ de chance de o participante não ganhar o carro são direcionados à uma só porta, a porta não escolhida por ele e que o apresentador manteve fechada. Nesse momento, existem duas portas fechadas, a escolhida pelo participante e a porta que o apresentador, dentre as portas não escolhidas pelo participante, não abriu. Desse modo, com a porta escolhida, o participante continua com $\frac{1}{3}$ de chance de ganhar o carro e a outra porta fechada, não escolhida pelo participante, representa $\frac{2}{3}$ de chance de ele ganhar o carro. Logo, seria mais vantajoso que o participante trocasse de porta.

Esse é um problema solucionável pelo teorema de Bayes. A solução através da aplicação do teorema é feita pelo portal seguindo o seguinte raciocínio. Sejam os eventos:

C1: carro está atrás da porta 1;

C2: carro está atrás da porta 2;

C3: carro está atrás da porta 3.

Inicialmente, no momento em que as três portas permanecem fechadas, a probabilidade de qualquer porta escolhida pelo participante conter o carro é $\frac{1}{3}$.

$$P(C1)= P(C2)= P(C3)= \frac{1}{3}$$

Suponhamos que o participante escolha a porta 1. Então o apresentador deve abrir dentre as portas não escolhidas, a que tem um bode. Ou seja, o apresentador abrirá a porta 2 ou a porta 3. Vale lembrar que o apresentador sabe onde está o carro. Suponhamos que o apresentador abra a porta 2. Há dois casos que permitem que o apresentador abra a porta 2:

- Se o carro estiver na porta 1;
- Se o carro estiver na porta 3.

Seja A2, a representação para a abertura da porta 2 pelo apresentador. Desse modo:

Se o carro estivesse na porta 1, o apresentador poderia abrir aleatoriamente qualquer uma das duas portas não escolhidas pelo participante, assim, a probabilidade de abrir a porta 2 é ½, isso é o mesmo que dizer que a probabilidade de abrir a porta 2 sabendo que o carro está na porta 1 é ½.

$$P(A2 \mid C1)= \tfrac{1}{2}$$

Já se o carro estivesse na porta 3, o apresentador obrigatoriamente teria que abrir a porta 2, ou seja, a probabilidade de abrir a porta 2 neste caso é 1, o mesmo que dizer, a probabilidade de abrir a porta 2 sabendo que o carro está na porta 3 é 1.

$$P(A2 \mid C3)=1$$

Então, aplicando o teorema de Bayes a fim de analisar se é vantajosa a troca da porta 1 (escolhida pelo participante) pela porta 3, a probabilidade de a porta 3 ter o carro sabendo que o apresentador abriu a porta 2, pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(C3 \mid A2) = \frac{P(C3) . P(A2 \mid C3)}{P(A2)}$$

$$P(C3 \mid A2) = \frac{P(C3) . P(A2 \mid C3)}{P(C1) . P(A2 \mid C1) + P(C2) . P(A2 \mid C2) + P(C3) . P(A2 \mid C3)}$$

$$P(C3 \mid A2) = \frac{\frac{1}{3} . 1}{\frac{1}{3} . \frac{1}{2} + \frac{1}{3} . 0 + \frac{1}{3} . 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Logo, com a porta 3, a probabilidade do participante ganhar o carro é maior do que com a porta 1 e portanto é mais vantajoso que ele troque de porta.

O resultado é análogo para qualquer escolha inicial do participante seguida de qualquer decisão de abertura de porta feita pelo apresentador.

4.2.4

The Harvard Medical School Test

The Havard Medical School Test é um problema também solucionável pelo teorema de Bayes. Vieira (2015) menciona que o problema foi proposto aos alunos da Escola de Medicina de Harvard e consistia na análise de um teste diagnóstico de uma doença D. O problema disponibiliza os seguintes dados:

- Há dois resultados possíveis para o teste, positivo ou negativo;
- Estima-se que seja 0% provável obter como resultado um falso negativo e 5% provável obter um falso positivo;
- Uma pesquisa mostra que a incidência da doença D é de 1 caso a cada 1000 habitantes.

Uma pessoa foi escolhida aleatoriamente na população para a realização do teste diagnóstico da doença D e após realizar o teste, o resultado que a pessoa obteve foi positivo. Qual é a probabilidade dessa pessoa de fato ter a doença D?

Vieira (2015) cita que a maioria dos alunos apresentou a taxa de 95% como resposta ao questionamento, mas mostra que esta não é a resposta correta com o seguinte raciocínio que utiliza o teorema de Bayes.

Seja P a representação para o resultado positivo para o teste e N para o resultado negativo.

Se uma pessoa realmente tem a doença D, como é 0% provável que se obtenha um falso negativo, então 100% é a probabilidade do resultado do teste ser um verdadeiro positivo.

P(N | D)= 0

P (P | D)= 1, tal probabilidade é chamada de sensibilidade.

Representemos por ~D a pessoa não ter a doença D. Se uma pessoa não tem a doença D, há duas opções de resultado: se der positivo é um falso positivo e se der negativo é um verdadeiro negativo.

P(P | ~D)= 0,05

P(N | ~D)= 1 - 0,05= 0,95, tal probabilidade é chamada de especificidade.

Também é preciso analisar a faixa de incidência da doença D.

P(D)= 0,001

P(~D)= 1- 0,001= 0,999

Logo, a probabilidade de a pessoa ter a doença D sabendo que o resultado do seu teste diagnóstico é positivo, pode ser encontrada através do cálculo a seguir.

$$P(D \mid P) = \frac{P(D)\,.P(P \mid D)}{P(P)}$$

$$P(D \mid P) = \frac{P(D)\,.P(P \mid D)}{P(D)\,.\ P(P \mid D) + P(\sim D)\,.\ P(P \mid \sim D)} = \frac{0{,}001\ .\ 1}{0{,}001\ .\ 1 + 0{,}999\ .\ 0{,}05}$$

$$= \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}04995} = \frac{0{,}001}{0{,}05095} \approx 0{,}0196$$

Ou seja, a probabilidade de a pessoa realmente ter a doença D é aproximadamente 1,96%.

O resultado do cálculo acima é o que se chama Valor Preditivo Positivo (VPP) e, denomina-se Valor Preditivo Negativo (VPN), a probabilidade da pessoa realmente não estar doente quando o resultado é negativo.

5
Produto Educacional

A partir das bases teóricas mencionadas neste trabalho foi elaborada uma sequência de atividades como produto educacional, fruto dessa pesquisa. Neste capítulo é descrito o processo de elaboração desse produto, seus objetivos e a análise do mesmo segundo as bases teóricas que embasam este trabalho.

5.1
O produto: elaboração e objetivos

O produto educacional aqui descrito é derivado das bases teóricas que embasam o tema deste trabalho: a interdisciplinaridade e abordagem pela resolução de problemas. Trata-se de uma sequência de atividades composta por 4 atividades interdisciplinares que, através da resolução de problemas práticos e voltados à realidade do alunado, buscam construir o conceito do Teorema de Bayes no ensino médio. Espera-se que os alunos já compreendam conceitos básicos de probabilidade, mas caso esta não seja a realidade, por meio das duas primeiras atividades é possível que o professor utilize os primeiros itens para estimular o aluno a construir o entendimento de tais conhecimentos. O produto educacional, intitulado *Uma sequência de atividades para trabalhar o Teorema de Bayes na escola básica*, ficará disponível para a utilização integral ou parcial.

Como foi apresentado no capítulo anterior, a Matemática é uma ciência presente em diversos campos do conhecimento e aplicável em contextos do cotidiano. Devido a esse fato, a sequência de atividades foi elaborada a fim de promover o compartilhamento de saberes com outros campos do conhecimento, para assim desenvolver um ensino interdisciplinar. Nesse produto educacional foram provocadas conexões entre a Matemática e as Artes, a Geografia, a Música, a Astronomia, a História e também com o jogo de xadrez. Em todos esses saberes é possível construir conexões diversas, em alguma medida, com a Matemática. Algumas dessas conexões estão descritas a seguir.

Segundo Tagliani (2023), a proporção áurea[8], também chamada de número de ouro, está presente em diversos elementos da natureza. Esses elementos destacam-se por sua beleza e harmonia. Muitos artistas utilizaram a proporção áurea na confecção de seus trabalhos tais como pinturas, esculturas, fotografias e projetos arquitetônicos. A pintura denominada O Nascimento de Vênus, de Botticelli[9], é um desses exemplos. A proporção áurea também foi utilizada para construir as Pirâmides de Gizé, localizadas no Egito.

Ao pesquisar sobre a aplicabilidade da matemática na música, encontramos conexões que surgem desde a antiguidade. Mingatos (2006) diz que um dos primeiros registros desta relação é o experimento com os sons do monocórdio[10], realizado por Pitágoras de Samos[11] e com grandes contribuições à música.

No campo da Astronomia, a matemática também mostra sua contribuição desde a antiguidade. Muitos matemáticos também eram astrônomos e, de acordo com IF-UFRGS, Tales de Mileto[12], após estar convencido da curvatura da Terra e saber que o Sol iluminava a Lua, previu a ocorrência do eclipse solar de 584 a.C.

Ao pesquisar mais interações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, chega-se à Teoria das probabilidades. Rocco (2020) diz que as primeiras menções à Teoria das probabilidades foram relacionadas a jogos em que o resultado é influenciado pela aleatoriedade. Embora o xadrez seja um jogo de estratégia, durante a elaboração do produto educacional foram pesquisados tópicos relacionados a tal jogo. Segundo o website Chess.com, o xadrez utiliza um sistema que calcula a força relativa dos jogadores baseando-se nos resultados de suas partidas anteriores, atualizando o cálculo a cada nova partida jogada. Esse sistema chama-se Sistema de Rating Elo e embora a "força" de um jogador não seja absoluta, o sistema define que quando dois jogadores disputam várias partidas é provável que o jogador de rating superior vença a maioria delas. O xadrez é um jogo frequentemente praticado nas escolas. O Dia a Dia Educação do Portal Educacional do Estado do Paraná menciona que na Romênia o xadrez é

---

[8] Constante real algébrica irracional.

[9] Pintor italiano nascido em 1445.

[10] Instrumento composto por uma caixa de ressonância na qual é estendida uma única corda presa a dois cavaletes móveis.

[11] Filósofo e matemático grego nascido no século VI a. C.

[12] Filósofo pré-socrático, matemático e astrônomo da Grécia Antiga.

considerado disciplina escolar obrigatória e as notas em matemática dependem em 33% do desempenho no xadrez.

As conexões mencionadas aqui serviram de inspiração para a elaboração da sequência de atividades interdisciplinar com foco no Teorema de Bayes e pautada na resolução de problemas.

Cada atividade elaborada inicia-se por um texto explicativo contendo dados informativos sobre a área em que se desenvolve a interdisciplinaridade. Após esse texto é proposta uma situação-problema envolvendo o campo probabilístico, na qual os dados necessários para a solução do problema encontram-se no texto explicativo. Desse modo, o problema além de abordar contextos onde o alunado se encontra inserido, também aborda saberes reais que enriquecem a aprendizagem destes alunos através de outras áreas. Consequentemente o aprendizado do Teorema de Bayes se torna interativo, contextualizado e significativo.

5.2 Análise das atividades segundo as bases teóricas

O objetivo aqui é realizar uma análise das atividades propostas no produto educacional, segundo as fundamentações teóricas estabelecidas nos capítulos 2 e 3, que são:

- A Ilha Interdisciplinar de Racionalidade de Fourez (1997) apud Siqueira & Gaertner (2015);
- As 4 etapas de Polya (1995) para a resolução de um problema matemático e
- As etapas para implementar o ensino de Matemática através da resolução de problemas em sala de aula, segundo Onuchic (1999) apud Allevato & Vieira (2016).

As etapas da Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR), descritas na figura 3, muito contribuíram para a elaboração do produto educacional. Ao criar a sequência de atividades interdisciplinares, fez-se necessário a realização de pesquisas sobre alguns assuntos das áreas em que se desenvolve a proposta do ensino interdisciplinar. Neste momento, foram realizadas as etapas denominadas panorama espontâneo e consulta a especialistas. Após a construção dos textos informativos, baseados nas pesquisas desenvolvidas, ocorreu a etapa nomeada "indo a prática", a qual se caracterizou pela escolha e elaboração de uma possível contextualização em que se relacionam as informações de cada área a uma situação-problema de interesse do alunado. Como conclusão deste processo, desenvolveu-se a etapa de sistematização, momento em que a sequência de atividades foi efetivamente produzida. Cabe ressaltar que todas as etapas da IIR foram cuidadosamente planejadas na busca do objetivo traçado, reforçando as ideias.

As subseções a seguir descrevem e analisam, segundo os outros referenciais, a confecção de cada uma das 4 atividades presentes no produto educacional.

5.2.1 As 14 Maravilhas do Mundo

Essa atividade aborda as 14 maravilhas do mundo, antigo e moderno, propondo uma situação-problema que conecta as disciplinas de Matemática, Artes e Geografia. O texto informativo apresentado explica o surgimento das 7 maravilhas do mundo antigo, o processo de escolha das 7 maravilhas do mundo moderno e, através das figuras 7 e 8, ilustram todas as maravilhas e suas localizações.

Dentre todos os dados, apresentam como fundamentais para a resolução do problema proposto, os seguintes fatos segundo Galileu (2019) e Resende (2022):

- Existem 7 maravilhas do mundo antigo;
- Existem 7 maravilhas do mundo moderno;
- Das 14 maravilhas do mundo, antigo e moderno, 3 delas estão localizadas no continente americano e, todas elas, são do mundo moderno.

Figura 7 - Sete maravilhas do mundo antigo

Imagem retirada de *Brasil Escola*

Legenda: Acima e da esquerda para direita temos, o Mausoléu de Halicarnasso (Turquia), o Colosso de Rodes (Grécia) e a Grande pirâmide de Gizé (Egito). No centro está o Templo de Ártemis (Turquia) e abaixo, da esquerda para direita, estão os Jardins Suspensos da Babilônia (Iraque), a Estátua de Zeus (Grécia) e o Farol de Alexandria (Egito).

Fonte: Figura montada pela autora (2024). Imagem extraída de *Brasil Escola*

Figura 8 - Sete maravilhas do mundo moderno

Imagem retirada de *Stud História*

Legenda: Acima e da esquerda para direita estão a Muralha da China (China), Machu Picchu (Peru) e As ruínas de Petra (Jordânia). Abaixo a partir da esquerda temos o Cristo Redentor (Brasil), o Coliseu de Roma (Itália), Taj Mahal (Índia) e Chichén Itzá (México).

Fonte: Figura montada pela autora (2024). Imagem extraída de *Stud História*

Após o texto que introduz a atividade, é proposta a seguinte situação-problema: Um aluno precisa construir uma maquete de uma das 14 maravilhas do mundo, antiga ou moderna. No dia em que a tarefa foi dada, ele se comprometeu em construir uma maravilha que esteja localizada no continente americano. Passado um tempo, o aluno iniciou o trabalho, porém, esqueceu que deveria construir uma das maravilhas localizadas no continente americano e acreditou ter se comprometido apenas em construir uma maquete de uma das 14 maravilhas, seja ela do mundo antigo ou do mundo moderno. Então, feita a escolha e terminada a maquete, mostrou a construção a um colega.

A fim de introduzir a compreensão do conceito do teorema de Bayes, após a apresentação do problema, é proposto o desenvolvimento de análises e cálculos probabilísticos relacionados a tal situação, que servem de questionamentos e estímulos, esperando-se que o aluno construa a solução do cálculo probabilístico final através do teorema. Os questionamentos e estímulos são feitos a partir dos seguintes itens:

a) Com base no comprometimento do aluno, antes do esquecimento, quais os monumentos que ele poderia escolher? Classifique cada um deles em maravilha do mundo antigo ou maravilha do mundo moderno.
b) Pelas informações do problema, é possível saber se a maravilha que o aluno escolheu é uma maravilha do mundo antigo? E é possível saber se é do mundo moderno? Explique sua resposta.
c) Baseado na resposta do item (b), qual a probabilidade do aluno ter cumprido o compromisso, e assim, escolhido uma maravilha localizada no continente americano?
d) O colega do aluno contou que a maravilha escolhida é do mundo moderno. O espaço amostral se reduz? Se sim, para quantas possibilidades?
e) Todos os 3 monumentos localizados no continente americano encontram-se nas 7 maravilhas do mundo moderno. Assim, após sabermos pelo colega do aluno que a maravilha escolhida é do mundo moderno, a probabilidade dessa maravilha estar localizada no continente americano, aumenta, diminui ou não se modifica?

f) Então, qual a probabilidade dele ter escolhido uma maravilha localizada no continente americano e assim cumprido o compromisso, sabendo que ele contou ao colega que escolheu uma maravilha do mundo moderno?

g) Leia o que cada dado a seguir representa e depois, aplique o teorema de Bayes.

A: ser uma maravilha localizada no continente americano

~A: não ser uma maravilha localizada no continente americano

B: ser uma maravilha do mundo moderno

P(A): probabilidade de ser uma maravilha localizada no continente americano

P(~A): probabilidade de não ser uma maravilha localizada no continente americano

P(B): probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno

P(A│B): probabilidade de ser uma maravilha localizada no continente americano, sabendo que é uma maravilha do mundo moderno

P(B│A): probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno, sabendo que é uma maravilha localizada no continente americano

P(B│~A): probabilidade de ser uma maravilha do mundo moderno, sabendo que não é uma maravilha localizada no continente americano

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B \mid A)\,P(A) + P(B \mid \sim A)\,P(\sim A)} =$$

h) Os resultados dos itens (f) e (g) foram iguais ou diferentes? O que você concluiu?

O quadro 1 apresenta uma análise da atividade 1 segundo as 4 etapas de Polya (1995) descritas no capítulo 3.

Quadro 1 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As 14 Maravilhas do Mundo”

Etapas de Polya (1995)	**Itens do problema proposto**	**Auxílio na construção do conceito do Teorema de Bayes**
Compreensão do problema	(a) (b)	Esses itens trazem questionamentos que podem ajudar o aluno a visualizar mais claramente a situação abordada e identificar e organizar os dados necessários para a resolução do problema proposto. É importante que o professor estimule o aluno a realizar essa etapa na resolução de outros problemas, mesmo não havendo no

		enunciado itens específicos para isso. Vale ressaltar que todos os outros itens contribuem gradativamente para a compreensão da situação-problema.
Estabelecimento de um plano para resolver o problema	(c) (d) (e) (f)	Esses itens contribuem para a construção gradativa da compreensão do conceito do Teorema de Bayes. A partir de dois eventos dependentes e após a informação sobre a ocorrência prévia de um desses eventos, é estimulado que o aluno perceba a alteração no espaço amostral.
Execução do plano	(g)	Já iniciado o processo de compreensão do teorema, é explicitado o que significa cada notação presente no teorema em relação ao problema proposto, para que o aluno associe as notações aos resultados já calculados nos itens anteriores. Esse item também estimula o aluno a buscar os resultados até então não calculados e aplicá-los na fórmula do teorema.
Retrospecto	(h)	Essa é a fase de revisão responsável em convidar o aluno a perceber que chegou à mesma solução pelas duas estratégias utilizadas, e assim, concluindo que frequentemente já aplica o teorema de Bayes no cotidiano.

Fonte: A autora (2024)

5.2.2
As Claves Musicais

A segunda atividade do produto educacional desenvolve a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Música. Tressino & Malaquias (2014) destacam que o estudo da Música pode ajudar o aluno a obter um bom desempenho em Matemática, pois a música desenvolve e estimula aspectos como raciocínio lógico, criatividade, concentração, compreensão e memorização e também a autodisciplina. Dizem que através de uma proposta lúdica e prazerosa de ensino, é possível despertar o interesse do aluno em aprender.

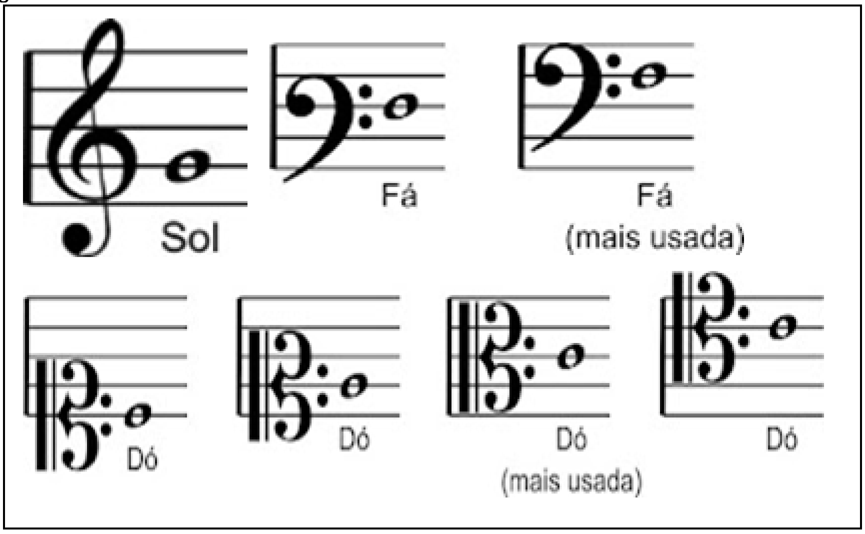
O texto informativo desta atividade apresenta as 7 notas musicais e a explicação de pauta musical (ou pentagrama) e clave musical. A clave orienta a leitura da pauta, indicando a localização da nota musical, sendo desse modo, um elemento importante na teoria musical.

Os dados em que o problema matemático elaborado se baseia abordam as claves musicais. De acordo com Carvalho (2017):

- As claves musicais se classificam em Clave de Sol, Clave de Fá e Clave de Dó;
- Existe uma clave de Sol, duas claves de Fá e quatro claves de Dó, totalizando 7 claves.

A figura 9 ilustra todas essas claves.

Figura 9 - Claves musicais



Fonte: Figura montada pela autora (2024). Imagens extraídas de *Deus Criou a Música* (2017)

Depois da leitura do texto, a atividade apresenta a seguinte situação-problema: Para um show de talentos, um aluno que conhece as 7 claves informou que iria fazer a leitura cantada (solfejo) de uma delas para sua apresentação. Após treinar todas as claves, ele decidiu que solfejaria no show a clave de Fá mais usada que era, entre todas, a que mais se sentia confortável para solfejar. Ele, porém, esqueceu de dar essa informação ao organizador do evento. No cenário reservado para o evento havia um projetor e o organizador preparou para as apresentações, sete arquivos de imagens de pautas musicais, cada uma com um tipo diferente de clave. O aluno chegou atrasado para o show de talentos e se posicionou para iniciar sua apresentação. Na pressa, o organizador projetou aleatoriamente para o público uma das sete imagens no telão. O aluno realizou sua apresentação.

a) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada?
b) Sabendo que a imagem projetada não era uma pauta musical de clave de Dó, o espaço amostral se reduz para quantas possibilidades?
c) Então, sabendo que não foi projetada uma pauta de clave de Dó, a probabilidade de ele ter solfejado a clave desejada, aumenta, diminui ou não se modifica? Explique.
d) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a pauta projetada não era de clave de Dó?
e) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (d).

A:

~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

$P(A|B)$:

$P(B|A)$:

$P(B|\sim A)$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|\sim A)\,P(\sim A)} =$$

f) E se ao invés de sabermos que a pauta projetada não era de clave de Dó, soubermos que a pauta projetada não era de clave de Sol, qual seria o número de possibilidades? Nesse caso, a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, aumentaria, diminuiria ou não se modificaria em relação a sabermos não ser de clave de Dó?
g) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a pauta projetada não era de clave de Sol?
h) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (g).

A:

~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

P(A│B):

P(B│A):

P(B│~A):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|\sim A)\,P(\sim A)} =$$

i) E se o que soubermos for que a pauta projetada era de clave de Fá, quantas seriam as possibilidades? A probabilidade de ser a clave desejada aumentaria, diminuiria ou não se modificaria em relação aos resultados dos itens (d) e (g)?

j) Qual a probabilidade do aluno ter solfejado a clave musical desejada, sabendo que a imagem projetada era de clave de Fá?

k) Escreva o que representa cada dado abaixo e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (j).

A:

~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

P(A│B):

P(B│A):

P(B│~A):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|\sim A)\,P(\sim A)} =$$

l) Você chegou a alguma conclusão após esses questionamentos?

O quadro 2 apresenta a análise da atividade 2 segundo as 4 etapas de Polya (1995) descritas no capítulo 3.

Quadro 2 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As Claves Musicais”

Etapas de Polya (1995)	**Itens do problema proposto**	**Auxílio na construção do conceito do Teorema de Bayes**
Compreensão do problema	Todos	Nesta atividade espera-se que o aluno após a realização da primeira atividade, reconheça a necessidade de organizar os dados fundamentais do problema. De qualquer modo, o professor pode realizar questionamentos orais que estimulem o aluno a realizar essa etapa a fim de verificar a compreensão inicial do problema. Todos os itens contribuem gradativamente para a compreensão da situação-problema.
Estabelecimento de um plano para resolver o problema	(a) (b) (c) (d) (f) (g) (i) (j)	Nestes itens são levantados questionamentos que ajudam o aluno a resolver o problema proposto através do cálculo pelo método clássico da probabilidade de um evento, ao considerar a modificação do espaço amostral após o conhecimento prévio da ocorrência do evento dependente a ele.
Execução do plano	(e) (h) (k)	Diferente da primeira atividade, esta não traz a descrição de cada notação presente no teorema. Esses itens propõem ao aluno preencher os dados, calculá-los e após aplicar o teorema. O principal objetivo aqui é que se familiarize com as notações e suas representações, desenvolvendo também a habilidade em relacioná-las às informações do problema proposto.
Retrospecto	(l)	Neste item, um momento para o aluno apresentar suas conclusões e quem sabe possíveis dúvidas, proporcionando ao professor uma ferramenta de retorno a fim de realizar o planejamento para esclarecer tais dúvidas. O retrospecto também ocorre quando durante a atividade, é proposto ao aluno a comparação dos itens (d) e (e); (g) e (h); (j) e (k) a fim de conferir os resultados e concluir que através do teorema de Bayes chegou-se ao mesmo resultado encontrado pela outra estratégia.

Fonte: A autora (2024)

5.2.3
As Constelações da bandeira do Brasil

Esta atividade inicia-se desenvolvendo a interdisciplinaridade entre Ciências e História através da apresentação de um texto contendo informações sobre as constelações do Universo e a representação de algumas delas na bandeira do Brasil. Costa (2022) explica que as constelações presentes na bandeira do Brasil eram algumas das constelações que compunham o aspecto do céu na cidade do Rio de Janeiro às 08h30 do dia 15 de novembro de 1889, local e dia da Proclamação da República. O horário considera a passagem do Cruzeiro pelo meridiano local. Dentre todos os dados, os principais para a resolução do problema matemático proposto, são os seguintes:

- Segundo a *International Astronomical Union* (2018), existem 88 constelações no Universo;
- Dentre as 88 constelações do Universo, 13 constelações são chamadas de constelações do zodíaco;
- Das 88 constelações do Universo, 9 constelações estão representadas na bandeira do Brasil, algumas completas e outras parcialmente. Duas destas constelações representadas na bandeira do Brasil são constelações do zodíaco.

A figura 10 apresenta algumas das constelações citadas.

Figura 10 - Constelações representadas na bandeira do Brasil

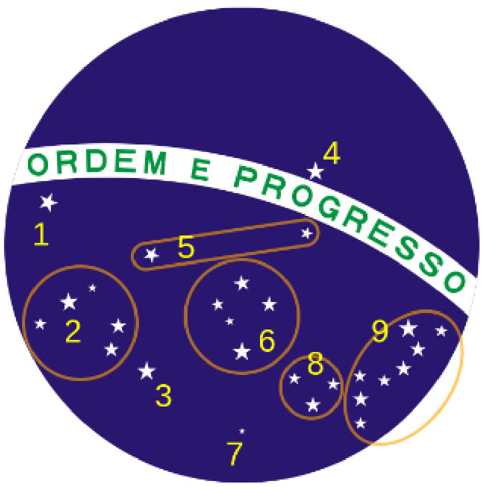


Imagem retirada de *Galeria do Meteorito*

Legenda: Cão Menor (1), Cão Maior (2), Quilha (3), Hidra Fêmea (5), Cruzeiro do Sul (6), Oitante (7), Triângulo Austral (8) e duas constelações do zodíaco: Constelação de Escorpião (9) e Constelação de Virgem (4).

Fonte: Figura montada pela autora (2024). Imagem e dados extraídos de *Galeria do Meteorito* (2018)

A partir dessas informações, é proposta a resolução da seguinte situação-problema: Em determinada turma de um colégio, cada aluno apresentará um pequeno seminário sobre uma das constelações do Universo. O 1° aluno da lista de alunos (chamada) da turma quer apresentar uma constelação do zodíaco que esteja na bandeira do Brasil, porém a fim de não haver constelações repetidas entre os alunos, a professora decidiu escolher aleatoriamente uma constelação para cada aluno, seguindo a ordem de chamada da turma. E assim, foi informando para a turma cada uma das escolhas.

As indagações realizadas a fim de incentivar a aplicação do teorema de Bayes, são feitas através dos seguintes itens:

a) Qual a probabilidade do 1° aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco?
b) Qual a probabilidade do 1° aluno da chamada não receber uma constelação do zodíaco?
c) O 1° aluno da chamada recebeu uma constelação do zodíaco. Qual a probabilidade dessa constelação estar na bandeira do Brasil?
d) O 1° aluno da chamada não recebeu uma constelação do zodíaco. Qual a probabilidade dessa constelação estar na bandeira do Brasil?
e) Utilizando os resultados dos itens anteriores, aplique o teorema de Bayes e responda: Qual a probabilidade do 1° aluno da chamada ter recebido uma constelação do zodíaco, sabendo que a constelação recebida está na bandeira do Brasil?

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid \sim A)\, P(\sim A)} =$$

f) Qual a probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada já recebeu uma constelação desse tipo?
g) Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (f).

   A:

   ~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

P(A│B):

P(B│A):

P(B│~A):

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid {\sim}A)\, P({\sim}A)} =$$

h) Qual a probabilidade do 2º aluno da chamada receber uma constelação do zodíaco que esteja presente na bandeira do Brasil, sabendo que o 1º aluno da chamada não recebeu uma constelação desse tipo?

i) Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para conferir o resultado do item (h).

A:

~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

P(A│B):

P(B│A):

P(B│~A):

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid {\sim}A)\, P({\sim}A)} =$$

Encontra-se no Quadro 3 a análise da atividade através das etapas de Polya (1995).

Quadro 3 - Etapas de Polya (1995): Atividade “As Constelações da bandeira do Brasil”

Etapas de Polya (1995)	**Itens do problema proposto**	**Auxílio na construção do conceito do Teorema de Bayes**
Compreensão do problema		Espera-se que ao chegar nesta atividade, o aluno tenha compreendido a importância da leitura minuciosa de um problema e os benefícios adquiridos ao organizar as informações. Caso essa atividade seja aplicada fora da sequência proposta, o professor pode criar indagações que estimulem a identificação dos dados fundamentais à resolução da situação-problema. De qualquer modo, as próximas etapas também constroem tal compreensão.
Estabelecimento de um plano para resolver o problema	(a) (b) (c) (d) (f) (h)	Aqui é esperado que o aluno se interesse em aplicar o teorema de Bayes, porém não se impede que utilize suas estratégias prévias, como a mencionada nesta mesma etapa dos quadros anteriores. Caso não resolva esses itens através da aplicação do teorema, de qualquer modo já estará adquirindo ferramentas para a próxima etapa.
Execução do plano	(e) (g) (i)	O momento de praticar a aplicação do teorema. No item (e) todos os dados necessários para aplicação do teorema já foram calculados pelos itens anteriores. O objetivo é que identifique tal fato, substitua os resultados e chegue à solução do item (e). Já para os itens (g) e (i) é proposta a descrição das notações, a realização de seus cálculos e a aplicação do teorema.
Retrospecto		Aqui o aluno pode desenvolver as duas estratégias abordadas na sequência, e assim, comparar os resultados a fim de conferir os cálculos.

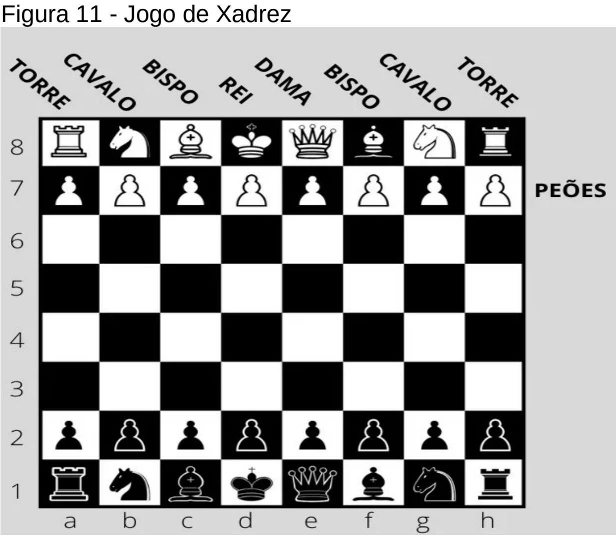
Fonte: A autora (2024)

5.2.4 A partida de Xadrez

O xadrez é um jogo difundido mundialmente e muito utilizado nas escolas. Segundo Almeida (2010), estudos mencionam cada vez mais o ensino da matemática por meio do jogo de xadrez, já que o jogo proporciona a aprendizagem matemática através do raciocínio lógico, de experiências possivelmente adquiridas com os erros e da tomada de decisões requeridas durante uma partida, situações que menciona serem encontradas em problemas matemáticos.

A atividade interdisciplinar elaborada se inicia com um texto informativo sobre o jogo, contendo os dados apresentados a seguir. O xadrez é um jogo de estratégia disputado por dois jogadores. O tabuleiro do jogo é dividido em 64 casas alternadas em escuras e claras. Neste tabuleiro estão dispostas 32 peças, 16 peças para cada jogador. As 16 peças de cada jogador são constituídas por oito peões, duas torres, dois bispos, dois cavalos, um rei e uma rainha (ou dama). Cada um dos seis tipos de peça deve movimentar-se no tabuleiro de uma maneira particular. O objetivo do jogo é atacar o rei do oponente de modo que o deixe sem defesa. A figura 11 ilustra o jogo no início de uma partida.

Figura 11 - Jogo de Xadrez



Fonte: Enciclopédia Significados

Segundo o website de xadrez online, *Chess*.com, o xadrez, e outros esportes, utilizam um sistema que calcula a força relativa dos jogadores, o Sistema de Rating Elo. Segundo o website, essa força é medida da seguinte forma:

- Se um jogador tem 100 pontos a mais que seu adversário, então é esperado que ele vença cinco partidas em oito disputadas, ou seja, o jogador tem cerca de 62,5% de chance de vencer o jogo;
- Se um jogador tem 200 pontos a mais que seu adversário, então é esperado que ele vença três partidas em quatro, ou seja, o jogador tem cerca de 75% de chance de vencer o jogo.

Esta atividade propõe o seguinte problema: Quinzenalmente em uma escola, são oferecidas aulas de xadrez aos sábados como atividade extraclasse para os alunos interessados. Certo dia três alunos (X, Y e Z) que participam das aulas de xadrez da escola, decidiram divulgar a atividade durante o recreio, a fim de aumentar o número de participantes da atividade. O aluno X iniciou uma partida com um dos dois colegas de xadrez (Y ou Z), escolhido aleatoriamente. O colega de xadrez não escolhido pelo aluno X ficou responsável em chamar os outros alunos da escola e divulgar a atividade extraclasse.

Os três alunos já jogaram entre si várias vezes durante o ano letivo e essas partidas eram pontuadas. O aluno X tem 100 pontos a mais do que o aluno Y e o aluno Z tem 200 pontos a menos do que o aluno X.

Tal problema é seguido das seguintes indagações:

a) Sabendo que o aluno X venceu a partida disputada no recreio, qual a probabilidade de seu adversário ter sido o aluno Y? Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para calcular o resultado.

A:

~A:

B:

P(A):

P(~A):

P(B):

P(A│B):

P(B│A):

P(B│~A):

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid {\sim}A)\, P({\sim}A)} =$$

b) Sabendo que o aluno X venceu a partida disputada no recreio, qual a probabilidade de seu adversário ter sido o aluno Z? Complete os dados a seguir e aplique o teorema de Bayes para calcular o resultado.

A:

~A:

B:

P(A):

$P(\sim A)$:

$P(B)$:

$P(A \mid B)$:

$P(B \mid A)$:

$P(B \mid \sim A)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid \sim A)\, P(\sim A)} =$$

As etapas de Polya (1995), em relação à atividade 4, estão discriminadas no Quadro 4.

Quadro 4 - Etapas de Polya (1995): Atividade “A partida de xadrez”

Etapas de Polya (1995)	Itens do problema proposto	Auxílio na construção do conceito do Teorema de Bayes
Compreensão do problema	(a) (b)	A descrição das notações contidas no teorema auxilia na compreensão do problema.
Estabelecimento de um plano para resolver o problema	(a) (b)	Nesta última atividade da sequência, há o incentivo em optar pela aplicação do teorema de Bayes, a qual foi gradativamente construída pelas atividades anteriores no decorrer da sequência.
Execução do plano	(a) (b)	Prática da aplicação do teorema de Bayes.
Retrospecto		Espera-se que o aluno utilize seu conhecimento prévio e some os dois resultados a fim de conferir as soluções.

Fonte: A autora (2024)

5.2.5
Análise geral do produto educacional

Como mencionado anteriormente, o produto educacional derivado deste trabalho consiste em uma sequência de atividades interdisciplinares. Através das análises dessas atividades, descritas neste capítulo e baseadas nas 4 etapas de Polya (1995), é possível perceber que a primeira e a segunda atividade desenvolvem essas etapas passo a passo por meio das indagações e estímulos descritos na situação-problema. A partir da terceira atividade, espera-se que o aluno já tenha construído a ideia de reflexão do problema proposto, e assim, reconheça a aplicabilidade do teorema e exercite a sua aplicação.

O produto educacional aqui apresentado busca construir gradativamente o conceito do teorema de Bayes ao mesmo tempo em que amplia a curiosidade e espectro de outras áreas no alunado. É esperado que os alunos identifiquem que já praticam o conceito do teorema de Bayes em situações em que é possível a redução do espaço amostral. Com esse olhar de construção gradual do conhecimento, espera-se que na quarta atividade desta sequência os alunos apliquem o teorema já na primeira questão proposta.

Cabe ressaltar que o recurso aqui apresentado foi construído como uma sequência de atividades, mas é possível sua utilização parcial e sem necessariamente seguir a ordem em que as atividades estão organizadas. O professor pode utilizá-lo da maneira que atenda à realidade de seu alunado e ao seu planejamento.

Verifica-se que as etapas sintetizadas na figura 4, que buscam promover o aprendizado de conceitos matemáticos através da abordagem da resolução de problemas no contexto escolar, são desenvolvidas nesse produto educacional. Cada uma das atividades contempla a proposição do problema; o desafio de utilizar conhecimentos prévios, ao considerar uma estratégia de resolução já praticada pelos alunos do ensino médio; o incentivo do professor, ao propor indagações e estímulos que os levem a avançar na solução do problema; a autonomia do aluno em resolver o problema e, a proposição de novos problemas. As outras etapas aqui não explicitamente contempladas podem ser propostas pelo professor durante a aplicação das atividades, incentivando o compartilhamento e a discussão de ideias entre os alunos e a apresentação de suas soluções, já que muitas vezes, a estratégia para se chegar a uma solução não é única.

Após a conclusão das atividades, o professor pode formalizar o conteúdo matemático. O teorema está apresentado no produto educacional, assim como as sugestões de gabarito das atividades propostas.

A ideia principal da sequência de atividades interdisciplinares consiste em construir a compreensão do conceito do Teorema de Bayes de maneira significativa e enriquecida por outros saberes, embasada na interdisciplinaridade e na abordagem de resolução de problemas.

6
Considerações Finais

O ensino interdisciplinar através da resolução de problemas pode proporcionar muitos benefícios à aprendizagem do alunado. A interdisciplinaridade estimula a interação de diferentes saberes acarretando em uma educação integrada e colaborativa.

No decorrer do estudo sobre a interdisciplinaridade na educação, a resolução de problemas se mostrou uma importante aliada na busca em ofertar um ensino enriquecedor ao aluno, em que saberes ultrapassem as barreiras pré-estabelecidas e compartilhem conhecimentos que constituirão ferramentas de resolução de situações práticas.

Ao longo do tempo, diversos autores estudam sobre a inserção da interdisciplinaridade e da resolução de problemas na educação. Os estudos mencionados neste trabalho destacam as contribuições de alguns destes autores, como por exemplo, Fourez (1997) apud Siqueira & Gaertner (2015), Polya (1995) e Onuchic (1999) apud Allevato & Vieira (2016).

A Ilha Interdisciplinar de Racionalidade (IIR) de Fourez apud Siqueira & Gaertner, as etapas de resolução de um problema matemático apresentadas por Polya e as etapas de implantação do ensino através da resolução de problemas são instrumentos que podem orientar o professor durante a busca em proporcionar um ensino enriquecedor aos alunos. A IIR contribui para a prática interdisciplinar ao elencar as fases de um processo de elaboração e aplicação de atividades interdisciplinares. As etapas de Polya também norteiam o planejamento de uma aula de Matemática através da resolução de problemas, propondo um caminho que pode levar o aluno à aprendizagem significativa e, as etapas de Onuchic apud Allevato e Vieira contribuem ao propor um roteiro de como aplicar esse planejamento durante as aulas.

Analisando os documentos norteadores da educação brasileira, PCNs (Brasil, 1998 e 2000) e BNCC (Brasil, 2018), é possível perceber que a inserção do ensino interdisciplinar e através da resolução de problemas, desde os primeiros anos da educação básica, é um objetivo a ser alcançado a fim de proporcionar ao alunado uma formação sólida e interativa.

No campo probabilístico, campo em que se encontra o conteúdo matemático deste trabalho, tais documentos propõem práticas que buscam atender aos alunos por meio do desenvolvimento de habilidades, dando sentido ao que se ensina.

O Teorema de Bayes, conteúdo base aqui abordado, por meio de sua aplicabilidade em diversos contextos, elucida como a Matemática interage com diferentes áreas do conhecimento.

Através das bases teóricas estudadas e que refletiram na elaboração do Produto Educacional apresentado, a proposta da introdução do Teorema de Bayes no ensino médio mostra-se estimulante na medida em que é apresentada por meio da resolução de problemas presentes no cotidiano do alunado e que abordem saberes reais de outras áreas do conhecimento, desenvolvendo desse modo, um ensino estimulante e interdisciplinar. O Produto Educacional também pode ser aplicado em momentos de interação presentes no contexto escolar, por exemplo, como elemento de ludicidade a ser utilizado em projetos escolares.

Há o incentivo ao professor pela busca de práticas que possibilitem ao aluno a construção de sua aprendizagem, atuando como sujeito ativo do processo, refletindo e questionando a fim de compreender significativamente o que lhe é ensinado. O professor tem papel importante neste processo, orientando e estimulando seu alunado com atividades desafiadoras e interativas. Esperamos que a leitura desse texto estimule professores da escola básica a pensar e criar novas propostas interdisciplinares a partir da resolução de problemas para trabalharem outros conceitos matemáticos de seus interesses e que esse movimento contribua para a construção de uma escola menos compartimentada e mais motivadora.

7

Referências bibliográficas

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino de resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, v. 25, n. 1, p. 113-132, 30 jun. 2016. DOI: https://doi.org/10.48489/quadrante.22926. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22926/16992>. Acesso em: 03 fev. 2024.

ALMEIDA, J.W.Q. **O Jogo de Xadrez e a Educação Matemática: como e onde no ambiente escolar.** 2010. 156p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB, 2010.

ALVES, I. (Revisor). Xadrez: o que é, regras, objetivo e história. **Enciclopédia Significados,** c.2011-2024 Disponível em: <https://www.significados.com.br/xadrez/>. Acesso em: 17 jan. 2024.
As "novas" sete maravilhas do mundo. **Stud História**. Disponível em: <https://studhistoria.com.br/historia-das-coisas/as-novas-sete-maravilhas-do-mundo/>. Acesso em: 17 jan. 2024.

As Constelações. **International Astronomical Union,** 03 set. 2018. Disponível em:< https://www.iau.org/public/themes/constellations/brazilian-portuguese/>. Acesso em: 27 out. 2023.

As sete maravilhas do mundo antigo são reconstruídas em fotos 3D: veja. **Galileu**, 07 mai. 2019. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/noticia/2019/05/sete-maravilhas-do-mundo-antigo-sao-reconstruidas-em-fotos-3d-veja.html>. Acesso em: 18 jan. 2024.

ASSIS, L.M. Interdisciplinaridade. In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. **DICIONÁRIO:** trabalho, profissão e condição docente. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. CDROM. Disponível em: <https://gestrado.net.br/wp-content/uploads/2020/08/68-1.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

BICALHO, L. Interações disciplinares presentes na pesquisa em ciência da informação. Trans**Informação**, Campinas, 23(2):113-126, maio/ago., 2011. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/tinf/a/6fyFtNVBYcnmWQRpcMV9LTc/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 03 fev. 2024.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Entenda a sua nota no Enem:** guia do participante.

Brasília, DF: INEP, 2021. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/entenda_a_sua_nota_no_enem_guia_do_participante.pdf >. Acesso em: 03 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. 600p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio (Parte I - Bases Legais). Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC, 2000. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio (Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias). Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

CAMPOS, R.G. **Cosmologia Observacional usando Análise Bayesiana.** 2008. 123p. Dissertação (Mestrado em Ciências (Física)) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufes.br/server/api/core/bitstreams/3312738a-19b4-4b99-ac7f-9f8369efe5ca/content>. Acesso em: 03 fev. 2024.

CARDODO, M.R.G.; OLIVEIRA, G.S. A resolução de problemas para o ensino de matemática nos anos iniciais. **Cadernos da Fucamp**, v.18, n.36, p. 68-94, 2019.

CARVALHO, A. 11- As claves. **Deus Criou a Música,** 19 fev. 2017. Disponível em: <https://deuscriouamusica.blogspot.com/2017/02/8-as-claves.html>. Acesso em: 17 jan. 2024.

CHAVES, R.C.C. et al. Ilha Interdisciplinar da Racionalidade (IIR): Uma estratégia metodológica para promoção da Alfabetização Cientifica de estudantes da Educação Infantil. In: **XIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências** – XIII ENPEC ENPEC EM REDES. Educação CTS/CTSA e Alfabetização Científica e Tecnológica, 2021. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/enpec/2021/TRABALHO_COMPLETO_EV155_MD1_SA108_ID1426_13082021225612.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

COSTA, A. Astronomia e a Bandeira Nacional. **Museu De Astronomia e Ciências Afins – MAST**, Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações, 08 ago. 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/mast/pt-br/assuntos/noticias/2022/agosto/astronomia-e-a-bandeira-nacional#:~:text=Conforme%20determinado%20por%20decreto%2C%20as,8h30%20de%2015%20de%20novembro>. Acesso em: 17 jan. 2024.

FARIAS, A.M.L. **Probabilidade e estatística.** V. único. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. 374p. Disponível em: <https://canal.cecierj.edu.br/012016/a99487ebb1f652768691614fee042a9e.pdf>. Acesso em: 04 fev. 2024.

FAZENDA, Ivani Catarina A. **Interdisciplinaridade:** História, Teoria e Pesquisa. 11 ed. Campinas-SP: Papirus Editora, p. 81-89, 2003. Disponível em: <https://cursos.unipampa.edu.br/cursos/ppge/files/2010/11/Interdisciplinaridade_IvaniFazenda.pdf >. Acesso em: 03 fev. 2024.

GATTÁS, M.L.B.; FUREGATO, A.R.F. Interdisciplinaridade: uma contextualização. **Acta Paulista de Enfermagem**, 19 (3), p. 323-327, 2006. DOI: https://doi.org/10.1590/S0103-21002006000300011. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ape/a/zcxLWkprCCXBFcghb5qfYcp/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 03 fev. 2024.

História da Astronomia. **IF-UFRGS**. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20042/felipe/historia.html>. Acesso em: 20 jan. 2024.

KILHIAN, K. No cerne do ENEM, o Teorema de Bayes. **O Baricentro da Mente,** 20 dez. 2011. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2011/12/no-cerne-do-enem-o-teorema-de-bayes.html>**.** Acesso em: 27 jan. 2024.

LEÃO, D.M.M. Paradigmas contemporâneos de educação: Escola tradicional e Escola construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, n. 107, p. 187-206, julho/1999. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/PwJJHWcxknGGMghXdGRXZbB/?format=pdf&lang=pt >. Acesso em: 03 fev. 2024.

Matemática pode ajudar a encontrar os restos do avião desaparecido? **BBC News Brasil**, São Paulo, publicado em 25 mar. 2014 e atualizado em 26 mar. 2014. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/03/140325_matematica_aviao_desaparecido_pai>. Acesso em: 26 jan. 2024.

MINGATOS, D.S. Matemática e Música a partir do estudo do Monocórdio e de figuras musicais. In: **III BIENAL DA SBM**. IME/UFG, 2006. Disponível em: <https://ime.ufg.br/bienal/2006/poster/daniellemingatos.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2024.

O problema de Monty Hall. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/>. Acesso em: 03 fev. 2024.
O que é o teorema de Bayes, regra essencial da informática criada para 'provar milagres'. **BBC News Brasil,** São Paulo, 17 dez. 2021. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-59701523>. Acesso em: 26 jan. 2024.

ORDÓÑEZ, M.B. O que é a tradução automática estatística? **Blog Pangeanic,** 16 mai. 2023. Disponível em: <https://blog.pangeanic.com/pt-br/o-que-%C3%A9-a-tradu%C3%A7%C3%A3o-autom%C3%A1tica-estat%C3%ADstica>. Acesso em: 26 jan. 2024.

PENA, S. D. Thomas Bayes: o 'cara'! **Ciência Hoje**, v. 38, n. 228, p. 22-29, 2006. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/wp-content/uploads/2009/07/Thomas-Bayes-O-Cara-Sergio-Danilo-Pena-CH228-JULHO-2006.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

PINTO, Tales dos Santos. "As Sete Maravilhas do Mundo Antigo". **Brasil Escola,** c2024**.** Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/historia/sete-maravilhas-mundo.htm>. Acesso em: 17 jan. 2024.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081571/mod_resource/content/1/A%20arte%20de%20resolver%20problemas%20um%20novo%20aspecto%20do%20m%C3%A9todo%20matem%C3%A1tico%20by%20George%20Polya%20%28z-lib.org%29.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

POMBO, O. Interdisciplinaridade e integração dos saberes. **Liinc em Revista**, v.1, n.1, p. 3-15, mar. 2005. Disponível em: <https://revista.ibict.br/liinc/article/view/3082/2778>. Acesso em: 03 fev. 2024.

Projeto Xadrez nas Escolas. **Dia a Dia Educação**, Portal Educacional do Estado do Paraná, c2003. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/portal/xadrez/x_curiosidades.php>. Acesso em: 16 jan. 2024.

Qual é o significado das estrelas da bandeira do Brasil? **Galeria do Meteorito**, 05 jul. 2018. Disponível em: <https://www.galeriadometeorito.com/2018/07/qual-significado-das-estrelas-bandeira-brasil.html>. Acesso em: 05 dez. 2023.

REIS, N.C.M. #6 Fé, probabilidade e IA: O Teorema de Bayes. **PhiloTechJus**, 07 mai. 2022. Disponível em: <https://philotechjus.wordpress.com/2022/05/07/6-probabilidade-fe-e-ia-o-teorema-de-bayes/>. Acesso em: 03 fev. 2024.

RESENDE, R. As 7 Maravilhas do Mundo Moderno. **Espaço do Conhecimento**, UFMG, 26 abr. 2022. Disponível em:

<https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/as-7-maravilhas-do-mundo-moderno/>. Acesso em: 18 jan. 2024.

ROCCO, L.R.O. História da Teoria das Probabilidades. **GPET Física,** Unicentro Paraná, 02 abr. 2020. Disponível em: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/04/02/historia-da-teoria-das-probabilidades/#:~:text=A%20Teoria%20das%20Probabilidades%20surgiu,e%20amigos%20de%20longa%20data>. Acesso em: 20 jan. 2024.

ROMANATTO, M. C. Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, *[S. l.]*, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. DOI: 10.14244/19827199413. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413>. Acesso em: 4 fev. 2024.

SATOLO, V.P.X. et al. Um panorama histórico-conceitual da pesquisa interdisciplinar: uma análise a partir da pós-graduação da área interdisciplinar. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v.35, e185294, 2019. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/0102-4698185294. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/edur/a/fjgTP3C8XfnTpgvKGfvwjqm/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 03 fev. 2024.

SIQUEIRA, J.B.; GAERTNER, R. Ilhas Interdisciplinares de Racionalidade: conceito de proporcionalidade na compreensão de informações contidas em rótulos alimentícios. **R.B.E.C.T**., v. 8, Ed. Sinect, p.160-175, jan./abr. 2015. DOI: 10.3895/rbect.v8n2.2985. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/2985/2068>. Acesso em: 03 fev. 2024.

Sistema de rating Elo. Termos de Xadrez. **Chess.com,** c2024. Disponível em: <https://www.chess.com/pt-BR/terms/sistema-rating-elo-xadrez>. Acesso em: 18 jan. 2024.

SOUZA, L.L. **Apresentando o Teorema de Bayes por meio de aplicações.** 2022. 51p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Departamento de Física, Química e Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Campus Sorocaba-SP, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/16395/La%c3%ads%20Lima%20Souza.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 03 fev. 2024.

TAGLIANI, S. A forma das coisas: entenda o que é Proporção Áurea e como ela se aplica à Arquitetura. **Engenharia 360**, publicado em 14 abr. 2021 e atualizado em 16 jan. 2023. Disponível em: <https://engenharia360.com/proporcao-aurea-e-as-formas-da-arquitetura/>. Acesso em: 20 jan. 2024.

THIESEN, J.S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n. 39, p. 545-554, set./dez. 2008. DOI: https://doi.org/10.1590/S1413-24782008000300010. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/rbedu/a/swDcnzst9SVpJvpx6tGYmFr/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 03 fev. 2024.

TRESSINO, C.I.F.; MALAQUIAS, A.M. Música e Matemática no Ensino de Frações. In: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. **Cadernos PDE**, v. 1, Artigos. Secretaria da Educação. Governo do Estado. Paraná, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_chirley_ines_fraporti_tressino.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

UMBELINO, M.; ZABINI, F. O. A importância da interdisciplinaridade na formação do docente. In: Seminário Internacional de Educação Superior. Formação e Conhecimento. **Anais Eletrônicos**, Universidade de Sorocaba-Uniso, 2014. Disponível em: <https://www.uniso.br/assets/docs/publicacoes/publicacoes-eventos/anais-do-sies/edicoes/edu-formacao-professores/44.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2024.

Veja como funciona a metodologia da Teoria de Resposta ao Item (TRI). **Secretaria de Comunicação Social,** Brasília: Senado Federal, publicado em 13 out. 2021 e atualizado em 31 out. 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2021/10/veja-como-funciona-a-metodologia-da-teoria-de-resposta-ao-item-tri>. Acesso em: 27 jan. 2024.

VIEIRA, S. **Teorema de Bayes:** The Harvard Medical School Test, 12 set. 2015. Disponível em: <http://soniavieira.blogspot.com/2015/09/teorema-de-bayes-iii-harvard-medical.html>. Acesso em: 03 fev. 2024.

YAMASHITA, M. Cálculo errado de probabilidade põe inocentes atrás das grades. **Revista Questão de Ciência**, 14 mar. 2023. Disponível em: <https://revistaquestaodeciencia.com.br/artigo/2023/03/14/calculo-errado-de-probabilidade-poe-inocentes-atras-das-grades>. Acesso em: 26 jan. 2024.