Livia Fonseca Vidal

Geometria Analítica e Dança:

Uma proposta para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profª. Tatiana Fernandes Sodero

Rio de Janeiro

Abril de 2024

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Livia Fonseca Vidal

Geometria Analítica e Dança:

Uma proposta para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo:

Profª. Tatiana Fernandes Sodero
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-RIO

Prof Eduardo Barbosa Pinheiro
Departamento de Matemática – PUC-RIO

Profª. Dania Gonzalez Morales
Departamento de Matemática – PUC-RIO

Prof Eduard Toon
Departamento de Matemática – UFJF

Rio de Janeiro, 25 de abril de 2024

Livia Fonseca Vidal

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF), 2018. Especialista em Educação Infantil, Neurociência e Aprendizagem pela Universidade Cândido Mendes, 2019. Atualmente, trabalha como Professora de Ensino Fundamental na rede pública do Município do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Vidal, Livia Fonseca

Geometria Analítica e Dança: uma proposta para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental / Livia Fonseca Vidal; orientador: Tatiana Fernandes Sodero. – 2024.
54 f.: il. color. ; 30cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Dança. 3. Geometria Analítica. 4. Aprendizagem. 5. Mediação. 6. Protagonismo infantil. I. Sodero, Tatiana Fernandes. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos professores que não se contentam
em ensinar apenas às primeiras
fileiras da turma.

Agradecimentos

Ao meu Deus, Jeová.

À minha turma ProfMat - 2022, que cumpriu a promessa “ninguém solta a mão de ninguém”, mesmo aqueles que não conseguiram chegar até o fim e permanecem com suas mãos presas às minhas.

À colega e ex-bailarina clássica Eline Fonseca, pela inspiração para o tema

À minha orientadora Tatiana Sodero, que caiu como uma luva sobre a minha proposta, dividindo comigo um pouco das suas experiências, me conduzindo brilhantemente nessa produção.

À minha companheira de trabalho Jaqueline, que foi paciente e me incentivou o tempo todo, segurando grandes responsabilidades para que eu pudesse cumprir as minhas tarefas.

Ao meu tio Marcio Fonseca, que me acompanhou no ensino da matemática desde as séries iniciais, transformando meu medo em amor pela disciplina.

Aos meus pais Newton e Cristina e à minha irmã Alline, que sempre enxergaram meu potencial, mesmo quando eu mesma não conseguia.

Às minhas amigas Milena e Fabíola, que me substituíram como mães e fizeram isso com todo amor e carinho, cuidando da minha menininha todas as vezes que precisei de ajuda.

Ao meu esposo Fabiano, por nunca duvidar de mim, por me fazer acreditar e por toda a paciência.

À minha pequena filha Isis por me incentivar a ser exemplo e por iluminar meus dias com sua alegria, me dizendo: “mãe, você é o meu lar”!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Vidal, Livia Fonseca. Sodero; Tatiana Fernandes. **Geometria Analítica e Dança: Uma proposta para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro, 2024. 54 p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Este trabalho propõe uma abordagem inovadora para o ensino dos fundamentos da Geometria Analítica aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, utilizando a dança como meio. Inicia-se com a apresentação da história da dança, seguida de uma reflexão sobre as contribuições das atividades físicas em geral para as atividades cognitivas, sob a perspectiva da Neurociência, convidando o docente a considerar métodos que incorporem o movimento ao ensino na realização de uma prática diferenciada, lúdica e atrativa. A construção da base teórica para essa proposta é fundamentada em autores renomados, como Vygotsky, Piaget, Ausubel e Montessori. Em seguida, é apresentado um breve estudo da Geometria Analítica, abordando sua origem histórica, aplicações atuais e conceitos fundamentais. A análise dos documentos curriculares oficiais revela que esse ramo da matemática, embora muitas vezes negligenciado, deve ser introduzido já na primeira série do Ensino Fundamental, prevenindo assim dificuldades em etapas posteriores. Por fim, o trabalho oferece sugestões práticas para a implementação das ideias apresentadas, visando enriquecer o processo de aprendizagem e tornar o ensino da Geometria Analítica mais acessível e envolvente para os alunos desde o início de sua trajetória escolar.

Palavras chave

Dança; Geometria analítica; aprendizagem; mediação; protagonismo infantil.

Abstract

Vidal, Livia Fonseca. Sodero; Tatiana Fernandes. **Analytical Geometry and Dance: A proposal for the Early Years of Elementary School**. Rio de Janeiro, 2024. 54 p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

This work proposes an innovative approach to teaching the fundamentals of Analytical Geometry to teachers in the Early Years of Elementary School, using dance as a medium. It begins with the presentation of the history of dance, followed by a reflection on the contributions of physical activities in general to cognitive activities, from the perspective of Neuroscience, inviting the teacher to consider methods that incorporate movement into teaching when carrying out a dance. differentiated, playful and attractive practice. The construction of the theoretical basis for this proposal is based on renowned authors, such as Vygotsky, Piaget, Ausubel and Montessori. Next, a brief study of Analytical Geometry is presented, covering its historical origin, current applications and fundamental concepts. Analysis of official curriculum documents reveals that this branch of mathematics, although often neglected, should be introduced in the first year of elementary school, thus preventing difficulties in later stages. Finally, the work offers practical suggestions for implementing the ideas presented, aiming to enrich the learning process and make the teaching of Analytical Geometry more accessible and engaging for students from the beginning of their school career.

Keywords

Dance; Analytical Geometry; learning; child protagonism; mediation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

As pessoas educam para a competição e esse é o princípio de qualquer guerra. Quando educarmos para cooperarmos e sermos solidários uns com os outros, nesse dia estaremos a educar para a paz.

Maria Montessori, *A Educação e a Paz*

1. Introdução

O ensino da matemática é uma tarefa desafiadora, pois frequentemente é percebido como difícil e sem sentido. Nos anos iniciais, é comum que esta disciplina seja ministrada por professores generalistas, muitos dos quais também enfrentam seus próprios receios em relação à matemática. Paralelamente, as crianças mostram-se cada vez mais imersas nas redes sociais, o que gera uma atitude passiva e desatenta aos estímulos escolares.

A presente pesquisa surgiu da necessidade urgente de se resgatar o processo de ensino-aprendizagem tornando-o mais envolvente e significativo para todos os envolvidos. Com base em estudos teóricos sobre a construção do conhecimento, na importância e na necessidade das crianças se movimentarem, nos documentos oficiais que norteiam a educação básica e, principalmente, nas observações dos interesses infantis.

A dança é inerente ao ser. Desde bem pequenas, as crianças demonstram seu apreço pela música e sua necessidade de integrar a ela seus pequenos corpos e movimentos, ainda que descoordenados e imprecisos, produzindo assim os seus primeiros passos de dança. São comuns cenas em que bebês, que nem mesmo aprenderam ainda a andar, se remexem e se balançam ao som de uma música, estejam eles no colo de um adulto, dentro de um carrinho ou segurando-se pelos móveis. Quando crescem, as crianças continuam dançando e participam com alegria em atividades que as envolvam, como os ensaios para apresentações escolares. Na adolescência, embora geralmente sejam mais tímidos e contidos, os jovens se sentem atraídos a participar em desafios relacionados a jogos dançantes de videogames e aos “passinhos do TikTok”. Logo, é inegável o potencial da dança de despertar o interesse de pessoas de diferentes idades.

A dança promove o estabelecimento de interações do indivíduo consigo mesmo, com o espaço e com seus pares. Além disso, sendo uma atividade física, favorece a saúde física e o bem-estar mental, permitindo a expressão emocional e reduzindo o estresse e a ansiedade, o que contribui intimamente com o processo de ensino aprendizagem. Sendo assim, o presente texto visa incentivar o ensino significativo da matemática para crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Essa abordagem inovadora visa promover a compreensão conceitual e a aprendizagem significativa nessa disciplina fundamental, com enfoque sobre a construção de conceitos básicos para o desenvolvimento do pensamento geométrico analítico. Além do estímulo ao movimento, deseja-se fortalecer as habilidades cognitivas, proporcionando uma base sólida para o entendimento matemático desde os primeiros anos escolares. Através da dança, os conceitos podem ser explorados de forma dinâmica e acessível, incentivando a compreensão e a aprendizagem significativa, ao mesmo tempo em que aspectos sociais e culturais são abordados.

Em defesa do compromisso da educação com o desenvolvimento integral do educando, espera-se que esta pesquisa seja incentivadora de novas metodologias capazes de impactar positivamente toda a sua trajetória educacional.

2.
A história da dança

A dança é uma forma de expressão milenar e, ao se explorar sua história, pode-se perceber uma intrínseca ligação ao progresso da humanidade em sua origem e evolução, sendo hoje considerada uma das mais antigas expressões artísticas. Compreende-se a dança em quatro importantes fases distintas: danças primitivas, danças milenares, dança moderna e dança contemporânea.

Os primeiros movimentos da dança primitiva surgiram na pré-história. A dança era parte vital de rituais que iam desde a comunicação humana e a luta pela vida e pela sobrevivência na busca por água e alimentos, até práticas de culto e gratidão à natureza. No período neolítico, a dança estava presente nos rituais de oferendas relacionadas às colheitas, à preparação para a guerra e aos rituais de passagem da infância para a vida adulta, e esses acontecimentos foram registrados através das pinturas rupestres nas paredes das cavernas.

> Nas danças religiosas, o homem representava esses poderes sobre-humanos os quais, segundo entendia, dirigiam os acontecimentos da natureza, e determinavam o seu destino pessoal bem como o de sua tribo. A seguir, o homem conferiu uma expressão física a certas qualidades por ele observadas nesses poderes sobre-humanos e, ao elaborar essas personificações das ações de esforço, o homem primitivo descobriu a harmonização do rumo dos acontecimentos; através de seu pensamento-movimento, caracterizou então o poder subjacente a tudo como um deus de gesticulação deslizante. (Laban, 1978, p.44)

Atualmente, ainda é possível observar vestígios de danças ritualísticas em algumas culturas, como em algumas tribos africanas, ou em comunidades indígenas brasileiras.

Com o surgimento das grandes civilizações antigas, como o Egito, Grécia e Roma, nascem as danças milenares com o objetivo de reverenciar as divindades. A prática da dança serve de instrumento de culto, celebração e honra aos deuses de cada cultura. No Egito, a dança era parte integral de eventos como casamentos e funerais, enquanto na Grécia, acreditava-se no poder mágico da dança e sua prática acontecia em grupos, influenciando o teatro e a preparação física dos guerreiros. Em Roma, no entanto, a dança deixa de ser prioridade e passa a perder espaço, o que se acentua com a queda desse império na Idade Média, sendo a dança até mesmo repudiada como atividade profana.

Com o advento da igreja medieval e a imposição de uma visão dualista que buscava a separação entre o bem e o mal, o certo e o errado, o sagrado e o profano, a dança perdeu seu caráter sagrado, chegando inclusive a ser proibida pelo clero. No entanto, embora abafada, tal atividade não deixou de existir, pois alguns grupos espalhados pela Europa foram resistentes à inquisição, encontrando na dança um refúgio para as condições da vida difícil que levavam e passaram a dançar para se alegrar, para festejar e para celebrar, de onde originaram-se manifestações folclóricas, como a Tarantela italiana, surgida no século XV.

Entre os séculos XVI e XVIII, durante o movimento cultural, político e econômico denominado Renascentismo, a dança passou a ser reconhecida como arte, merecedora da dedicação de estudiosos e profissionais específicos. Nas cortes da Itália nasceu o “balleto”, que migrou posteriormente para a França como “ballet”, tornando-se, mais adiante, mundialmente conhecido, praticado e admirado. A dança passou a acompanhar as artes musicais, visuais e teatrais em sua evolução, sendo, nessa época, considerada entre elas como uma das sete artes que têm em comum, conforme Batteux (2009, p.11) o “objetivo da imitação da natureza, que regula o ato produtivo em todas as artes e permite uma ligação íntima a uma espécie de fraternidade”.

Na França, os primeiros ballets se desenvolvem, impulsionados pela corte do Rei Luís XIV, com figurinos, coreografias e enredos completos. Na Áustria e na Alemanha, surge a valsa, que figura até hoje nos casamentos e bailes de debutantes. No Brasil, como herança africana, nasce o samba no século XIX, e na Argentina, o tango.

Novos ritmos e modalidades entraram no cenário mundial do século XX em diante marcando a fase das danças contemporâneas, como: zumba, sapateado, flamenco e street dance. Impulsionada pelas tecnologias, novas modalidades estão em constante produção, aperfeiçoamento e divulgação através de redes sociais. Pessoas se envolvem cada vez mais em participar de desafios que envolvem os novos passos. A dança apresenta-se nos dias atuais como símbolo de diversidade e produto da união de diversas culturas. É uma atividade capaz de atrair e unir pessoas de diferentes idades e formações, satisfazendo uma variedade de objetivos e possibilidades.

3.
A importância do movimento

O corpo humano é formado por cerca de 206 ossos, os quais formam um esqueleto, que é revestido por mais de 600 músculos e terminações nervosas. Juntamente a um grande número de articulações, esse complexo sistema garante não apenas a sustentação, mas a mobilidade corpórea. A história comprova que as sociedades primitivas precisavam caminhar muitos quilômetros diariamente em busca de recursos vitais, como água, alimentos e proteção contra ameaças. Através dos movimentos do corpo, a ancestralidade adaptava-se de acordo com suas necessidades, mantendo a saúde mental e física e garantindo a sua continuidade.

Considerando as informações apresentadas, é incontestável que a natureza do homem foi projetada para o movimento. A importância da atividade física pode ser explicada pelos estudos da neurociência e pela psicologia, e tais esclarecimentos podem trazer impactos positivos sobre os processos educacionais.

3.1
As descobertas da neurociência

O movimento do corpo acontece devido à ação cerebral sobre a musculatura, que sofre contrações, saindo assim do estado de estagnação. A neurociência, estudo científico do sistema nervoso, pode aprofundar a compreensão desse fenômeno.

O cérebro é o órgão central do sistema nervoso e consiste em uma estrutura complexa, formada por milhões de neurônios (figura 1) interconectados em uma rede neural por meio de elementos fundamentais: os axônios e os dendritos.

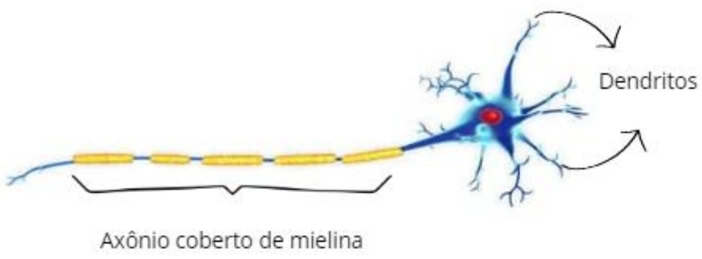


Figura 1: Neurônio. Fonte: via @sciencephotolibrary via Canva.com.

Os axônios são uma extensão que sai do corpo celular, cuja medida pode variar entre 1 mm e 90 cm. Pode-se entender o axônio como um fio, recoberto por uma camada lipídica chamada mielina, através do qual impulsos elétricos são conduzidos e passados aos dendritos de outros neurônios pelos botões sinápticos presentes em sua extremidade. Os dendritos, por sua vez, são terminações nervosas cujo formato assemelha-se a uma árvore e são responsáveis pela recepção dos impulsos de outros neurônios.

A transmissão de informações realizada na conexão entre os neurônios chama-se sinapse, e depende de pulsos elétricos e neurotransmissores, que ativam - ou inibem - a ação da outra célula. Os neurotransmissores são substâncias químicas liberadas pelos neurônios e atuam entre eles num espaço conhecido como fenda sináptica (figura 2), transferindo as informações dos axônios aos dendritos.

Figura 2 Sinapse e neurotransmissores. Fonte: @sciencephotolibrary via Canva.com

Para que o movimento voluntário do corpo aconteça, ou seja, para que o corpo em repouso comece a andar, correr, pular ou dançar, é necessária a existência de uma conexão entre mente e músculos.

O sistema nervoso do corpo humano regula e coordena atividades corporais através de impulsos nervosos. A sinapse é justamente a transmissão deste impulso nervoso de um neurônio a outro, com o objetivo de provocar uma resposta do organismo. É a comunicação entre neurônios, que são células do sistema nervoso, e as demais células do corpo, resultando em movimentos voluntários e involuntários. Essa conexão ocorre quando o cérebro libera a acetilcolina, substância química de ação neurotransmissora que atua na junção neuromuscular cruzando as sinapses, ligando-se aos receptores nas fibras musculares, que respondem através da contração muscular.

Quando essas contrações acontecem, os músculos liberam miocinas, proteínas que desempenham importantes funções na comunicação entre os músculos e outros tecidos, garantindo a regulação dos processos inflamatórios e a manutenção da saúde dos órgãos.

No sistema nervoso, mais especificamente, elas agem estimulando o aumento da vascularização cerebral, a formação de neurônios e promovendo a neuroplasticidade, que é a capacidade de adaptação e readaptação do cérebro ao longo da vida diante das respostas do indivíduo aos estímulos do ambiente no qual ele está inserido.

Estudos recentes descobriram que as irisinas, que são um exemplo de miocinas, não são só liberadas pelos músculos, mas também são produzidas pelo próprio cérebro durante a prática da atividade física. Essas proteínas têm grande valor para o desenvolvimento cognitivo, pois melhoram a comunicação entre os neurônios, protegem o cérebro contra a perda de informações e colaboram na restauração da memória.

Entre as influências do exercício sobre as estruturas cerebrais, vale destacar os fenômenos da neurogênese (formação de novos neurônios), da angiogênese (formação de novos vasos sanguíneos) e da sinaptogênese (intensificação da ação sináptica), em especial sobre o córtex pré-frontal e o hipocampo (figura 3).

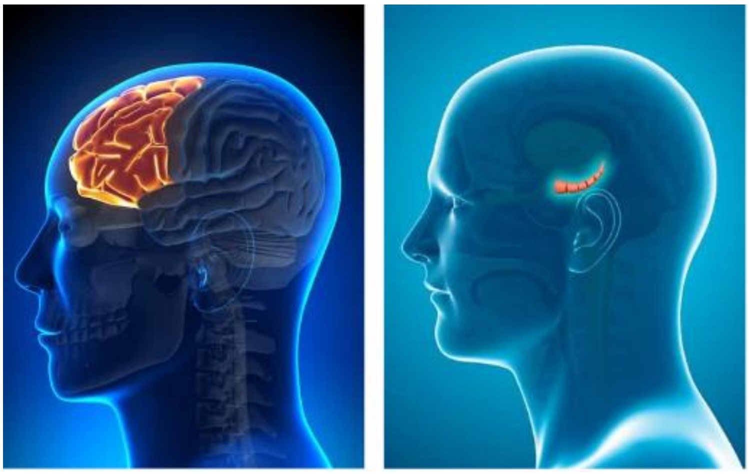


Figura 3: Cortex frontal e hipocampo. Fonte: @gettyimagespro via Canva.com.

O córtex pré-frontal é responsável pelas funções executivas do corpo, o que envolve as ações físicas e também a capacidade de atenção, concentração, memória de trabalho a curto prazo, julgamento, planejamento e aprendizagem. Com a prática de atividades, ocorre a angiogênese e, consequentemente, a sinaptogênese pela intensificação da amplitude e da frequência das ondas cerebrais nessa área, melhorando a concentração e a capacidade de se decidir mudar essa atenção para outro fator importante.

O hipocampo, por sua vez, desempenha um papel crucial na formação, organização e armazenamento de novas memórias, bem como na conexão dessas memórias com as emoções e sensações. A prática regular de exercícios contribui para a neurogênese, mas, conforme Ferreira et al (2017, p. 498) "o exercício não só aumenta o número de novos neurônios, mas também influencia a morfologia de neurônios recém-nascidos, sugerindo que os efeitos do exercício nos novos neurônios são quantitativos e qualitativos" o que traz benefícios imediatos para a cognição e também pode proteger o cérebro contra a atrofia causada por doenças neurodegenerativas, como o Alzheimer.

> "A prática regular de atividade física ajuda a diminuir a velocidade da perda desses neurônios. Conforme envelhecemos, essas células tendem a diminuir, como se estivessem morrendo. O aumento de sinapses também ajuda a reduzir a morte celular. Isso sem dizer que, quando você inicia a prática de atividade física, o corpo automaticamente manda mais oxigênio para o cérebro, começando de fato um processo de estímulo cerebral". (BRASIL, 2022)

3.2

As contribuições da psicologia

Atualmente, a psicologia, ciência que estuda o comportamento humano e seus processos mentais, vem divulgando os benefícios das atividades físicas para a saúde cerebral. Não é incomum a recomendação de exercícios regulares aos pacientes que sofrem de algum transtorno, como a depressão e a ansiedade.

O tratamento padrão para depressão - psicoterapia e prescrição medicamentosa - é extremamente efetivo, porém a prática de atividade física é uma terapia adjuvante altamente benéfica. As pesquisas demonstram que a prática de exercícios regulares, além dos benefícios fisiológicos, acarreta benefícios psicológicos, tais como: melhor sensação de bem estar, humor e autoestima, assim como, redução da ansiedade, tensão e depressão. (Costa, Soares e Teixeira, 2007, p. 274)

Esses benefícios podem ser explicados pelo aumento na produção de neurotransmissores, como a endorfina, a dopamina, a noradrenalina e a serotonina, que melhoram o humor, diminuem o estresse e aumentam a sensação de bem-estar. Além disso, essas substâncias atuam na qualidade do sono, da alimentação e da satisfação, aspectos que se relacionam diretamente com a atenção e com a motivação.

3.3

Os impactos sobre os processos educacionais

Percebemos então que os benefícios neuropsicológicos proporcionados pela prática de atividades físicas entre os alunos podem ser de grande proveito para os seus estudos. Indivíduos que gozam de um organismo regulado e saudável e de uma mente equilibrada têm aumentada a sua disposição, motivação e concentração, criando assim uma base sólida para absorver conhecimento de forma mais eficaz. Além dos óbvios benefícios físicos, como a melhoria da saúde cardiovascular, a prática regular de atividades físicas também influencia positivamente a cognição e o desempenho acadêmico. O aumento do fluxo sanguíneo para o cérebro durante o exercício, juntamente com a liberação de neurotransmissores, contribui para a potencialização da função cognitiva e para a melhora do humor. Como resultado, os alunos podem aprimorar a capacidade de processar informações por experimentar uma maior clareza mental, o que facilitará a sua compreensão sobre o objeto de estudo.

No entanto, observa-se a propensão do ser humano a abandonar sua natureza ativa, apoiando-se nos confortos trazidos pelas tecnologias, tendendo cada vez mais ao estilo de vida sedentário. Os jovens, em particular, demonstram crescente dependência dos dispositivos móveis a medida em que os espaços para atividades físicas são cada vez mais escassos. Enquanto isso, os transtornos mentais citados anteriormente são cada vez mais frequentes na sociedade contemporânea, o que enfatiza a urgência de que se abram aos estudantes possibilidades e incentivo para movimentar-se nos diversos momentos da rotina escolar.

4.
Teorias educacionais

Para embasar teoricamente a proposta do ensino interdisciplinar que une a dança e a matemática, convém examinar as teorias de Lev Vygotsky e Jean Piaget, predecessores da psicologia da educação, de David Ausubel, defensor da aprendizagem significativa e Maria Montessori, desenvolvedora de uma pedagogia própria conhecida como método montessoriano. Essa análise visa compreender as particularidades de cada abordagem e identificar os pontos de interseção elas que apoiam as ideias apresentadas neste trabalho.

4.1
Teorias socioconstrutivistas

4.1.1
Sociointeracionista

Lev Semionovitch Vygotsky foi um psicólogo e professor russo que viveu de 1896 a 1934 e que dedicou boa parte dos seus estudos ao desenvolvimento da Psicologia Sociointeracionista. Afirma-se nessa teoria que é a atividade cerebral que permite que homem e cultura se pertençam mutuamente e que essa atividade é mediada pela linguagem e potencializada nas interações sociais.

Para Vygotsky, o caminho da construção do conhecimento percorre três áreas denominadas Zonas de Desenvolvimento, (figura 3), que se referem às etapas alcançadas pelo aprendiz.

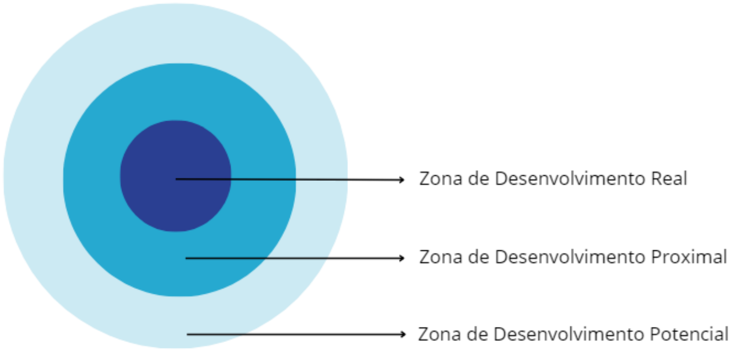


Figura 4: Zonas de desenvolvimento. Fonte: Figura da autora.

Na zona de desenvolvimento potencial, a criança demonstra que já possui os instrumentos biológicos necessários para a realização de determinada tarefa e, embora ainda não seja capaz de realizá-la, mostra que está pronta para tal aprendizado. Através da interação com um parceiro mais experiente, o mediador, o indivíduo começa a realizar a tal tarefa com auxílio, percorrendo assim a zona de desenvolvimento proximal, que é

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar por meio da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado por meio da solução de problemas sob orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKI, 2007, p. 58)

O destino final desse caminho, a zona de desenvolvimento real, é alcançado quando a aprendizagem acontece de fato, ou seja, quando o indivíduo já é capaz de cumprir a missão não precisando mais de apoio.

Segundo a teoria sociointeracionista, o trajeto completo pelas zonas de desenvolvimento indica o amadurecimento e a consolidação de funções mentais superiores. O papel do mediador pode ser exercido por qualquer pessoa que já construiu a sua aprendizagem anteriormente, o que inclui o próprio educador, que deve estar atento ao potencial de seus alunos e disposto a estimulá-los, interagindo com eles e promovendo as relações com seus pares. Nessa perspectiva, professor atuará como mediador entre um indivíduo ativo e os conteúdos a serem explorados.

4.1.2

Epistemologia genética

Contemporâneo de Vygotsky, Jean William Fritz Piaget foi um biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço que viveu entre 1896 e 1980 e fundamentou a Teoria da Epistemologia Genética, que busca explicar a evolução das funções mentais no processo de aprendizagem através de um ciclo que envolve equilibração, acomodação e assimilação.

De acordo com Piaget, é na interação com o meio e com os outros que o indivíduo constrói a sua aprendizagem. Ele defende que estruturas cognitivas, desde o nascimento, se formam e se aperfeiçoam enquanto ocorre a interação com o meio e a manipulação de materiais concretos. Ao se deparar como o novo, com o desconhecido, o aprendiz entra em um estado de desiquilíbrio, pois ainda não possui estruturas mentais para interpretar os novos dados.

> O desenvolvimento psíquico, que começa quando nascemos e termina na idade adulta, é compatível ao crescimento orgânico: como este, orienta-se, essencialmente, para o equilíbrio. Da mesma maneira que um corpo está em evolução até atingir um nível relativamente estável – caracterizado pela conclusão do crescimento e pela maturidade dos órgãos -, direção de uma forma de equilíbrio final, representada pelo espírito adulto. O desenvolvimento, portanto, é uma equilibração progressiva, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior (PIAGET, 1983, p. 11).

Nesse momento, inicia-se o desenvolvimento de estruturas que possam assimilar as novas informações. Quando essas estruturas estão formadas e aquele objeto de conhecimento deixa de ser novidade e passa a ser internalizado através de operações psíquicas internas, ocorre a acomodação, conforme o esquema na figura 5. Como afirma Piaget (1999, p.17) “ora assimilando assim os objetos, a ação e o pensamento são compelidos a se acomodarem a estes, isto é, a se reajustarem por ocasião de cada variação exterior. Pode-se chamar ‘adaptação’ ao equilíbrio destas assimilações e acomodações” (figura 5). O desenvolvimento cognitivo ocorre à medida em que a criança assimila informações e faz ajustes mentais para acomodá-las, num ciclo de assimilação, acomodação e equilibração.

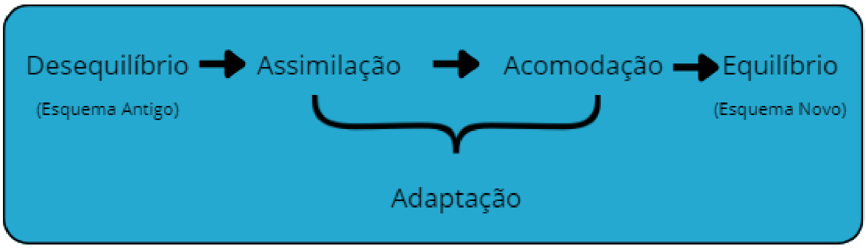


Figura 5: Desenvolvimento Psicogenético de Piaget. Fonte: Figura da autora.

Piaget preocupou-se em compreender as fases do desenvolvimento infantil, classificando-as de acordo com as características comuns às faixas etárias e suas respectivas fases de maturação biológica. Assim, defende que a criança passa por estágios, sendo eles o sensório-motor (0 a 2 anos), pré-operacional (2 a 7 anos), operacional-concreto (7 a 12 anos) e operacional formal (a partir dos 12 anos).

Do ponto de vista da epistemologia genética, o professor atua como um provocador, mostrando a seus alunos que seus esquemas mentais são insuficientes para acomodar um mundo de conhecimentos e precisam ser ampliados, pois a equilibração não é permanente. Ele é dialógico, incentiva as interações, a reflexão e a criatividade, respeitando as peculiaridades dos estágios em que os alunos se encontram, mediando a construção ativa dos seus saberes.

4.2

Aprendizagem significativa

David Paul Ausubel foi um médico psiquiatra e psicólogo estadunidense que viveu entre 1918 e 2008 e dedicou parte da sua vida à psicologia cognitivista. Sua Teoria da Aprendizagem Significativa explica o processo pelo qual novas informações relacionam-se aos conceitos prévios para consolidarem-se, fornecendo mecanismos para o desenvolvimento de estruturas cognitivas que possibilitem a compreensão a longo prazo, o que se distingue da aprendizagem mecânica, ou seja, memorização sem compreensão.

Nessa abordagem, defende-se que o conceito subsunçor, que consiste no conhecimento prévio especificamente relevante que o estudante já possui, é fundamental para que ocorra nele a ancoragem de um novo conceito.

> Se eu tivesse de reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio diria isto: o fator singular mais importante que influência na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece, descubra o que ele sabe e baseie-se nisso o seu ensinamento. (Ausubel, 1968, p.31)

A aprendizagem acontece de modo gradativo, e dessa perspectiva provém os conceitos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

A diferenciação progressiva ocorre com a evolução do conhecimento que o indivíduo já possuía, transformando-o em um conceito mais complexo. Pode-se verificar que existe uma ideia hierárquica, onde o conceito mais geral aprofunda-se e ganha especificidade. Já a reconciliação integradora consiste na acomodação da ideia, na sua inclusão como parte do novo repertório, delimitando assim uma nova e mais elaborada estrutura cognitiva (figura 6).

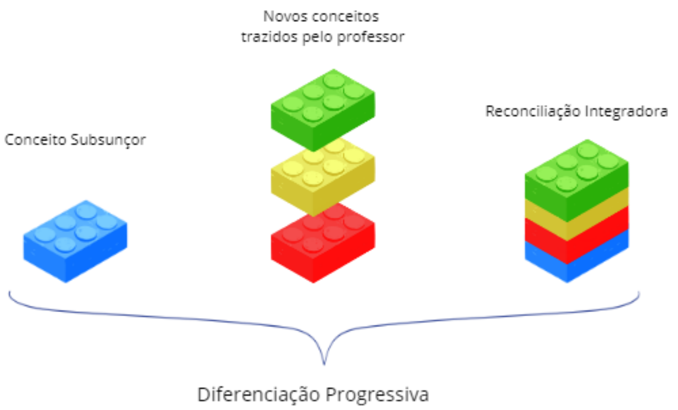


Figura 6: Teoria da Aprendizagem Significativa. Fonte: Figura da autora.

Nesse contexto, é importante que o docente conheça o seu aluno e seja mediador entre o que ele já sabe e o que se deseja que ele aprenda, apoiando-se nas estruturas cognitivas que ele já construiu anteriormente, para orientá-lo na construção de novas aprendizagens. Ele deve certificar-se da pré-disposição do indivíduo para a aprendizagem, verificando se ele já possui os conhecimentos prévios necessários para que ocorra a aprendizagem de um novo conteúdo. Além disso, é importante que o professor lance mão de um material potencialmente significativo, o que consiste em suportes para o ensino que sejam coerentes com o conhecimento prévio dos alunos e que possam servir de ponte entre o conhecido e o novo.

4.3 Pedagogia científica ou método montessoriano

Maria Montessori nasceu na Itália e viveu de 1870 a 1952. Estudou engenharia e graduou-se em medicina, dedicando-se à psiquiatria e à psicologia. Destinou a maior parte da sua vida ao desenvolvimento e à divulgação da pedagogia científica, mundialmente conhecida como Método Montessoriano, que consiste em uma metodologia que preza pela liberdade, pela independência e pela autonomia da criança, afirmando que o ambiente carente de estímulos para o desenvolvimento adequado era a principal causa dos atrasos apresentados por crianças com distúrbios de comportamento e aprendizagem.

Por isso, a visão montessoriana defende que o espaço escolar deve ser planejado para possibilitar a independência, a iniciativa pessoal e a movimentação das crianças, dispondo objetos de diversos tamanhos, formas, cores, texturas, pesos, cheiros e sons para que elas toquem e manipulem (figura 7), o que deve auxiliar todo tipo de aprendizado, provocando o raciocínio.

Figura 7: Espaço segundo o método montessoriano.
Fonte: @gettysignature via Canva.com

Em 1907 fundou em San Lorenzo, Roma, a *Casa dei Bambini* (Casa das Crianças), com um ambiente estruturado de acordo com as necessidades infantis para o adequado desenvolvimento. A mobília foi adaptada ao tamanho das crianças e instrumentos foram dispostos em prateleiras ao alcance e em quantidade suficiente para todos. Para Montessori, era importante respeitar as necessidades e interesses, bem como os estágios de desenvolvimento correspondentes à faixa etária de cada estudante. Acreditando que o aprendizado deveria ser conduzido pelos aprendizes, Montessori afirma que o professor deve acompanhar o processo, propondo um novo modelo de educador, no qual, segundo Montessori (1976, apud RÖHRS, 2010, p.26) “no lugar da palavra, [ele deve] aprender o silêncio; no lugar de ensinar, ele deve observar; no lugar de se revestir de uma dignidade orgulhosa que quer parecer infalível, se revestir de humildade”.

Em 1929 foi fundada, na Dinamarca, a Associação Montessori Internacional, com o objetivo de orientar a formação de professores. Entre os patrocinadores iniciais da associação estava Jean Piaget.

4.4

Convergência entre as teorias educacionais

Em síntese, percebe-se então que, enquanto Vygotsky prioriza o campo das interações sociais, Piaget lança foco sobre o papel dos esquemas mentais desenvolvidos na interação do indivíduo com o meio, o que pode se dar na simples manipulação de objetos. Já Ausubel preocupa-se em considerar a pré-disposição do estudante para aprendizagem e Montessori defende a autonomia e a liberdade para aprender. Embora cada teórico apresente seu próprio enfoque, observa-se que há importantes pontos em comum.

Entre eles, pode-se destacar a importância atribuída à participação ativa do estudante na construção de seus saberes, na qual ele assume o protagonismo, enquanto o professor atua como mediador, provocando, incentivando, planejando maneiras de potencializar o processo. Para isso, é necessário conhecer individualmente os membros que formam o corpo discente à medida em que as relações se estabelecem, levando-se em consideração suas experiências, seus interesses, seus anseios e seus conhecimentos prévios.

A matemática está em todo lugar. Assim, o professor de matemática que deseja desenvolver uma prática significativa possui uma infinidade de assuntos aos quais poderá vincular a disciplina, desenvolvendo projetos que permitam explorar suas variadas áreas. A dança é um exemplo de atividade artística que atrai jovens de diferentes idades e que possui uma quantidade surpreendente de conexões com a matéria, podendo ser considerada uma importante ferramenta no ensino da matemática.

5.
A matemática e a dança

Observa-se que a dança, em geral, segue um padrão rítmico que pode ser matematicamente expresso pela contagem de passos, ritmos e batidas da música que a embala, o que pode ser útil à aritmética. O tempo e a velocidade dos movimentos também precisam ser calculados para que a coreografia se encaixe corretamente na música. Além disso, os passos que compõem algumas coreografias seguem padrões e sequências, que podem ser explorados na prática combinatória. Em geometria, os diversos tipos de simetria apresentam-se na dança individual, em dupla ou em grupo, além das formas e medidas que envolvem as pessoas, seus movimentos e o palco no qual se apresentam, cuja distribuição espacial pode levar em conta a razão e a proporção de suas medidas.

O estudo da relação entre dança e matemática pode ser esclarecido por meio das pesquisas de Rudolf Laban, um renomado dançarino, coreógrafo e arquiteto. Laban dedicou-se à descrição e análise do movimento humano, tornando-se uma figura respeitada no campo da teoria da dança. Seus estudos visam aplicar-se universalmente em diversas esferas da atividade humana, buscando a harmonia entre corpo e mente por meio da compreensão de suas relações interdependentes. Ele destaca a indissociabilidade entre esses dois aspectos e a influência mútua entre ambos e o ambiente. Laban (1978, p.43) ressalta que "a necessidade de brincar e dançar expandiu-se (...) numa variedade estonteante de tradições de movimentos, em todos os campos da atividade humana", incentivando assim o exercício do pensamento por meio dos movimentos corporais. Para Laban, o movimento é universal e está presente em tudo o que possui vida, sendo, portanto, uma expressão da própria vida.

A notável conexão entre matemática e dança é evidenciada nas pesquisas de Laban, que utilizava formas geométricas para fundamentar os movimentos executados pelos artistas do teatro e da dança. Os sólidos regulares, também conhecidos como platônicos, desempenham um papel proeminente em seus estudos. Essas formas (figura 8), servem de base para os movimentos humanos em cinesfera, que consiste no movimento delimitado pela esfera corporal, tendo o próprio eixo de equilíbrio como referência, respeitando as escalas de comprimento, altura e largura dos sólidos regulares que ali se encaixam e cujos vértices são marcados pelos movimentos.

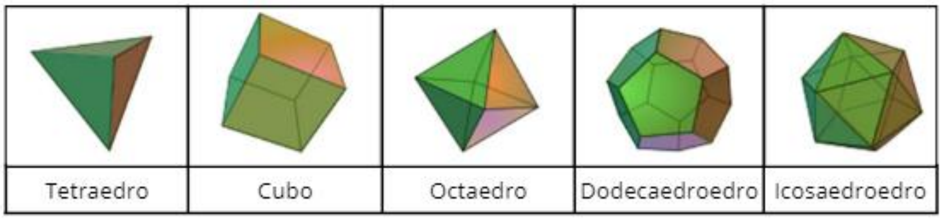


Figura 8: Sólidos platônicos. Fonte: Figura da autora.

Os estudiosos de dança que utilizam o método Laban projetam seus movimentos nos vértices e diagonais desses sólidos (figura 9). Além disso, os quatro fatores fundamentais no movimento – espaço, peso/força, tempo e fluência – podem ser analisados tanto por funções objetivas e mensuráveis quanto pela sensação subjetiva do indivíduo que os realiza. Isso proporciona uma abordagem diversificada na construção do conhecimento matemático por meio da dança.

Figura 9: Cinesfera. Fonte: Figura da autora.

6.
A geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental

O Ensino Fundamental representa a segunda etapa da educação básica, sucedendo a educação Infantil e precedendo o Ensino Médio, e busca oferecer ao estudante uma base sólida para seu desenvolvimento pessoal e educacional, fundamentando conceitos indispensáveis para a sua trajetória de vida em todos os aspectos. Com duração de nove anos, esse ciclo atende desde crianças a de seis anos de idade a adolescentes de quatorze anos, tornando-se não só a fase mais longa, mas também a mais complexa do percurso educacional, por lidar com uma clientela caracterizada por estágios tão distintos de maturidade em relação ao desenvolvimento físico, mental e emocional.

Assim, conforme estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (lei 9394/97) o Ensino Fundamental divide-se em dois ciclos com características pedagógicas específicas. O primeiro, denominado Anos Iniciais, abrange do 1º ao 5º ano e destina-se a crianças dos seis aos dez anos de idade. Já o segundo, Anos Finais, compreende do 6º ao 9º ano e atende estudantes de onze a quatorze anos de idade.

Este trabalho tem como foco a primeira etapa do Ensino Fundamental, especificamente a dos Anos Iniciais, como o propósito de desenvolver abordagens inovadoras para a introdução do ensino da matemática, em especial, da geometria. O objetivo é considerar as experiências cotidianas das crianças, bem como as vivências que tiveram na Educação Infantil, propondo uma transição suave, que atenda aos seus interesses e que tenha significado para elas. Assim, busca-se evitar traumas que frequentemente prejudicam a relação dos estudantes com a disciplina, afetando de forma negativa a sua trajetória escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com intuito de estabelecer uma conexão com as práticas propostas pela Educação Infantil, indica que a ludicidade seja incorporada a uma prática pedagógica que privilegie as interações entre pares nessa fase. Contudo, essa abordagem deve apontar não só para a gradual sistematização dos processos de ensino-aprendizagem, mas também para "o desenvolvimento, pelos alunos, de novas formas de relação com o mundo, novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões" (BRASIL, 2018), preservando-se o protagonismo discente em sua atitude ativa na construção de seus próprios saberes.

É fundamental conhecer as particularidades das crianças matriculadas nessa fase de ensino para que se ampliem as possibilidades de êxito das propostas educativas. Em constantes mudanças que afetam suas relações consigo mesmas, com os outros e com o mundo, os estudantes dos anos iniciais progridem gradualmente no desenvolvimento da autonomia para se expressar, para se locomover no espaço, para tomar decisões e para construir sua própria identidade. Relacionam-se com múltiplas linguagens e ampliam cada vez mais as possibilidades de uso social da escrita e da matemática.

> As características dessa faixa etária demandam um trabalho no ambiente escolar que se organize em torno dos interesses manifestos pelas crianças, de suas vivências mais imediatas para que, com base nessas vivências, elas possam, progressivamente, ampliar essa compreensão, o que se dá pela mobilização de operações cognitivas cada vez mais complexas e pela sensibilidade para apreender o mundo, expressar-se sobre ele e nele atuar. (BRASIL, 2018, p. 54)

Ao longo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a progressão do conhecimento ocorre pela consolidação das aprendizagens anteriores e pela ampliação das práticas de linguagem, bem como pela experiência estética e intercultural das crianças. Apesar do enfoque do trabalho docente na alfabetização, não se desconsidera que o conhecimento matemático é essencial para todos os alunos da educação básica devido a sua ampla aplicação na sociedade contemporânea e as suas contribuições na formação de cidadãos críticos e conscientes.

Em particular, a geometria explora conceitos relacionados à posição e ao deslocamento no espaço, às formas e às figuras planas e espaciais em seus elementos, buscando desenvolver habilidades necessárias para a resolução de problemas do mundo físico, em articulação com outras áreas do conhecimento.

Objetiva-se o desenvolvimento do pensamento geométrico, através do qual o estudante, numa postura investigativa, será capaz de conjecturar e argumentar.

Deseja-se que, nos anos iniciais, os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartphones), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa.

> Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p.268)

Observar as transformações geométricas, sobretudo as que envolvem as simetrias, desenvolvendo conceitos relacionados à ideia de construção, representação e interdependência, deve levar a criança ao aprofundamento do aspecto funcional que ser deseja obter no trabalho com a geometria, por meio da articulação com os outros campos – aritmética, álgebra, estatística e probabilidade – mantendo o foco sobre o letramento matemático nos Anos Iniciais.

O ensino da geometria pode ocorrer através de duas abordagens diferenciadas: a tradicional forma sintética, pautada nas demonstrações baseadas em postulados e axiomas básicos e apoiada nas construções geométricas, com traçados e manipulações, consistindo numa exploração mais intuitiva sobre as figuras em estudo. Já a geometria analítica busca a representação das figuras através de coordenadas, buscando compreender e explorar os dados através de uma abordagem algébrica, consistindo em um conjunto de métodos mais abstrato.

Ao observar o ensino da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é notável que existe uma grande preocupação em que o estudante decore os nomes das figuras geométricas e as suas características, como o número de faces, vértices e arestas. No entanto, existem habilidades diretamente relacionadas ao ensino da geometria analítica que visam uma preparação da criança, desde o primeiro ano, para as abstrações que serão necessárias nos estudos mais avançados dessa disciplina, mas que dependem do desenvolvimento do pensamento geométrico da criança, o que torna mais complexo o processo de ensino aprendizagem, sendo assim deixados em segundo plano. As tabelas a seguir, apresentam essas habilidades, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 275-293).

1º ano	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.

Tabela 1: Objetos de conhecimento e Habilidades para o 1º ano. Fonte: BNCC

2º ano	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
Esboço de roteiros e de plantas simples	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.

Tabela 2: Objetos de conhecimento e Habilidades para o 2º ano. Fonte: BNCC

3º ano	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.

Tabela 3: Objetos de conhecimento e Habilidades para o 3º ano. Fonte: BNCC

4º ano	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido Paralelismo e perpendicularismo	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.

Tabela 4: Objetos de conhecimento e Habilidades para o 4º ano. Fonte: BNCC

5º ano	
Objetos de Conhecimento	Habilidades
Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano	(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. (EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Tabela 5: Objetos de conhecimento e Habilidades para o 5º ano. Fonte: BNCC

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da matemática no Ensino Fundamental:

> Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico (BRASIL, 1997, p. 81).

É notável que, frequentemente, conceitos como eixos, direção e sentido geram confusão, mesmo entre estudantes em níveis mais avançados da matemática. Essa problemática destaca a necessidade de uma abordagem mais abrangente no Ensino Fundamental, de modo que tais conceitos fundamentais não apenas sejam introduzidos, mas também compreendidos de maneira mais profunda. Atualmente, a geometria no Ensino Fundamental muitas vezes se concentra na memorização de nomes e características de formas e figuras geométricas planas e espaciais. Embora essa base seja importante, há uma lacuna notável na exploração dos conceitos que permitem às crianças transitar do entendimento perceptivo para o representativo.

Introduzir e aprofundar conceitos que envolvam a localização de si mesmos e de outros com base em diferentes pontos de referência, as diversas formas de representação do espaço e a capacidade de orientar a si mesmo e a outros mentalmente é crucial para desenvolver a capacidade dos alunos de operar matematicamente em níveis mais abstratos. Esses conceitos fornecem a base para a compreensão de coordenadas, orientações espaciais e até mesmo para a resolução de problemas mais complexos no futuro.

Portanto, é essencial repensar a abordagem do ensino da geometria no Ensino Fundamental, preparando os alunos para enfrentar desafios matemáticos mais abstratos nas etapas educacionais subsequentes.

7.

A geometria analítica

7.1

Como surgiu

A Geometria Analítica, um ramo matemático que teve origens no século XVII, concentra-se na análise de figuras geométricas, como pontos, retas, circunferências, polígonos e poliedros, utilizando expressões algébricas. Antes desse período, as atividades matemáticas eram conduzidas por grupos distintos, cada um com seus próprios valores e objetivos. Em um ambiente onde a medicina, a teologia e o direito eram altamente valorizados, a matemática emergiu de maneira fragmentada, sendo praticada de forma recreativa e independente por autodidatas e entusiastas da disciplina, fora do ambiente universitário, como nos informa Urbaneja:

> Tal como na Idade Média, durante o século XVI e grande parte do XVII o currículo matemático que desenvolveu as universidades não se estendeu mais além dos seis primeiros livros dos Elementos de Euclides, de modo que as matemáticas tinham um caráter quase que secundário. A universidade não formou nenhuma das grandes figuras matemáticas do momento. (URBANEJA, 2008: 32)

É interessante observar que foi exatamente nesse contexto que ocorreram as maiores descobertas matemáticas da história. Com o movimento renascentista em ascensão, grupos diversificados de estudiosos de diferentes áreas da matemática empenhavam-se em desenvolver novas ferramentas que atendessem as necessidades do dia-a-dia, preservando a filosofia clássica da matemática através do resgate dos grandes tratados gregos, apresentando suas conclusões em um estilo sintético de exposições. Não existia um curso acadêmico capaz de formalizar todas as descobertas que emergiam fora das universidades, nem periódicos especializados que pudessem tratar da comunicação e divulgação desses valiosos saberes.

A atuação de um padre francês chamado Marin Mersenne foi de grande importância para a estruturação da Geometria Analítica. Ele viveu entre 1588 e 1648, era amigo próximo do físico e filósofo René Descartes, também francês, que viveu entre os anos de 1596 e 1650. Mersenne desejava desenvolver à consciência que despontava de variados lugares e, para isso, empenhou-se em promover reuniões e em estabelecer meios de correspondências entre os estudiosos. Assim, o padre Mersenne cuidou pessoalmente das circulações postais entre eles, na busca de socializar os resultados, teoremas e teorias que lhe chegava às mãos. Nesse ínterim, o matemático e jurista Pierre de Fermat, francês que viveu entre 1601 e 1665, desenvolvia importantes conceitos que, unidos às ideias de Descartes, vieram a lançar os fundamentos da Geometria Analítica. Fermat, através do manuscrito intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, apresentava uma teoria geral sobre lugares geométricos, apresentando uma crítica à forma de pensar de seus colegas, comprovado que as antigas cônicas de Menaecmus e Apolônio poderiam ser descritas com simplicidade pelas equações de Diofanto; Descartes apresentou o princípio fundamental da geometria analítica, constatando a relação entre equações indeterminadas e curvas, enquanto organizava sua obra Discurso do Método para edição.

A nova geometria trouxe a proposta de substituir o método sintético Euclidiano de resolução de problemas, pautado na exposição de resultados com base em desenhos e traçados ostensivos, pelo método analítico, no qual é possível buscar soluções e expressar os raciocínios através de grandezas algébricas. Nas obras de ambos, as técnicas empregadas para a resolução dos problemas geométricos através da álgebra eram semelhantes, e pode-se afirmar então que Descartes e Fermat são os fundadores da Geometria Analítica.

7.2

Importância para a sociedade moderna

Atualmente, as aplicações da Geometria Analítica desempenham um papel crucial na sociedade, impulsionando avanços tecnológicos e contribuindo para diversas áreas. O popular GPS (Sistema de Posicionamento Global) é um exemplo notável, onde conceitos geométricos relacionados ao cálculo das coordenadas são fundamentais para determinar a localização precisa de um objeto ou pessoa na superfície terrestre, utilizando satélites como pontos de referência, cujo posicionamento preciso e o alinhamento adequado também são possíveis graças aos princípios geométricos, garantindo uma comunicação eficiente e confiável.

No setor da Construção Civil, a Geometria Analítica surge na utilização de vetores para os cálculos geométricos, essenciais para garantir a precisão nas medidas, alinhamento e nivelamento de estruturas, assegurando a estabilidade e a segurança das edificações.

A Computação Gráfica é outra área que se beneficia significativamente da Geometria Analítica. Na criação de imagens, modelagem 3D (Figura 10) e animações, os conceitos geométricos baseados nos eixos coordenados são essenciais para representar objetos tridimensionais de forma realista e precisa, contribuindo para setores como design, entretenimento e simulações.

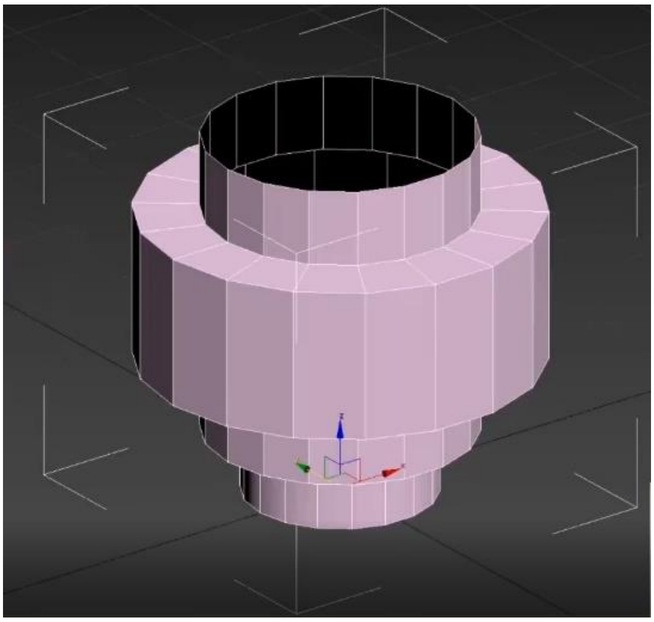


Figura 10: Modelagem em 3D. Fonte: Figura da autora.

7.3

Elementos básicos fundamentais

Os elementos básicos fundamentais para o desenvolvimento do estudo da geometria, seja ela sintética ou analítica, são o ponto, a reta, o plano e o espaço. São conceitos primitivos, provenientes da Geometria Euclidiana, desenvolvidos de forma intuitiva pela experiência e observação. Conforme Dolce e Pompeo (2010, p.2) "as proposições (propriedades) geométricas são aceitas mediante demonstrações. Em particular, as primeiras proposições, as proposições primitivas ou postulados são aceitos sem demonstração". Esses axiomas não se derivam de uma afirmativa anterior e são essenciais para a construção do pensamento geométrico, pois formam base para os raciocínios dedutivos que vêm a seguir. Assim, temos as seguintes definições:

1) Ponto – Menor elemento do desenho geométrico (figura 11). Pode indicar uma localização, o início de um segmento, uma interseção entre linhas etc. É representado por letras maiúsculas do alfabeto latino.

2) Reta – É um conjunto de pontos linearmente dispostos (figura 11). A reta é unidimensional e infinita. Importante frisar que por dois pontos distintos se passa apenas uma reta. Elas são representadas por letras minúsculas do alfabeto latino. Genericamente, pelos pontos A e B, por exemplo, passa uma reta r, a qual denota-se $r = \overleftrightarrow{AB}$

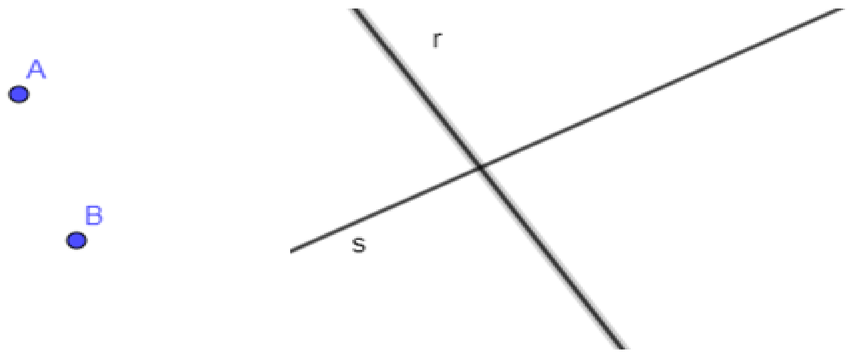


Figura 11: Pontos e retas no plano. Fonte: Figura da autora.

Convém analisar ainda nesse contexto os conceitos de segmento de reta e semirreta.

2.1) Semirreta – Um ponto A qualquer sobre uma reta divide a mesma em dois segmentos denominados semirretas (figura 12). Seja B outro ponto pertencente à mesma reta. Denota-se a semirreta com origem em A e que passa por B por $\overrightarrow{AB}$.

2.2) Segmento – O segmento AB da reta r corresponde ao pedaço dessa reta situado entre os pontos A e B também pertencentes r e seu comprimento é expresso como $\overline{AB}$ (figura 12).

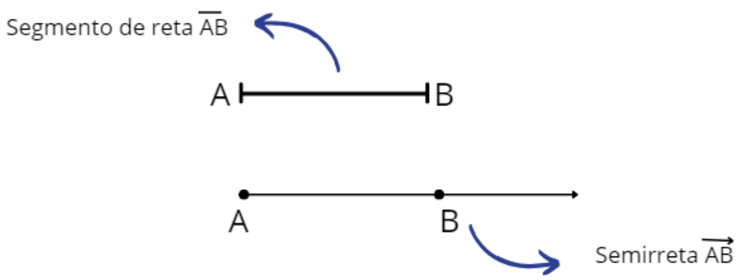


Figura 12: Reta e segmento de reta. Fonte: Figura da autora.

3) Plano – O plano é a reunião de infinitas retas concorrentes e perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado, paralelamente. Ele é bidimensional e infinito e é costumeiramente denotado por letras minúsculas do alfabeto grego. Sejam A, B e C pontos genéricos não colineares, é correto afirmar que existe apenas um único plano que passa por eles, sendo esse plano denotado por α = (A, B, C). Da mesma forma, existe apenas um plano que passa por um ponto A e uma reta r qualquer, sendo A não pertencente a r (figura 13). Além disso, também é exclusivo o plano que passa por duas retas concorrentes (figura 14) ou por duas retas paralelas (figura 15). Duas retas são chamadas reversas se não existe plano que as contenha (figuras 16 e 17).

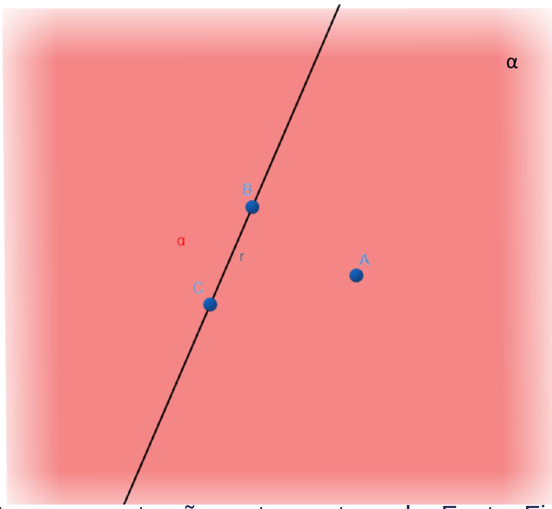


Figura 13: Uma reta e um ponto não pertencente a ela. Fonte: Figura da autora.

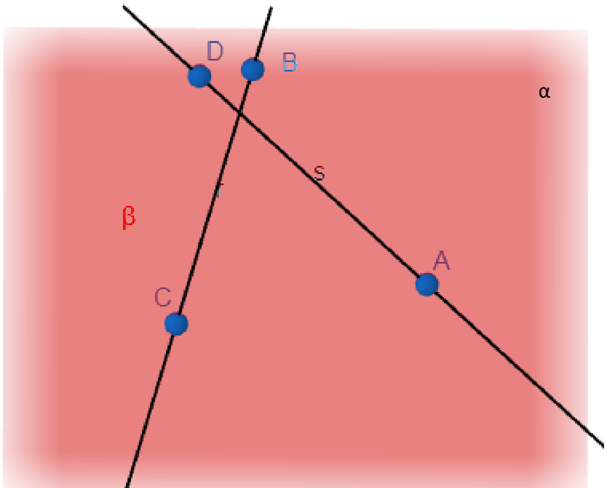


Figura 14: Duas retas concorrentes. Fonte: Figura da autora.

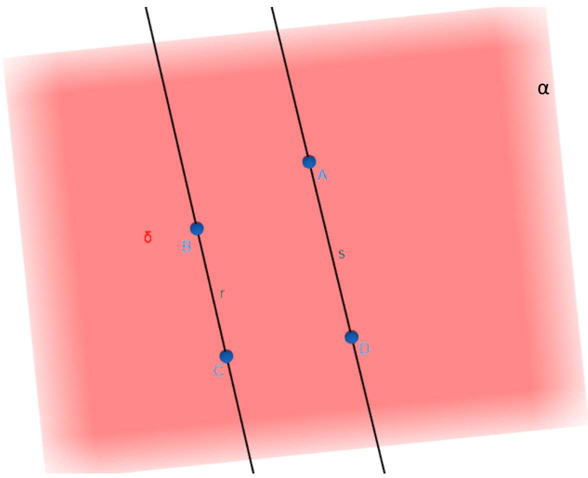


Figura 15: Duas retas paralelas. Fonte: Figura da autora.

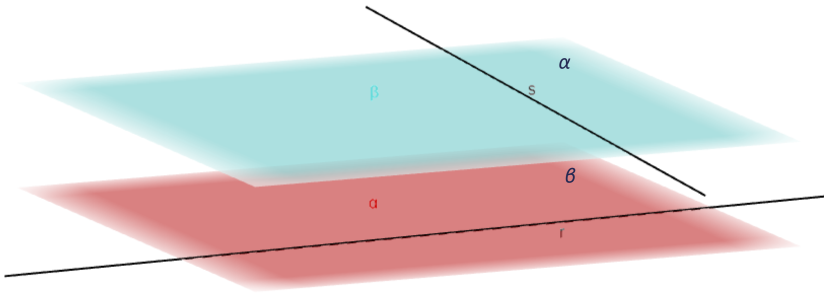


Figura 16: Duas retas reversas. Fonte: Figura da autora.

Pode-se dizer que, basicamente, a Geometria Euclidiana Plana ocupa-se do estudo das propriedades entre pontos e retas no plano. A Geometria Espacial amplia seus estudos para o ambiente tridimensional, o que traz à tona a importância de um importante conceito:

4) Espaço – O espaço em geometria pode ser definido como um conjunto de planos e, consequentemente, de retas e pontos. Ele é tridimensional, infinito para todas as direções e amplia a abrangência da geometria plana com o acréscimo de uma dimensão.

Tendo sido definidos os elementos básicos para o estudo geométrico em geral, é conveniente discutir os conceitos mais específicos da Geometria Analítica, começando pelo Plano Cartesiano.

Numa perspectiva bidimensional, consiste num sistema OXY de eixos coordenados (OX e OY), ortogonais entre si, orientados e graduados, contidos em um plano e que se intersectam no ponto O, chamado origem. É definido por convenção que o eixo OX seja o eixo horizontal e o OY, o vertical. Esse sistema possibilita a utilização de uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano com os de números definidos como:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

Assim, dado um ponto P qualquer pertencente ao plano, pode-se estabelecer uma relação entre a dupla de valores (x, y) e P, tal que x corresponde à medida da projeção ortogonal de P sobre o eixo OX e y , à medida da projeção de P sobre o eixo OY (figura 18).

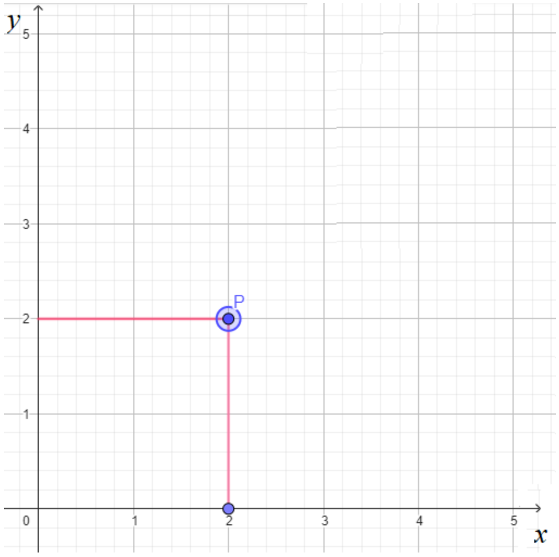


Figura 17Coordenadas x e y do ponto P. Fonte: Figura da autora

Denomina-se (x, y) como par ordenado e ele fornece as coordenadas cartesianas do ponto P. Os elementos x e y são chamados abscissa e ordenada do ponto e, no contexto da geometria, conferem o módulo da largura e da altura à análise de uma figura, respectivamente.

Os valores dos pontos sobre os eixos cartesianos tomam o ponto de origem O= (0,0) como referencial para a sua variação. O eixo OX possui valores positivos e crescentes quanto mais se desloca para a direita da origem, e valores negativos e decrescentes quanto mais à esquerda; O eixo OY possui valores positivos e crescentes quanto mais acima da origem, e negativos e decrescentes quanto mais abaixo dela. Dessa maneira, o plano cartesiano divide-se em quatro quadrantes (figura 19) com base nos eixos coordenados, cujos valores obedecem a seguinte configuração:

1º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}_; x > 0 \; e \; y > 0\}$
2º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}_; x < 0 \; e \; y > 0\}$
3º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}_; x < 0 \; e \; y < 0\}$
4º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}_; x > 0 \; e \; y < 0\}$

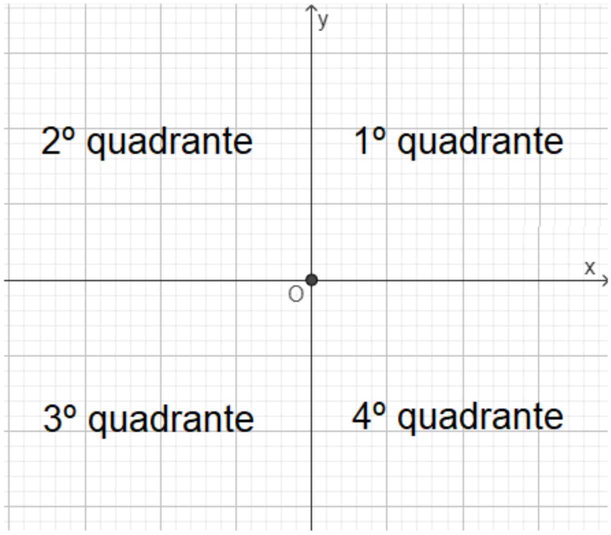


Figura 18 Os quatro quadrantes do plano cartesiano. Fonte: Figura da autora.

Uma modificação para a perspectiva tridimensional é possível pelo acréscimo do eixo coordenado OZ ao sistema, também conhecido como cota. Ele se estabelece ortogonalmente aos outros dois eixos, ampliando a área de trabalho do espaço $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$, conferindo, no contexto da geometria, o módulo da profundidade da figura tridimensional (figura 20). Nesse caso, a coordenada cartesiana passa a ter três valores

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e os eixos dividem o espaço em oito quadrantes.

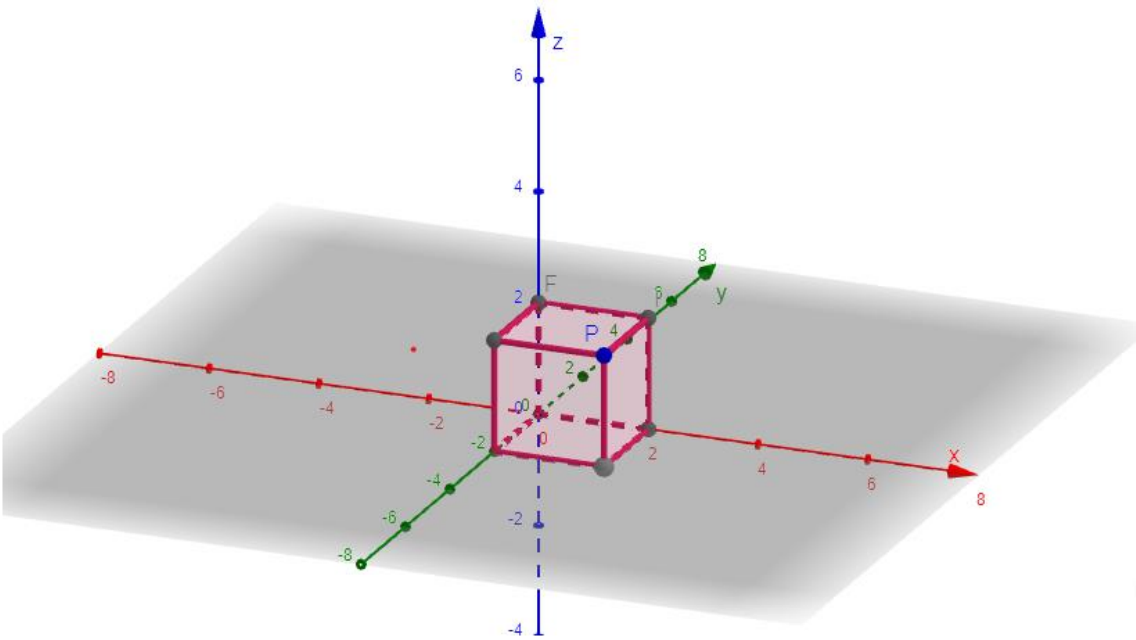


Figura 19: Figura tridimensional. Fonte: Figura da autora.

Esta organização traz à reflexão a importância da localização correta do objeto que se pretende explorar na Geometria Analítica, na qual merecem destaque dois elementos básicos: a direção e o sentido.

A direção refere-se ao movimento unidimensional de um corpo e pode ser conceitualizada como uma linha imaginária que o corpo percorre. Esta trajetória pode ser caracterizada como direção horizontal, vertical, radial, tangencial, diagonal, entre outras. Por outro lado, o sentido analisa o movimento do corpo, indicando o ponto de origem e o ponto de destino na direção sobre a qual se desloca. Descrições como da direita para a esquerda, da esquerda para a direita, no sentido horário, anti-horário, de baixo para cima, de cima para baixo, entre outras, são utilizadas para explicar o sentido do movimento. Importante notar que a direção pode ser discernida através de uma simples observação do esboço da trajetória a ser realizada, enquanto o sentido requer informações sobre como essa trajetória será percorrida.

8.
O produto educacional

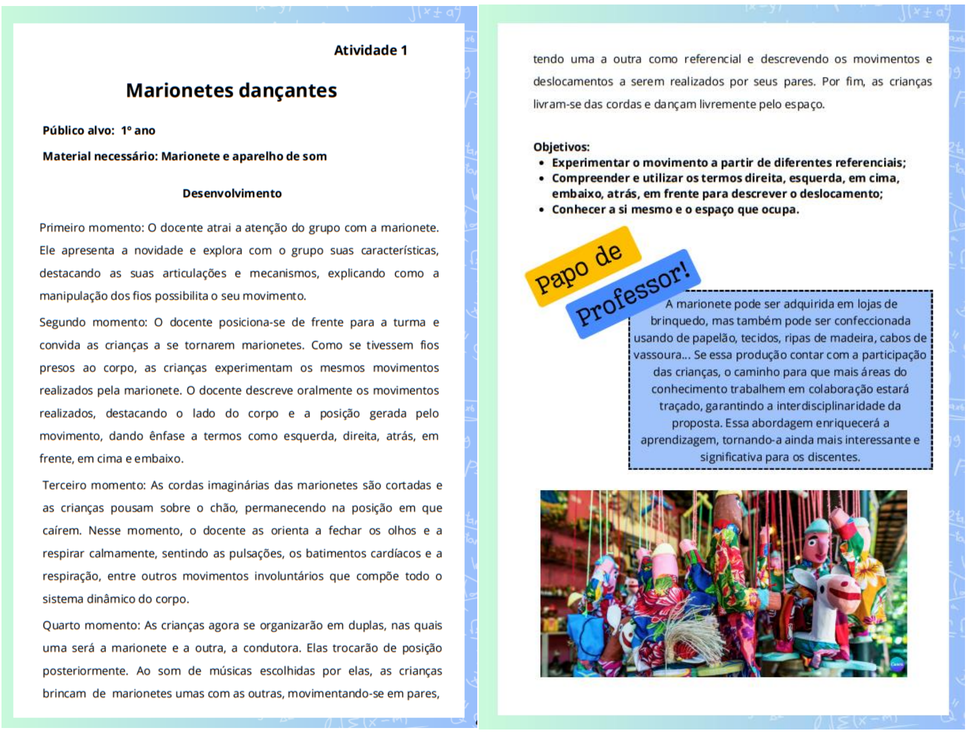
As pesquisas conduzidas nesse trabalho resultaram na criação do caderno didático intitulado ‘As bases da Geometria Analítica para os anos iniciais do Ensino Fundamental através da dança’ (figura 21), um produto educacional destinado a educadores que buscam aprimorar a prática pedagógica através de uma abordagem diferenciada.

Figura 20: Capa do produto educacional. Fonte: Figura da autora.

O material oferece um breve embasamento teórico que fala sobre as características do desenvolvimento infantil de acordo com a faixa etária, sobre as relações que a criança estabelece com o espaço que ocupa à medida em que esse desenvolvimento ocorre e sobre a relação naturalmente intrínseca da criança com a dança. Destaca-se que a atitude de dançar começa antes mesmo do caminhar e que os jovens se envolvem em desafios de dança, o que pode indicar o caminho para uma a renovação da prática pedagógica.

O texto também convida o docente a pensar sobre o público atendido nos anos iniciais do ensino fundamental, propondo uma reflexão sobre as necessidades e interesses das crianças que fazem parte desse público, buscando um alinhamento das práticas pedagógicas, pois acredita-se que assim será possível oferecer às crianças um ensino significativo e prazeroso, tornando o processo mais leve para docentes e discentes. Para isso, é fundamental que o e educador mantenha uma atitude atenta sobre o grupo, que ele se aproxime e busque conhecê-lo, permitindo assim que os estudantes conduzam o processo.

São oferecidas cinco sequências didáticas, cada uma voltada para uma série dos anos iniciais, não para servirem de receita, mas para provocar a criatividade do docente (figura 22).



Atividade 1

Marionetes dançantes

Público alvo: 1º ano

Material necessário: Marionete e aparelho de som

Desenvolvimento

Primeiro momento: O docente atrai a atenção do grupo com a marionete. Ele apresenta a novidade e explora com o grupo suas características, destacando as suas articulações e mecanismos, explicando como a manipulação dos fios possibilita o seu movimento.

Segundo momento: O docente posiciona-se de frente para a turma e convida as crianças a se tornarem marionetes. Como se tivessem fios presos ao corpo, as crianças experimentam os mesmos movimentos realizados pela marionete. O docente descreve oralmente os movimentos realizados, destacando o lado do corpo e a posição gerada pelo movimento, dando ênfase a termos como esquerda, direita, atrás, em frente, em cima e embaixo.

Terceiro momento: As cordas imaginárias das marionetes são cortadas e as crianças pousam sobre o chão, permanecendo na posição em que caírem. Nesse momento, o docente as orienta a fechar os olhos e a respirar calmamente, sentindo as pulsações, os batimentos cardíacos e a respiração, entre outros movimentos involuntários que compõe todo o sistema dinâmico do corpo.

Quarto momento: As crianças agora se organizarão em duplas, nas quais uma será a marionete e a outra, a condutora. Elas trocarão de posição posteriormente. Ao som de músicas escolhidas por elas, as crianças brincam de marionetes umas com as outras, movimentando-se em pares, tendo uma a outra como referencial e descrevendo os movimentos e deslocamentos a serem realizados por seus pares. Por fim, as crianças livram-se das cordas e dançam livremente pelo espaço.

Objetivos:

- **Experimentar o movimento a partir de diferentes referenciais;**
- **Compreender e utilizar os termos direita, esquerda, em cima, embaixo, atrás, em frente para descrever o deslocamento;**
- **Conhecer a si mesmo e o espaço que ocupa.**

Papo de Professor!

A marionete pode ser adquirida em lojas de brinquedo, mas também pode ser confeccionada usando de papelão, tecidos, ripas de madeira, cabos de vassoura... Se essa produção contar com a participação das crianças, o caminho para que mais áreas do conhecimento trabalhem em colaboração estará traçado, garantindo a interdisciplinaridade da proposta. Essa abordagem enriquecerá a aprendizagem, tornando-a ainda mais interessante e significativa para os discentes.

Figura 21: Primeira atividade do caderno didático. Fonte: Figura da autora.

9. Conclusão

O estudo apresentado mostrou que é possível mudar o panorama geral no que se refere à disposição para o estudo da matemática através da conexão do conhecimento escolar às experiências de vida e aos interesses do estudante. Essa abordagem o ajudará a entender que a educação formal pode ajudá-lo a lidar com problemas diversos, sendo o caminho para a transformação de sua realidade. Uma prática que toma por base os saberes e interesses discentes tem maior probabilidade de êxito, pois torna-se significativa.

A dança oferece uma infinidade de possibilidades para o aprendizado na matemática nas suas mais diversas áreas, além das oportunidades de interação social, da prática de exercícios físicos, do desenvolvimento de habilidades motoras, do cuidado com a saúde mental, de ampliação de experiências culturais e de valorização da diversidade.

O desenvolvimento infantil progride no sentido das operações concretas para as formais, e a dança ajuda a criança a desenvolver conceitos cada vez mais abstratos e complexos, a medida em que possibilita ao educando o conhecimento de si, do espaço e do outro, na manipulação de na exploração dos elementos que cercam. As habilidades desenvolvidas nesse processo são de grande utilidade para o desenvolvimento da geometria analítica.

Para os professores de matemática, existe uma infinidade de possibilidades de construção de um processo de ensino-aprendizagem articulado com a realidade, e este trabalho trouxe apenas uma pequena parte delas, no intuito de provocar a descoberta de muitas outras. Que esse seja o ponto de partida, o despertar de práticas inovadoras, apoiadas na criatividade e na boa vontade presentes em cada professor.

10.
Referências

A origem da dança. Cultura SBC. São Bernardo do Campo. Disponível em: <https://www.saobernardo.sp.gov.br/web/cultura/danca-a-origem-da-danca-i#:~:text=Nas%20civiliza%C3%A7%C3%B5es%20antigas%2C%20como%20a,usada%20nos%20cultos%20aos%20Deuses.> Acesso em 15/01/2024.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

AUSUBEL, D.P**. Educational Psychology:** A Cognitive View. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?q=.+AUSUBEL,+D.P.+Educational+Psychology:+A+Cognitive+View.+New+York,+Holt,+Rinehart+and+Winston,+1968.&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart Acesso em 09/02/2024.

BATTEAUX, Charles. **As belas-artes reduzidas a um mesmo princípio**. Tradução: Natalia Maruyama, Adriano Ribeiro. São Paulo: Humanitas. 2009

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

BRANDÃO, Rui**. Conheça os neurotransmissores e qual a função de cada um.** ZenKlub. 2 de junho de 2023. Disponível em: <https://zenklub.com.br/blog/para-voce/neurotransmissores/> Acesso em 17/01/2024

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro, 1996.

_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

_______. Ministério da Educação e do Desporto: **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

_______. Ministério da Saúde. **Como a atividade física protege o cérebro**. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/eu-quero-

me-exercitar/noticias/2022/como-a-atividade-fisica-protege-o-cerebro> Acesso em 17/01/2024

COSTA, Rudy Alves; SOARES, Hugo Leornardo Rodrigues; TEIXEIRA, José Antônio Caldas. **Benefícios da atividade física e do exercício físico no tratamento da depressão**. Revista do Departamento de Psicologia - UFF, v. 19, p. 269-276, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rdpsi/a/RpX434mLxwCh976f4b3dKqw/?format=html&lang=pt. Acesso em: 01 out. 2023.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** Coleção ProfMat, 2º ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 10: Geometria Espacial. São Paulo: Editora Atual, 2010. Disponível: Fundamentos de Matemática Elementar -Geometria Espacial (doraci.com.br). Acesso em 15/02/2024.

FERMAT, Pierre. Lieux Plans Et Solides. In: FERMAT, Pierre. **Œuvres de Fermat**. V. III. Tradução: Charles Henry e Paul Tannery. Paris: Gauthier Villars, 1891/1912.

FERREIRA, Camila et al. **Nascidos para correr: a importância do exercício para a saúde do cérebro.** Revista Brasileira de Medicina do Esporte, Sergipe. Vol 23, nº 6. 495 – 503, dezembro de 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbme/a/5nzW5gTTWcCTk9r4SD8Hkgf/?format=pdf Acesso em 17/01/2024.

História da dança. Dia a Dia Educação: Secretaria da Educação PR. Curitiba. Disponível em:

<http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=102> Acesso em 16/01/2024

LABAN, Rudolf. **O Domínio do Movimento**. Tradução: Maria Barros e Silvia Mourão – 3ª Ed. São Paulo: Summus Editorial, 1978.

MALTA, Alexandre de Deus. **O surgimento da geometria analítica no século XVII:** debate histórico sobre questões referentes á sua descoberta. Dissertação (mestrado) – UFMG. Minas Gerais, 2015. Disponível em: http://historia.fafich.ufmg.br/defesas/343M.PDF, Acesso em 16/02/20204.

NETO, Antônio C. M. **Geometria. Coleção ProfMat**. 1º ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

O Cérebro Humano. **Cognifit Research**. Disponível em <https://www.cognifit.com/br/cerebro> Acesso em 17/01/2024.

PIAGET, J. **A epistemologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

URBANEJA, Pedro M. G. **Los orígenes de la Geometria Analítica**, Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 2003.

RÖHRS, Hermann. **Maria Montessori**. Tradução: Danilo Di Manno de Almeida, Maria Leila Alves. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

SANTOS, Teresa. **Cérebro sarado**: os efeitos do exercício físico sobre a saúde cerebral. Portal Invivo, 2022. Disponível em: http://www.invivo.fiocruz.br/saude/cerebro-e-exercicio/. Acesso em: 28 set. 2023

SOUSA, Caíque Rodrigues de Carvalho. **Teorias Psicológicas de Piaget, Vygotsky e Ausubel**: Análise de uma Prática

TEMÍSTOCLES, Jander. **A formação da memória**. Centro Universitário Católico Ítalo Brasileiro. Disponível em: https://italo.com.br/blog/italo/memoria/#:~:text=O%20hipocampo%20desempenha%20um%20papel,de%20mem%C3%B3rias%20durante%20o%20sono, Acesso em: 30 set. 2023

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** 7. ed. São Paulo, SP: Martins Fontes, 2007.