Produto Educacional

Teorema de Minkowski e suas aplicações

João Figueiredo Penaforte

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Florianópolis

Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Coordenação Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Dissertação do Profmat Este ebook é um produto oriundo da dissertação do PROFMAT intitulada "Teorema de Minkowski e suas aplicações" defendida em 2024

Autor João Figueiredo Penaforte

Orientador Dr. Sérgio Tadao Martins

”A matemática é a única linguagem
que temos em comum com a natureza.”
(Stephen Hawking)

Carta ao leitor

Prezado Leitor,

Compartilho com você este material criado a partir da minha dissertação feita para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (Profmat). Neste material estão compilados alguns problemas sobre a natureza de números que podem ser escritos como somas de quadrados.

Busquei elencar problemas que trazem características diversas sobre as possibilidades de um número ser escrito como soma de alguns quadrados e formas de desenvolver demonstrações matemáticas a partir de alguns resultados conhecidos.

Desejo que este conteúdo seja de grande valor para você, que seja fonte de inspiração para o desenvolvimento de seus estudos e aprofundamento na Matemática. Agradeço antecipadamente pela sua atenção e interesse pelo meu trabalho.

Atenciosamente,

João Penaforte.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O assunto de soma de quadrados de números inteiros é conhecido pelos estudantes do Ensino Médio especialmente quando se trata do Teorema de Pitágoras.

De fato, a partir do Teorema de Pitágoras, é possível chegar a diversos números que podem ser escritos como soma de dois números inteiros elevados ao quadrado. Sabe-se que, num triângulo retângulo, o quadrado do comprimento de sua hipotenusa é sempre igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Com o objetivo de desenvolver uma percepção um pouco mais investigativa a cerca da natureza dos números, quais seriam os números que podem ser escritos como soma de dois quadrados? Existem números que podem ser escritos como soma de quatro quadrados? Quais são as justificativas para essas perguntas?

Nesta atividade será proposta uma abordagem investigativa a cerca dessas características citadas acima sobre números inteiros. Através de um investigação minunciosa é possível criar estratégias para resolução dos problemas propostos e também desenvolver algumas demonstrações matemáticas em nível do Ensino Médio.

Este assunto é, por vezes, abordado em questões de Olimpíadas de Matemática. Por este motivo, mostraremos a resolução de um problema olímpico utilizando os resultados encontrados nesta atividade.

1.1 Plano de aula

1.1.1 Conteúdo

Soma de quadrados

1.1.2 Objetivos

1. Estimar e caracterizar números que podem ser escritos como soma de quadrados
2. Desenvolver um demonstração matemática

1.1.3 Base Nacional Comum Curricular

1. **Unidade Temática**: Números e Álgebra
2. **Objetos do Conhecimento**: Propriedades algébricas sobre números que podem ser escritos como soma de quadrados.
3. **Habilidades**:

   (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

   (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

1.1.4 Linhas de Ação

1. **Tempo de Aula**: 50 minutos.
2. Apresentação dos Resultados importantes sobre Teoria de Números e desenvolvimento metodológico.

Capítulo 2

Soma de Quadrados

2.1 Soma de Quadrados

Neste capítulo serão apresentados resultados da Teoria dos Números que dizem respeito sobre números que podem ou não ser escritos como somas de quadrados.

Os teoremas terão seus resultados principais enunciados, mas não serão demonstrados matematicamente neste Produto Educacional. Isto pelo fato de tais resultados necessitarem de embasamento mais aprofundado em Álgebra.

2.1.1 Conceitos e Resultados importantes sobre somas de quadrados

Para esta atividade, todos os números são inteiros.

Definição 2.1. Para dado n inteiro positivo, dizemos que este poderá ser escrito como soma de quadrados se existirem x e y inteiros, tais que $n = x^2 + y^2$

1. (Identidade de Brahmagupta-Fibonacci)

Se r e s são somas de dois quadrados então $r \cdot s$ também é soma de dois quadrados.

2. Se n for um número inteiro, tal que n é da forma $4k+3$, então n não pode ser representado como soma de dois quadrados.

3. Para todo número primo $p > 2$ temos que p pode ser escrito como soma de dois quadrados se, e somente se, $p = 4k+1$.

4. Para todo inteiro não negativo n, existem a e b tais que $a^2+b^2+1 = k \cdot n$, com k inteiro.

Soma de quatro quadrados

5. Teorema de Lagrange: Todo inteiro n, não negativo, pode ser escrito como soma de quatro quadrados. Ou seja, existem inteiros a, b, c e d, tais que $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Capítulo 3

Exercícios

3.1 Problemas

Nesta capítulo propomos uma atividade para o Ensino Médio, a cerca dos resultados obtidos da dissertação Teorema de Minkowski e suas aplicações. Inicialmente, esta atividade será apresentada e logo após trataremos de suas respectivas análises e respostas.

Esta atividade tem como objetivo propor que o estudante do Ensino Médio compreenda os resultados dos teoremas que caracterizam a representação de números inteiros como soma de dois ou quatro quadrados.

A partir de estimativas será possível observar que, por mais que o assunto possa ser considerado aprofundado em Matemática, é possível que esses estudantes possam compreender e aplicar os resultados dos teoremas, inclusive com certa facilidade em alguns casos.

A partir desta motivação, estes estudantes podem perceber que mesmo teorias matemáticas avançadas para o nível escolar básico podem gerar resultados simples e de fácil entendimento.

3.2 Apresentação da Atividade Proposta

Segue abaixo a apresentação da atividade proposta, baseada nos resultados demonstrados a partir do Teorema de Minkowski. Os exercícios foram adaptados nos propósitos desta sequência didática com a finalidade de desenvolver a habilidade de identificação de números como soma de quadrados.

3.2.1 Atividade - Ensino Médio

Exercício 3.1

Sejam os números primos 7, 11, 19, 23, 29, 31 e 37. É possível escrever estes números como soma de dois quadrados? É possível escrever 13 como soma de dois quadrados, pois $13 = 3^2 + 2^2$.

Exercício 3.2

A partir da resposta anterior, verifique os restos das divisões deste números primos pelo número 4. É possível concluir alguma relação sobre a possibilidade de um número primo ser escrito como soma de dois quadrados?

Exercício 3.3

Ambos números 13 e 29 podem ser escritos como soma de dois quadrados. Se considerarmos o produto entre 13 e 29 poderíamos escrever tal resultado como soma de dois quadrados? Escreva $13 \cdot 29$ como soma de dois quadrados.

Exercício 3.4

É possível escrever o número 216 como soma de quatro quadrados? Escreva 216 como soma de quatro quadrados.

Exercício 3.5

Considere o divisor 54 do número 216. Pode-se perceber que 54 é o número consecutivo do número primo 53, que deixa resto 1 na divisão por 4. Existe alguma relação da soma de quatro quadrados com esse fato? Explique.

Exercício 3.6

Como forma de motivar o desenvolvimento de habilidades matemáticas no Ensino Médio, propõe-se a demonstração do Lema de Euler (1748):
Se m e n são somas de quatro quadrados, então o produto $m \cdot n$ também é uma soma de quatro quadrados.

Dica: Análogo ao resultado encontrado no exercício 3.3 que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

sugere-se verificar se

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(r^2+s^2+t^2+v^2) = (ar+bs+ct+dv)^2+(as-br-cv+dt)^2+$$

$$+(at+bv-cr-ds)^2+(av-bt+cs-dr)^2$$

3.3 Problema da Olimpíada Brasileira de Matemática

Os temas relacionados com Teoria dos Números são frequentemente abordados em exames de Olimpíadas de Matemática. Neste capítulo mostraremos uma solução de um problema olímpico utilizando os conceitos desenvolvidos na Atividade da Seção anterio.

Exercício 3.7

(XXV OBM 2003 - Segunda Fase - Níveis 2 e 3) Dizemos que um número n de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de n, na ordem em que aparecem em n e o outro, pelos dois últimos algarismos de n, também na ordem em que aparecem em n.

Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

(**Observação:** Lembre-se que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.)

APÊNDICE A

Soluções

Solução 3.1

Deste números, os que podem ser escritos como soma de dois quadrados são $17 = 4^2 + 1^2$, $29 = 5^2 + 2^2$ e $37 = 6^2 + 1^2$, os outros não podem. Esta primeira atividade, por meio de estimativas empíricas, oferece a oportunidade dos estudantes terem o primeiro contato com a ideia de poder representar um número como uma soma de dois quadrados. Assim, podem se preparar para a introdução do resultado geral.

Solução 3.2

A partir da divisão destes números por 4, pode-se observar que aqueles que deixam resto 1 são exatamente os que conseguimos escrever como soma de dois quadrados. Por outro lado, os primos que deixam resto 3 na divisão por 4 não podem ser escritos como soma de dois quadrados. Conclusão: os primos que deixam resto 1 na divisão por 4 e o número 2 podem ser escritos como soma de dois quadrados.

Solução 3.3

Esta demonstração está em nível de Ensino Médio e é uma maneira de estimular demonstrações matemáticas no âmbito escolar. Uma vez que $13 = 3^2 + 2^2$ e $29 = 5^2 + 2^2$, podemos verificar que

$$13 \cdot 29 = (3^2 + 2^2)(5^2 + 2^2) = 3^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 2^2 =$$

$$= (3^2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 2^2) + (3^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 5^2)$$

Somando $2(3 \cdot 5)(2 \cdot 2)$ e subtraindo $2(3 \cdot 2)(2 \cdot 5)$ obtemos.

$$13 \cdot 29 = (3^2 \cdot 5^2 + 2(3 \cdot 5)(2 \cdot 2) + 2^2 \cdot 2^2) + (3^2 \cdot 2^2 - 2(3 \cdot 2)(2 \cdot 5) + 2^2 \cdot 5^2) =$$

$$= (5 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 + (5 \cdot 2 - 2 \cdot 3)^2 = 19^2 + 4^2$$

Fica como sugestão apresentar a Identidade de Brahmagupta-Fibonacci que é uma outra maneira de encontrar números que podem ser escrito como soma de dois quadrados a partir da técnica algébrica apresentada acima.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Solução 3.4

Sim, é possível. Observe que $216 = 10^2 + 10^2 + 4^2 + 0^2$.

Solução 3.5

Todo número, além de poder ser representado como soma de quatro quadrados, pode também ser escrito como múltiplo de um número resultante da soma de dois quadrados mais um. Como temos que o 53 é um primo que tem resto 1 na divisão por 4, sabemos que ele pode ser escrito como soma de dois quadrados, então:

$$216 = (53 + 1)(4) = (7^2 + 2^2 + 1)(2^2 + 0^2) =$$

$$= (7^2 2^2 + 7^2 0^2) + (2^2 2^2 + 2^2 0^2) + (2^2 + 0^2) =$$

$$= (7^2 2^2) + (2^2 2^2) + (2^2) + (0^2) = 14^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2$$

Este resultado acima foi importante para verificar que não é única a forma de escrever um número como soma de 4 quadrados, pois

$$216 = 10^2 + 10^2 + 4^2 + 0^2 = 14^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2$$

Solução 3.6

De fato, se $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ e $n = r^2 + s^2 + t^2 + v^2$, temos que

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(r^2 + s^2 + t^2 + v^2) = (ar + bs + ct + dv)^2 + (as - br - cv + dt)^2 +$$

$$+(at + bv - cr - ds)^2 + (av - bt + cs - dr)^2$$

Vamos desenvolver ambos os lados da igualdade e assim obter o resultado desejado. Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima, temos:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(r^2 + s^2 + t^2 + v^2) =$$

$$= a^2r^2 + a^2s^2 + a^2t^2 + a^2v^2 + b^2r^2 + b^2s^2 + b^2t^2 + b^2v^2 +$$

$$+c^2r^2 + c^2s^2 + c^2t^2 + c^2v^2 + d^2r^2 + d^2s^2 + d^2t^2 + d^2v^2$$

Vamos agora desenvolver o lado direito da igualdade e comparar com o resultado obtido no lado esquerdo. Para isso, será desenvolvido cada quadrado separadamente. Então.

$$(ar + bs + ct + dv)^2 = (ar + bs)^2 + 2(ar + bs)(ct + dv) + (ct + dv)^2 =$$

$$= a^2r^2 + b^2s^2 + c^2t^2 + d^2v^2 + 2arct + 2ardv + 2bsct + 2bsdv + 2arbs + 2ctdv$$

Da mesma forma,

$$(as - br - cv + dt)^2 = (as - br)^2 + 2(as - br)(-cv + dt) + (-cv + dt)^2 =$$

$$= a^2s^2 + b^2r^2 + c^2v^2 + d^2t^2 - 2ascv + 2asdt + 2brcv - 2brdt - 2asbr - 2cvdt$$

Analogamente,

$$(at + bv - cr - ds)^2 = (at + bv)^2 + 2(at + bv)(-cr - ds) + (-cr - ds)^2 =$$

$$= a^2t^2 + b^2v^2 + c^2r^2 + d^2s^2 - 2atcr - 2atds - 2bvcr - 2bvds + 2atbv + 2crds$$

Por fim,

$$(av - bt + cs - dr)^2 = (av - bt)^2 + 2(av - bt)(cs - dr) + (cs - dr)^2 =$$

$$= a^2v^2 + b^2t^2 + c^2s^2 + d^2r^2 + 2avcs - 2avdr - 2btcs + 2btdr - 2avbt - 2csdr$$

Agora, somando (2), (3), (4) e (5), obtemos

$$(ar+bs+ct+dv)^2+(as-br-cv+dt)^2+(at+bv-cr-ds)^2+(av-bt+cs-dr)^2 =$$

$$= a^2r^2 + b^2s^2 + c^2t^2 + d^2v^2 + a^2s^2 + b^2r^2 + c^2v^2 + d^2t^2 +$$

$$+ a^2t^2 + b^2v^2 + c^2r^2 + d^2s^2 + a^2v^2 + b^2t^2 + c^2s^2 + d^2r^2$$

Como ambos lados da igualdade em (1) e (6) dão o mesmo resultado, podemos concluir que

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(r^2 + s^2 + t^2 + v^2) = (ar + bs + ct + dv)^2 + (as - br - cv + dt)^2 +$$

$$+ (at + bv - cr - ds)^2 + (av - bt + cs - dr)^2$$

Solução 3.7

A ideia é separar o número de quatro dígitos em duas partes: os dois primeiros dígitos, da esquerda para a direita, formam o número x e os dois últimos formam o número y. Para verificar a condição do número ser biquadrado, chegamos em $100x + y = x^2 + y^2$. Desta forma, podemos considerar a equação $x^2 - 100x + y^2 - y = 0$. Com o objetivo se escrever as expressões em função de x e y como quadrados, utilizaremos a técnica de completamento de quadrados. Logo,

$$x^2 - 100x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 400x + 4y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 400x + 10000 + 4y^2 - 4y + 1 = 10000 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10001$$

Assim, pretendemos encontrar m e n tais que $m^2 + n^2 = 10001$, com m par e n ímpar.

Da fatoração em primos de 10001 temos que $10001 = 73 \cdot 137$. E observe que ambos 73 e 137 são primos do tipo $4k+1$, ou seja, podem ser escritos como soma de dois quadrados. Ou seja, $10001 = 73 \cdot 137 = (8^2 + 3^2)(11^2 + 4^2)$.

Sabe-se que se dois números podem ser escritos como somas de dois quadrados, então o produto dos mesmos também pode. Da Identidade de Brahmagupta-Fibonacci apresentada no exercício 3.3 temos que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Aplicando o resultado da Identidade mencionada acima obtemos

$$(8^2 + 3^2)(11^2 + 4^2) = (8 \cdot 11 + 3 \cdot 4)^2 + (8 \cdot 4 - 3 \cdot 11)^2 = 100^2 + 1^2$$

$$(8^2+3^2)(11^2+4^2) = (8\cdot 4+3\cdot 11)^2 + (8\cdot 11-3\cdot 4)^2 = 65^2+76^2$$

As duas maneiras de escrever 10001 como soma de dois quadrados são do tipo $(m,n) = (\pm 100, \pm 1)$ ou $(m,n) = (\pm 65, \pm 76)$ e suas permutações.

A partir da primeira solução encontra-se $2x - 100 = \pm 100$ que resulta em $x = 0$ ou $x = 100$, que não geram um número biquadrado, conforme enunciado no problema.

A partir da segunda solução encontra-se $2y - 1 = 65$ e $2x - 100 = \pm 76$ que resultam nos pares ordenados $(x,y) = (88, 33)$ ou $(x,y) = (12, 33)$.

Logo o outro número biquadrado é o 8833.

Referências Bibliográficas

MEC. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>: Ministério da Educação, 2024.

NETO, A. P. *Mini Curso Soma de Quadrados*. Disponível em <https://im.ufal.br/evento/bsbm/download/minicurso/quadrados.pdf>: UFAL, 2014.

OBM. *Provas e Gabaritos*. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>.: Olimpíada Brasileira de Matemática, 2024.

SANTOS, J. E. C. dos. *Números Inteiros como Soma de Quadrados*. João Pessoa, PB: Dissertação de Mestrado Profmat, 2013.