MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PRODUTO EDUCACIONAL

CASMATH E OS JOGOS DE CASSINO NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Tipo de Produto Educacional: Sequência Didática e Aplicativo

Luciano da Silva Ferreira
Orientador: André Luiz Martins Pereira

Seropédica, RJ
2024

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 25/04/2024.

AUTORES

Luciano da Silva Ferreira: Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2003) e Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2024). Atualmente é professor de Matemática do Colégio Estadual Antônio Figueira de Almeida e da Escola Municipal Tasso da Silveira.

André Luiz Martins Pereira: Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2003), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2004) e Doutorado em Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro (2008). Atualmente é professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Matemática Pura e Ensino de Matemática, com ênfase em Álgebra Abstrata, atuando nos seguintes temas: Problemas do Isomorfismo em Anéis de Grupos, Teoria de Códigos e Teoria de Códigos Quânticos.

SUMÁRIO

Carta ao Leitor

Esse material, apresentado como Produto Educacional, é parte integrante de nossa pesquisa de Dissertação de Mestrado intitulada UTILIZAÇÃO DE JOGOS DE CASSINO E DO APP INVENTOR COMO FERRAMENTA DE ENSINO APRENDIZAGEM, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), sob orientação do Professor Dr. André Luiz Martins Pereira.

Nosso Produto Educacional consiste em utilizar os jogos de cassino como roleta, poker e blackjack como ferramentas no ensino de análise combinatória e probabilidade e utilizar um aplicativo que consiste em um quiz, um jogo de perguntas e respostas envolvendo esses conteúdos. Esse produto deverá ser aplicado aos alunos cuja turma é do terceiro ano do ensino médio.

-

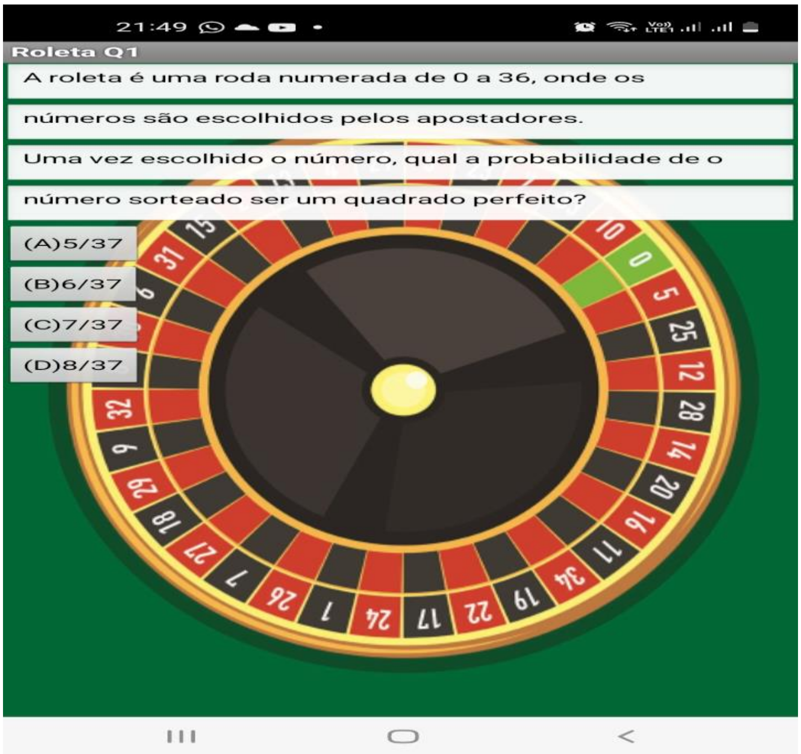
1 O Casmath

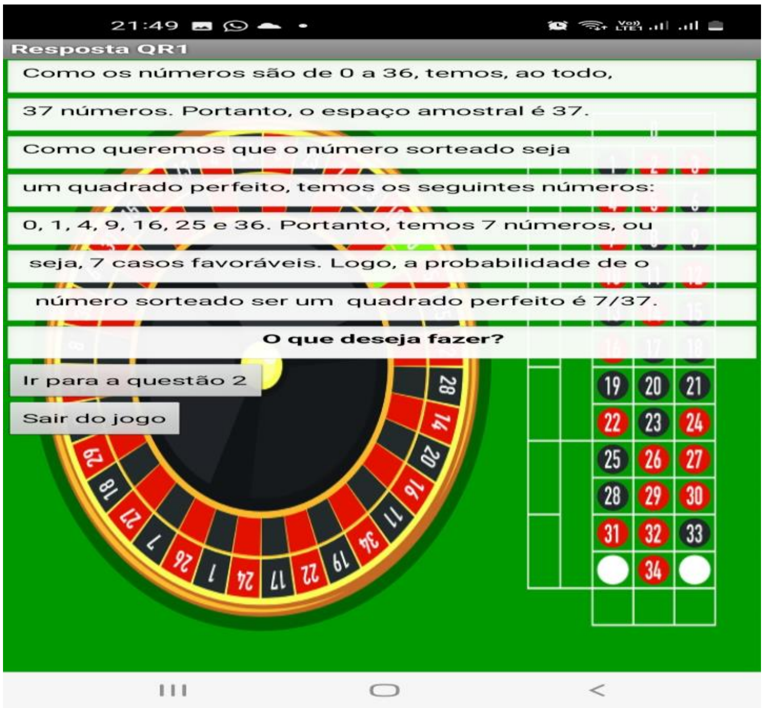
Abordaremos o aplicativo *Casmath* e sua aplicação nas aulas.

1.1 – Descrevendo o Casmath

O *Casmath* é um aplicativo criado a partir do MIT App Inventor (https://appinventor.mit.edu). Ele consiste em um quiz, um jogo de perguntas e respostas envolvendo análise combinatória e probabilidade, usando alguns dos mais famosos jogos de cassino como roleta, poker e blackjack. À medida que o jogador (aluno) vai respondendo uma pergunta de forma correta, uma nova pergunta com um nível de dificuldade maior será apresentada ao aluno.

Em cada jogo de cassino, há 4 questões com 4 alternativas, sendo uma correta. Caso o usuário acerte a questão, ele vai para a questão seguinte. Caso contrário, ele pode escolher ver a resposta e ir para a questão seguinte ou sair do jogo. Ao chegar à última questão, ele pode ir para o próximo jogo ou sair do aplicativo. As figuras abaixo mostram uma questão envolvendo jogo de roleta e sua solução respectivamente.





O aplicativo *Casmath* é usado nos conteúdos de análise combinatória e probabilidade. A seguir, veremos as questões envolvendo análise combinatória e probabilidade e suas respectivas soluções. Vejamos primeiramente as questões envolvendo análise combinatória.

1)Em um jogo de poker, cada jogo é formado por 5 das 52 cartas do baralho. De quantas maneiras distintas podemos formar esse jogo?

a)2598940

b)2598950

c)2598960

d)2598970

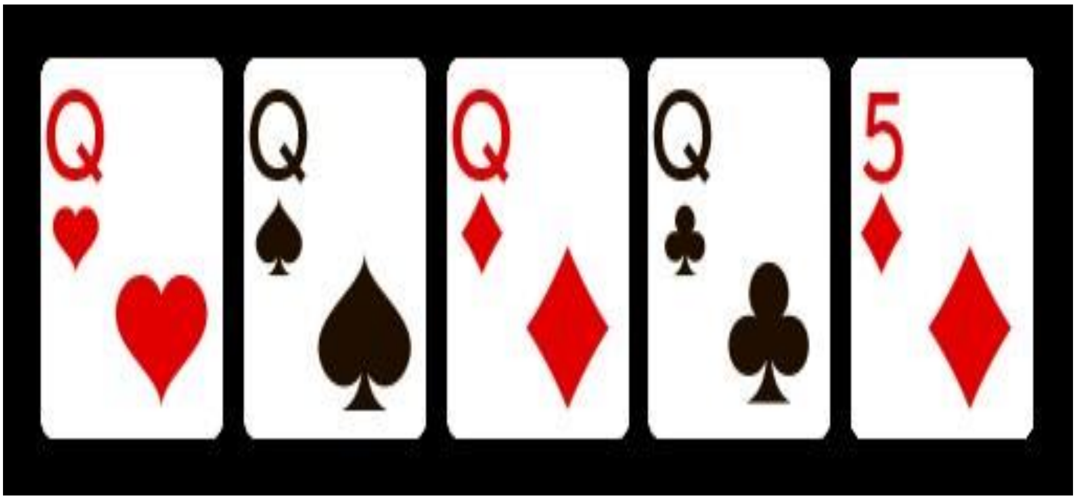
Solução:

Cada jogo é formado por 5 das 52 cartas do baralho. Logo, o número possível de maneiras é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = 2598960$$

Resposta: alternativa c

2)Em um jogo de poker, existe uma combinação chamada Quadra, que é formada por 4 cartas de mesmo valor (por exemplo, 4 ases, 4 reis etc.). Veja o exemplo abaixo.



De quantas maneiras é possível formar uma quadra?

a)624

b)634

c)644

d)654

Solução:

Parra formar uma quadra, devemos ter 13 valores disponíveis (do às ao rei) e 48 cartas disponíveis para formar a quinta carta da mão. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras possíveis é 13 x 48 = 624.

Resposta: alternativa a

3)No poker, o full house é uma combinação de três cartas de mesmo valor e duas cartas também de mesmo valor. A figura abaixo mostra um exemplo de full house.

De quantas maneiras é possível formar um full house?

a)3754

b)3744

c)3734

d)3724

Solução:

Como o full house é formado por uma trinca e um par, temos 13 valores para uma trinca e 12 valores para o par. Com isso, temos $C_{4,3} = 4$ maneiras de formar uma trinca e $C_{4,2} = 6$ maneiras de formar um par. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de formar um full house é 13 x 12 x 4 x 6 = 3744.

Resposta: alternativa b

4)No blackjack, o sabe-se que as cartas 10, J, Q e K valem 10 pontos, a carta A vale 1 ou 11 pontos e as outras cartas valem a pontuação conforme o valor da carta. De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com uma das cartas de 10 pontos e uma carta de ás?

a)128

b)138

c)148

d)158

Solução:

São 16 cartas que valem 10 pontos (10, J, Q e K de 4 naipes cada) 4 ases (1 de cada naipe). Essas cartas podem aparecer em qualquer ordem, podendo assim, serem permutadas, ou seja, calculando $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$. Assim, 16 x 4 x 2 = 128.

Resposta: alternativa a

5)Num jogo de blackjack, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com as cartas de 6, 7 e 8 pontos?

a)394

b)384

c)374

d)364

Solução:

Temos 4 cartas de valor 6, 4 de valor 7 e 4 de valor 8. Cada uma com um naipe. Temos 3 cartas que podem permutar entre si, pois essas cartas podem aparecer em qualquer ordem. Portanto, o número de maneiras possíveis é:

$$4 \times 4 \times 4 \times P_3 = 64 \times 6 = 384$$

Resposta: alternativa b

Agora, vejamos as questões envolvendo probabilidade.

6)Em relação à questão 5, qual a probabilidade de fazer 21 pontos com as cartas 6, 7 e 8?

a)$\frac{28}{15675}$

b)$\frac{38}{15675}$

c)$\frac{48}{15675}$

d)$\frac{58}{15675}$

Solução:

Temos que a probabilidade de se retirar uma carta de 6 é $\frac{4}{52}$, de se retirar a carta 7 é $\frac{4}{51}$ e a carta 8 é $\frac{4}{50}$. Além disso, as cartas podem aparecer em qualquer ordem, ou seja, elas podem permutar entre si. Ou seja, temos permutações de 3 cartas. Isto é, $P_3 = 3! = 6$.

Logo, a probabilidade é:

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot 6 = \frac{48}{15675}$$

Resposta: alternativa c

7)Em relação à questão 4, qual a probabilidade de se fazer 21 pontos com uma carta de 10 pontos e uma carta de ás?

a)$\frac{62}{663}$

b)$\frac{52}{663}$

c)$\frac{42}{663}$

d)$\frac{32}{663}$

Solução:

Temos que a probabilidade de retirar uma carta de 10 pontos é $\frac{16}{52}$ e a probabilidade de se retirar um ás é $\frac{4}{51}$. Como as cartas podem aparecer em qualquer ordem, temos:

$$2 \cdot \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{663}$$

Resposta: alternativa d

8)No poker, o royal straight flush ou sequência real é uma combinação das 5 maiores cartas do mesmo naipe em sequência, ou seja, do 10 ao às. Veja o exemplo.

Qual a probabilidade de o jogador ganhar obtendo uma sequência real?

a)$\frac{4}{2598930}$

b)$\frac{4}{2598940}$

c)$\frac{4}{2598950}$

d)$\frac{4}{2598960}$

Solução:

Existem 4 sequências reais, sendo uma para cada naipe. Dessa forma, a probabilidade se se obter uma sequência real é $\frac{4}{2598960}$.

Resposta: alternativa d.

9)A roleta é uma roda numerada de 0 a 36, onde os números são escolhidos pelos apostadores. Uma vez escolhido o número, qual a probabilidade de o número sorteado ser um quadrado perfeito?

a)$\frac{5}{37}$

b)$\frac{6}{37}$

c)$\frac{7}{37}$

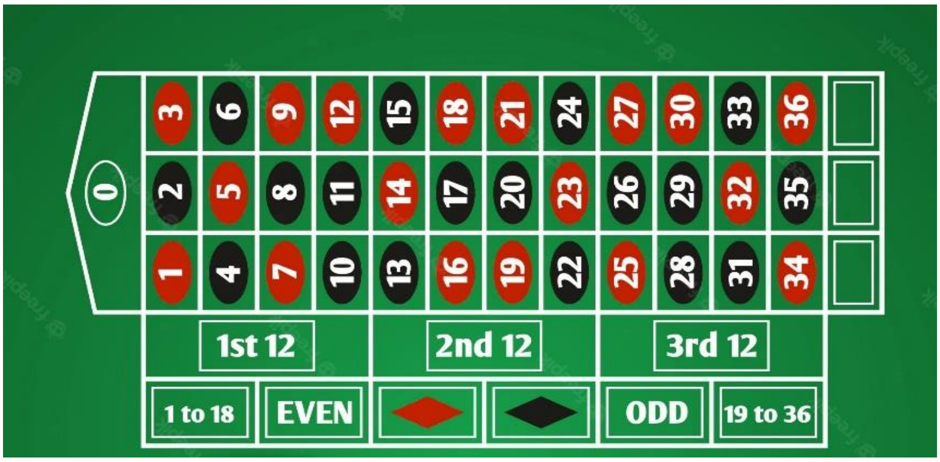
d)$\frac{8}{37}$

Solução:

Como os números são de 0 a 36, temos, ao todo, 37 números. Portanto, o espaço amostral é 37. Como queremos que o número sorteado seja um quadrado perfeito, temos os seguintes números: 0, 1, 4, 9, 16, 25 e 36. Portanto, temos 7 números, ou seja, 7 casos favoráveis. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser um quadrado perfeito é $\frac{7}{37}$.

Resposta: alternativa c

10)Na figura abaixo, os números da roleta, de 1 a 36, aparecem marcados com a cor preta e com a cor vermelha. Escolhendo um número ao acaso, qual a probabilidade de o número sorteado ser par ou com a cor preta?



a)$\frac{26}{36}$

b)$\frac{27}{36}$

c)$\frac{28}{36}$

d)$\frac{29}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A “ser número par” e B “ser número marcado em preto”. Temos 18 números pares e 18 números marcados de preto. Logo, n(A) = 18 e n(B) = 18. Daí, temos que $p(A) = \frac{18}{36}$ e $p(B) = \frac{18}{36}$. O evento “números que são pares e marcados com a cor preta” é definido por A ∩ B. Temos 10 números que são pares e marcados com a cor preta, ou seja n(A ∩ B) = 10. Logo, $p(A \cap B) = \frac{10}{36}$. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par ou preto é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{18}{36} - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

Resposta: alternativa a

11)Na roleta, considerando os números de 1 a 36, qual a probabilidade de o número sorteado ser um múltiplo de 5 e vermelho?

a)$\frac{6}{36}$

b)$\frac{5}{36}$

c)$\frac{4}{36}$

d)$\frac{3}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A, que é múltiplo de 5 e B, que é um número marcado de vermelho. Temos n(A) = 7 e n(B) = 18. Como queremos que o número sorteado seja ao mesmo tempo múltiplo de 5 e marcado com a cor vermelha, indicado por A ∩ B, temos $A \cap B = \{5, 25, 30\}$, ou seja, $n(A \cap B) = 3$. Logo, $p(A \cap B) = \frac{3}{36}$.

Resposta: alternativa d

12)Qual a probabilidade de o número sorteado não possuir resto 3 quando dividido por 4 e não ser preto?

a)$\frac{32}{36}$

b)$\frac{30}{36}$

c)$\frac{28}{36}$

d)$\frac{26}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A “deixam resto 3 quando divididos por 4” e B “ser preto”. Temos que:

A = {3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35}

B = {2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35}

Com isso, temos que A ∩ B = {11, 15, 31, 35} e n (A ∩ B) = 4. Ou seja, a probabilidade de o número possuir resto 3 quando dividido por 4 e ser preto é $\frac{4}{36}$. Mas queremos o contrário. Daí, a probabilidade é:

$$1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

Resposta: alternativa a

O uso do Casmath na sala de aula

Como já foi abordado, o *Casmath* poderá ser aplicado nos conteúdos de análise combinatória e probabilidade. Primeiramente deve-se baixar, de forma gratuita, o aplicativo disponível no Play Store, do Sistema Android no celular ou tablet. Com o *Casmath* baixado, ele poderá resolver as questões dos conteúdos citados anteriormente.

Para que o *Casmath* possa ser utilizado nas aulas de análise combinatória e probabilidade, é preciso que o aluno já tenha aprendido esses conteúdos. Com isso, ao responder as questões, ele não sentirá dificuldade ao resolvê-las. O aluno poderá resolver as questões não só durante as aulas como também fora da sala de aula.

O uso do *Casmath* na sala de aula é mais um exemplo do uso de tecnologia móvel nas aulas. A tecnologia móvel é a tecnologia que acompanha o usuário onde quer que ele esteja.

2 Sequência didática das aulas

Nesse capítulo iremos abordar uma sequência didática de análise combinatória e probabilidade utilizando a temática os jogos de cassino. A sequência didática constitui de oito aulas em sequência, sendo as cinco primeiras abordando o conteúdo de análise combinatória; a sexta e a sétima aulas abordam o conteúdo de probabilidade e a última aula utiliza o aplicativo *Casmath*.

Cada aula tem uma duração de 1 hora e 40 minutos, sendo dividida em 2 tempos de 50 minutos e cada aula, começaremos expondo os objetivos e a metodologia empregados e a seguir desenvolvemos os conteúdos que serão abordados. Os exemplos de cada conteúdo abordam os jogos de roleta, poker e blackjack.

As cinco primeiras aulas abordando o conteúdo de análise combinatória estão divididas de acordo com a seguinte sequência: a primeira aula é sobre o princípio fundamental da contagem e o fatorial de um número natural; a segunda aula é sobre permutações simples; a terceira é sobre arranjos simples; a quarta é sobre combinações simples e a quinta é sobre permutação com repetição.

A sexta e a sétima aulas que abordam o conteúdo de probabilidade estão divididas de acordo com a seguinte sequência: a sexta aula aborda a definição, dos conceitos que são usados em probabilidade e do cálculo da probabilidade; a sétima aula é a continuação da aula anterior onde aborda os cálculos de probabilidade envolvendo eventos complementares e união de eventos.

A oitava e última aula utiliza o aplicativo *Casmath* onde será feita uma revisão das aulas anteriores e os alunos utilizarão o *Casmath* para praticar os conteúdos de análise combinatória e probabilidade.

A seguir apresentaremos a sequência didática a serem feitas em oito aulas:

Aula 1

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdos:**
  - Princípio Fundamental da Contagem;
  - Fatorial de um número

- ✓ **Objetivos:**
  - Conceituar o Princípio Fundamental da Contagem;
  - Resolver problemas envolvendo Princípio Fundamental da Contagem;
  - Conceituar Fatorial de um número natural;
  - Calcular o Fatorial de um número natural.

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição do Princípio Fundamental da Contagem;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho;
  - Apresentação da definição do Fatorial de um número natural.

Princípio Fundamental da Contagem

Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$. Podemos formar m.n pares ordenados (a_i, b_j) tais que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

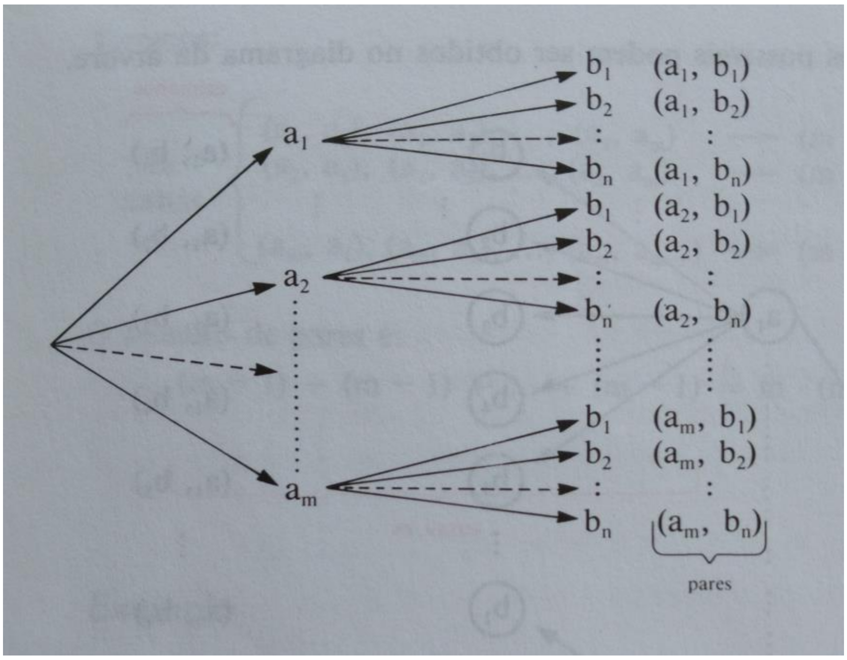
Demonstração:

(i)Vamos manter o primeiro elemento do par ordenado e variar o segundo.

$$\text{m linhas}\left\{\begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots (a_1, b_n) \rightarrow \text{n pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_2, b_n) \rightarrow \text{n pares} \\ (a_3, b_1), (a_3, b_2), \ldots (a_3, b_n) \rightarrow \text{n pares} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots (a_m, b_n) \rightarrow \text{n pares} \end{array}\right.$$

Logo, o número de pares ordenados é $n + n + n + \cdots + n = m.n.$

(ii)Uma outra maneira de visualizarmos os pares ordenados é por modo de um diagrama, conhecido como diagrama da árvore, conforme a figura.



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 5

Exemplo 1: Eu tenho 9 cartas com números (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10) e 4 cartas com letras: valete (J), damas (Q), reis (K) e ás (A). De quantas maneiras eu posso ter 2 cartas, sendo um número e uma letra?

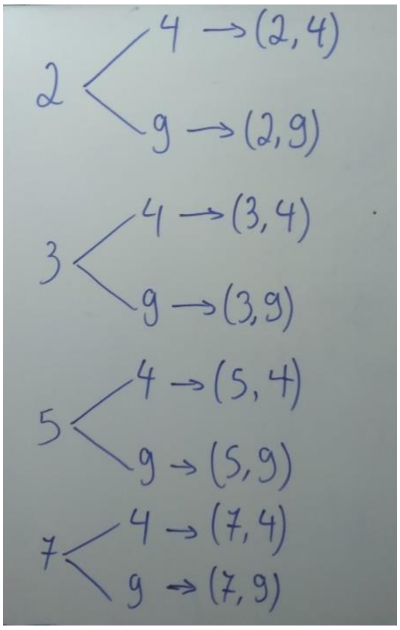
Solução:

Como eu tenho 9 possibilidades de carta com número e 4 possibilidades de carta com letra, pelo princípio fundamental da contagem, temos 4.9 = 36 maneiras.

Exemplo 2: Considere as cartas com os números de 2 a 9. De quantas maneiras podemos ter duas cartas, sendo uma carta de número primo e outra carta de um número quadrado perfeito?

Solução:

Das cartas do baralho com os números de 2 a 9, os números primos são 2, 3, 5 e 7 e os quadrados perfeitos são 4 e 9. Observe o diagrama de possibilidades.



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos 4 . 2 = 8 maneiras.

Fatorial

Nas resoluções de problemas envolvendo Princípio Fundamental da Contagem, é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, como por exemplo, 27.26.25; 4.3.2.1; 16.15.14; etc. na maioria das vezes é possível escrever essas multiplicações de uma forma resumida. Para isso, vamos estudar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem dos agrupamentos que serão estudados a seguir.

Chama-se fatorial de um número natural n (indicamos por n!) a multiplicação de n por seus antecessores até o fator 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplos:

3! = 3 . 2 . 1 = 6

4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Definimos 1! = 1 e 0! = 1.

Conforme n aumenta, o valor de n! se torna muito maior e mais trabalhoso de se calcular. Com isso podemos fazer algumas simplificações. Observe:

- 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 7 . 6!
- 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 6 . 5! ou ainda 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 6 . 5 . 4!

Os exemplos anteriores mostram que para todo n ∈ N temos:

$$n! = n.(n-1)!$$

Por exemplo, para calcular $\frac{11!}{8!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior (11) até chegarmos ao fatorial do menor (8), ou seja:

$$\frac{11!}{8!} = \frac{11.10.9.8!}{8!} = 11.10.9 = 990$$

Exemplo 1:

Calcule 7! – 5!

Solução:

7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Logo, 7! – 5! = 5040 – 120 = 4920

Exemplo 2:

Calcule $\frac{9!}{10!}$.

Solução:

$$\frac{9!}{10!} = \frac{9!}{10 \cdot 9!} = \frac{1}{10}$$

Exemplo 3:

Simplifique a expressão $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$.

Solução:

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} = n+3$$

Aula 2

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
  - Permutações simples

- ✓ **Objetivos:**
  - Conceituar permutações simples;
  - Resolver problemas envolvendo permutações simples

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição de permutações simples;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho;

Permutações simples

Quando temos agrupamentos que envolvam todos os elementos do conjunto, esses agrupamentos são chamados de permutações simples. Seja $n \in \mathbb{N}$. **Permutações simples de n elementos distintos** é qualquer agrupamento desses n elementos. Vamos calcular o número de permutações de n elementos. Para isso, vamos considerar que cada permutação a ser obtida é feita em n etapas:

- 1ª etapa: existem n possibilidades;
- 2ª etapa: existem n – 1 possibilidades;
- 3ª etapa: existem n – 2 possibilidades;

....

- enésima etapa: existe apenas 1 possibilidade.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de permutações simples possíveis é:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Portanto, sendo P_n o número de permutações simples de n elementos, temos: $P_n = n!$.

Exemplo 1: Calcular P_4 e P_5.

Solução:

$P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$

$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

Exemplo 2: Considere as cartas do baralho: 2, 3, 4, 5 e 6. Quantas sequências podemos formar com essas cartas do mesmo naipe?

Solução:

Temos todas as 5 cartas para formar uma sequência. Nesse caso, temos:

$$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$$

Como são 4 naipes, temos 4 . 120 = 480 sequências.

Exemplo 3: Quantos são os anagramas da palavra ROLETA?

Solução:

Anagramas são palavras que podem ser formadas a partir de uma, tendo sentido ou não. Como a palavra tem 6 letras e todas distintas, o número de anagramas é calculado por $P_6 = 6!$, ou seja:

$$P_6 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$$

Exemplo 4: Considerando o exemplo anterior, quantos são os anagramas que começam por vogal?

Solução:

Como a palavra ROLETA tem 3 vogais, temos:

O ___ ___ ___ ___ ___

E ___ ___ ___ ___ ___

A ___ ___ ___ ___ ___

Se fixarmos as vogais, teremos 5 letras para serem permutadas, ou seja, teremos P_5. Logo, o número de anagramas que começam por vogal é:

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5!$$

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 120$$

$$3 \cdot P_5 = 480$$

Exemplo 5: quantos são os anagramas da palavra POKER que começam por consoante e terminam por vogal?

Solução:

A palavra tem 5 letras, sendo 2 vogais e 3 consoantes. Considere o esquema abaixo:

_____ _____ _____ _____ _____

Temos 3 consoantes que podem ser escolhidas.

Sobram 3 letras para serem permutadas.

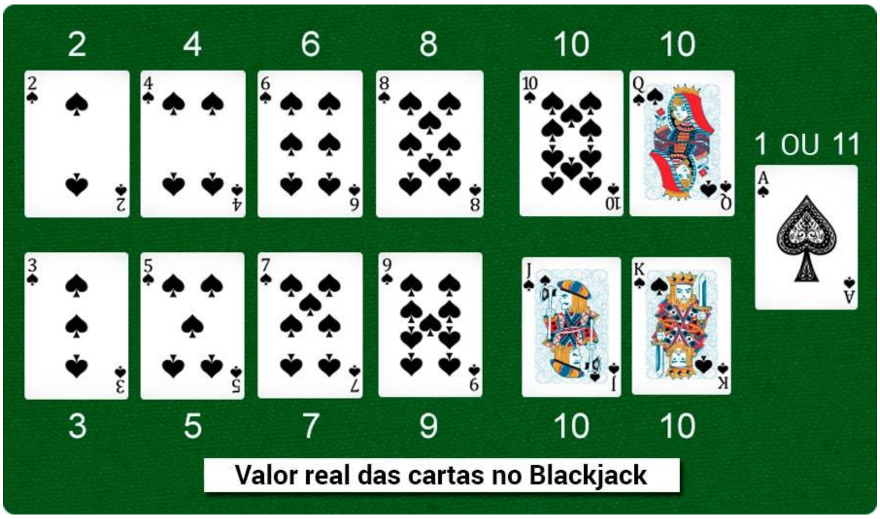
Temos 2 vogais que podem ser escolhidas.

Logo, o número de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é:

$$3 \times P_3 \times 2 = 3 \times 3! \times 2$$

$$= 3 \times 6 \times 2 = 36$$

Exemplo 6: O blackjack é um jogo de cartas jogado em cassinos. O objetivo é fazer 21 pontos com no mínimo 3 cartas e no máximo 5. A figura mostra a pontuação das cartas no blackjack.



De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos, usando as cartas de 2, 9 e 10 pontos?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) Temos 4 cartas de 2 e 4 cartas de 9, sendo uma de cada naipe;

2º) Para a carta de 10 pontos, temos as cartas 10, valete (J), dama (Q) e rei (K), isto é, 4 cartas. Como são 4 naipes, temos 4 . 4 = 16.

3º) Essas 3 cartas se permutam entre si, isto é, temos P_3.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 3!$$

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 6$$

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 1536$$

Agora, se quisermos saber o número de anagramas da palavra BLACKJACK? Observe que há letras repetidas nessa palavra, que já não se resolve por meio de permutações simples e sim por meio de um agrupamento chamado permutação com repetição, que será estudado nas próximas aulas.

Aula 3

✓ **Duração:** 1h40min

✓ **Conteúdo:**

- Arranjos simples

✓ **Objetivos:**

- Conceituar arranjos simples
- Fazer o cálculo de arranjos simples
- Resolver problemas envolvendo arranjos simples

✓ **Metodologia:**

- Apresentação da definição de arranjos simples;
- Exemplificação usando cartas de um baralho.

Arranjos simples

Sejam n, p $\in$ N tais que p $\leq$ n. Chamamos de **arranjos simples de n elementos tomados p a p,** qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos dados. Os arranjos simples diferem pela ordem dos elementos. Ele é calculado pelo produto dos p fatores consecutivos e decrescentes começando por n. Indicando por $A_{n,p}$ o número de arranjos de n elementos tomados p a p, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e dividindo por (n – p)!, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Logo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1: Calcular $A_{8,\,2}$.

Solução:

Sendo n = 8 e p = 2, temos:

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$$

Exemplo 2: Determine x para que $A_{x,2} = 42$.

Solução:

Usando a fórmula dos arranjos simples, temos:

$$A_{x,2} = 42$$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 42$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)!} = 42$$

$$x \cdot (x-1) = 42$$

$$x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, obtemos x = 7 e x = – 6. Como queremos x $\in$ N, o valor x = – 6 não serve. Portanto, x = 7.

Exemplo 3: Das 52 cartas de um baralho, 3 são retiradas sucessivamente e sem reposição. De quantas maneiras é possível obter uma sequência de cartas?

Solução:

Como todas as cartas são distintas, e elas são retiradas sem reposição, o número de sequências de cartas é:

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = \frac{52.51.50.49!}{49!} = 52.51.50 = 132600$$

Exemplo 4: Considere as cartas do baralho: 2, 3, 4, 5 e 6. Quantas sequências de 3 cartas podemos formar?

Solução:

Considere as sequências 235 e 253. Elas são diferentes, ou seja, 235 ≠ 253. Com isso, temos um caso de arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Exemplo 5: Considerando o exemplo anterior, quantas sequências de cartas iniciadas por números pares podem ser formadas?

Solução:

Queremos que a sequência comece por número par. Para isso, temos:

2 ____ ____

4 ____ ____

6 ____ ____

Nesse caso, temos 3 . $A_{4,2}$. Logo, a quantidade de sequências é:

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4!}{2!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

Exemplo 6: Das 13 cartas de um mesmo naipe, 4 são retiradas sem reposição. De quantas maneiras é possível formar uma sequência com essas cartas?

Solução: As cartas são distintas e são retiradas sem reposição. Logo o número de sequência é:

$$A_{13,4} = \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{13!}{9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$$

Exemplo 7: Em relação ao exemplo anterior, das 13 cartas de cartas de copas e 13 cartas de espadas, são retiradas 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas sem reposição. De quantas maneiras é possível formar uma sequência de 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas?

Solução: As cartas são retiradas sem reposição. Temos que:

O número de maneiras de retirar 3 cartas de copas é:

$$A_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$$

O número de maneiras de retirar 2 cartas de espadas é:

$$A_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)!} = \frac{13!}{11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 13 \cdot 12 = 156$$

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de formar uma sequência de 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas sem reposição é:

$$A_{13,3} \cdot A_{13,2} = 1716 \cdot 156 = 267696$$

Aula 4

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
  - Combinações simples:

- ✓ **Objetivos:**
  - Conceituar combinações simples;
  - Fazer o cálculo de combinações simples;
  - Resolver problemas envolvendo combinações simples.

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição de combinações simples;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho.

Combinações simples

Sejam n, p $\in$ N tal que p $\leq$ n. Chama-se **combinações simples de n elementos tomados p a p** qualquer subconjunto formado por p elementos distintos, escolhidos entre os n. É o agrupamento que não difere pela ordem dos elementos e sim pela natureza.

O cálculo das combinações de n elementos tomados p a p, indicado por $C_{n,p}$, é feito da seguinte maneira:

1º)Vamos determinar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formados por p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2º)Vamos determinar o número de sequências distintas que podem ser formadas por p elementos (permutações de p elementos):

$$P_n = n!$$

3º)Qualquer permutação dos elementos de uma sequência dá origem a uma única combinação, o número de combinações de n elementos tomados p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}$$

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Exemplo 1: Calcular $C_{7,5}$.

Solução:

Fazendo n = 7 e p = 5, temos:

$$C_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!.5!} = \frac{7!}{2!.5!} = \frac{7.6.5!}{2.1.5!} = \frac{42}{2} = 21$$

Exemplo 2: Calcule x para que $C_{x,2} = 10$.

Solução:

Usando a fórmula de combinações simples, temos:

$$C_{x,2} = 10$$

$$\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)! \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{2!} = 10$$

$$x \cdot (x-1) = 10 \cdot 2$$

$$x^2 - x = 20$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, obtemos x = 5 e x = – 4. Como queremos x $\in$ N, não serve x = – 4. Portanto, x = 5.

Exemplo 3: No jogo de poker, o objetivo é completar uma sequência de 5 cartas. Quantos jogos possíveis podem ser formados?

Solução:

Como queremos 5 das 52 cartas do baralho, o número de jogos possíveis é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)!.5!} = \frac{52!}{47!.5!} = \frac{52.51.50.49.48.47!}{47!.5.4.3.2.1} = 2598960$$

Exemplo 4: No jogo de poker, existe uma sequência de cartas chamada full house, que é uma combinação de um trio de cartas de mesmo valor com um par de cartas também de mesmo valor. A figura mostra um exemplo de full house, formada por três às e dois setes.

De quantas maneiras é possível formar uma sequência de full house?

Solução:

Existe 13 valores para o trio e 12 valores para o par. Dentre as cartas de mesmo valor, o número de maneiras de calcular a trinca é dado por $C_{4,3}$ e o número de maneiras de calcular o par é dado por $C_{4,2}$. Portanto:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!.3!} = \frac{4.3!}{1!.3!} = 4$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2} = 6$$

Logo, o número de maneiras é 13 . 12 . 4 . 6 = 3744.

Exemplo5: Sorteando simultaneamente 5 cartas, determine:

a) o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado do sorteio.

b) o número de formas distintas é possível escolher as quatro cartas de ouros.

c)o número de formas distintas de obter três espadas e duas copas.

Solução:

a) Como não estamos levando em consideração a ordem das cartas, o número de maneiras é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

b) Temos 13 cartas de ouros. O número de maneiras é:

$$C_{13,4} = \frac{13!}{(13-4)\cdot 4!} = \frac{13!}{9!\cdot 4!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 715$$

c)Temos 13 cartas de espadas e 13 cartas de copas. Temos que:

o número de maneiras de escolher 3 cartas de espadas é:

$$C_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)\cdot 3!} = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 286$$

O número de maneiras de escolher 2 cartas de copas é:

$$C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)\cdot 2!} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11!}{11!\cdot 2\cdot 1} = 78$$

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de escolher 3 copas e 2 espadas é 286 . 78 = 22308

Aula 5

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
  - Permutação com repetição

- ✓ Objetivos:
  - Conceituar permutação com repetição
  - Resolver problemas envolvendo permutação com repetição

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição de combinações simples;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho.

Permutação com repetição

Considere o conjunto M = {a_1, a_1, ..., a_1, a_2, a_2, ..., a_2, ..., a_n} tal que:

- a_1 se repete n_1 vezes;
- a_2 se repete n_2 vezes;
- ....
- a_n se repete n_n vezes

O número de permutações de n elementos nessas condições, indicado por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_n}$, é:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_n!}$$

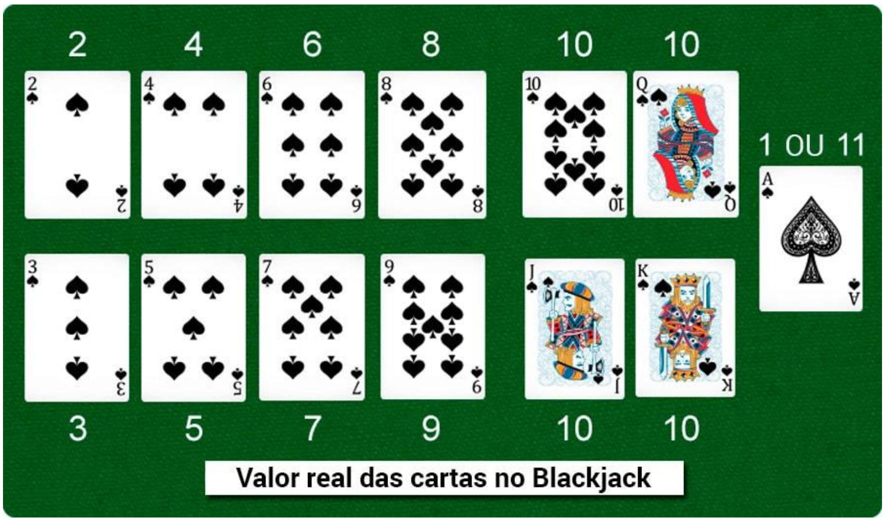
Exemplo1: O blackjack é um jogo de cartas utilizado em cassinos. Quantos são os anagramas da palavra BLACKJACK?

Solução:

A palavra tem 9 letras, sendo que as letras A, C e K se repetem (2 vezes cada). Portanto, o número de anagramas é:

$$P_9^{2,2,2} = \frac{9!}{2!.2!.2!} = \frac{9.8.7.6.5.4.3.2!}{2!.2.1.2.1} = 9.8.7.6.5.3 = 45360$$

Exemplo 2: Em um jogo de blackjack, o objetivo é fazer 21 pontos. A figura mostra os valores das cartas.



De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com 3 cartas, sendo uma carta de às (A) e 2 cartas de 10 pontos?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) Temos 4 ases, sendo um de cada naipe (ás, ouros, paus e espadas), em que nesse caso o às vale 1 ponto;

2º) As cartas que valem 10 pontos são: 10, J, Q e K. Como são 4 naipes, temos 4.4 = 16 cartas;

3º) A próxima carta de 10 pontos não pode ser a mesma que a anterior. Ou seja, temos agora 15 cartas;

4º) Essa combinação gera uma permutação com repetição. Por exemplo, podemos ter uma trinca formada por um às e dois 10 (não levando em consideração o naipe). Ou seja, temos 3 cartas com duas repetições, que podem permutar entre si, que vamos indicar por P_3^2.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4.16.15.\mathrm{P}_3^2 = 960.\frac{3!}{2!} = 2880$$

Exemplo3: E se o jogador quiser fazer 21 pontos com 5 cartas, sendo 3 às e 2 noves, de quantas maneiras é possível?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) São 4 ases, 1 de cada naipe;

2º) Para o primeiro às, temos 4 possibilidades;

3º) Para o segundo às, temos 3 possibilidades;

4º) Para o terceiro às, temos 2 possibilidades;

5º) São 4 noves, também 1 de cada naipe;

6º) Para o primeiro 9, são 4 possibilidades;

7º) Para o segundo 9, são 3 possibilidades;

8º) Desconsiderando os naipes, as cartas de às e 9 se repetem 3 e 2 vezes, respectivamente. Com isso, temos 5 cartas com 3 e 2 repetições que podem permutar entre si e indicamos por $P_5^{3,2}$;

9º) Por exemplo, podemos ter (A, A, A, 9, 9) ou (A, 9, A, 9, A) ou (9, 9, A, A, A), etc.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4.3.2.4.3.\mathrm{P}_5^{3,2} = 288.\frac{5!}{3!.2!} = 288.\frac{5.4.3!}{3!.2} = 288.10 = 2880$$

Exemplo 4: No jogo de blackjack, se tivermos as cartas 2, 3 e 6, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos:

a) com 4 cartas?

b) com 5 cartas?

Solução:

a) Inicialmente, temos as cartas 2, 3 e 6, que valem, respectivamente, 2, 3 e 6 pontos, totalizando 11. Para fazer 21 pontos, é necessário ter mais uma carta que vale 10 pontos que são o 10, o valete (J), a dama (Q) e o rei (K).

Para isso, temos que na 1ª, 2ª e 3ª cartas, temos 4 possibilidades cada, pois estamos levando em consideração os 4 naipes.

Para a 4ª carta, temos 16 possibilidades, pois são as quatro cartas de 10 pontos e os quatro naipes.

Essas 4 cartas se permutam entre si, logo temos P_4. Logo, pelo Princípio Fundamental da contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot \mathrm{P}_4 = 24576$$

Logo, o número de maneiras é 24576

b) Para fazer 21 pontos com 5 cartas, sendo inicialmente com as cartas 2, 3 e 6, devemos considerar os seguintes casos:

1º) as cartas 2, 3, 6, 9 e A, onde o às vale 1 ponto.

Para cada uma dessas cartas, temos 4 possibilidades. Essas cartas se permutam entre si, ou seja, temos P_5. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \mathrm{P}_5 = 122880$$

2º) as cartas 2, 3, 6 e duas cartas de 5.

Para as cartas 2, 3 e 6, temos 4 possibilidades. Para as cartas de 5, temos 4 possibilidades para o primeiro cinco e 3 possibilidades para o segundo, desconsiderando os naipes. Com isso, temos 5 cartas com duas repetições, que podem permutar entre si, ou seja, temos P_5^2. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \mathrm{P}_5^2 = 4^4 \cdot 3\frac{5!}{2!} = 256 \cdot 3\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 768 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 46080$$

3º) uma carta de 2, duas cartas de 3 e uma carta de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 7 e de modo análogo ao caso anterior, temos 46080 maneiras.

4º) duas cartas de 2, uma carta de 3, e uma de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 8 e de modo análogo aos 2º e 3º casos, temos 46080 maneiras.

5º) uma carta de 2, uma de 3 e duas de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 4 e de modo análogo aos 2º, 3º e 4º casos, temos 46080 maneiras.

Logo, o número total de maneiras de se fazer 21 pontos com 5 cartas sendo as cartas 2, 3 e 6 é 122880 + 4 x 46080 = 307200.

Aula 6

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
  - Probabilidade

- ✓ Objetivos:
  - Conceituar probabilidade
  - Calcular a probabilidade de um evento

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição de probabilidade;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho e roleta.

Probabilidade

A probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um resultado, que são obtidas pela razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis. É por meio de uma probabilidade, por exemplo, que podemos saber a chance de se obter cara ou coroa num lançamento de uma moeda.

Dentro do estudo da probabilidade, existem algumas definições que são fundamentais na sua compreensão e no cálculo. São elas:

- **Experimento aleatório** – é qualquer experimento que pode apresentar resultados diferentes, quando repetido nas mesmas condições. Exemplos: jogar uma moeda e observar a face superior; jogar um dado e observar a face de cima.

- **Espaço amostral** – é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Exemplo: Ao lançar uma moeda, a face superior pode aparecer cara (c) ou coroa (k). Sendo S o espaço amostral, temos que S = {c, k} e n(S) = 2, onde n(S) é definido como o número de elementos do espaço amostral.

- **Evento** – é qualquer subconjunto do espaço amostral. Exemplo: Considerando uma urna que contém 11 bolas numeradas de 1 a 11, temos o seguinte espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Um exemplo de evento é a "ocorrência de um número par". Indicando por A esse evento, temos A = {2, 4, 6, 8, 10} e n(A) = 5.

Em um experimento aleatório, no qual S é o espaço amostral, a probabilidade de ocorrer um evento E qualquer é o número p(E), dado por:

$$\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}}$$

onde:

- n(E) é o número de casos favoráveis (onde E é o evento que desejamos que ocorra) e:

- n(S) é o número de casos possíveis.

Observações:

- Se E = $\varnothing$, então p (E) = 0 e se E = S, então p(E) = 1. Com isso, a probabilidade de ocorrer um evento E qualquer é um número maior ou igual a zero e menor ou igual a 1, ou seja, $0 \leq p(E) \leq 1$.
- É bastante comum representar uma probabilidade na forma de porcentagem. Portanto, podemos dizer que $0\% \leq p(E) \leq 100\%$.

Exemplo 1:

A roleta é um jogo em que consiste em uma roda giratória com os números de 0 a 36. Qual a probabilidade de o número sorteado ser um múltiplo de 7?

Solução:

Temos que o espaço amostral é formado pelos números de 0 a 36, num total de 37. Ou seja, o número de casos possíveis é 37 e indicamos por n(S) = 37.

O evento "ser múltiplo de 7" é formado pelos números 0, 7, 14, 21, 28 e 35, totalizando 6. Ou seja, o número de casos favoráveis é 6 e indicamos por n(E) = 6.

Sendo p a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 7, temos que:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{37}$$

Exemplo 2:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado ser um divisor de 8?

Solução:

Temos que o número de casos possíveis é 37, ou seja, n(S) = 37.

O evento "ser divisor de 8" é formado pelos números 1, 2, 4 e 8, num total de 4 números. Ou seja, o número de casos favoráveis é 4 e indicamos por n(E) = 4.

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser um divisor de 8, indicado por p, é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{37}$$

Exemplo 3:

Das 52 cartas de um baralho, uma é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade da carta sorteada ser:

a) um naipe de copas?

b) um rei?

c)uma dama de ouros?

Solução:

Em todos os itens, o espaço amostral é 52 e indicamos por n(S) = 52.

a) Para o naipe de copas, temos as seguintes cartas: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K, totalizando 13 cartas e termos n(E) = 13. Logo, a probabilidade é:

$$\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

b)Para a carta sorteada ser rei, temos 4, uma para cada naipe e temos n(E) = 4. Logo, a probabilidade é:

$$\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

c)Para a carta sorteada ser dama de ouros, temos uma única possibilidade e indicamos por n(E) = 1. Logo, a probabilidade é:

$$\mathrm{p(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{1}{52}$$

Exemplo 4:

Das 52 cartas de um baralho, duas cartas são sorteadas ao acaso. Qual a probabilidade de as cartas sorteadas serem:

a) paus?

b) um valete e um rei?

Solução:

Como são duas cartas sorteadas simultaneamente, o espaço amostral será o número de maneiras de retirar duas cartas, que será calculado por:

$$\mathrm{C}_{52,2} = \frac{52!}{(52-2)! \cdot 2!} = \frac{52!}{50! \cdot 2!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1} = 1326$$

Ou seja, n(S) = 1326

a) O número de maneiras de se retirar duas cartas de paus será calculado por:

$$C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)! \cdot 2!} = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$$

Ou seja, n(E) = 78. Logo, a probabilidade é:

$$p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

b) Temos 4 cartas de valete e 4 cartas de rei. O número de maneiras de se retirar cada uma dessas cartas é:

$$C_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} = 4$$

Isto é, temos 4 maneiras de retirar uma carta de valete e 4 maneiras de retirar uma carta de rei. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos 4 . 4 = 16 e n(E) = 16. Logo, a probabilidade é:

$$p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{1326} = \frac{8}{663}$$

Aula 7

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
  - Probabilidade

- ✓ Objetivos:
  - Conceituar eventos complementares;
  - Calcular a probabilidade de um evento complementar;
  - Conceituar união de dois eventos;
  - Calcular a probabilidade da união de dois ou mais eventos (adição de probabilidades)

- ✓ **Metodologia:**
  - Apresentação da definição de eventos complementares;
  - Apresentação da definição de união de dois eventos;
  - Exemplificação usando cartas de um baralho e roleta.

Eventos complementares

Seja A um evento qualquer. Chama-se **evento complementar de A**, indicado por $\overline{\mathrm{A}}$ ou A^C, o evento em que A não ocorre. A soma da probabilidade de um evento A (p(A)) com a probabilidade de um evento complementar (p($\overline{\mathrm{A}}$)) é igual a 1, ou seja:

$$\mathrm{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$$

Demonstração:

Sabendo que $\mathrm{A \cup \overline{A} = E}$ e $\mathrm{A \cap \overline{A} = \emptyset}$, temos:

$$\mathrm{n(A) + n(\overline{A}) = n(E)}$$

Dividindo a igualdade por n(E), tal que n(E) ≠ 0:

$$\mathrm{\frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)}}$$

$$\mathrm{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$$

Exemplo 1:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado não ser múltiplo de 6?

Solução:

Seja A o evento ser múltiplo de 6. Temos: E = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36}. Daí, n(E) = 7 e n(S) = 37. Portanto, a probabilidade é $\mathrm{p(E)} = \frac{7}{37}$. Como queremos que o número sorteado não seja múltiplo de 6, indicaremos por $\overline{\mathrm{E}}$. Com isso, temos:

$$\mathrm{p(E) + p(\overline{E}) = 1}$$

$$\frac{7}{37} + \mathrm{p(\overline{E})} = 1$$

$$\mathrm{p(\overline{E})} = 1 - \frac{7}{37}$$

$$\mathrm{p(\overline{E})} = \frac{30}{37}$$

Exemplo 2:

Num baralho de 52 cartas, uma carta é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a carta sorteada não ser um ás?

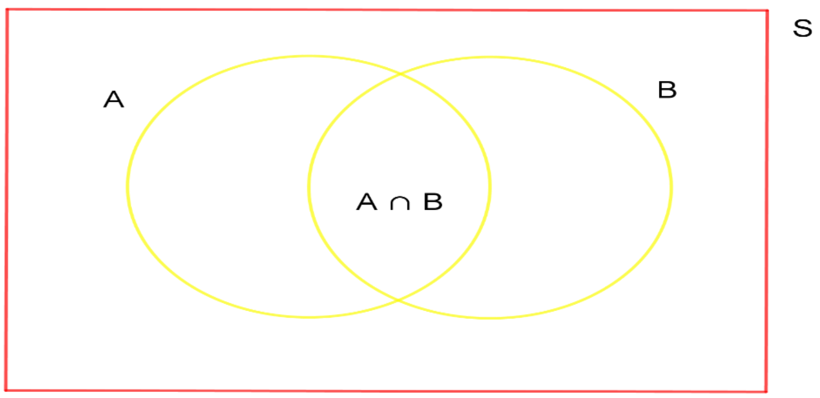
Solução:

Temos quatro cartas de ás. Logo, a probabilidade é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Logo, a probabilidade de a carta não ser de ás é:

$$1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

União de eventos

Considere A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. Da Teoria dos Conjuntos, temos:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por n(S) ≠ 0, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Essa igualdade é conhecida como teoria da adição de probabilidades.

Observação: Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que os eventos A e B são **mutuamente exclusivos** e $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemplo 1:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado ser divisor de 36 ou um quadrado perfeito? Lembrando que na roleta são 37 números, de 0 a 36.

Solução:

Sejam os eventos A "ser divisor de 36" e B "ser um quadrado perfeito". Temos:

A = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}, n(A) = 9, $p(A) = \frac{9}{37}$

B = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36}, n(B) = 7, $p(B) = \frac{7}{37}$

$A \cap B$ = {1, 4, 9, 36}, $n(A \cap B)$ = 4, $p(A \cap B) = \frac{4}{37}$

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser divisor de 36 ou um quadrado perfeito, indicado por $p(A \cup B)$, é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(A \cup B) = \frac{9}{37} + \frac{7}{37} - \frac{4}{37}$$
$$p(A \cup B) = \frac{12}{37}$$

Exemplo 2:

De um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de a carta sorteada ser um número primo ou múltiplo de 4?

Solução:

Sejam os eventos A "ser número primo" e B "ser múltiplo de 4". Temos:

Os números primos na carta do baralho são 2, 3, 5 e 7. Como são 4 naipes, temos ao todo 16 cartas. Daí, n(A) = 16 e $p(A) = \frac{16}{52}$.

Os múltiplos de 4 na carta do baralho são 4 e 8. Como são 4 naipes, temos ao todo 8 cartas. Daí, n(B) = 8 e $p(B) = \frac{8}{52}$.

Observe que $A \cap B = \phi$, ou seja, os eventos A e B são mutuamente exclusivos e $p(A \cap B) = 0$. Logo, a probabilidade é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$
$$p(A \cup B) = \frac{16}{52} + \frac{8}{52} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$$

Aula 8

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdos:**
  - Análise combinatória;
  - Probabilidade

- ✓ Objetivos:
  - Calcular o número de permutações simples;
  - Calcular o número de arranjos simples;
  - Calcular o número de combinações simples;
  - Calcular a probabilidade de um evento;
  - Calcular a probabilidade de um evento complementar;
  - Calcular a probabilidade da união de dois eventos
  - Estimular os alunos a usar a tecnologia no ensino de matemática;
  - Mostrar que pode ser prazeroso estudar fora do ambiente escolar usando recursos tecnológicos

- ✓ **Metodologia:**
  - Revisão do conteúdo de análise combinatória;
  - Revisão do conteúdo de probabilidade;
  - Apresentação do aplicativo CASMATH.
  - Utilização do aplicativo CASMATH

Exercícios de revisão do conteúdo de análise combinatória e probabilidade

1)Dadas as 52 cartas de um baralho, de quantas maneiras eu posso ter duas cartas sendo uma carta de número ímpar e uma carta com consoante?

Solução: Como eu tenho 4 possibilidades de carta com número ímpar de cada naipe e 3 cartas com consoante também de cada naipe, pelo princípio fundamental da contagem, temos 4 . 3 = 12 maneiras em cada naipe. Mas como as cartas do baralho tem 4 naipes, o número de maneiras é 12 . 4 = 48 maneiras.

2)Considere as cartas com os números de 2 a 10. De quantas maneiras podemos ter duas cartas, sendo a segunda carta o dobro da primeira do mesmo naipe?

Solução: Temos as seguintes possibilidades: (2, 4), (3, 6), (4, 8) e (5, 10). Logo, temos 4 maneiras.

3)Num jogo de blackjack, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos usando as cartas de 6, 7 e 8 pontos?

Solução: Temos 4 cartas de 6 pontos (1 em cada naipe). De modo análogo, temos 4 cartas de 7 pontos e 4 cartas de 8. Essas três cartas se permutam entre si, ou seja, temos P_3. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot P_3 = 64 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 384$$

4)Considere as cartas do baralho do 2 ao 9.

a)Quantas sequências de 3 cartas podemos formar do mesmo naipe?

b)Quantas sequências de 3 cartas podemos formar utilizando todos os naipes?

Solução:

a)Considere as sequências 467 e 476. Elas são diferentes, ou seja, 467 ≠ 476. Com isso, temos um caso de arranjo de 8 elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$\mathrm{A}_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Temos 4 naipes. Logo, o resultado desejado é 4 . 336 = 1344.

b) Considere as sequências 4 de paus, 6 de ouros e 7 de copas e a sequencia 4 de ouros, 6 de ouros e 7 de copas. Elas são diferentes, ou seja, a escolha de naipes diferentes dão sequências diferentes. Com isso, temos um caso de arranjo de 4 . 8 = 32 elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$\mathrm{A}_{32,3} = \frac{32!}{(32-3)!} = \frac{32!}{29!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29!}{29!} = 32 \cdot 31 \cdot 30$$

5)No jogo de poker, existe uma combinação de cartas chamada flush, formada por cinco cartas do mesmo naipe que não estejam em sequência. A figura abaixo mostra um exemplo de um flush.

De quantas maneiras é possível formar um flush?

Solução: São 13 cartas de um naipe. Portanto, o número de maneiras de escolha é:

$$C_{13,5} = \frac{13!}{(13-5)! \cdot 5!} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287$$

Dentro das 1287 maneiras, temos 10 que são sequências. Por exemplo, A, K, Q, J e 10. Daí, o número de maneiras é 1287 – 10 = 1277. Como são 4 naipes de um baralho, o número de maneiras de formar um flush é 4 x 1277 = 5108.

6)Em um jogo de roleta, os números vão do 0 ao 36. Qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 8?

Solução: Do 0 ao 36, temos 37 números. Desses, são múltiplos de 8: 0, 8, 16, 24 e 32, totalizando 5 números. Logo, a probabilidade é $\frac{5}{37}$.

7)Em um jogo de roleta, considerando os números de 0 a 36, qual a probabilidade de sair um número que não é um quadrado perfeito?

Solução: Temos que os números que são quadrados perfeitos são: 0, 1, 4, 9, 16, 25 e 36, ou seja, 7 números. Daí, temos que a probabilidade de sair um quadrado perfeito é $\frac{7}{37}$. Mas queremos o contrário, ou seja, que não seja quadrado perfeito. Logo, a probabilidade é:

$$1-\frac{7}{37}=\frac{30}{37}$$

O aplicativo CASMATH

O *Casmath* é um aplicativo que foi criado a partir do MIT App Inventor. Ele consiste em um quiz, um jogo de perguntas e respostas envolvendo análise combinatória e probabilidade usando alguns dos mais famosos jogos de cassino como roleta, poker e blackjack. À medida que o jogador (aluno) vai respondendo uma pergunta de forma correta, uma nova pergunta com um nível de dificuldade maior será apresentada ao aluno.

O *Casmath* pode ser baixado por meio de um telefone celular ou tablet de forma gratuita. Para baixar o *Casmath*, você deverá entrar na Play Store do seu celular ou tablet e digitar o nome do aplicativo.

Depois de baixado, aparecerá a tela inicial, como na figura abaixo.

Ao clicar em SIM, você irá acessar as opções de jogo, conforme figura seguinte. Caso contrário, você sairá do aplicativo.

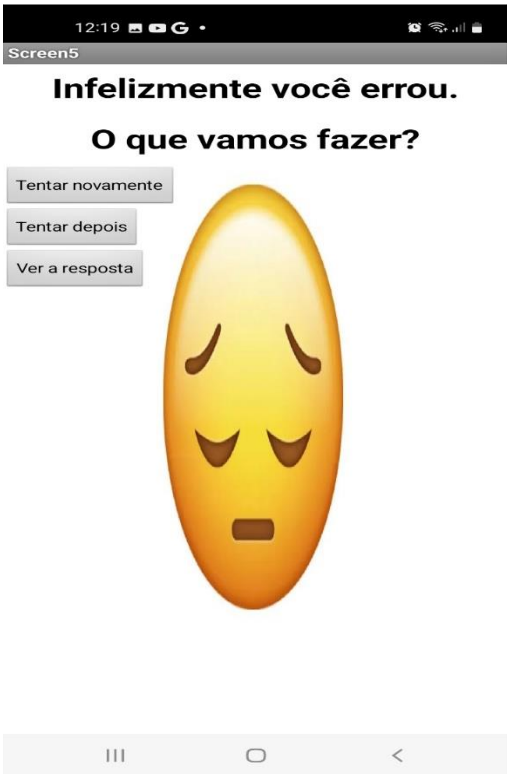
Cada jogo contém 4 questões objetivas em que o aluno só poderá escolher uma única opção. Caso ele acerte a opção, ele irá para a questão seguinte. Caso contrário, ele poderá verificar a resposta ou sair do aplicativo.

Ao escolher um dos jogos, aparecerá a seguinte tela, conforme as figuras.

Em cada jogo, se o jogador clicar em SIM, aparecerá as questões com as alternativas. Caso contrário, ele voltará para a tela anterior.

Veja, por exemplo a primeira questão do jogo de roleta, de acordo com a figura.

Caso ele erre a questão, aparece a seguinte mensagem:

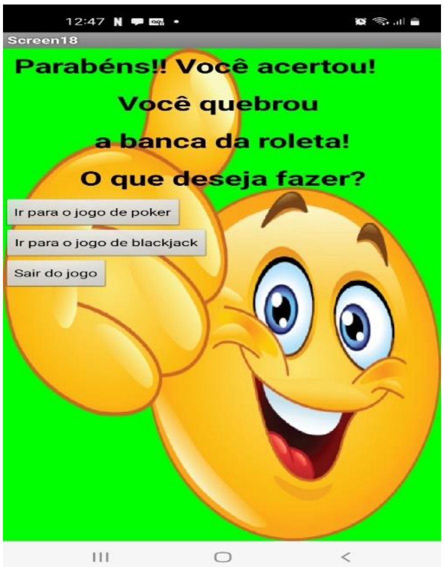


O aluno poderá escolher as opções "Tentar novamente", "Tentar depois" ou "Ver a resposta". Caso ele tente novamente, ele retornará à questão e marcará novamente a alternativa até a acertar. Caso ele escolha tentar depois, voltará à tela inicial do jogo. Caso ele escolha ver a resposta, aparecerá a resolução da questão e a sua resposta. A figura abaixo mostra a tela de "Ver a resposta".

Observe que aparece as opções "Ir para a questão 2" e "Sair do jogo". Ou seja, o aluno poderá escolher ir para a questão seguinte ou sair do jogo ou do aplicativo.

Caso ele acerte a questão, aparecerá a seguinte imagem.

Na última questão, se o aluno acertar a questão, ele poderá ir para os jogos restantes ou sair do aplicativo, conforme mostra a figura.



Conversa Final com o Leitor

Prezado leitor, espero que este trabalho possa ser aproveitado nas suas aulas. Quando abordamos os jogos de cassino e o aplicativo *Casmath*, nosso objetivo foi tornar fácil o ensino de análise combinatória e probabilidade.

Durante o processo, não só destacamos a importância dos jogos e das tecnologias no ensino como também foram criadas situações envolvendo análise combinatória e probabilidade. Além disso, queremos destacar o aplicativo Casmath, que é uma ferramenta que visa motivar o aluno a estudar matemática tanto dentro quanto fora da sala de aula, algo tão difícil atualmente.

Gostaríamos que tanto o aplicativo como as aulas planejadas fossem aplicadas no maior número de sala de aula possível e que o professor responsável pela aplicação se sinta à vontade em entrar em contato conosco fazendo sugestões e críticas para que os produtos possam ser melhorados sempre visando o benefício dos alunos que é a grande razão deste trabalho.

Aos professores interessados em aplicar este trabalho em sala de aula, se desejarem entrar em contato conosco, estamos disponibilizando o seguinte e-mail para contatos profissionais: lcnsf@yahoo.com.br.

Referências

ALVES, Luciana; BIANCHIN, Maysa Alahmar. **O jogo como recurso de aprendizagem**. Rev. Psicopedagogia, 27(83). São José do Rio Preto, Mai/Ago 2010. p. 282 – 287.

AMANCIO, Daniel de Traglia; SANZOVO, Daniel Trevisan. **Ensino de Matemática por meio das tecnologias digitais.** Revista Educação Pública, v. 20, nº 47, 8 de dezembro de 2020. Disponível em https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/47/ensino-de-matemstica-pormeio-das-tecnologias-digitais. Acesso em 19/01/2024 às 16:30

ANDRADE, R. T. **A probabilidade aplicada aos jogos de azar.** 70f. João Pessoa. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – UFPB, Paraíba, 2017.

BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática. In XX ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, Curitiba. **Anais** [...] Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Disponível em < gd2_priscila_baumgartel.pdf (ufpr.br)>. Acesso em 12/01/2024 às 16:15.

CRUZ, Flaviani Cristina da Silva. **O uso de tecnologias no ensino de Matemática.** 41 f. São José do Rio Preto. Monografia [Licenciatura em Matemática] – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São Paulo, 2012. Disponível em <o-uso-de-tecnologias-no-ensino-de-matematica---flaviani.pdf (unesp.br)>. Acesso em 22/01/2024 às 21:10

ELIAS, A. P. A. J.; ROCHA, F. S. M.; MOTTA, M. S.; KALINKE, M. A. **Construindo aplicativos para o ensino de matemática utilizando o software de programação app Inventor.** Vitória. Revista Eletrônica DECT v. 8, n 2 pp 41 – 65, 2018.

FREITAS, Raphael de Oliveira; CARVALHO, Mercedes. **Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática.** Laplage em Revista v. 3, n. 2 pp 47-58, 2017. Disponível em <Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática (redalyc.org)>. Acesso em 15/02/2024 às 11:30.

FREITAS, F. M.; SILVEIRA, D. N. **Os jogos de azar e o ensino de probabilidade e análise combinatória.** Pesquisa em Ação Trilhando Caminhos em Educação. Ponta Grossa: Atena, p. 39-49, 2018.

MELO, Claudiano Henrique da Cunha; LIMA, Claudiney Nunes de. **A importância dos jogos no Ensino de Matemática no Ensino Fundamental II**. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v.22, nº 39, 18 de outubro de 2022. Disponível em

<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii>. Acesso em 18/01/2024 às 21:10

MEDEIROS, A. P. S. **Aplicativos de Ensino: Uma breve discussão do uso na matemática.** 52f. João Pessoa. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – UFPB, Paraíba, 2021.

MENON, Lucimari Antoneli; SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. **Os jogos no ensino da Matemática – entre o educativo e o lúdico.** In: Paraná: Secretaria de Estado de Educação. Superintendência de Educação. Os desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR, 2018, v.1 (Cadernos PDE). Disponível em <OS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA - ENTRE O EDUCATIVO E O LÚDICO (diaadiaeducacao.pr.gov.br)>. Acesso em 06/07/2023 às 17:00.

NOÉ, M. **A Importância dos Jogos no ensino da Matemática.** Canal do Educador. Disponível em < A importância dos Jogos no Ensino da Matemática - Educador Brasil Escola (uol.com.br)>. Acesso em 12/01/2024 às 21:50.

OLIVEIRA, Sérgio de; PEREIRA, Marconi de Arruda; TEIXEIRA, Fernando A.. MIT App Inventor como Ambiente de Ensino de Algoritmos e Programação. *In*: WORKSHOP SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO (WEI), 29., 2021, Evento Online. **Anais** [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 61-70. ISSN 2595-6175. Disponível em: https://doi.org/10.5753/wei.2021.15897. Acesso em 07/01/2024 às 00:02.

OLIVEIRA, W. J. **O uso do pôquer como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de probabilidade.** 81f. Catalão. Dissertação [Mestrado profissional em Matemática] – UFG, Goiás, 2019.

REICHERT, J. T.; MIECOANSKI, B.; KIST, M. **Desenvolvimento de aplicativos matemáticos com App Inventor.** Ponta Grossa: Atena, 2023.

SCHENEIDER, J.; NUNES, V. B. **Aplicativos Digitais no Contexto do Ensino de Matemática: Contribuições dos Alunos por Meio de Oficinas Temáticas.** Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco v. 8, n. 2 pp 72 – 84, 2019. Disponível em <Vista do APLICATIVOS DIGITAIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DOS ALUNOS POR MEIO DE OFICINAS TEMÁTICAS (ifes.edu.br)> Acesso em 20/01/2024 às 22:15

SILVA, Aparecida Franciso da; KODAMA, Helena Matiko Yano. Jogos no Ensino da Matemática. *In* II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, Salvador. **Anais** [...] Salvador: Universidade Federal da Bahia. Disponível em <www.bienasbm.ufba.br/OFF11.pdf>. Acesso em 06/07/2023 às 18:00

SILVA, Arício Medeiros da; PAIVA, Igor Galdino; FORTES, Denise Xavier. **Desenvolvimento de Aplicativo para Android com o uso do MIT App Inventor.** Paulo Afonso. Revista Científica da FASETE v. 11, n. 3 pp 191 – 203, 2017. Disponível em <Vista do DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVO PARA ANDROID COM USO DO MIT APP INVENTOR (unirios.edu.br)>. Acesso em 20/01/2024 às 13:45.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plazza; APRESENTAÇÃO, Kátia Regina dos Santos da. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática.** Revista Linhas, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302 – 323, 2014

VISITAÇÃO S. S. **O jogo de blackjack em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória e probabilidade.** 95 f. Feira de Santana. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – Departamento de Ciências Exatas. UEFS, Bahia, 2021.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

AVALIAÇÃO DO PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL PARA BANCAS DE DEFESA FINAL

Título do produto: CASMATH E OS JOGOS DE CASSINO NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Discente: Luciano da Silva Ferreira

Título da Tese: UTILIZAÇÃO DE JOGOS DE CASSINO E DO APP INVENTOR COMO FERRAMENTAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Orientador: André Luiz Martins Pereira

Data da defesa: 25 de abril de 2024

ASPECTOS AVALIADOS DO PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Complexidade - Compreende-se como uma propriedade do produto/processo educacional relacionada as etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do produto educacional. Mais de um item pode ser marcado	(x) O PE é concebido a partir da observação e/ou da prática do profissional e está atrelado à questão de pesquisa da dissertação ou tese. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente a forma de aplicação e análise do PE. (x) Há uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teórico e teórico-metodológico empregados na respectiva dissertação ou tese. ( ) Há apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Impacto - Forma como o produto educacional foi utilizado e/ou aplicado nos sistemas educacionais, culturais, de saúde ou CT&I. É importante destacar se a demanda foi espontânea ou contratada**.**	( ) Protótipo/Piloto não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (x) Protótipo/Piloto com aplicação no sistema Educacional no sistema relacionado à prática profissional do discente
Aplicabilidade - Está relacionado ao potencial de facilidade de acesso e compartilhamento que produto educacional possui, para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.	(x) PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto, mas não foi aplicado durante a pesquisa ( ) PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto e foi aplicado durante a pesquisa, exigível para o doutorado. ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial
	( ) PE sem acesso ( ) PE com acesso via rede fechada ( ) PE com acesso público e gratuito ( ) PE com acesso público e gratuito pela página do programa (x) PE com acesso por Repositório institucional - nacional ou internacional - com acesso público e gratuito
Aderência - Compreende-se como a origem do produto educacional apresentar origens nas atividades oriundas das linhas e projetos de pesquisas do programa em avaliação.	( )Sem clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do programa de pós-graduação stricto sensu ao qual está filiado. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do programa de pós-graduação stricto sensu ao qual está filiado.
Inovação - PE é criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito) (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos pré-estabelecidos) ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimento existente).

Breve relato sobre abrangência e/ou replicabilidade do produto ou processo
____
____
____

Assinatura dos membros da banca:
Presidente da banca: ______________________________
Membros internos: ______________________________
Membros externos: ______________________________

PROPOSTA DE PRODUTO Nº Produto/2024 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 4)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 19:34)
ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PROFMAT (12.28.01.00.00.00.65)
Matrícula: ###180#6

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 18:33)
EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###648#5

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 17:59)
ANDRÉ GUIMARÃES VALENTE
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.577-##

Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: ***4****, ano:* ***2024****, tipo:* ***PROPOSTA DE PRODUTO****, data de emissão:* ***29/04/2024*** *e o código de verificação:* ***a608384d2d***