UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mestrado Profissional - PROFMAT

Sequência didática: Quadriláteros inscritíveis e O Teorema de Ptolomeu para o Ensino Médio

Antônia Fabrícia de Souza

PRODUTO EDUCACIONAL

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB
junho/2024

Sumário

1 Introdução

Esta sequência didática é um produto educacional integrante da dissertação de mestrado intitulada: *OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES*. Tem como base o plano de disciplina eletiva, presente na mesma dissertação, a qual é dividida em 22 (vinte e dois) encontros baseados na realidade da escola em que está sendo aplicada, cada encontro equivale a 2 horas/aula. Essa sequência didática refere-se as aulas (ou encontros) de número 15 e 16 da disciplina eletiva, neste contexto vale ressaltar que os alunos já devem ter visto os conteúdos referentes as aulas anteriores como também acesso a uma aula introdutória ao software GeoGebra. Visamos abordar de forma detalhada os conceitos de quadriláteros inscritíveis, bem como o Teorema de Ptolomeu, trazendo relevância e contextualização para o Ensino Médio. Estes temas contribuem de forma significativa para o estudo da geometria, favorecendo a compreensão de propriedades e relações entre figuras geométricas, além de possibilitar a aplicação desses conceitos em problemas, os presentes nessa sequência são de autoria própria.

1.1 Contextualização e importância do tema no Ensino Médio

A geometria é um ramo da matemática fundamental presente no currículo do Ensino Médio, e o estudo dos quadriláteros inscritíveis, assim como o Teorema de Ptolomeu, pode desempenhar um papel na formação matemática dos estudantes, fortalecendo os conhecimentos prévios estudados no Ensino Fundamental e estimulando novas aprendizagens. Esses conteúdos proporcionam a compreensão das propriedades e relações entre os elementos geométricos, desenvolvendo o raciocínio lógico dedutivo e a capacidade de elaborar demonstrações coerentes. Além disso, contribuem para a visualização e representação geométrica dos problemas, habilidades essenciais não apenas para a compreensão da matemática, mas também para a formação integral dos estudantes.

2 Objetivos

2.1 Geral

O objetivo geral desta sequência didática é proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma compreensão aprofundada sobre quadriláteros inscritíveis, bem como o Teorema de Ptolomeu. Pretende-se que, ao final das aulas, os alunos sejam capazes de identificar e diferenciar esses tipos de quadriláteros, compreender suas propriedades e aplicar o Teorema de Ptolomeu para resolver problemas envolvendo relações métricas em figuras geométricas. Além disso, busca-se promover o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, contribuindo para a formação dos estudantes.

2.2 Específicos

Espera-se que os alunos serão habilitados a:

- Definir o que é um quadrilátero inscritível e reconhecer as suas principais características;

- Compreender e descrever as propriedades específicas dos quadriláteros inscritíveis, como a soma dos ângulos opostos ser igual a 180°;
- Identificar quadriláteros inscritíveis em diversas figuras geométricas e situações práticas;
- Aplicar critérios matemáticos para determinar se um quadrilátero é inscritível, como verificar a soma dos ângulos opostos;
- Resolver problemas matemáticos que envolvem cálculos e propriedades de quadriláteros inscritíveis;
- Desenhar quadriláteros inscritíveis e aplicar o Teorema de Ptolomeu utilizando instrumentos de construção geométrica, como régua e compasso;
- Explorar quadriláteros inscritíveis e o Teorema de Ptolomeu utilizando softwares de geometria dinâmica, como GeoGebra, para visualizar, manipular e compreender as propriedades;
- Enunciar o Teorema de Ptolomeu e entender sua formulação matemática;
- Aplicar o Teorema de Ptolomeu para resolver problemas envolvendo quadriláteros inscritíveis;
- Explorar a relação entre o Teorema de Ptolomeu e outras propriedades de quadriláteros inscritíveis e figuras geométricas relacionadas;
- Aprender sobre a história e o contexto histórico do Teorema de Ptolomeu;
- Desenvolver habilidades de pensamento crítico, analítico e investigativo.

3 Referenciais Teóricos

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, a Matemática é vista como um campo do conhecimento que possibilita a compreensão do mundo, a investigação de fenômenos do cotidiano e o desenvolvimento do raciocínio lógico. No contexto dos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis e do Teorema de Ptolomeu, a BNCC destaca a importância de explorar e compreender as relações entre elementos geométricos, as propriedades dos quadriláteros e a aplicação de teoremas, o que contribui para a formação de estudantes críticos e reflexivos, capazes de argumentar e tomar decisões fundamentadas.

3.1 BNCC - Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as diretrizes e expectativas de aprendizagem para os estudantes da educação básica no Brasil. Elaborada pelo Ministério da Educação (MEC) e homologada em 2017, a BNCC busca garantir que todos os alunos tenham acesso a uma educação de qualidade. Ela estabelece os conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas de ensino, da educação infantil ao ensino médio. No contexto do ensino médio, a BNCC tem como objetivo preparar os jovens para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho, promovendo uma formação integral que abrange tanto as áreas de conhecimento quanto o desenvolvimento de competências socioemocionais.

As competências e habilidades na BNCC são conceitos centrais que orientam o processo de ensino-aprendizagem. Competências são definidas como a capacidade de mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Elas envolvem uma combinação de conhecimentos teóricos e práticos, e seu desenvolvimento é essencial para a formação integral dos estudantes. Habilidades, por sua vez, referem-se a aptidões específicas que os estudantes devem adquirir para desempenhar determinadas ações ou resolver problemas. Essas habilidades são componentes das competências e estão distribuídas de maneira a permitir uma progressão contínua e articulada ao longo dos anos escolares.

3.1.1 COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

3.1.2 HABILIDADES

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

4 Desenvolvimento

No primeiro encontro, será apresentado o conceito de quadriláteros inscritíveis, destacando as propriedades que possuem. Serão explorados exemplos e construções desses quadriláteros. Já no segundo encontro, o foco será o Teorema de Ptolomeu, apresentando um pouco do seu contexto histórico, sua demonstração e aplicação na resolução de problemas envolvendo quadriláteros inscritíveis. Serão propostos exercícios práticos para que os estudantes desenvolvam a habilidade de aplicar o teorema em situações diversas, consolidando assim o aprendizado.

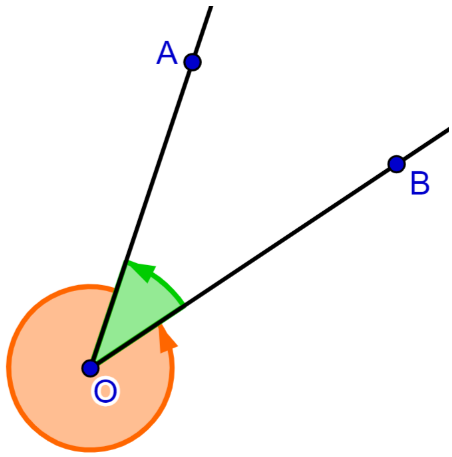
4.1 Encontro 1: Quadriláteros inscritíveis

4.1.1 Tópicos Preliminares

Ângulo:

Ângulo é uma região delimitada por duas semirretas que partem do mesmo ponto. Dadas as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões limitadas por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ como mostra a figura 1.

Figura 1: Ângulo



Fonte: Autora

A todo **ângulo** esta associada uma **medida** da região do plano que ele ocupa. A medida de um ângulo é um número real positivo x, com unidade de medida em graus, tal que $0° \leq x \leq 360°$.

Observação. Na figura 1 tem-se $\angle AOB + \angle BOA = 360°$. $\angle AOB$ (em laranja) é um ângulo maior que 180° e $\angle BOA$ (em verde) é um ângulo menor que 180°, consideramos nessa notação o sentido anti-horário, de agora em diante quando usarmos a notação $\angle AOB$ estaremos nos referindo ao ângulo menor que 180°, exceto quando deixado claro que é o contrario.

Quadrilátero:

Quadrilátero é um polígono de quatro lados e quatro vértices, onde dois lados têm um único vértice em comum.

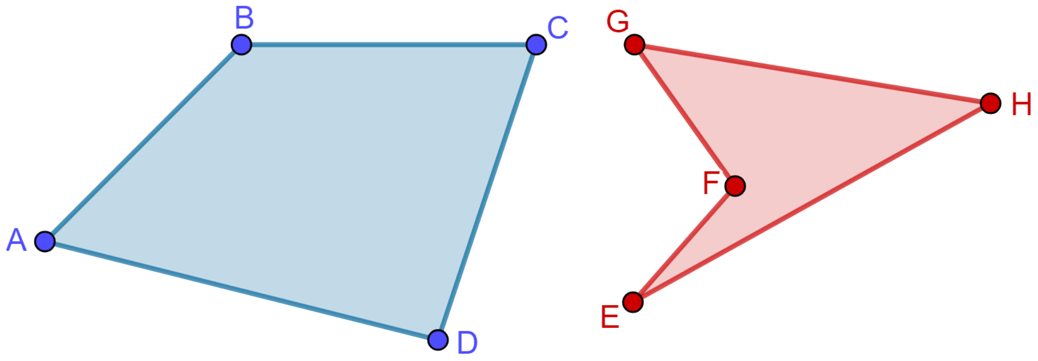
Um **quadrilátero** é dito **convexo** quando, ao tomarmos dois pontos quaisquer distintos A e B no seu interior, o segmento $\overline{AB}$ esta totalmente no interior do quadrilátero (figura 2).

4.1.2 Introdução aos Quadriláteros Inscritíveis

Definição:

Um quadrilátero é chamado de inscritível se todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência. Em outras palavras, um quadrilátero é inscritível se ele pode ser inscrito

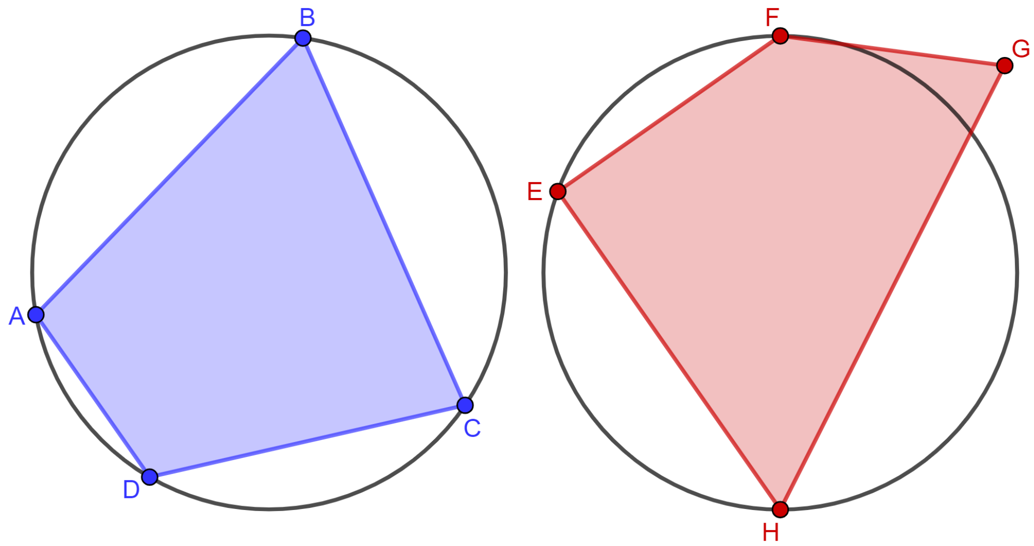
Figura 2: $ABCD$ convexo e $EFGH$ não convexo



Fonte: Autora

em uma circunferência.

Figura 3: $ABCD$ inscritível e $EFGH$ não inscritível



Fonte: Autora

Propriedades:

P1: A característica mais marcante dos quadriláteros inscritíveis é que a soma dos ângulos opostos é sempre igual a 180°. Formalmente, se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ \text{ ou } \angle CBA + \angle ADC = 180^\circ.$$

A recíproca é verdadeira e usada como critério para verificar se um quadrilátero é inscritível, isto é: Um quadrilátero é inscritível se e somente se a soma de seus ângulos opostos é igual a 180°.

P2: Outra propriedade que relaciona os ângulos de um quadrilátero inscritível é a que deriva dos ângulos determinados por um mesmo arco. Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então:

$$\angle BAC = \angle BDC.$$

A reciproca também é verdadeira, podendo essa propriedade ser usada como critério para a inscritibilidade de um quadrilátero.

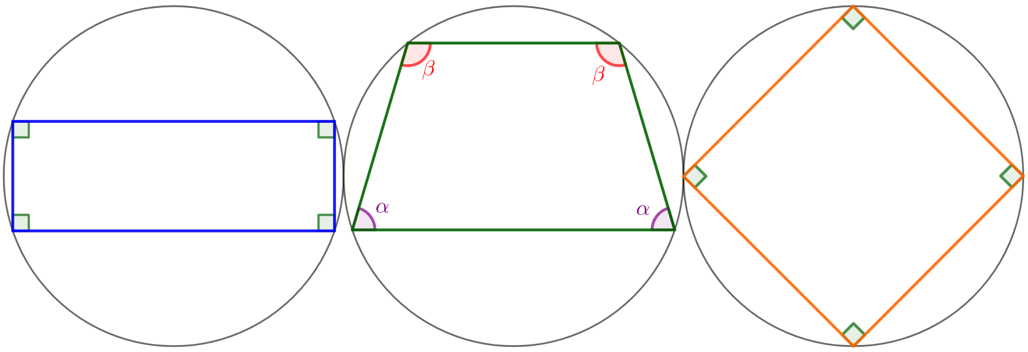
Exemplos de Quadriláteros Inscritíveis:

1. **Retângulo:** Todo retângulo pode ser inscrito em uma circunferência porque os ângulos opostos de um retângulo são iguais e todos são retos, logo a soma dos ângulos opostos é sempre 180°.

2. **Trapézio Isósceles:** Um trapézio isósceles é inscritível porque é composto por dois pares de ângulos iguais que juntos somam 360°, portanto, a soma dos ângulos opostos é 180°.

3. **Quadrado:** Todo quadrado é um caso especial de retângulo e, portanto, também pode ser inscrito em uma circunferência.

Figura 4: Exemplos de Quadriláteros Inscritíveis



Fonte: Autora

4.1.3 Afirmações para exploração e demonstração:

Afirmação 1: Um paralelogramo é inscritível se, e somente se, for um retângulo.
Afirmação 2: Um trapézio é inscritível se, e somente se, for um trapézio isósceles.
Afirmação 3: Um losango é inscritível se, e somente s,e for um quadrado.
Estas afirmações podem ser demostradas facilmente com os alunos. Dica: Relembre as características destes quadriláteros.

Demonstrações:

Demonstração 1: Seja $ABCD$ um paralelogramo, logo os ângulos opostos são congruentes, isto é, $\angle BAD = \angle DCB = a$ e $\angle CBA = \angle ADC = b$, e os ângulos adjacentes são suplementares, assim $\angle BAD + \angle CBA = 180°$ e $\angle DCB + \angle ADC = 180°$, daí:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180° \iff a + a = 180° \iff 2a = 180° \iff a = 90°.$$

Portanto, o paralelogramo $ABCD$ é inscritível se, e somente se for um retângulo.

Demonstração 2: Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD. Como $AB \parallel CD$, tem-se:
$\angle BAD + \angle ADC = 180°$ e $\angle CBA + \angle DCB = 180°$.

Segue-se, que:

$$\angle BAD + \angle DCB = 180° \iff \angle BAD + \angle DCB = \angle BAD + \angle ADC \iff \angle DCB = \angle ADC.$$

Por outro lado, $ABCD$ é cíclico (cíclico é o mesmo que inscritível) se, e somente se, $\angle BAD + \angle DCB = 180°$. Logo, ABCD é inscritível se, e somente se, $\angle DCB = \angle ADC$.

Entretanto, $ABCD$ é isósceles se, e somente se, $\angle DCB = \angle ADC$. Portanto, o trapézio $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $ABCD$ é isósceles.

Demonstração 3: Todo losango é um paralelogramo, com todos os lados de mesmo comprimento, logo pela **Demonstração 1** um losango é inscritível se, e somente se for um quadrado.

4.1.4 Métodos de Construção de Quadriláteros Inscritíveis

Nesse momento serão abordadas técnicas específicas para a construção desses tipos de quadriláteros. Existem vários métodos para construir tais quadriláteros, dependendo das condições e ferramentas disponíveis. Aqui estão alguns métodos que deverão ser aplicados com os alunos.

Construção a partir de uma Circunferência Dada:

1. Desenhe a circunferência: Comece desenhando uma circunferência com um compasso, determinando o centro O e o raio r;

2. Escolha os vértices: Marque quatro pontos distintos A, B, C e D na circunferência, nesta ordem;

3. Conecte os vértices: Use uma régua para conectar os pontos A, B, C e D sequencialmente para formar o quadrilátero $ABCD$.

Verificação: Meça os ângulos internos usando um transferidor e verifique se a soma dos ângulos opostos é igual a 180°.

Construção a partir de Ângulos Dados:

1. Desenhe uma linha base: Desenhe um segmento AB de um comprimento arbitrário;

2. Marque os ângulos: Usando um transferidor, marque, para o mesmo lado, dois ângulos α e β em A e B respectivamente, onde $\alpha < 180°$ e $\beta < 180°$;

3. Desenhe as retas auxiliares: Desenhe as retas AD' e BC' formando os ângulos α e β com AB;

4. Marque o ponto C: Escolha o ponto C na reta BC de modo que ele esteja localizado antes do cruzamento de AD' e BC';

5. Marque o ângulo suplementar de α: Usando um transferidor, marque o ângulo $180° - \alpha$ em C;

6. Complete o quadrilátero: Marque D na intersecção da reta que partiu de C com a reta AD'.

Verificação: Meça o ângulo $\angle ADC$ e verifique ser igual a $180° - \beta$.

Dica: Nessa construção a partir de Ângulos Dados, dê valores exatos para α e β que facilitem o uso do transferidor, por exemplo $\alpha = 60°$ e $\beta = 70°$.

Construção a partir do Comprimento das diagonais:

1. Determine as diagonais: Suponha que você tenha os comprimentos das diagonais AC e BD, tais que $\overline{AC} \geq \overline{BD}$;

2. Desenhe a circunferência: Desenhe uma circunferência de tal forma que seu raio r seja tal que $2r \geq \overline{AC}$;

3. Trace as diagonais: Com o auxílio de uma régua para fixar os comprimentos, trace $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ de modo que estes segmentos se intersectem no interior da circunferência e os pontos A, B, C e D estejam sobre a circunferência;

4. Conecte os vértices: Use uma régua para conectar A com B, B com C, C com D e D com A.

Construção utilizando Software de Geometria Dinâmica:

1. Abra o software: Utilizaremos o software GeoGebra;

2. Desenhe a circunferência: Use a ferramenta de círculos para desenhar um círculo;

3. Marque os vértices: Clique para marcar quatro pontos distintos A, B, C e D sobre o círculo, com a ferramenta Pontos selecionada;

4. Conecte os vértices: Use a ferramenta para segmentos para conectar os pontos A, B, C e D sequencialmente.

Verificação: O software permite ajustar os pontos e observar em tempo real se os ângulos opostos somam 180°. Para isso, os alunos devem ser orientados ao uso da ferramenta de ângulos para destacar os ângulos internos do quadrilátero $ABCD$. Segue imagem (Figura 5) e link de um exemplo com texto dinâmico: `https://www.geogebra.org/m/u7a4fk3j`

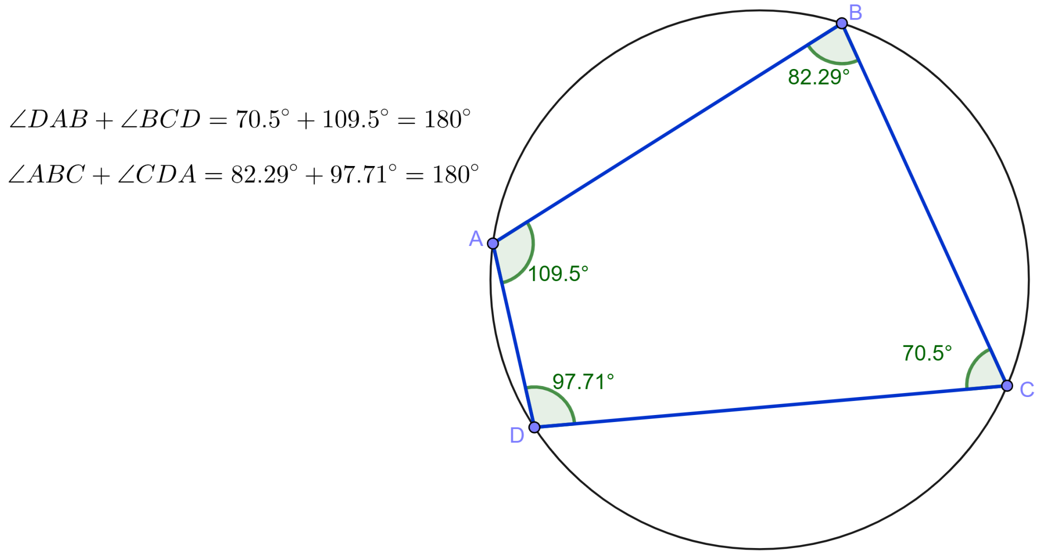
4.1.5 Atividades Teóricas e Práticas sobre Quadriláteros Inscritíveis

Sugestão de atividade para que os alunos coloquem em prática os conceitos e técnicas aprendidas:

Exercício 1 - Seja um quadrilátero inscritível $ABCD$. Determine $\angle CDA$ e $\angle DAB$, sabendo que $\angle ABC = 40°$ e $\angle BCD = 80°$.

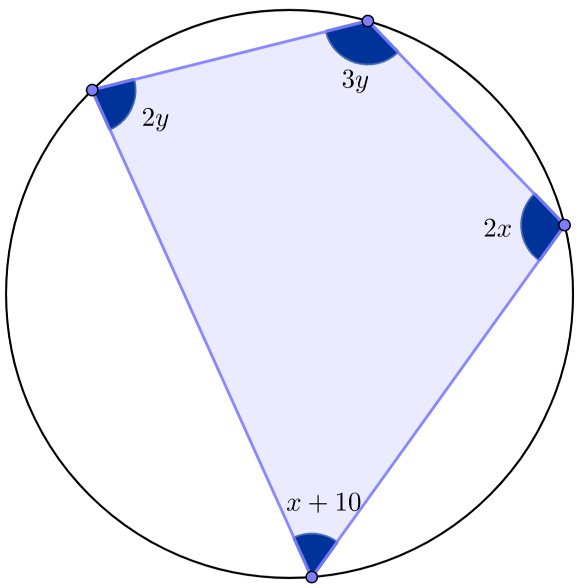
Exercício 2 - Determine o valor de x e y no quadrilátero abaixo (figura 6).

Figura 5: Construção do Quadrilátero $ABCD$ inscritível



Fonte: Autora

Figura 6: Exercício 2



Fonte: Autora

Exercício 3 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscritível, tal que a circunferência circunscrita a $ABCD$ tenha raio de 5cm e $ABCD$ seja um:

a) Paralelogramo.

b) Trapézio.

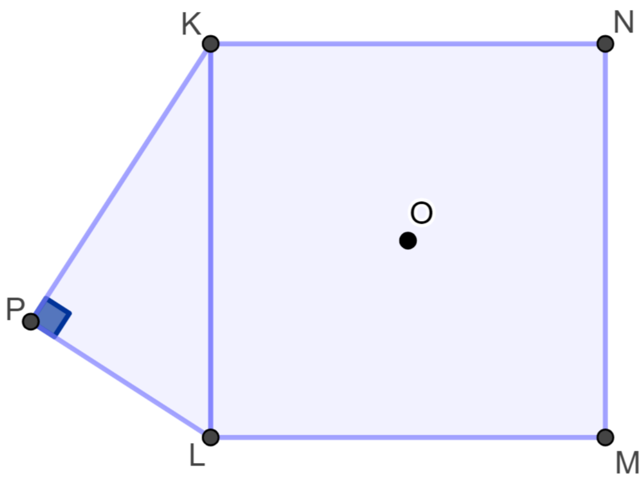
c) Losango.

Exercício 4 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscritível, tal que $\angle DAB = 45^\circ$ e $\angle ABC = 70^\circ$.

Exercício 5 - Construa um quadrilátero $ABCD$ inscritível, com diagonais $\overline{AC} = 6cm$ e $\overline{BD} = 7cm$.

Exercício 6 - Na figura 7, $KLMN$ é um quadrado de centro O. Determine a medida de $\angle LPO$.

Figura 7: Exercício 6



Fonte: Autora

4.1.6 Revisão e Dúvidas

- **Revisão:** Recapitule os principais conceitos da aula.
- **Dúvidas:** Abra espaço para perguntas e esclareça quaisquer dúvidas que os alunos possam ter.

4.2 Encontro 2: O Teorema de Ptolomeu

4.2.1 Introdução ao Teorema de Ptolomeu

Enunciado:

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Ou seja, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

Contextualização histórica:

O enunciado acima se refere ao teorema, conhecido como, de Ptolomeu, apesar de que há indícios que tenha sido descoberto muito antes de sua época, sendo o real propósito de Ptolomeu, em relação a este teorema, a possibilidade de aplica-lo na construção da *Tabela de Cordas* que encontra-se na sua obra *Almagesto*.

Cláudio Ptolomeu, foi um cientista grego que viveu no Egito entre aproximadamente 90 e 168 E.C.(Era Comum), é reconhecido principalmente por suas contribuições na astronomia, matemática e geografia. Sua obra mais famosa, *Almajesto*, é uma coleção de tratados que introduziu modelos e ferramentas matemáticas cruciais, como a trigonometria, baseando-se nos trabalhos de estudiosos anteriores como Hiparco e Eratóstenes. Ptolomeu desenvolveu o modelo geocêntrico do sistema solar, que permaneceu influente por 1400 anos até ser substituído pela teoria heliocêntrica de Copérnico. Sua obra permitiu a preservação e transmissão do conhecimento astronômico antigo.

Ptolomeu fez importantes contribuições para a geografia com sua obra *Geografia*, que compilou informações sobre diversas regiões do mundo conhecido na época, influenciando a cartografia medieval e renascentista. Ele também contribuiu para a música com sua *Harmônica* e para a astrologia com *Tetrabiblo*, refletindo as práticas científicas de sua época. Vivendo em Alexandria, um centro intelectual da antiguidade, Ptolomeu teve acesso a vastos conhecimentos, que utilizou para fundamentar e expandir suas teorias e observações.

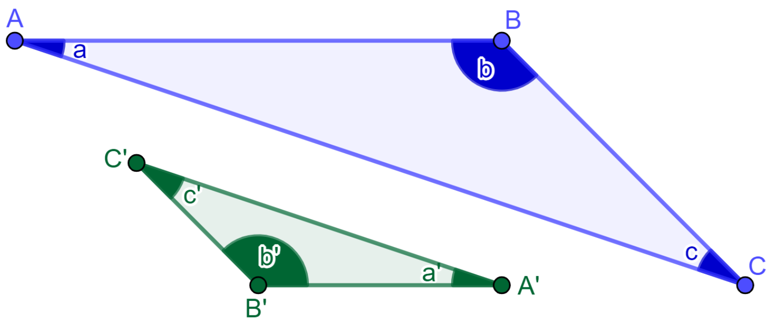
4.2.2 Definições Preliminares

Revise os critérios de semelhança de triângulos:

Dois triângulos são semelhantes se existir uma correspondência vértice a vértice, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes, e os comprimentos dos lados correspondentes sejam proporcionais.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes:

Figura 8: Triângulos Semelhantes



Fonte: Autora

- $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$;
- $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

Critérios de semelhança de triângulos:

- Critério AA

  Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos correspondentes geometricamente iguais (o terceiro ângulo é necessariamente igual, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°).

- Critério LAL

  Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem dois lados correspondentes diretamente proporcionais e os ângulos correspondentes, adjacente a estes lados, forem congruentes.

- Critério LLL

  Dois quaisquer triângulos são semelhantes se tiverem os três lados correspondentes diretamente proporcionais.

Retome os conhecimentos sobre quadriláteros inscritíveis:

Relembre os conceitos aprendidos na aula anterior, enfatizando principalmente as características relacionas aos ângulos de um quadrilátero inscritível.

Breve introdução a ângulo inscrito:

Um **ângulo inscrito** num círculo é um ângulo do qual o vértice é um ponto do círculo e os lados são duas cordas do mesmo círculo.

Teorema do Ângulo Inscrito: Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do angulo inscrito $\angle BAC$ é igual a metade da medida do ângulo central $\angle BOC$, isto é:

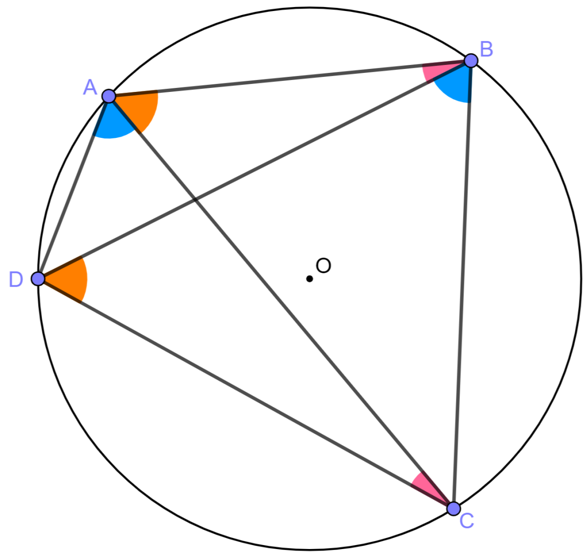
$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$

Uma consequência do teorema acima é que ângulos inscritos determinados por um mesmo arco, ou corda, têm mesma medida, isto é, são congruentes.

4.2.3 Demonstração do Teorema de Ptolomeu

Seja $ABCD$ um quadrilátero nas condições do enunciado como mostra a Figura 9.

Figura 9: Quadrilátero inscritível

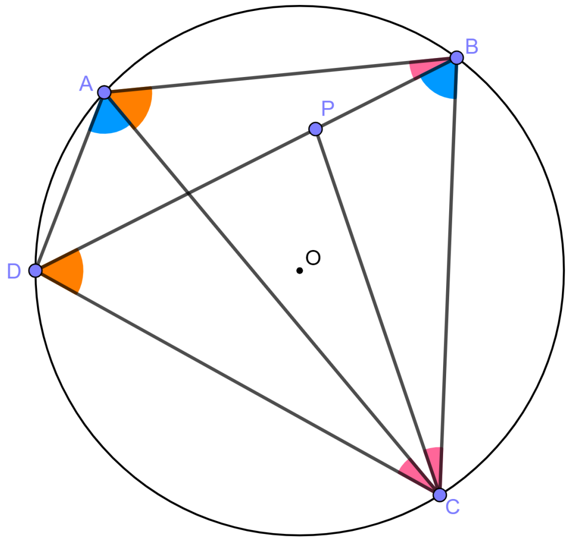


Fonte: Autora

Inicialmente observemos que:
(I) $\angle ABD = \angle ACD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor AD;
(II) $\angle BAC = \angle BDC$ por serem ângulos determinados pelo arco menor BC;
(III) $\angle CAD = \angle CBD$ por serem ângulos determinados pelo arco menor CD.

Agora marcaremos o ponto P na diagonal BD de modo que:
(IV) $\angle BCP = \angle ACD$
(consequentemente de (I) $\angle BCP = \angle ABD$ também). Veja Figura 10.

Figura 10: Marcação do ponto P



Fonte: Autora

Notemos que:
(V) $\angle ACB = \angle DCP$, pois

$$\angle ACB = \angle ACP + \angle PCB = \angle ACP + \angle ACD = \angle DCP.$$

De (III) e (IV) temos a semelhança pelo caso AA dos triângulos ACD e BCP, segue-se que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

De (II) e (V) temos a semelhança dos triângulos ABC e DPC, também pelo caso AA, daí

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Somando ambos os membros das relações obtidas através das semelhanças que citamos anteriormente, obtemos:

$$\begin{gathered}\overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot (\overline{BP} + \overline{DP}) = \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC},\end{gathered}$$

como queríamos demonstrar. ■

4.2.4 Aplicações do Teorema de Ptolomeu

No texto base estão expostas diversas aplicações do teorema de Ptolomeu, a escolhida aqui para ser exposta para os alunos foi a Lei dos Cossenos, ficando a critério do(a) professor(a) que pretenda aplicar essa sequência didática a exposição dessa ou de outras aplicações.

Lei dos Cossenos

Dado um triângulo qualquer ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, a lei dos cossenos nos fornece a relação:

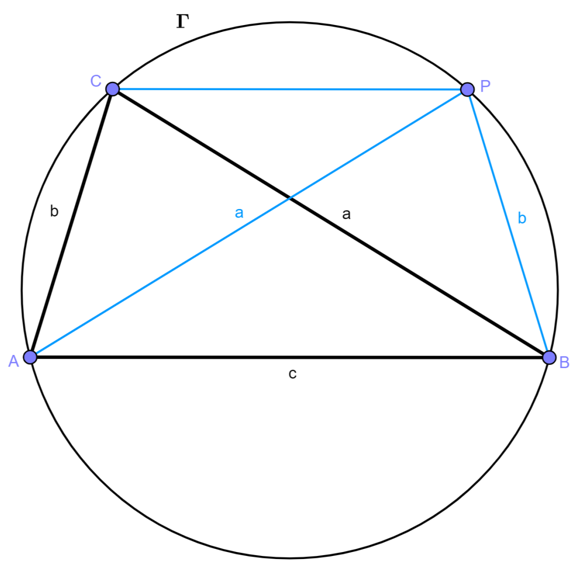
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\widehat{A}.$$

O Teorema de Ptolomeu é uma ferramenta bem interessante para se demonstrar a lei dos cossenos para um triângulo qualquer.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Sendo Γ o círculo circunscrito ao triângulo ABC, marcaremos em Γ o ponto P de modo que $AP = BC = a$ e $BP = AC = b$, a existência de tal ponto P esta garantida, pois o trapézio isósceles da Figura 11 é inscritível porque dois de seus ângulos opostos são suplementares. De fato:

$$\angle CPB + \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Figura 11: Círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: Autora

Baixemos de C e P os segmentos CE e PF, ambos perpendiculares, ao lado AB.

Note que, os triângulos ABC e BAP são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado), assim $\angle CAB = \angle PBA = \widehat{A}$. Trataremos apenas por $\widehat{A}$ em relação ao ângulo interno do triângulo ABC, daí obtemos outra congruência por $LAA\circ$ (lado, ângulo, ângulo oposto) dos triângulos ACE e BPF, que nos fornece $\overline{AE} = \overline{BF}$.

No triângulo retângulo ACE temos:

$$cos\widehat{A} = \frac{\overline{AE}}{b} \Rightarrow \overline{AE} = bcos\widehat{A}.$$

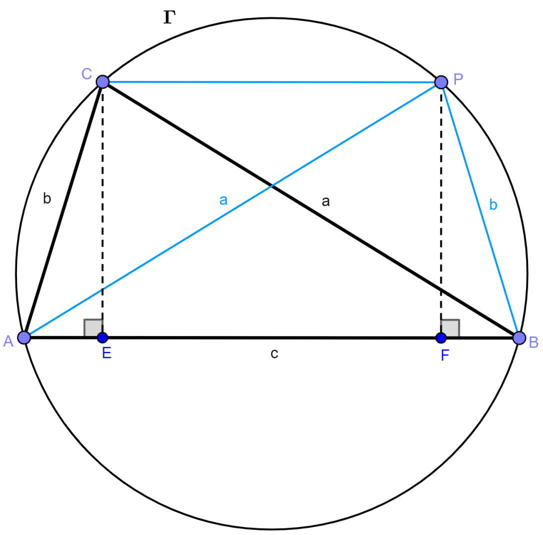
Temos ainda:

$$\angle CAB = \angle PBA \Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle PBC + \angle CBA$$

$$\Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle CAP + \angle CPA$$
$$\Rightarrow \angle PAB = \angle CPA$$

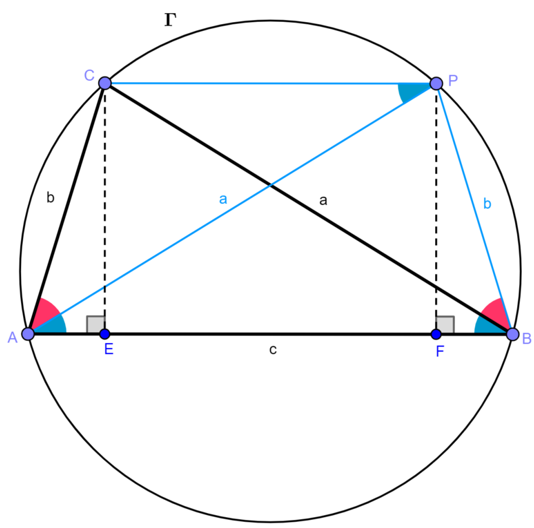
logo $CP//AB$. Corolário 2.17 (MUNIZ NETO, 2013).

Figura 12: Segmentos perpendiculares



Fonte: Autora

Figura 13: $(CP//AB)$



Fonte: Autora

Finalmente, aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, temos:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{CP}$$
$$\Rightarrow a \cdot a = b \cdot b + c \cdot (c - 2bcos\widehat{A})$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\widehat{A},$$

pois $\overline{CP} = \overline{EF} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AE} = c - 2 \cdot bcos\widehat{A}$. $\blacksquare$

4.2.5 Atividade Prática com uso do GeoGebra

Atividade: Explorando o Teorema de Ptolomeu com GeoGebra.

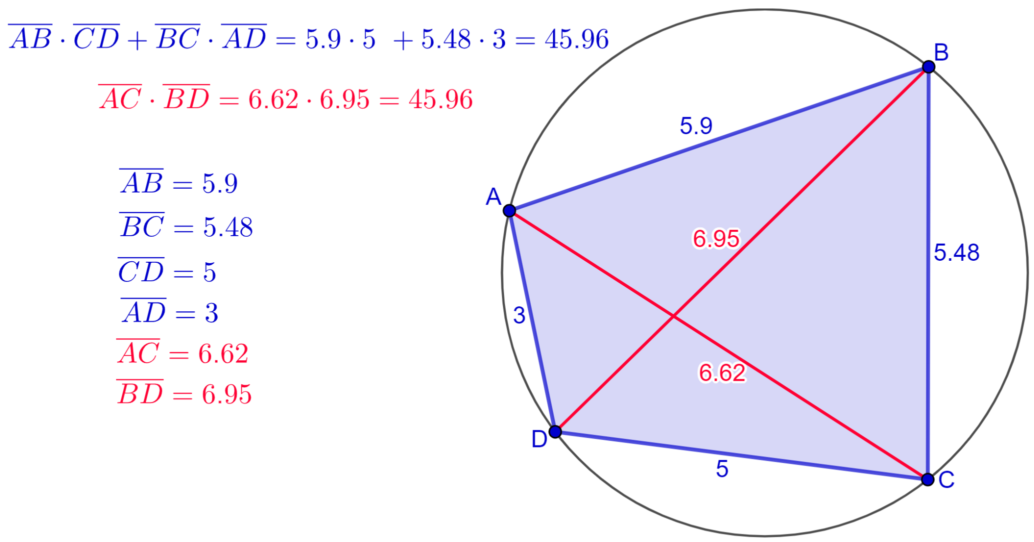
1. Construa o Círculo:
   - Abra o GeoGebra e desenhe um círculo usando a ferramenta de círculo (selecionando um ponto central e um ponto no círculo).
2. Construa um Quadrilátero inscrito no círculo:
   - Escolha quatro pontos distintos no círculo e marque-os.
   - Conecte esses pontos em ordem para formar um quadrilátero cíclico (usando a ferramenta de polígono ou de segmentos).
3. Medição dos Lados e Diagonais:

- Use a ferramenta de medição de distâncias ou segmentos para medir os quatro lados do quadrilátero.
- Meça também as duas diagonais do quadrilátero.

4. Aplicação do Teorema de Ptolomeu:
    - Peça aos alunos para calcular a soma dos produtos dos lados opostos e o produto das diagonais.
    - Utilize o GeoGebra para inserir os cálculos e verificar se o Teorema de Ptolomeu é satisfeito: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$
5. Use a ferramenta de texto:
    - Use variáveis auxiliares para os cálculos do teorema: $s = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ e $t = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
    - Use a ferramenta para textos e crie um texto dinâmico para exibir os resultados.
6. Exploração e Manipulação:
    - Permita que os alunos movam os pontos no círculo e observem como as medidas dos lados e das diagonais mudam.
    - Incentive-os a verificar repetidamente o Teorema de Ptolomeu com diferentes configurações de quadriláteros cíclicos.

Segue link e imagem exemplo dessa construção: `https://www.geogebra.org/m/dgqpayaj`

Figura 14: Explorando o Teorema de Ptolomeu com GeoGebra



Fonte: Autora

4.2.6 Exercícios de fixação e problemas

Inicialmente serão propostos exercícios de fixação, onde não há muita exigência de interpretação ou contextualização com outros conteúdos matemáticos, seguindo com os problemas que necessitam de uma maior amplitude de conhecimentos prévios como também um melhor desempenho em resoluções de problemas.

Exercícios:

Exercício 1. Dado um quadrilátero inscritível $ABCD$ onde $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 5$ e $\overline{DA} = 7$. Se a diagonal $\overline{AC}$ mede 10, determine a medida da diagonal $\overline{BD}$.

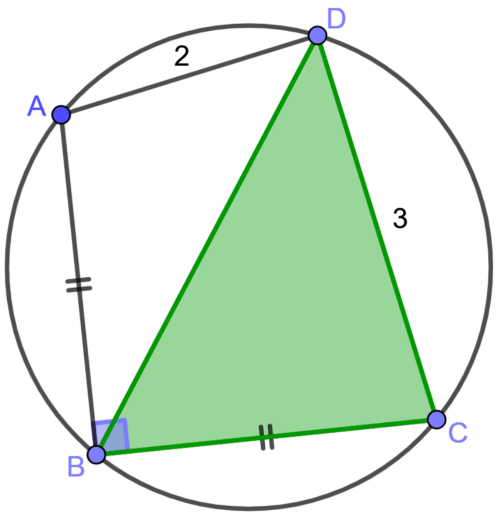
Exercício 2. No quadrilátero cíclico $WXYZ$, os lados são $\overline{WX} = 9$, $\overline{XY} = 12$, $\overline{YZ} = 5$, $\overline{ZW} = 15$. Calcule o produto das duas diagonais $\overline{WY}$ e $\overline{XZ}$.

Exercício 3. Verifique se o quadrilátero $PQRS$ com lados $\overline{PQ} = 10$, $\overline{QR} = 6$, $\overline{RS} = 8$, $\overline{SP} = 15$ e diagonais $\overline{PR} = 14$ e $\overline{QS} = 12$ é um quadrilátero inscritível.

Exercício 4. Um quadrilátero cíclico $ABCD$ possui $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{DA} = 6$ e a diagonal $\overline{BD} = 7$. Determine a medida da diagonal $\overline{AC}$.

Problemas:

Figura 15: Quadrilátero $ABCD$: Problema 2



Fonte: Autora

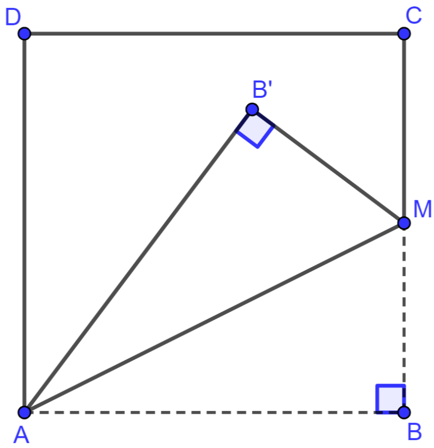
Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$, $\overline{BC} = \sqrt{51}$ e $\overline{DC} = 7$. Sabendo que $\angle BAD = \angle DCB = 90°$, calcule $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Problema 2. Seja $ABCD$ um quadrilátero, com $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$, se $ABCD$ é inscritível, $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DC} = 3$ como mostra a figura 15, qual a área do triângulo BCD?

Problema 3. Dado um trapézio $ABCD$ isósceles de bases $\overline{AD} = 6cm$ e $\overline{BC} = 14cm$. Determine o comprimento dos lados laterais e das diagonais do trapézio $ABCD$, sabendo que $\overline{AB} + \overline{AC} = 21cm$.

Problema 4. Observe a figura 16, ela representa um papel quadrado $ABCD$, com $10cm$ de lado, que foi dobrado na linha AM, em que M é o ponto médio do lado BC. Considerando que após a dobra A, B, M e B' são coplanares, determine a distancia de B a B'.

Figura 16: Quadrado $ABCD$



Fonte: Autora

5 Conclusão

Esta sequência didática é um dos frutos das experiências vivenciadas no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), onde foram adquiridos os conhecimentos prévios necessários para sua idealização e construção, e também pela vivência em sala de aula ao ministrar a disciplina eletiva *Redescobrindo teoremas históricos da Geometria Plana: Ptolomeu, Menelaus e Ceva*, ainda em andamento, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Deputado Pedro Pascoal de Oliveira, no município de Juazeirinho-PB, para alunos da 1ª série do Ensino Médio do turno vespertino.

Presume-se que este material didático, que é o produto educacional da dissertação intitulada: *OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES*, seja utilizado por outros professores, e futuros professores, de matemática das escolas públicas brasileiras, dentro do plano da disciplina eletiva ou não, de modo a expandir e propagar para seus alunos esses conhecimentos, destacando a importância de uma abordagem prática e contextualizada no ensino de geometria no Ensino Médio.

6 Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, Asger. Episódios da historia antiga da matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. ISBN 9788585818951.

[2] ANDRADE, Lenimar Nunes de. O Teorema de Ptolomeu e algumas aplicações. UFPB - João Pessoa, João Pessoa PB, p. 1-4, 18 ago. 2012.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

[4] GOMES, Carlos A. Tópicos de Matemática: IME- ITA - Olimpíadas. 1. ed. Fortaleza CE: VestSeller, Abril 2016. 669 p. v. 3. ISBN 9788560653454.

[5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria: coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. ISBN 9788585818937.

[6] NERY, Chico; OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. Sobre o notável teorema de Ptolomeu. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Campinas/SP, v. 23, ed. n. 1, 1 jul. 2023. DOI 10.21167/cqdv23n12023299316. Disponível em: `https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index` . Acesso em: 31 ago. 2023.

[7] ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos de História da Matemática: coleção PROFMAT. 1. ed. [S. l.]: SBM, 2012. 467 p. ISBN 9788585818654.