UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Geovane Tavares Nogueira

Produto educacional: Miscelânea de problemas envolvendo recorrências de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas e de 2ª ordem homogêneas

Campina Grande - PB
Abril/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Geovane Tavares Nogueira

Produto educacional: Miscelânea de problemas envolvendo recorrências de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas e de 2ª ordem homogêneas

Produto educacional apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Abril/2024

Introdução

Este produto educacional é resultado da dissertação " As recorrências de 1ª e 2ª ordem: um olhar para as soluções particulares das equações não homogêneas e aplicações" realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) no Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) sobre a orientação do professor doutor Luiz Antônio da Silva Medeiros, e consiste na abordagem de uma Miscelânea de problemas envolvendo recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas e de 2ª ordem homogêneas, buscando estimular a prática das aplicações dessas questões nas aulas de Matemática na educação básica, atingindo as habilidades previstas de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Iniciar o processo de introdução as recorrências matemáticas na educação básica não é uma tarefa simples, pois é preciso que os professores saíam de suas zonas de confortos em relação a abordagem de conteúdos envolvendo a temática e além disso levar consideração o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, porém, é interessante fazer essa aproximação das recorrências sempre que possível, pois exercem um papel muito importante no aprendizado da matemática.

O uso de recorrências em conteúdos de Matemática no Ensino Básico tem como objetivo desenvolver habilidades e estimular o aluno a construir sua própria solução, e por conseguinte aguçar o estudante a ter uma aproximação cada vez mais precisa na resolução de problemas.

A importância do tema ganha ênfase por agregar valores e disciplinar ainda mais a solução de vários problemas que são trabalhados no Ensino Básico, que passarão a serem resolvidos por meio de técnicas que deliberam uma lógica cadenciada a partir de casos particulares até a obtenção do caso geral, fazendo com que a resolução de vários problemas seja cada vez mais significativa, objetiva e clara no entendimento do aluno.

É própria da busca de padrões e fórmulas de recorrência, deter o olhar sobre diversas situações, analisar propriedades de forma intuitiva, refletir sobre casos particulares, procurando chegar à generalização, formular conjecturas e procurar, posteriormente, a possível validação destas fórmulas. A propósito, Keith Devlin diz

> [$\cdots$] a Matemática é a ciência dos padrões, refletindo assim a ideia de transversalidade dos padrões, o que sugere que, mais do que um típico da Matemática, constituem uma qualidade associada a esta ciência. É uma forma de admirar e compreender o mundo em que vivemos, tanto a nível físico, como biológico e até mesmo sociológico, bem como o mundo escondido das nossas mentes, tornando visível o que é invisível ao olhar. (DEVLIN, 2002, p.9)

A procura por padrões de regularidades em atividades e a utilização de recorrências matemáticas em de sala de aula, possibilita ao aluno o estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo real, construindo uma referência positiva da disciplina.

Sendo assim, a necessidade de abordar o tema de Recorrências se encontra fundamentado na BNCC quando esta propõe como Objetos de Conhecimento a descoberta e a verificação de padrões e sequências recursivas na sua Unidade Temática de Álgebra no desenvolvimento das habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, lançando assim, as bases para a construção e consolidação de um pensamento algébrico recursivo que se amplia nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, também, no Ensino Médio.

Espera-se que esse material possa auxiliar os professores na preparação e execução de suas aulas e na preparação dos alunos para grandes olímpiadas como por exemplo a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que requer um racícinio recursivo por partes dos alunos que são submetidos a avaliação.

Objetivos

Objetivo geral

Abordar as recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas, assim como as recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas. Além disso, abordar problemas que envolvem recorrências lineares em suas diversas variações/generalizações, a fim de aplicar os resultados obtidos no trabalho.

Objetivos específicos

- Identificar relação de recorrência em problemas de formas gerais;
- Utilizar as recorrências lineares em diversos problemas de contagem;
- Construir um material que sirva de motivação para os professores trabalharem recorrências lineares com seus alunos na educação básica;
- Abordar problemas que podem ser modelados por meio de recorrências em suas diversas áreas da matemática.

Metodologia

Trabalhar essas questões com os alunos da educação básica, preparando-os para as Olímpiadas de matemática, como podemos exemplificar, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), estimulando-os a construir um pensamento recursivo, desenvolvendo habilidades e incitando a criatividade para a resolução desses diversos problemas.

Recorrências

Apresentaremos alguns resultados das sequências recorrentes, isto é, sequências que são definidas a partir dos valores de alguns dos seus termos iniciais acompanhados de uma relação que permite determinar os demais termos da sequência a partir dos termos iniciais fixados.

As sequências recursivas consistem de uma ferramenta matemática bastante poderosa para resolver problemas de Matemática Discreta e problemas de muitas outras áreas tais como Engenharia, Computação, Biologia, Estatística, entre outras. Para melhor entendimento da temática, sugerimos a leitura completa de nossa dissertação que pode ser encontrada em https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/ no aluno **Geovane Tavares Nogueira** e na instituição UFCG.

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma fórmula posicional explicíta para o termo geral da sequência. Para entender melhor o conceito de solução, vamos exemplificar a relação de recorrência e a sua fórmula posicional, sem no entanto ainda descrever como tal fórmula é obtida.

Exemplo 1. *A sequência* (a_n) *dos números naturais ímpares* $1, 3, 5, 7, \cdots$, *pode ser definida por* $a_{n+1} = a_n + 2$, *com* $n \geq 1$ *e* $a_1 = 1$. *Neste caso, podemos verificar que* $a_n = 2n - 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é a solução dessa recorrência.*

Uma equação de recorrência costuma ser classificada através dos seguintes critérios independentes entre si:

i) **Ordem:** A ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação. Se tal diferença entre índices for igual a n, dizemos que a recorrência é de *n-ésima* ordem.

ii) **Termo independente ou homogeneidade:** são as expressões aditivas, que podem depender de n, mas que aparecem isoladas dos termos da sequência na expressão da recorrência.

iii) **Linearidade:** uma recorrência é dita linear se a sua parte principal, isto é, se excetuando os termos independentes da expressão, consiste de uma combinação linear (soma de múltiplos dos termos da sequência) de seus termos. Esses múltiplos, inclusive, podem ser apresentados como funções de n. Caso contrário, diremos que a recorrência é não linear.

   Por exemplo, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ é linear. Mas, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n^2$ é dita não linear.

Recorrência Linear de 1ª Ordem

Definição 1. *Uma recorrência é dita linear de 1ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele e são apresentadas no seguinte formato:*

$$x_{n+1} = f(n)x_n + h(n), \quad \text{com } f(n) \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

onde, $f(n)$ e $h(n)$ são funções de $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não homogênea.

Resolução de recorrências lineares de primeira ordem homogênea

A equação da recorrência linear de 1ª ordem homogênea é do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n$. Para resolver estas recorrências será utilizado o método dos produtos telescópicos ou soma telescópicas de forma que seja feito o cancelamento de alguns termos para que possamos escrever x_n em função apenas de n.

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, como podemos observar nos exemplos a seguir.

Exemplo 2. *Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$.*
Solução: *Temos,*

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1x_1 \\ x_3 & = & 2x_2 \\ x_4 & = & 3x_3 \\ x_5 & = & 4x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & (n-1)x_{n-1}. \end{array}$$

Daí, fazendo a multiplicação membro a membro nas igualdades,e efetuando as devidas simplificações, obtem-se:

$$x_n = (n-1)!x_1 = (n-1)!,$$

uma vez que $x_1 = 1$.

Veja que a fórmula que encontramos depende somente do número natural n, mas isso é apenas uma conjectura, para mostrar que a fórmula é sempre válida, precisamos mostrar que ela vale para todo número natural n, desta forma, utilizaremos o PIF para mostrar sua validade para todo número natural n.

Demonstração. *Seja $P(n)$ a propriedade relativa ao número natural n tal que:*

$$P(n) : x_n = (n-1)!.$$

Assim,

- $P(1) : x_1$ *=(1-1)!=0!=1. Logo,* $P(1)$ *se verifica.*
- *(Hipotese indutiva) Suponhamos que* $P(n)$ *é verdadeira para todo número natural* n*, o que equivale a* $x_n = (n-1)!$.
- *Queremos mostrar a validade de* $P(n+1)$*, ou seja, que* $x_{n+1} = n!$ *para todo* n *natural.*
  Assim, da hipótese indutiva temos:

$$x_n = (n-1)! \tag{1}$$

  Agora, multiplicando (1) *por* n *obtemos:*

$$n \cdot x_n = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Mas, observe que pela equação de recorrência $x_n = (n-1)! \Rightarrow x_{n+1} = n!$*. Isso mostra a validade para* $P(n+1)$*, sempre que* $P(n)$ *é verdadeira. Portanto, provamos pelo PIF que a fórmula para solução da recorrência é válida para todo número natural* n*, conforme queríamos.*

■

Resolução de recorrências lineares de primeira ordem não homogênea

Recordemos que uma recorrência é dita não homogênea se ela possuir um termo independente não nulo. As recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem assumem a forma:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + h(n), \tag{2}$$

onde $f(n)$ e $h(n)$ são funções não identicamente nulas.

Podemos analisar dois casos para essas recorrências, que são quando $f(n) = 1$ e quando $f(n) \neq 1$.

- Caso 1: $f(n) = 1$. teremos:

$$x_{n+1} = x_n + h(n). \tag{3}$$

  Portanto, obtemos que:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k),$$

  é a solução da recorrência (3).

- Caso 2: $f(n) \neq 1$.

Para recorrências desse tipo, ou seja, aquelas em que $f(n) \neq 1$, utilizaremos o resultado a seguir que mostra que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem da forma $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$ pode ser transformada em uma equação da forma $y_{n+1} = y_n + t(n)$ e assim, resolve-se conforme foi visto no caso 1.

Teorema 1. *Se a_n é solução não nula da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + h(n)$ em*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{f(n)a_n}.$$

Recorrência linear de 2ª ordem

Definição 2. *Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, tem o seguinte formato:*

$$x_{n+2} + f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n) = 0,$$

onde as funções f, g e h têm como domínio o conjunto dos números naturais e $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela é dita não homogênea.

Nesse trabalho apresentamos apenas o caso em que as funções $f(n)$ e $g(n)$ são constantes, ou seja, as recorrências da forma: $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = h(n)$, com $Q \neq 0$.

Resolução de recorrências lineares de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

São as recorrências apresentadas no formato: $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$.

Para resolver recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, que são apresentadas no formato apresentado anteriormente, apresentaremos uma técnica, que consiste em encontrar progressões geométricas da forma r^n que resolvem a recorrência e cujas razões r são raízes de uma equação algébrica do segundo grau chamada equação característica associada a recorrência.

O termo geral da sequência é obtido como uma combinação linear dessas progressões com coeficientes determinados graças aos valores dos termos iniciais x_1 e x_2.

Uma primeira tentativa para determinar soluções para recorrências do tipo:

$$x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0,$$

é procurar soluções do tipo $x_n = r^n$, onde r é uma constante real. Substituindo $x_n = r^n$ na recorrência $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, segue que:

$$r^{n+2} + Pr^{n+1} + Qr^n = 0 \Rightarrow r^n(r^2 + Pr + Q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^n & = 0 \\ \text{ou,} & \\ r^2 + Pr + Q & = 0 \end{cases}.$$

No primeiro caso, $r^n = 0$ implica que $r = 0$ e nos leva que $x_n = r^n = 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

No segundo caso, $r^2 + Pr + Q = 0$, o que revela que r é uma raiz da equação quadrática $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$.

Observe que a técnica a ser empregada é a mesma usada na resolução das equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes, onde as PGs são substituídas por funções exponenciais. Daí, a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associamos uma equação do segundo grau $r^2 + qr + p = 0$, chamada de equação característica.

Sendo assim, como estamos diante de uma equação do segundo grau, teremos três possibilidades para o valor do discriminante (Δ) e assim, teremos três formato que a solução poderá assumir $(\Delta > 0, \Delta < 0,\ \Delta = 0)$.

Teorema 2 $(\Delta > 0)$**.** *Se P e Q são números reais não nulos e λ_1, λ_2 raízes distintas da equação característica $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$, então todas as soluções da recorrência linear homogênea de segunda ordem $x_{n+2} + Px_{n+1} + Qx_n = 0$, são da forma:*

$$x_n = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n\,,$$

em que C_1 e C_2 são constantes.

Teorema 3 $(\Delta < 0)$**.** *Se $\lambda = u + iv$ é uma raiz complexa da equação $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, onde, A, B e C são escalares reais com $A \cdot C = 0$, então a solução geral da recorrência:*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0 \tag{4}$$

é dada por:

$$x_n = C_1 \rho^n cos(n\theta) + C_2 \rho^n sen(n\theta), \tag{5}$$

onde, ρ é o módulo de λ e θ é o argumento principal de λ.

Teorema 4 $(\Delta = 0)$**.** *Se a equação característica da recorrência $Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0$, com A, B e C reais não nulos, possui apenas uma raiz real λ, então a solução geral da recorrência é dada por:*

$$x_n = C_1 \lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n,\ \ com\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Miscelânea de problemas envolvendo recorrências de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas e de 2ª ordem homogêneas

Apresentamos uma miscelânea de problemas contextualizados ou não, que envolvem as recorrências lineares de 1ª ordem homogêneas e não homogêneas, assim como problemas envolvendo as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas no âmbito da geometria, da análise combinatória, da aritmética, das olímpiadas nacionais e internacionais de matemática, utilizando as idéias recursivas para construir as recorrências.

Problema 1 (Banco de questões, questão 5 - página 23, (OBMEP, 2009)). *Conjunto de Cantor*[1]*- Desenhe um segmento de reta de comprimento* 1*, e denote-o por* C_1*. Remova o terço central* (*sem remover os extremos*)*. Denote por* C_2 *o que sobrou. Agora remova o terço central (sem os extremos) de cada segmento de reta de* C_2*. Denote por* C_3 *o que sobrou. Podemos continuar esse processo, em cada estágio removendo o terço central de cada segmento* C_n *para formar* C_{n+1}*.*

Figura 1 – Conjunto de Cantor

a) Desenhe C_1, C_2 *e* C_3*, indicando os números que representam os extremos dos segmentos.*

b) Quais dos seguintes pontos pertecem ao conjunto de cantor? $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{3}{81}, \frac{4}{81}$.

c) Quais são os comprimentos de C_3*,* C_4 *e* C_5*? Você pode achar uma expressão para o comprimento* C_n*?*

Solução. *Para responder o item* (*a*)*, devemos levar em consideração que cada segmento é um subconjunto da reta real, com valores no intervalo* $[0, 1]$*. Usando os critérios do Conjunto de Cantor, temos a seguinte Figura:*

[1] O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo [0,1] definido pelo matemático Georg Cantor como limite de um processo interativo

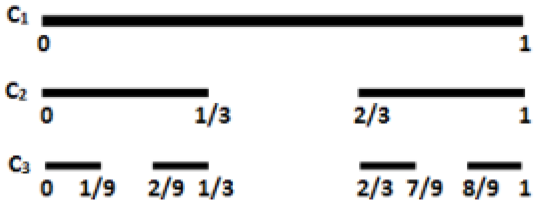


Figura 2 – Extremos do conjunto de Cantor

No item (b), deve-se observar que os extremos dos intervalos pertencem ao Conjunto de Cantor. Daí, podemos afirmar que:

- $\frac{1}{3}$ *pertence ao Conjunto de Cantor, pois é extremo de* C_2*;*
- $\frac{4}{9}$ *é removido de* C_2*, logo não pertence ao Conjunto de Cantor;*
- $\frac{3}{81}$ *é extremo de* C_4*, logo pertence ao Conjunto de Cantor;*
- $\frac{4}{81}$ *é removido de* C_4*, logo não pertence ao Conjunto de Cantor.*

Para resolver o item (c), vamos montar a relação de recorrência entre os comprimentos de cada intervalo do Conjunto de Cantor. Como $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{2}{3}$ *e* $C_2 = \frac{4}{9}$, *induzimos que* $C_4 = \frac{8}{27}$ *e* $C_5 = \frac{16}{81}$ *e daí,*

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{2}{3}C_1 \\ C_3 &= \frac{2}{3}C_2 \\ C_4 &= \frac{2}{3}C_3 \\ C_5 &= \frac{2}{3}C_4 \\ \vdots &= \vdots \\ C_n &= \frac{2}{3}C_{n-1} \end{aligned}$$

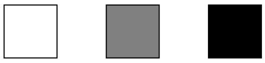
Multiplicando as igualdades anteriores membro a membro, obtemos:

$$C_2 \cdot C_3 \cdots C_{n-1} \cdot C_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot c_3 \cdots C_{n-1}.$$

Efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} C_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} C_1 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 1 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Problema 2. *(STEFFENON, 2022) Dispondo-se de uma grande quantidade de blocos quadrados de lado 1cm nas cores branco, cinza e preto. Os blocos devem ser colocados em filas de alturas 1cm e comprimento n cm, com os lados em contato.*



a) Quantas filas distintas de comprimento n podem ser feitas sem nenhuma restrição?

b) Quantas filas distintas de comprimento menor ou igual a n podem ser feitas sem nenhuma restrição?

c) Quantas filas distintas de comprimento n, podem ser feitas, contendo apenas uma quantidade par de peças pretas?

Solução.

a) Se D_n representa o número de combinações de filas de comprimento n, então $D_{n+1} = 3D_n$ com $D_1 = 3$. A solução é dada por $D_n = 3^n$ uma vez que não temos nenhuma restrição no enunciado.

Podemos também utilizar o processo de contagem. Para uma fila de comprimento n, sem restrições, há três possibilidades para o primeiro bloco, três para o segundo e assim por diante, então teremos uma quantidade de filas distintas igual à:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3 \times 3 \times 3}_{n\ fatores} = 3^n.$$

Portanto, $D_n = 3^n$ filas de comprimento n, quando não há restrições.

b) De acordo com o item a), o número de filas sistintas de comprimento n é igual á: $D_n = 3^n$. Logo o número de filas distintas de comprimento menor ou igual a n é,

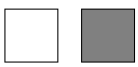
$$D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_{n-1} + D_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k.$$

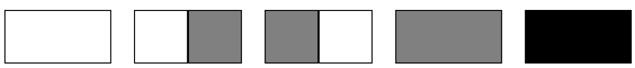
Utilizando a fórmula da soma da PG finita, podemos calcular que:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

c) Considere a_n a quantidade de maneiras de formar uma fila de comprimento n cm com uma quantidade par de peças pretas.

Note que,

$a_1 = 2:$ 

$a_2 = 5:$  .

Agora vamos analisar o caso geral a_{n+1} para $n \geq 2$. Para a_{n+1} temos três tipos de soluções: aquelas em que a última peça é branca, aquelas em que a última peça é cinza e aquelas em que a última é preta.

- *Caso 1: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é branca, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade par de pretos, que é igual a a_n.*

- *Caso 2: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é cinza, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade par de pretos, que é igual a a_n.*

- *Caso 3: O número de soluções com $n+1$ blocos em que a última é preta, significa que temos que escolher os n primeiros blocos com uma quantidade ímpar de pretos, que é igual a todas as configurações possíveis para n blocos, sem restrições, menos aquelas com quantidade par de blocos pretos: $3^n - a_n$.*

Considerando os três casos acima, concluímos que:

$$a_{n+1} = a_n + a_n + (3^n - a_n) = a_n + 3^n, \ a_1 = 2. \tag{6}$$

Vamos agora, resolver a recorrência disposta em (6). Note que:

$$\begin{array}{rcl}
a_2 & = & a_1 + 3^1 \\
a_3 & = & a_2 + 3^2 \\
a_4 & = & a_3 + 3^3 \\
a_5 & = & a_4 + 3^4 \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{n-2} & = & a_{n-3} + 3^{n-3} \\
a_{n-1} & = & a_{n-2} + 3^{n-2} \\
a_n & = & a_{n-1} + 3^{n-1}.
\end{array}$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{array}{rcl}
a_n & = & a_1 + \underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-3} + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{PG} \\
& = & 2 + \dfrac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\
& = & \dfrac{3^n + 1}{2}.
\end{array}$$

O grande geômetra alemão Jacob Steiner (1796-1863) propôs e resolveu, em 1926, o seguinte problema:

Problema 3 (Pizza de Steiner - (MORGADO; CARVALHO, 2022))**.** *Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?*

Solução. *Seja r_n o número máximo de regiões em que n retas dividem um plano. Imagine a situação em que há $n-1$ retas dividindo o plano em r_n regiões. Ao adicionarmos uma nova reta a essa configuração (nesse caso o plano está dividido em r_{n-1} regiões), essa nova reta intersecta cada uma das $n-1$ retas já existentes em exatamente um ponto, gerando $n-1$ pontos de interseção. A inclusão dessa nova reta incrementa o número de regiões em n, ou seja, $r_n = r_{n-1} + n$. Dessa forma,*

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= r_1 + 2 \\ r_3 &= r_2 + 3 \\ r_4 &= r_3 + 4 \\ \vdots &= \vdots \\ r_{n-1} &= r_{n-2} + (n-1) \\ r_n &= r_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e fazendo as devidas simplificações, segue que:

$$\begin{aligned} r_n &= 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + \frac{(1+n)}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Problema 4 (O queijo de Steiner- (MORGADO; CARVALHO, 2022))**.** *Para fazer a sua pizza, Steiner teve que cortar, primeiro, o queijo. Imaginando que o espaço é um enorme queijo, qual é o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por n planos?*

Solução. *Nesse caso tridimensional o problema é um pouco mais delicado, mas segue a mesma linha de raciocínio do problema da pizza de Steiner.*

Sendo assim, suponhamos que p_n seja o número máximo de regiões em que o espaço tridimensional pode ser dividido por n planos. Vamos mostrar que:

$$p_{n+1} = p_n + r_n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

em que $r_n = 1 + \dfrac{(1+n)}{2} \cdot n$ é a solução do problema da pizza de Steiner.

De fato, suponha que já existem n *planos dividindo o espaço tridimensional em* p_n *regiões. Agora suponha que adicionemos um novo plano, isto é, um* $n+1$*-ésimo plano sem que intersecte uma reta que seja comum a dois planos já existentes ou que seja paralelo a qualquer um dos planos já existentes.*

Dessa forma, cada um dos n *planos já existentes irá intersectar o novo plano em* n *retas que dividem o novo plano em* r_n *das* p_n *regiões já existentes (dividindo cada uma delas em duas regiões). Isso da origem à* r_n *novas regiões do espaço tridimensional, fazendo que haja* $p_n + r_n$ *regiões nesse momento, ou seja,* $p_{n+1} = p_n + r_n$ *para todo* n *natural.*

Sendo assim, temos que:

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & 2 \\ p_2 & = & p_1 + r_1 \\ p_3 & = & p_2 + r_2 \\ p_4 & = & p_3 + r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n-2} & = & p_{n-3} + r_{n-3} \\ p_{n-1} & = & p_{n-2} + r_{n-2} \\ p_n & = & p_{n-1} + r_{n-1}. \end{array}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} p_n & = & 2 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} \\ & = & 2 + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\ & = & 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(1+k)}{2} \cdot k\right) \\ & = & 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1+k)}{2} k \\ & = & 2 + (n-1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ & = & 2 + n - 1 + \frac{1}{2} \frac{[1 + (n-1)]}{2} (n-1) + \frac{1}{2} \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} \\ & = & (n+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ & = & \frac{12(n+1) + 3n(n-1) + (n-1)n(2n-1)}{12} \\ & = & \frac{n^3 + 5n + 6}{6}. \end{array}$$

Em 1826, *Jacob Steiner* analisou esse problema até o caso tridimensional que acabamos de mostrar. Em 1840. *Ludwif Schlafli* imaginou um queijo d-dimensional e provou que nesse caso o número máximo de regiões em que o espaço d-dimensional ficaria dividido por n hiperplanos de dimensão $d-1$ é dado por:

$$f_d(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d}.$$

Problema 5 (Adaptado - (STEFFENON, 2022))**.** *Jucimeri deposita inicialmente* $R\$1.000,00$ *em uma poupança que rende* 6% *ao ano, com juros computados mensalmente, e além disso, ela deposita no primeiro dia de cada mês, a partir do mês seguinte ao depósito inicial,* $R\$200,00$*.*

a) Para cada inteiro não negativo n, seja A_n o montante acumulado na conta após n meses. Para cada inteiro positivo n, determine uma relação entre A_n e A_{n-1}.

b) Determine uma fórmula explícita para A_n, em função de n.

c) Quantos anos serão necessários para que o saldo presente na conta ultrapasse $R\$10.000,00$*?*

Solução.

a) Vamos inicialmente calcular a taxa de juros mensal. Sabe-se que:

$$T_m = (1+T_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

onde, T_a é a taxa anual e T_m é a taxa mensal. Assim,

$$T_m = (1+0,06)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,0049.$$

Utilizando o raciocínio recorrente, observamos que:

$$\begin{array}{rcl}
A_1 & = & 1000 \\
A_2 & = & A_1 \cdot 1,0049 + 200 \\
A_3 & = & A_2 \cdot 1,0049 + 200 \\
A_4 & = & A_3 \cdot 1,0049 + 200 \\
A_5 & = & A_4 \cdot 1,0049 + 200 \\
A_6 & = & A_5 \cdot 1,0049 + 200 \\
A_7 & = & A_6 \cdot 1,0049 + 200 \\
\vdots & \cdots & \vdots \; + \; \vdots \\
A_{n-2} & = & A_{n-3} \cdot 1,0049 + 200 \\
A_{n-1} & = & A_{n-2} \cdot 1,0049 + 200 \\
A_n & = & A_{n-1} \cdot 1,0049 + 200.
\end{array}$$

Desta forma, encontramos a relação entre A_n e A_{n-1} dada por:

$$A_n = A_{n-1} \cdot 1,0049 + 200.$$

b) Tem-se que:

$$\begin{array}{rcl}
1,0049^{n-1}A_1 & = & 1000 \cdot 1,0049^{n-1} \\
1,0049^{n-2} \cdot A_2 & = & A_1 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \cdot 1,0049^{n-2} \\
1,0049^{n-3} \cdot A_3 & = & A_2 \cdot 1,0049^{n-2} + 200 \cdot 1,0049^{n-3} \\
1,0049^{n-4} \cdot A_4 & = & A_3 \cdot 1,0049^{n-3} + 200 \cdot 1,0049^{n-4} \\
1,0049^{n-5} \cdot A_5 & = & A_4 \cdot 1,0049^{n-4} + 200 \cdot 1,0049^{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
1,0049^{2} \cdot A_{n-2} & = & A_{n-3} \cdot 1,0049^{3} + 200 \cdot 1,0049^{2} \\
1,0049 \cdot A_{n-1} & = & A_{n-2} \cdot 1,0049^{2} + 200 \cdot 1,0049^{1} \\
A_n & = & A_{n-1} \cdot 1,0049^{1} + 200 \cdot 1,0049^{0}.
\end{array}$$

Adicionando membro a membro e fazendo as simplificações necessárias obtemos:

$$A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200\left(\underbrace{1,0049^0 + 1,0049^1 + \cdots + 1,0049^{n-3} + 1,0049^{n-2}}_{P.G}\right).$$

Perceba que o termo destacado é a soma de uma Progressão Geométrica finita cujo primeiro termo é 1, a razão é igual a $(1,0049)$ e contém $n-1$ termos. Usando a fórmula para a soma de uma PG finita de $n-$termos, dada por:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1},$$

teremos que,

$$S_{n-1} = \frac{1\left[(1,0049)^{n-1} - 1\right]}{1,0049 - 1} = \frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049}.$$

Portanto, segue que:

$$A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200\left(\frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049}\right).$$

c) Vamos utilizar $A_n = 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200\left(\frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049}\right)$ para calcular o tempo necessário para que o saldo presente ultrapasse $R\$10.000,00$. Sendo assim, teremos:

$$\begin{array}{rrcl}
 & 0,0049 \cdot 10000 & = & 0,0049 \cdot 1000 \cdot 1,0049^{n-1} + 200 \cdot 1,0049^{n-1} - 200 \\
\Rightarrow & 249 & = & 204,9 \cdot 1,0049^{n-1} \\
\Rightarrow & 1,0049^{n-1} & = & 1,22 \\
\Rightarrow & n & = & \dfrac{\log 1,22}{\log 1,0049} + 1 \\
\Rightarrow & n & \approx & 42 \textit{ meses.}
\end{array}$$

Logo o tempo necessário para o valor ultrapassar $R\$10000,00$ *será* 42 *meses ou aproximadamente* 3 *anos e meio.*

Problema 6 (Adaptado - Castro et al. (2016))**.** *Quantas são as sequências de* n *termos, todos pertencentes a* $\{0,1,2\}$ *que possuem um número ímpar de termos iguais a* 0*?*

Solução. *Seja* x_n *o número de sequências de* n *termos, todos pertencentes ao conjunto* $\{0,1,2\}$ *que possuem um número ímpar de termos iguais a zero.*

Consideremos uma sequência com $n+2$ *termos, teremos dois casos a serem analisados: as sequências que não começam com o termo zero e àquelas que começam por zero.*

- *Se o zero não está na primeira posição, significa que as sequências começam por 1 ou por 2 e assim, nos* $n+1$ *termos restantes, devemos ter uma quantidade ímpar de termos iguais a zero, ou seja* x_{n+1}*. Então, se o primeiro termo não for zero, teremos uma quantidade de sequência igual a* $2x_{n+1}$ *que possuem uma quantidade ímpar de termos iguais a zero.*

- *Se o zero está na primeira posição, devemos ter nos* $n+1$ *termos restantes, uma quantidade par de zeros. Ora, as sequências de* $n+1$ *termos pertencentes à* $\{0,1,2\}$ *possuem um total de* 3^{n+1} *sequências, porém, devemos retirar a quantidade de sequências com número ímpar de termos, isto é,* x_{n+1}*, sendo assim, teremos* $3^{n+1}-x_{n+1}$ *sequências que começam por zero e possuem uma quantidade impar de termos iguais a zero.*

Diante disso, como deve acontecer as situações acima, concluímos que a quantidade de sequências de $n+2$ *termos pertencentes ao conjunto* $\{0,1,2\}$ *é dado por:*

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2x_{n+1} + (3^{n+1} - x_{n+1}) \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + 3^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a quantidade de sequências com n *termos pertencentes ao conjunto* $\{0,1,2\}$ *é dada por:*

$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 3^0 \\ x_2 &= x_1 + 3^1 \\ x_3 &= x_2 + 3^2 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos,

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1}}_{PG} \\ &= x_0 + \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= x_0 + \frac{3^n - 1}{2} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Observe que consideremos $x_0 = 0$, uma vez que nessa configuração não se tem sequência.

Problema 7 (Pinheiro e Lazzarin (2015) Questão 9 - OBMEP-2012- nível 2)**.** *Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforos, seguindo o padrão indicado na Figura 3. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?*

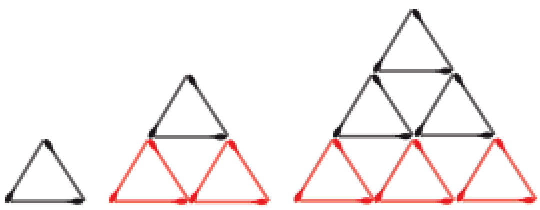


Figura 3 – Sequência de triângulos

Solução.
Na Figura 3, consideremos $a_1 = 3$ o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo. Desta forma, $a_2 = a_1 + 6$, $a_3 = a_2 + 9$, e assim sucessivamente. Assim, podemos formar a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 \\ a_4 &= a_2 + 3 \cdot 4 \\ \vdots & \;\vdots\; \vdots \;+\; \vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 3 \cdot (n-1) \\ a_n &= a_{n-1} + 3 \cdot n. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= 3(1+2+3+\cdots+(n-1)+n) \\ &= 3\frac{(1+n)}{2}\cdot n. \end{aligned}$$

Como $a_n = 135$ *temos que:*

$$\frac{3n(n+1)}{2} = 135 \quad \Rightarrow \quad 3n^2+3n-270=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n=-10 \\ n=9 \end{cases},$$

desconsiderando o valor negativo, pois não faz sentido termos quantidade de palitos negativa, obtemos que o quantidade de palitos necessários para formar o lado desse triângulo é igual a 9*.*

Problema 8. *(MORGADO; CARVALHO, 2022) De quantas formas distintas n pessoas que estão sentadas em n cadeiras numa única fileira de um teatro podem regressar para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que ocupava antes do intervalo.*

Solução.

Seja x_n *o número de maneiras distintas de n pessoas que estão sentadas em n cadeiras numa fileira de um teatro regressarem para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que estava antes.*

Note que $x_1 = 1$*, pois havendo apenas uma pessoa e uma cadeira, a pessoa necessariamente regressaria para a sua cadeira de origem, já que a cadeira é, neste caso, única.*

Além disso, $x_2 = 2$*, visto que no caso de duas pessoas e duas cadeiras, há* 2 *situações possíveis: a primeira situação é cada uma das pessoas regressem ao seu lugar de origem; a outra é que essas duas pessoas troquem de lugar entre si.*

Consideremos então a situação em que temos $n+2$ *pessoas e* $n+2$ *cadeiras. Podemos dividir as possíveis configurações em dois tipos, a saber:*

- *As configurações em que a pessoa* 1 *regressa para a sua cadeira de origem. Nesse caso, ainda teremos que arrumar as* $n+1$ *pessoas restantes satisfazendo as condições impostas pelo enunciado, o que pode ser feito de* x_{n+1} *modos distintos.*

- *As configurações em que a pessoa* 1 *não regressa ao seu lugar de origem. Nesse caso, a pessoa* 1 *necessariamente terá que sentar na cadeira que era originalmente* *da pessoa 2 (pois essa é a única cadeira vizinha da cadeira que era originalmente ocupada pela pessoa 1).*

Já a pessoa 2, também necessariamente terá que ocupar a cadeira que era ocupada pela pessoa 1, pois nenhuma das demais pessoas tem a cadeira de origem ocupada pela pessoa 1 como cadeira vizinha.

Diante do que acabamos de expor, segue que as pessoas 1 e 2 trocaram de lugar, restando ainda n cadeiras e n pessoas, que respeitando as condições impostas pelo enunciado, pode ser feito de x_n maneiras distintas.

Logo, o número total de configurações distintas com $n+2$ pessoas que respeitam as condições do enunciado é igual a $x_{n+1} + x_n$.

Portanto,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \quad com \quad n \geq 1. \tag{7}$$

Sendo assim, vamos resolver a recorrência homogênea de segunda ordem obtida em (7).

A equação característica associada a referida recorrência é dada por $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como temos duas raízes distintas para a equação característica, a solução geral da homogênea é dada por:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar os valores das constantes C_1 e C_2, vamos utilizar as condições: $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Aplicando essas condições, teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontraremos:

$$C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad e \quad C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Desta forma, teremos que a solução geral da recorrência homogênea satisfazendo as condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ será:

$$\begin{aligned} x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Se quiser relacionar com a sequência de Fibonacci, segue que $x_n = f_{n+1}$, ou seja, o n-ésimo número de Fibonacci.

$$x_n = f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Problema 9. *(PINTO, 2017) Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?*

Solução.

No ano $(n+2)$ são geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano $(n+1)$ e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores.

Logo, se x_n denota o número de sementes geradas no ano n, temos:

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44\left(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0\right), \tag{8}$$

com $x_1 = 1$ e $x_2 = 21 \cdot 21 + 44 = 485$.

Para transformar essa recorrência em uma recorrência linear de segunda ordem, escrevemos a expressão para x_{n+1} dada por:

$$x_{n+1} = 21x_n + 44\left(x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_1 + x_0\right). \tag{9}$$

Agora, fazendo (8) − (9) e efetuando as devidas simplificações, obtemos:

$$x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0.$$

Veja que podemos associar à essa recorrência homogênea a equação característica dada por:

$$r^2 - 22r - 23 = 0,$$

cujas raízes reais são: $r_1 = 23$ e $r_2 = -1$.

Desta forma, a solução geral dessa recorrência é dada por:

$$x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 \cdot 23^n + C_2(-1)^n.$$

Aplicando as condições iniciais, $x_1 = 1$ e $x_2 = 485$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 23C_1 - C_2 & = & 1 \\ 529C_1 + C_2 & = & 485 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema anterior encontraremos os valores $C_1 = \dfrac{11}{12}$ *e* $C_2 = \dfrac{1}{12}$. *Portanto, a solução geral é dada por:*

$$x_n = \frac{11}{12} \cdot 23^n + \frac{1}{12}(-1)^n.$$

Problema 10. *(PINHEIRO et al., 2013) De quantas maneiras diferentes podemos organizar* n *dominó's* 2×1 *em uma caixa* $2 \times n$ *sem contar as possíveis permutações entre as peças?*

Solução. *Vamos analisar alguns casos para compreender melhor o que está acontecendo. Para isso, vamos representar pela letra* V *e* H*, respectivamente, as posições vertical e horizontal que o dominó pode ser posicionado na caixa.*

- *Para* $n = 1$ *teremos UMA única possibilidade que é colocar na posição* $\{V\}$.
- *Para* $n = 2$ *teremos DUAS possibilidades que serão:* $\{VV\}$ *ou* $\{H\}$.
- *Para* $n = 3$ *teremos TRÊS possibilidades:* $\{VVV\}$ *ou* $\{VH\}$ *ou* $\{HV\}$.
- *Para* $n = 4$ *teremos CINCO possibilidades:* $\{VVVV\}$ *ou* $\{VVH\}$ *ou* $\{VHV\}$ *ou* $\{HH\}$ *ou* $\{HVV\}$.

Analisando esses casos particulares, e sendo x_n *o número de maneiras diferentes que podemos organizar* n *dominó's* 2×1 *numa caixa* $2 \times n$*, percebemos que:*

$$x_3 = x_2 + x_1 \quad e \quad x_4 = x_3 + x_2,$$

o que intuitivamente nos leva a concluir que:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Vamos justificar que de fato a relação de recorrência dada anteriormente é válida. Para isso, como temos uma caixa de tamanho $2 \times n$*, temos duas formas de começarmos organizar os dominó's nessa caixa. Ou colocamos um dominó na vertical* $\{V\}$ *ou dois dominó's na horizontal* $\{H\}$*. Então vamos analisar esses dois casos:*

i) Começar com um dominó na vertical $\{V\}$.

Se começarmos com um dominó na vertical, sobrarão uma caixa de tamanho $2 \times (n-1)$*, pois já se utilizou um espaço* 2×1 *da caixa, ao ser posicionado o primeiro dominó.*

Portanto, teremos x_{n-1} *maneiras de organizar os dominó's na caixa começando com um dominó na posição vertical.*

ii) Começar com dois dominó's na horizontal $\{H\}$.

Se começarmos com dois dominó's na horizontal, sobrarão uma caixa de tamanho $2 \times (n-2)$, pois já se utilizou um espaço 2×2 da caixa, ao ser posicionado o primeiro dominó.

Portanto, teremos x_{n-2} maneiras de organizar os dominó's na caixa começando com dois dominó's na posição horizontal.

Como devemos ter qualquer um dos dois casos acima, segue que a relação de recorrência será dada por:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

A equação característica associada a recorrência homogênea acima é dada por:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são dadas por: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Desta forma, a solução geral da recorrência é dada por:

$$x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinarmos os valores das constantes C_1 e C_2 utilizaremos as condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, formando assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 & = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ C_2 & = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Problema 11. *Num certo local a população de uma determinada espécie é contada no fim de cada ano, desde há 10 anos. Designando por p_{n+1} o número de elementos da espécie quando da $(n+1)$-ésima contagem, sabe-se que $p_0 = 200$ (isto é, há 10 anos havia 200 elementos da espécie em questão) e $p_1 = 400$, e verificou-se que no fim de cada ano, o número de elementos da espécie em questão era igual ao quádruplo do crescimento que essa população teve no ano anterior (ao que acabou de findar). A manter-se esta relação no futuro, qual a população da espécie daqui a 5 anos?*

Solução. *Pelos dados retirados do enunciado, teremos as condições iniciais* $p_0 = 200$, $p_1 = 400$ *e a relação de recorrência dada por:*

$$p_{n+2} = 4\left(p_{n+1} - p_n\right).$$

A equação característica associada a recorrência anterior é $r^2 - 4r + 40 = 0$, *cujas raízes são:* $r_1 = r_2 = 2$.

Portanto, a solução geral é dada por:

$$p_n = C_1 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Aplicando as condições $p_0 = 200$ *e* $p_1 = 400$ *na solução geral, teremos o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} C_1 & = & 200 \\ 2C_1 + 2C_2 & = & 400 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = 200$ *e* $C_2 = 0$.

Sendo assim, a solução geral do problema é dada por:

$$p_n = 200 \cdot 2^n,$$

e consequentemente a população dessa localidade daqui a 5 anos é dada por:

$$\begin{aligned} p_{20} &= 200 \cdot 2^5 \\ &= 25 \cdot 8 \cdot 2^5 \\ &= 25 \cdot 2^8 \\ &= (5 \cdot 2)^2 \cdot 2^6 \\ &= 2^6 \cdot 100 \\ &= 6400. \end{aligned}$$

Problema 12 (Olimpíada Iberoamericana- 1992)**.** *Sejam* a_n *e* b_n *duas sequências de inteiros tais que* $a_0 = 0$, $b_0 = 8$ *e as relações* $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ *e* $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$. *Prove que* $a_n^2 + b_n^2$ *é um quadrado perfeito para* $n > 0$ *e encontre pelo menos dois valores possíveis para* (a_{1992}, b_{1992}).

Solução. *Note que:*

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2. \tag{10}$$

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2. \tag{11}$$

Fazendo $(10)-(11)$ *obtemos:*

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-a_{n}\right)-\left(a_{n}-a_{n-1}\right).$$

Defina $r_n=a_n-a_{n-1}$*, veja que* r_n *é chamada de razão da sequência* a_n*. Assim teremos:*

$$r_{n+2}=2r_{n+1}-r_n.$$

Podemos associar a recorrência anterior a equação característica $q^2-2q+1=0$*, cujas raízes são* $q_1=q_2=1$*. Assim, a solução geral é dada por:*

$$r_n=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot n\cdot 1^n=C_1+C_2n.$$

Note que r_n *é uma PA de razão* C_2*.*

Ora, como definimos $r_n=a_n-a_{n-1}$ *temos que* $r_1=a_1-a_0=a_1-0=a_1$*. e* $r_2=a_2-a_1=(2a_1-a_0+2)-a_1=a_1-a_0+2=a_1+2$*.*

Assim, $r_2-r_1=2$*, desta forma, temos que* $C_2=2$*. Mas* $r_1=a_1=C_1+2\cdot 1$ *implica que* $C_1=a_1-2$*.*

Portanto,

$$\begin{aligned}
r_n &= C_1+C_2n\\
r_n &= (a_1-2)+2n\\
r_n &= a_1+(n-1)\cdot 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que:

$$\begin{aligned}
a_n &= (a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_1-a_0)\\
&= r_n+r_{n-1}+r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r2+r_1\\
&= \frac{(r_1+r_n)}{2}\cdot n\\
&= \left[a_1+a_1+(n-1)\cdot 2\right]\frac{n}{2}\\
&= 2(a_1+n-1)\frac{n}{2}\\
&= n^2+n(a_1-1)\\
&= n^2+n\cdot a,
\end{aligned}$$

onde $a=a_1-1$*.*

Por outro lado, temos que:

$$b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n.$$

Ou ainda,

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n = b,$$

onde b é uma razão constante. Isso significa que a sequência é uma PA. Sendo assim, teremos: $b_n = b_0 + bn = 8 + bn$.

Sendo assim, devemos mostrar que $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito, logo:

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= \left(n^2 + an\right)^2 + (8 + bn)^2 \\ &= n^4 + 2an^3 + a^2n^2 + 64 + 16bn + b^2n^2. \end{aligned}$$

Como estamos procurando um quadrado perfeito, temos que:

$$\left(n^2 + an + 8\right)^2 = n^4 + 2an^3 + \left(16 + a^2\right) n^2 + 16an + 64.$$

Portanto, $a_n^2 + b_n^2$ é um quadrado perfeito se, e somente se:

$$n^4 + 2an^3 + a^2n^2 + 64 + 16bn + b^2n^2 = n^4 + 2an^3 + \left(16 + a^2\right) n^2 + 16an + 64.$$

Fazendo a comparação de polinômios, devemos ter:

$$\begin{cases} 16 + a^2 = a^2 + b^2 \\ 16a = 16b \end{cases},$$

o que resulta em $a = b$ e $b = \pm 4$. Agora vamos analisar os dois casos assumidos por b.

- Se $a = b$ e $b = 4$ teremos que: $a_n = n^2 + 4n$ e $b_n = 8 + 4n$ e portanto:

$$\begin{aligned} (a_{1992}, b_{1992}) &= (1992^2 + 4 \cdot 1992, 8 + 4 \cdot 1992) \\ (a_{1992}, b_{1992}) &= (3976032, 7976). \end{aligned}$$

- Se $a = b$ e $b = -4$ teremos que: $a_n = n^2 - 4n$ e $b_n = 8 - 4n$ e portanto:

$$\begin{aligned} (a_{1992}, b_{1992}) &= (1992^2 - 4 \cdot 1992, 8 - 4 \cdot 1992) \\ (a_{1992}, b_{1992}) &= (3960096, -7960). \end{aligned}$$

Considerações finais

Esperamos que este trabalho venha a contribuir para uma melhor divulgação e conhecimento a respeito das recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem e que além disso, desperte o interesse dos professores, principalmente aqueles que lecionam na Educação Básica, a buscarem por seu estudo, bem como estimular o uso do mesmo em demonstrações no ensino.

Sendo assim, depreendemos que a resolução de problemas a partir de um pensamento recursivo vem de certa forma contribuir para o pensar matemático no sentido de desenvolver habilidades e incitar a criatividade para a resolução de diversos problemas no Ensino Básico.

Em se tratando das aplicações do estudo de recorrências, apresentamos vários exemplos com a finalidade de mostrar que em diferentes contextos se faz uso da recorrência linear, seja de 1ª ou de 2ª ordem homogênea ou não homogênea. Acreditamos que a devida interpretação de um fenômeno real, que se observa através de um padrão matemático, desperta o interesse pela matemática.

A abordagem do estudo das recorrências lineares no ensino básico é de provocar e incentivar que os alunos sejam cada vez mais intensamente desafiados à situações problemas didáticas motivadoras. Fazendo com que a nossa sala de aula se transforme ainda mais em um laboratório para que os nossos alunos se tornem ainda mais protagonistas em elaboração de ideias e resolução de problemas, fortalecendo a experiência e o ambiente em fazer matemática a partir das situações do cotidiano.

Ao resolvermos problemas que constam em livros didáticos ou em olimpíadas de matemática, estávamos mostrando que os padrões matemáticos já estão inseridos em questões de nível médio, faltando apenas que o professor oportunize a seus alunos o conhecimento recursivo na modelagem da solução. Daí a importância de se iniciar o estudo de recorrências ainda na Educação Básica.

Na miscelânea de problemas, apresentamos inúmeras as situações em que problemas que envolvem contagem podem ser facilmente interpretados e solucionados utilizando-se de um raciocínio recursivo. As relações de recorrências são, dessa forma, mais uma estratégia a somar com as ferramentas típicas da Análise Combinatória para resolução de problemas dessa natureza.

O que propromos é que as relações de recorrência sejam inseridas no contexto da Educação Básica desde os primeiros anos de forma progressiva para que o aluno possa de forma fácil e criativa resolver problemas que à primeira vista parecem difíceis. E, assim, possam, de fato, evoluir em seu potencial de aprendizagem.

Referências

CASTRO, F. J. d. et al. Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações. Universidade Federal da Paraíba, 2016. Citado na página 17.

DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. [S.l.]: Porto: Porto Editora, 2002. Citado na página 2.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta: coleção PROFMAT*. [S.l.]: SBM, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 19.

OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Somando novos talentos para o Brasil*. 2009. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/banco.htm>. Citado na página 9.

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. Recorrência matemática na obmep. *Ciência e Natura*, v. 37, p. 36–46, 2015. Citado na página 18.

PINHEIRO, T. A. et al. Soluções não clássicas para problemas da obmep. Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Citado na página 22.

PINTO, F. L. O uso das recorrências e do raciocínio recursivo no ensino médio. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017. Citado na página 21.

STEFFENON, R. R. Belos problemas de matemática discreta. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.