UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA.
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA MODALIDADE A DISTÂNCIA

CÁLCULO

Prof . Dr.Fábio José da Costa Alves
Prof . Dr. Pedro Franco de Sá

BELÉM-PA-2008

Prof. Dr[a] Marília Brasil Xavier

REITORA

Prof[a]. M.Sc. Elvira Maria Ferreira Soares

VICE-REITORA

Prof. M.Sc. Neivaldo Oliveira Silva

PRÓ-REITORA DE GRADUAÇÃO

Prof[a]. M.Sc. Maria José de Souza Cravo

DIRETORA DO CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

Prof. M.Sc. Gilberto Emanuel Reis Vogado

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA.

Prof[a]. M.Sc. Aldeniza de Oliveira Ximenes

COORDENADOR DO NECAD – NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA.

Prof. M.Sc. Rubens Vilhena Fonseca

COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA MODALIDADE A DISTÂNCIA

Apresentação

Cara aluno, iniciaremos nosso estudo sobre Cálculo diferencial e Integral ou simplesmente Cálculo, também chamado de cálculo infinitesimal. É importante que você saiba que o cálculo é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, inicialmente desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Leibniz.

O cálculo alicerça vários conceitos e definições na matemática, química, física clássica e moderna e etc, e se dedica ao estudo de taxas de variação e a determinação de áreas e volumes. O cálculo tem inicialmente 3 "operações-base", que são: o limites, a derivadas e a integral, sendo que o limite alicerça todos os conceitos do cálculo (derivada, continuidade, integral, convergência, ...).

Para você alcançar uma boa aprendizagem, leia a parte teórica de cada aula mais de uma vez, refazendo, com atenção, os exemplos ilustrativos e quando perceber ter domínio sobre o assunto abordado na aula, faça as questões que existem no final de cada aula e envie a sua resposta para o tutor da disciplina.

Desejamos a você um bom estudo!

SUMÁRIO

AULA 1: LIMITES

Objetivos:

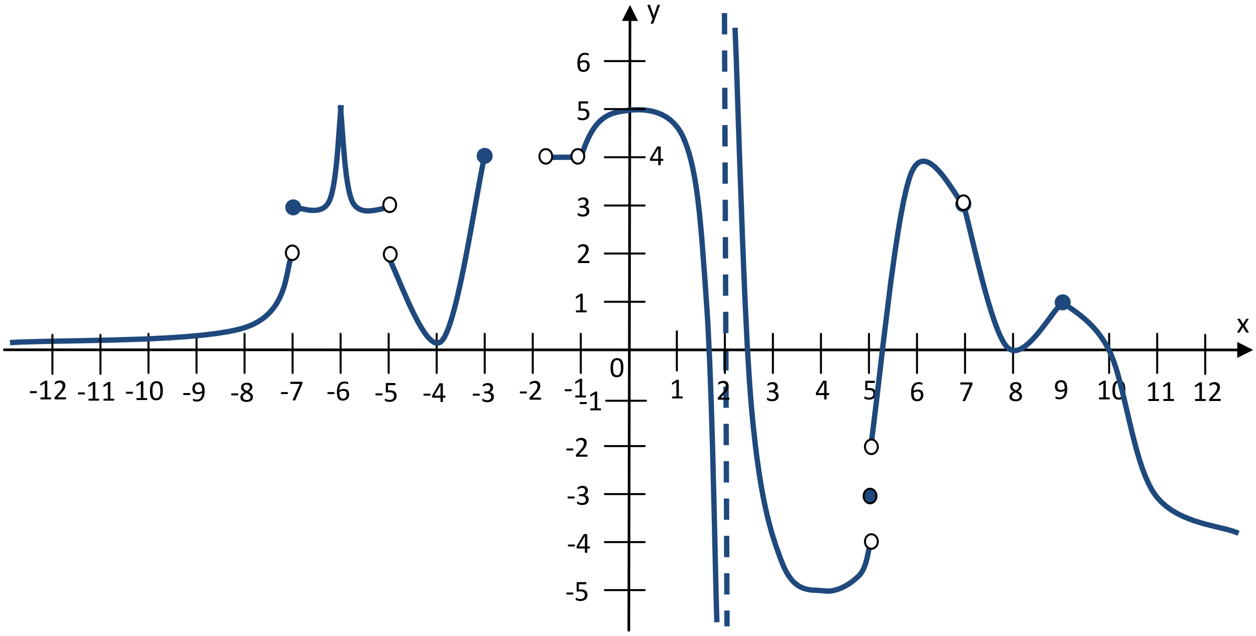
- Calcular limites de função por meio de gráfico;
- Conceituar função continua;
- Estudar as propriedades operatórias dos limites de funções contínuas;
- Calcular limites de funções contínuas

Agora para iniciarmos nosso estudo do conceito de limite, realize a atividade proposta a seguir, respondendo as questões e no fim de cada seqüência de questões confira sua resposta, no final do texto da aula.

ATIVIDADE

O gráfico abaixo representa uma função y = f(x)

Observe o gráfico e responda as questões a seguir.



01. Qual o valor da função quando x é igual a 8 ?
02. Qual o valor da função quando x é igual a 5?
03. Qual o valor da função quando x é igual a 9?
04. Qual o valor da função quando x é igual a -7?
05. Qual o valor da função quando x é igual a -5?
06. Qual o valor da função quando x é igual a -1?
07. Qual o valor da função quando x é igual a 7?
08. Qual o valor da função quando x é igual a -3?
09. Qual o valor da função quando x é igual a -2?
10. Qual o valor da função quando x é igual a -6?
11. Qual o valor da função quando x é igual a 2?
12. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 8 pela direita?
13. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 8 pela esquerda?

14. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 9 pela direita?
15. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 9 pela esquerda?
16. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela direita?
17. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela esquerda?
18. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de -3 pela direita?
19. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de -3 pela esquerda?
20. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 5 pela direita?
21. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 5 pela esquerda?

Em Matemática a pergunta: Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela esquerda? É equivalente a pergunta: Para que valor a função tende quando x tende a 7 pela esquerda?

22. Para que valor a função tende quando x tende a 7 pela direita?
23. Para que valor a função tende quando x tende a 8 pela direita?
24. Para que valor a função tende quando x tende a 5 pela esquerda?
25. Para que valor a função tende quando x tende a 5 pela direita?
26. Para que valor a função tende quando x tende a -3 pela direita?
27. Para que valor a função tende quando x tende a -3 pela esquerda?
28. Para que valor a função tende quando x tende a -6 pela esquerda?
29. Para que valor a função tende quando x tende a 9 pela direita?
30. Para que valor a função tende quando x tende a 9 pela esquerda?

Em Matemática a pergunta: Para que valor a função tende quando x tende a -6 pela esquerda? Equivale a pergunta: Qual é o limite da função quando x tende a -6 pela esquerda?

31. Qual é o limite da função quando x tende a -3 pela esquerda?
32. Qual é o limite da função quando x tende a -3 pela direita?
33. Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela esquerda?
34. Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela direita?
35. Qual é o limite da função quando x tende a 7 pela esquerda?
36. Qual é o limite da função quando x tende a 7 pela direita?
37. Qual é o limite da função quando x tende a -5 pela esquerda?
38. Qual é o limite da função quando x tende a -5 pela direita?
39. Qual é o limite da função quando x tende a 9 pela esquerda?
40. Qual é o limite da função quando x tende a 9 pela direita?
41. Qual é o limite da função quando x tende a 5 pela direita?
42. Qual é o limite da função quando x tende a 5 pela esquerda?

Quando os limites laterais de uma função num ponto são iguais dizemos que o limite existe no ponto e o valor é o dos limites laterais.

43. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 9?
44. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 7?
45. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 5?
46. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 8?
47. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -3?
48. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -2?
49. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 2?
50. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -1?
51. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -6?
52. Qual é o limite de f(x) quando x tende a zero?

Em a pergunta: qual é o limite da função quando x tende a 6 pela esquerda? É representado por $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$. Qual é o limite da função quando x tende a 6 pela direita? É $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$

Calcule:

53. $\lim\limits_{x\to 9^+} f(x)$
54. $\lim\limits_{x\to 9^-} f(x)$
55. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$
56. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$
57. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$
58. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$
59. $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$
60. $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)$
61. $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$
62. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$
63. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$
64. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
65. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$
66. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$
67. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
68. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
69. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
70. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Quando limite de uma função num ponto existe e é igual a imagem da função no ponto dizemos que a função é continua no ponto.

71. A função f(x) é continua no ponto $x = 7$? Por que?
72. A função f(x) é continua no ponto $x = 9$? Por que?
73. A função f(x) é continua no ponto $x = 5$? Por que?
74. A função f(x) é continua no ponto $x = -1$? Por que?
75. A função f(x) é continua no ponto $x = -3$? Por que?
76. A função f(x) é continua no ponto $x = -5$? Por que?
77. A função f(x) é continua no ponto $x = -6$? Por que?

78. A função f(x) é continua no ponto $x = -7$? Por que?
79. A função f(x) é continua no ponto $x = 0$? Por que?
80. A função f(x) é continua no ponto $x = 2$? Por que?

Podemos operar com o limite da mesma forma que manipulamos as expressões algébricas, por isto apresentaremos agora algumas propriedades de operações com limite.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DE LIMITES:

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ continuas tais que $\lim_{x\to x_o} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_o} g(x) = L_2$ e k uma constante então valem as seguintes propriedades operatórias:

1) Limite de uma constante:
O limite de uma constante é a própria constante.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} k = k}$$

Exemplos:
a) $\lim_{x\to 2} 5 = 5$ b) $\lim_{x\to 0} 7 = 7$

2) Limite da soma:
O limite da soma é a soma dos limites.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Exemplos:
a) $\lim_{x\to 2} (x^2 + 3x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x = 2^2 + 3\times 2 = 10$

b) $\lim_{x\to 1} (2x^3 + 3x^2 + 5x + 3) = \lim_{x\to 1} 2x^3 + \lim_{x\to 1} 3x^2 + \lim_{x\to 1} 5x + \lim_{x\to 1} 3$

$\lim_{x\to 1} (2x^3 + 3x^2 + 5x + 3) = 2\times 1^3 + 3\times 1^2 + 5\times 1 + 3 = 13$

3) Limite da diferença:
O limite da diferença é a diferença dos limites.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Exemplos:
a) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 3x = 2^2 - 3\times 2 = -2$

b) $\lim_{x\to 1} (2x^3 - 3x^2 - 5x - 3) = \lim_{x\to 1} 2x^3 - \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 5x - \lim_{x\to 1} 3$

$\lim_{x\to 1} (2x^3 - 3x^2 - 5x - 3) = 2\times 1^3 - 3\times 1^2 - 5\times 1 - 3 = -9$

4) Limite do produto:

O limite do produto é o produto dos limites.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\times \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Exemplos: $\lim_{x\to 2}(x^2\times 3x) = \lim_{x\to 2} x^2 \times \lim_{x\to 2} 3x = 2^2\times(3\times 2) = 4\times 6 = 24$

5) Limite do quociente:

O limite do quociente é o quociente dos limites.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \quad \text{com } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0}$$

Exemplos: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2}{\lim_{x\to 2}(x+1)} = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$

5) Limite da potência: $\lim_{x\to x_o}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_o} f(x)\right]^n = [L_1]^n$

O limite da potência é a potência do limite.
Em símbolos podemos representar a propriedade acima por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n}$$

Exemplo: $\lim_{x\to 2} x^3 = \left[\lim_{x\to 2} x\right]^3 = [2]^3 = 8$

Agora vejamos um resultado muito importante:

Proposição 1: Toda função polinomial é contínua.
Este resultado garante que o cálculo do limites de funções da forma como
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ são contínuas.
Desse modo o cálculo do limite de funções polinomiais é realizado, por meio do calculo da imagem no ponto.

Exemplo:
Dado $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ calcule o $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solução
Como $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ é uma função polinomial então $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Assim, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2^3 + 2\times 2^2 + 1 = 17$

Logo, $\lim_{x\to 2} f(x) = 17$.

RESUMO

- A pergunta: Para que valor a função tende quando x tende a -6 pela esquerda? Equivale a pergunta: Qual é o limite da função quando x tende a -6 pela esquerda?
- Quando os limites laterais de uma função num ponto são iguais dizemos que o limite existe no ponto e o valor é o dos limites laterais.
- Em a pergunta: qual é o limite da função quando x tende a 6 pela esquerda? É representado por $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$. Qual é o limite da função quando x tende a 6 pela direita? É $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$
- Quando limite de uma função num ponto existe e é igual a imagem da função no ponto dizemos que a função é continua no ponto.
- O limite de uma constante é a própria constante.
- O limite da soma é a soma dos limites.
- O limite da diferença é a diferença dos limites.
- O limite do produto é o produto dos limites.
- O limite do quociente é o quociente dos limites.
- O limite da potência é a potência do limite.
- O cálculo do limite de funções polinomiais é realizado, por meio do calculo da imagem no ponto.

Resposta das atividades

1. $f(8) = 0$
2. $f(5) = -3$
3. $f(9) = 1$
4. $f(-7) = 3$
5. $f(-5) = \nexists$
6. $f(-1) = \nexists$
7. $f(7) = 1$
8. $f(-3) = 4$
9. $f(-2) = \nexists$
10. $f(-6) = 5$
11. $f(2) = \nexists$
12. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ zero$
13. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ zero$
14. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 1$
15. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 1$
16. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 3$
17. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 3$

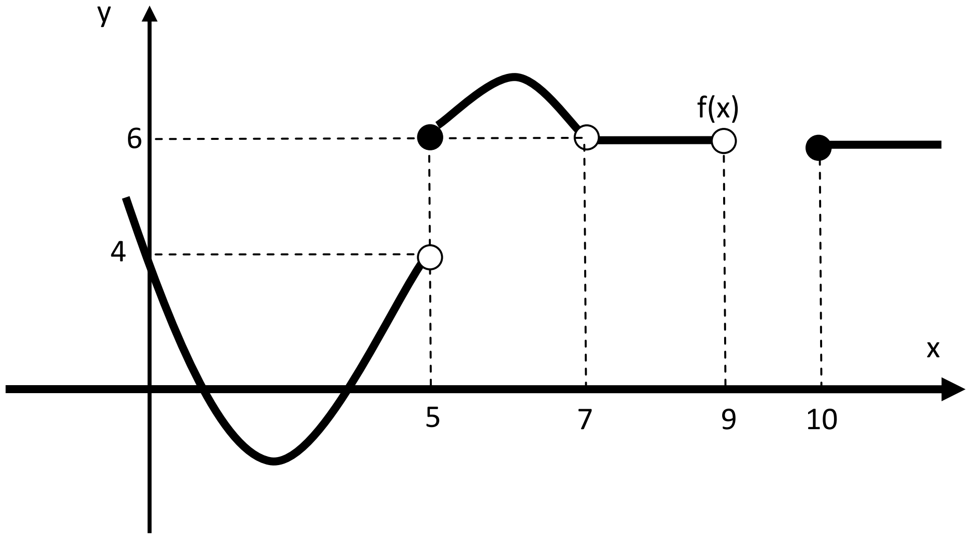
18. $não\ é\ possível\ x\ se\ aproximar\ de\ 3\ pela\ direita, não\ é\ definida\ em\ ]-3,-2[$
19. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 4$
20. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ -2$
21. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ -4$
22. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 3$
23. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ zero$
24. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ -2$
25. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ -4$
26. $não\ é\ possível\ x\ se\ aproximar\ de\ 3\ pela\ direita, não\ é\ definida\ em\ ]-3,-2[$
27. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 4$
28. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 5$
29. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 1$
30. $a\ função\ se\ aproxima\ de\ 1$
31. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em -3\ \ não\ existe$
32. $o\ limite\ pela\ direita\ em\ -3\ é\ 4$
33. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em -1\ é\ 4$
34. $o\ limite\ pela\ direita\ em -1\ é\ 4$
35. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em\ 7\ é\ 3$
36. $o\ limite\ pela\ direita\ em\ 7\ é\ 3$
37. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em -5\ é\ 3$
38. $o\ limite\ pela\ direita\ em\ -5\ é\ 2$
39. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em\ 9\ é\ 1$
40. $o\ limite\ pela\ direita\ em\ 9\ é\ 1$
41. $o\ limite\ pela\ direita\ em\ 5\ é -2$
42. $o\ limite\ pela\ esquerda\ em\ 5\ é -4$
43. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ 9\ é\ 1$
44. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ 9\ é\ 3$
45. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ 5\ não\ existe, os\ limites\ laterais\ são\ diferentes$

46. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ 8\ é\ zero$
47. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ -3\ não\ existe, não\ existe\ o\ limite\ pela\ direita$
48. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ -2\ não\ existe, não\ existe\ o\ limite\ a\ esquerda$
49. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ -2\ não\ existe$
50. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ -2\ é\ 4$
51. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ -6\ é\ 5$
52. $o\ limite\ de\ f(x)\ quando\ a\ x\ tende\ zero\ é\ 5$
53. $\lim_{x\to 9^+} f(x) = 1$
54. $\lim_{x\to 9^-} f(x) = 1$
55. $\lim_{x\to 9} f(x) = 1$
56. $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -2$
57. $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -4$

58. $\lim_{x\to 5} f(x) = \textit{não existe}$
59. $\lim_{x\to 7^+} f(x) = 3$
60. $\lim_{x\to 7^-} f(x) = 3$
61. $\lim_{x\to 7} f(x) = 3$
62. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 4$
63. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 4$
64. $\lim_{x\to -1} f(x) = 4$
65. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \text{não existe}$
66. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 4$
67. $\lim_{x\to -3} f(x) = \text{não existe}$
68. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty,\ \textit{não existe}$
69. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,\ \textit{não existe}$
70. $\lim_{x\to 2} f(x) = \text{não existe}$
71. $f(x)$ não é continuo em $x = 7$
72. $f(x)$ é continuo em $x = 9$
73. $f(x)$ não é continuo em $x = 5$
74. $f(x)$ não é continuo em $x = -1$
75. $f(x)$ não é continuo em $x = -3$
76. $f(x)$ não é continuo em $x = -5$
77. $f(x)$ é continuo em $x = -6$
78. $f(x)$ não é continuo em $x = -7$
79. $f(x)$ é continuo em $x = 0$
80. $f(x)$ não é continuo em $x = 2$

QUESTÕES

(01) A partir da observação do gráfico responda as questões abaixo



a) $f(5) =$
b) $f(7) =$
c) $f(9) =$
d) $f(10) =$
e) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$
f) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$
g) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) =$
h) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) =$
i) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) =$
j) $\lim\limits_{x\to 7} f(x) =$
k) $\lim\limits_{x\to 9^+} f(x) =$
l) $\lim\limits_{x\to 9^-} f(x) =$
m) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) =$
n) $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) =$
o) $\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) =$
p) $\lim\limits_{x\to 10} f(x) =$

(02) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to 5} 10 =$
b) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-1) =$
c) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2+2x-1) =$
d) $\lim\limits_{x\to -1} (x^3-7x^2-3x-9) =$
e) $\lim\limits_{x\to 2} x(x^2-2)^5 =$
f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2}{x^3} =$
g) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2-4} =$

(03) Calcule os seguintes limites

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 1 \\ 4x-3, & x < 1 \end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

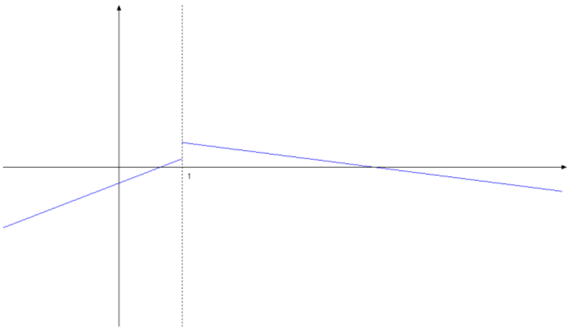
(b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(c) $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x<2\\ 0, & x=2\\ 3x, & x>2\end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(d) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 0, & x=2\\ 3x, & x>2\end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

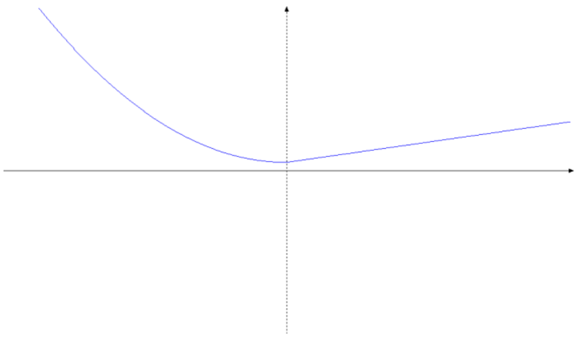
(e) $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<-1\\ 3, & x=-1\\ x+2, & x>-1\end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(04) Verifique quais das funções abaixo são continuas



$f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\geq 1\\ 4-x, & x<1\end{cases}$

(a) a função f(x) a cima é continua em x = 1.



$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geq 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$

(b) a função f(x) a cima é continua em x = 1.

(05) Verifique se as funções são contínuas nos valores de x especificados

(a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 2x, & x\geq 2\end{cases}$ em $x=2$

(b) $f(x)=\begin{cases}5x-2, & x>2\\ 8, & x=2\\ 2x+4, & x<2\end{cases}$ em $x=2$

(c) $f(x)=\begin{cases}2x, & x>-2\\ -4, & x=-2\\ -2+x, & x<-2\end{cases}$ em $x=-2$

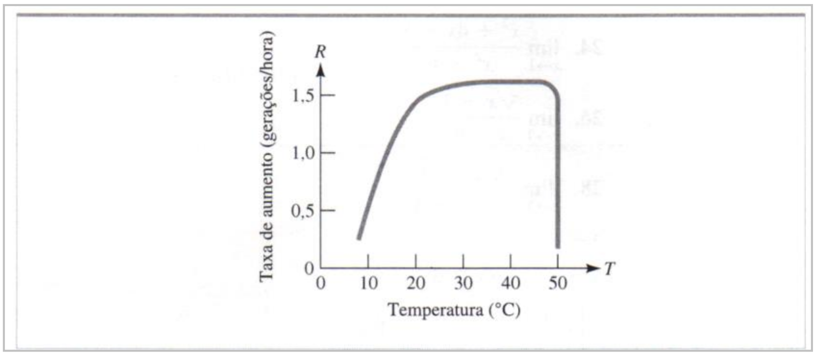
(d) $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\geq 3\\ 3-x, & x<3\end{cases}$ em $x=3$

(06) O gráfico a seguir mostra a variação da taxa de crescimento *R* (*T*) com temperatura *T* para uma colônia de bactérias.

(a) Qual o intervalo de temperaturas no qual a taxa de crescimento dobra de valor?

(b) O que se pode dizer a respeito da taxa de crescimento para $25 < T < 45$?

(c) O que acontece quando a temperatura atinge aproximadamente 45 °C? Faz sentido calcular $\lim_{x \to 50} R(T)$?



R: (a) $10 < T < 15$ (as respostas podem variar).

(b) A taxa de crescimento se mantém aproximadamente constante.

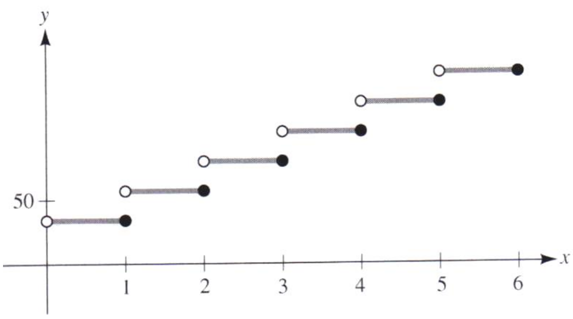
(c) A taxa de crescimento diminui para $T > 45$; $\lim_{x \to 50^-} R(T) = 0$.

(07) No correio, a "função de porte" $p(x)$ pode ser descrita da seguinte forma:

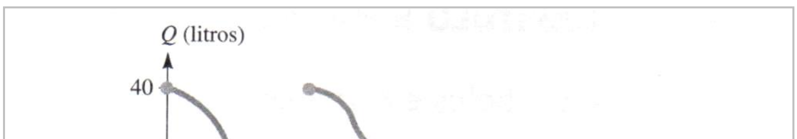
$$p(x) = \begin{cases} 33 & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 55 & \text{se } 1 < x \le 2 \\ 77 & \text{se } 2 < x \le 3 \\ \vdots & \\ 275 & \text{se } 11 < x \le 12 \end{cases}$$

onde x é o peso de uma carta em onças e $p(x)$ é o preço correspondente do porte, em reais. Faça o gráfico de $p(x)$ para $0 < x \le 6$. Para que os valores de x a função $p(x)$ é descontínua, dentro do intervalo $0 < x \le 6$?

R: $p(x)$ é descontínua em $x =$1, 2, 3, 4 e 5:



(08) O gráfico a seguir mostra o volume de gasolina no tanque do carro de Sue durante o período de 30 dias. Em que pontos o gráfico é descontínuo? O que acontece nessas ocasiões?



R: O gráfico é descontínuo nos pontos *x* = 10 e *x* = 24. Nessas ocasiões, Sue está provavelmente no posto de gasolina, enchendo o tanque. Sue, você se lembrou de desligar a ignição e o telefone celular?

(09) O diagrama esquemático em anexo representa um circuito elétrico, o qual consiste de uma força eletromotriz que produz uma voltagem V, um resistor com resistência R, e um indutor com indutância L. a teoria dos circuitos elétricos mostra que se uma voltagem for aplicada no instante t = 0, então a corrente I que percorre o circuito no instante t é dado por $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{Rt/L}})$. Qual o efeito sobre a corrente num dado tempo t fixo, se a resistência tender a zero(isto é, $\mathrm{R} \to 0^+$) R: $\frac{\mathrm{Vt}}{\mathrm{L}}$

(10) A população (em milhares) de uma colônia de bactérias *t* minutos após a introdução de uma toxina é dada pela função:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{se } t < 5 \\ -8t + 72 & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

R: (a) Depois de 9 minutos

(b) Porque $f(1) - 10 < 0$ e $f(7) - 10 > 0$ e $f(x) - 10$ é contínua no intervalo $[1,7]$.

(11) O raio da Terra tem o raio de aproximadamente 6.400 km e um corpo situado a x Km do centro da Terra pesa $p(x)$ Kg, onde:

$$p(x) = \begin{cases} Ax & \text{se } x \leq 6.400 \\ \dfrac{B}{x^2} & \text{se } x > 6.400 \end{cases}$$

R: B = A(6.400)^3

(12) Se uma esfera oca de raio *R* é carregada com uma unidade de eletricidade estática, a intensidade do campo elétrico *E* (*x*) em um ponto *P* situado a uma distância de *x* unidade do centro da esfera é dada por:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < R \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{se } x = R \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > R \end{cases}$$

Faça um gráfico de *E*(*x*). A função *E*(*x*) é contínua para $x > 0$?

R: E(x) não é contínua no ponto x = R, já que $\lim_{x \to R^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{R^2} \neq \frac{1}{2R^2}$.

(13) Se R$ 1.000,00 são investidos a juros de 9% capitalizados n vezes por ano, o montante após 1 ano será $1.000 \cdot (1+0,09x)^{\frac{1}{x}}$, onde $x = 1/n$ é o período de capitalização. Assim, por exemplo, se $n = 4$, o período de capitalização é $1/4$ de ano, ou seja, 3 meses. No caso da chamada capitalização contínua dos juros, o montante após 1 ano é dado pelo limite:

$$B = \lim_{x \to 0^+} 1.000 \cdot (1+0,09)^{\frac{1}{x}}$$

Estime o valor desse limite completando a segunda linha da tabela a seguir:

X	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\lim_{x \to 0^+} 1.000 \cdot (1+0,09)^{\frac{1}{x}}$					

R:

X	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\lim_{x \to 0^+} 1.000 \cdot (1+0,09)^{\frac{1}{x}}$	1.090	1.093,73	1.094,13	1.094,17	1.094,17

RESPOSTA

(01) A partir da observação do gráfico responda as questões abaixo

a) 6
b) Não existe
c) Não existe
d) 6
e) 6
f) 4
g) Não existe
h) 6
i) 6
j) 6
k) Não existe
l) 6
m) Não existe
n) 6
o) Não existe
p) Não existe

(02) Calcule os limites

a) 10
b) 3
c) -2
d) -14
e) 64
f) 1/4
g) não existe

(03) Calcule os seguintes limites

(a) (i) 1 (ii) 1 (iii) 1

(b) (i) 1 (ii) 1 (iii) 1

(c) (i) 6 (ii) 6 (iii) 6

(d) (i) 6 (ii) 4 (iii) não existe

(e) (i) 1 (ii) 3 (iii) não existe

(04) Verifique quais das funções abaixo são continuas

(a) a função f(x) não é continua em x = 1.

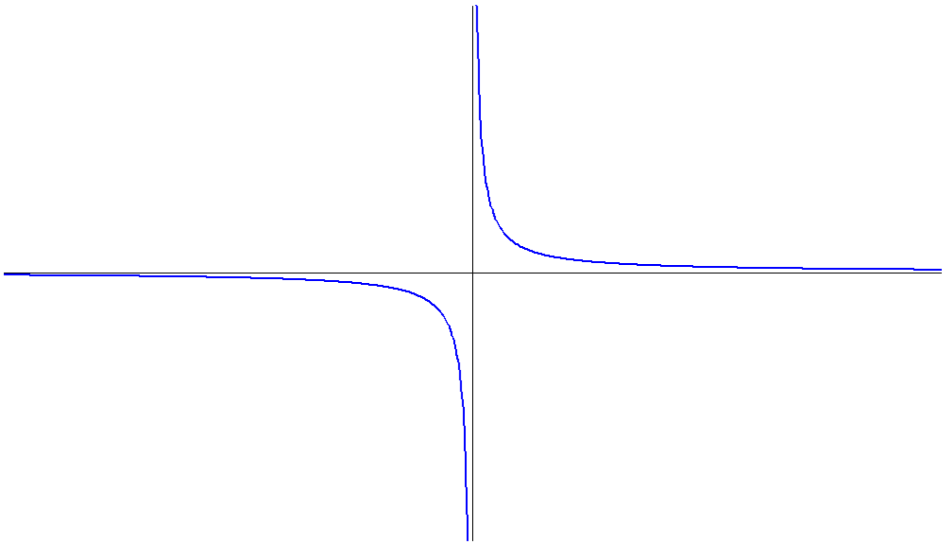
(b) a função f(x) é continua em x = 1.

AULA 2: LIMITES INFINITOS E NO INFINITO

Objetivos:

- Calcular limites no infinito;
- Calcular limite que tendem para o infinito;
- Estudar as propriedades dos limites no infinito;
- Estudar as propriedades dos limites que tendem para o infinito.

Iniciaremos nosso estudo de limite infinito estudando o gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$, cuja representação gráfica esta na figura abaixo.



Observe o gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ responda as seguintes questões:

(01) Qual o valor do limite de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quando x cresce indefinidamente?

(02) Qual o valor do limite de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quando x decresce indefinidamente?

> Quando calculamos o limite de uma função $f(x)$ com x crescendo ou decrescendo indefinidamente dizemos que estamos calculando o **limite no infinito**.

Representamos o limite de uma função $f(x)$ com x crescendo indefinidamente por

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

e representamos o limite de uma função $f(x)$ com x decrescendo indefinidamente por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Observando o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, mostrado na figura anterior, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Usando o mesmo procedimento usado no cálculo de limites de funções contínuas teremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A expressão $\frac{1}{+\infty}$ não tem nenhum significado de número fracionário, é somente uma representação do comportamento da função quando x tende para o infinito, e convencionamos por zero ($\frac{1}{+\infty} = 0$).

Podemos estender o raciocínio apresentado e afirmar que funções da forma $f(x) = \frac{k}{x^n}$, com $n \neq 0$ e k constante, o valor do limite no infinito sempre resultará em zero, simbolicamente pode ser expresso por:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 1 – Determine o valor do limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

Solução: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+\infty)^2} = 0$

Exemplo 2 – Determine o valor do limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

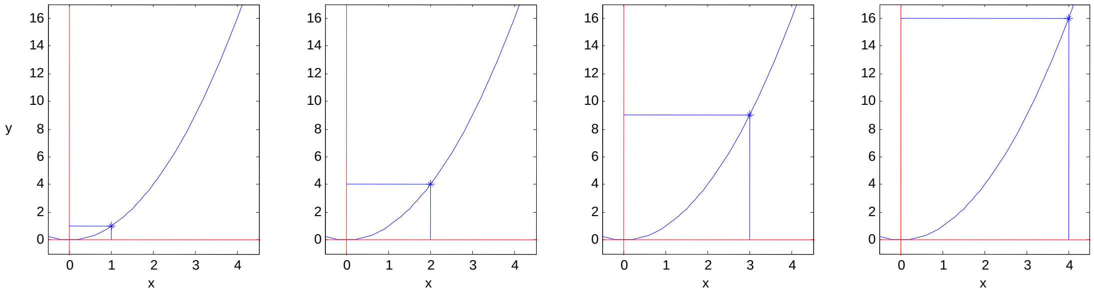
Solução: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(-\infty)^2} = 0$

Para aprofundarmos o estudo de limite no infinito responda as questões:

1) Determine o limite de $f(x) = x^2$ quando x cresce indefinidamente.
2) Determine o limite de $f(x) = x^2$ quando x decresce indefinidamente.
3) Determine o limite de $f(x) = x^3$ quando x cresce indefinidamente.

5) Determine o limite de $f(x) = x^3$ quando x decresce indefinidamente.

O gráfico e a tabela abaixo ilustra a função $f(x) = x^2$

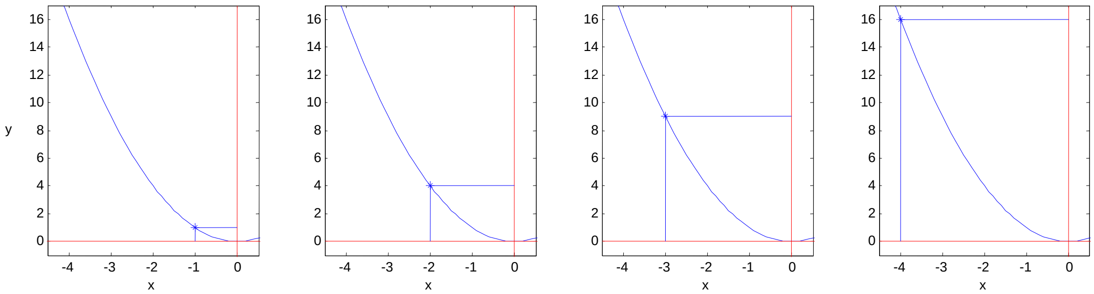


x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$f(x) = x^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	...

Quando x cresce indefinidamente o valor da função $f(x) = x^2$ também cresce indefinidamente, simbolicamente podemos representar por

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

O gráfico e a tabela abaixo ilustra a função $f(x) = x^2$

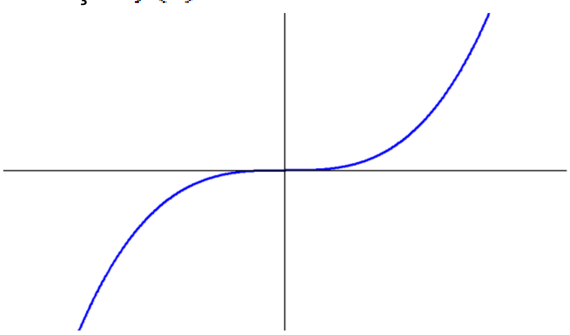


x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	...
$f(x) = x^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	...

Quando x decresce indefinidamente o valor da função $f(x) = x^2$ também cresce indefinidamente, simbolicamente podemos representar por

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

O gráfico abaixo ilustra a função $f(x) = x^3$



Quando x cresce indefinidamente o valor da função $f(x) = x^3$ também cresce indefinidamente, simbolicamente podemos representar por

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Quando x decresce indefinidamente o valor da função $f(x) = x^3$ também decresce indefinidamente, simbolicamente podemos representar por

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Usando o mesmo procedimento usado no cálculo de limites de funções contínuas teremos:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

A expressão $(-\infty)^n$ não tem nenhum significado de número, é somente uma representação do comportamento da função quando x tende para o infinito.

Podemos estender o raciocínio apresentado e afirmar:

1) quando x cresce indefinidamente, o limite da função $f(x) = x^n$ sempre crescerá indefinidamente, não importando se n for par ou impar, em símbolo temos:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty}$$

2) quando x decresce indefinidamente, o limite da função $f(x) = x^n$ sempre crescerá indefinidamente, se n for par, em símbolo temos:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \ , \text{ se } n \text{ for par}}$$

3) quando x decresce indefinidamente, o limite da função $f(x) = x^n$ sempre decrescerá indefinidamente, se n for ímpar, em símbolo temos:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \ , \text{ se } n \text{ for ímpar}}$$

Observe os exemplos a seguir:

Exemplo 1 – Determine o valor do limite $\lim_{x \to +\infty} x^5$

Solução: $\lim_{x \to +\infty} x^5 = (+\infty)^5 = +\infty$

Exemplo 2 – Determine o valor do limite $\lim_{x \to +\infty} x^6$

Solução: $\lim_{x \to +\infty} x^6 = (+\infty)^6 = +\infty$

Exemplo 3 – Determine o valor do limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5$

Solução: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

Exemplo 4 – Determine o valor do limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^6$

Solução: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^6 = (-\infty)^6 = +\infty$

Dando prosseguimento ao nosso estudo, abordaremos agora um procedimento para determinar o limite de polinômios quando x cresce ou decresce indefinidamente, para tal, responda a seguinte questão:

(01) Determine o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x + 7)$

Solução

Primeiramente vamos colocar o monômio de maior grau em evidência

$$\lim_{x\to+\infty} (4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x + 7) = \lim_{x\to+\infty} x^5 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right)$$

Lembre-se que na primeira aula você aprendeu a seguinte propriedade

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

de onde temos que

$$\lim_{x\to+\infty} (4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x + 7) = \lim_{x\to+\infty} x^5 \ . \ \lim_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right)$$

Lembre-se também que

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

De onde temos

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty} 4 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} + \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^5}$$

como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^5} = 0$$

temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty} 4$$

Com isto podemos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty} (4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x + 7) = \lim_{x\to+\infty} x^5 \ . \ \lim_{x\to+\infty} 4$$

Que equivale dizer que

$$\lim_{x\to+\infty} (4x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x + 7) = \lim_{x\to+\infty} 4x^5 = +\infty$$

Podemos estender o raciocínio apresentado na questão anterior e afirmar que o limite de um polinômio de grau n, quando x cresce ou decresce indefinidamente é igual limite do monômio de grau n que está contido neste polinômio, e pode ser representado simbolicamente por:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0] = \lim_{x\to x_0} a_n x^n}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Exemplo 1 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5 + x^4 - x^3\right)$

Solução: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5 + x^4 - x^3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$

Exemplo 2 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 3x^4 - 2x^3\right)$

Solução: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 3x^4 - 2x^3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4\right) = -\infty$

Exemplo 3 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5 - 3x^4 - 2x^3}{3x^4 - 2x^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5 - 3x^4 - 2x^3}{3x^4 - 2x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5 - 3x^4 - 2x^3\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4 - 2x^3\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^5}{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3} = +\infty$$

Exemplo 4 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4 - 2x^3}{x^5 - x^4 - x^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4 - 2x^3}{x^5 - x^4 - x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4 - 2x^3\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5 - x^4 - x^3\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0$$

Exemplo 5 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5 - 3x^4 - 2x^3}{3x^5 - 4x^4 + x^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5 - 3x^4 - 2x^3}{3x^5 - 4x^4 + x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5 - 3x^4 - 2x^3\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^5 - 4x^4 + x^3\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^5}{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{3x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 6 – Determine o valor do limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4 + x}{3 - 4x^2 + x^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4 + x}{3 - 4x^2 + x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 + x\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 - 4x^2 + x^3\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4}{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3} = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty$$

Vamos estudar agora o limite no infinito, isto é, estudar situações onde algumas funções $f(x)$ crescem ou decrescem indefinidamente quando o valor de x se aproxima de um determinado valor. Para isto, tomemos a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrado na figura a seguir.

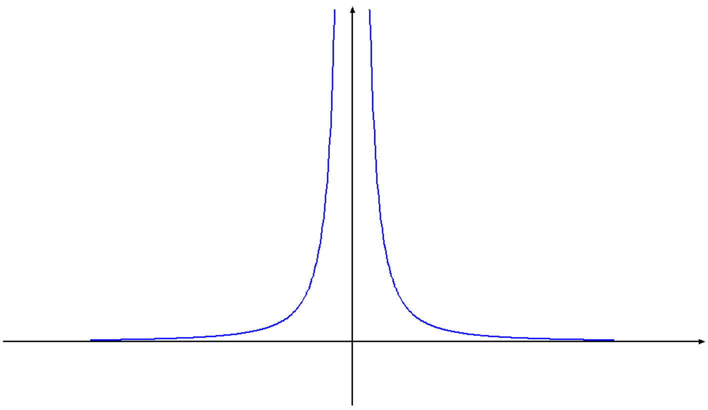
1) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

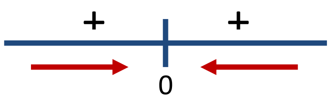
3) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela direita.

4) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela esquerda.

A figura a seguir apresenta o gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

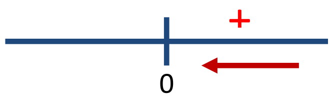


Antes de responder a questão (1) e (2) devemos fazer o estudo do sinal da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, que é:



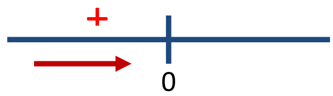
Podemos observar tanto no gráfico quanto no estudo do sinal da função que quando o valor de x se aproxima indefinidamente de zero pela direita, o valor da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ aumenta indefinidamente, simbolicamente podemos representar por:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



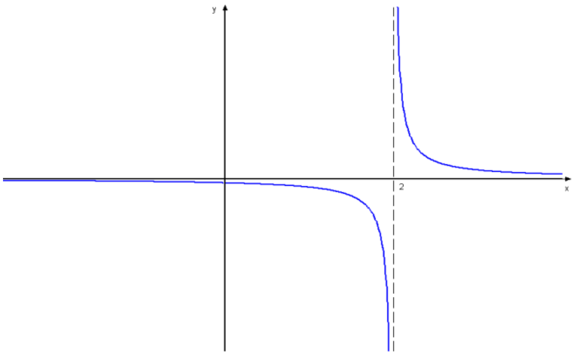
Usando o gráfico e o estudo do sinal da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ podemos observar que quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda, o valor da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ aumenta indefinidamente, simbolicamente podemos representar por:

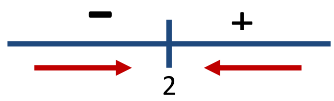
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$$



Se substituirmos o zero na função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ teremos $f(0)=\frac{1}{0}$ que representa uma situação impossível, logo quando o valor de x se aproxima de zero função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ tende para o infinito.

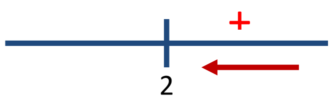
Antes de responder a questão (3) e (4) devemos fazer o estudo do sinal da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$, que é:





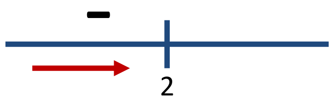
Podemos observar tanto no gráfico quanto no estudo do sinal da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ que quando o valor de x se aproxima indefinidamente de dois pela direita, o valor da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ aumenta indefinidamente, simbolicamente podemos representar por:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$$



Usando o gráfico e o estudo do sinal da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ podemos observar que quando x se aproxima indefinidamente de dois pela esquerda, o valor da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ diminui indefinidamente, simbolicamente podemos representar por:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$$



Se substituirmos o dois na função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ teremos $f(0)=\frac{1}{0}$ que representa uma situação impossível, logo quando o valor de x se aproxima de dois função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ tende para o infinito, que será $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do estudo do sinal da função.

RESUMO

- Quando calculamos o limite de uma função $f(x)$ com x crescendo ou decrescendo indefinidamente dizemos que estamos calculando o **limite no infinito**.
- A expressão $\frac{1}{+\infty}$ não tem nenhum significado de número fracionário, é somente uma representação do comportamento da função quando x tende para o infinito, e convencionamos por zero ($\frac{1}{+\infty}=0$).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad , \quad n\neq -1$
- A expressão $(-\infty)^n$ não tem nenhum significado de número, é somente uma representação do comportamento da função quando x tende para o infinito.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$, se n for par
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$, se n for ímpar
- $\lim\limits_{x\to x_0}[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0]=\lim\limits_{x\to x_0} a_nx^n$

QUESTÕES

(01) Calcule os limites

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^5}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^4}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{x^8}$

(02) Calcule os limites

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2-7x+3)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+2x^2-5x+3)$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-4x^2-3x+2)$

(d) $\lim_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x + 3}{5x^2 + x + 3}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 7}{x^5 - 2x + 9}$

(g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 + x}{3x^5 - 2x^4 + 9}$

(h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 3x}{5x^2 - x}$

(i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 7}{x^4 - 2x}$

(j) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + x}{3x^5 - 9}$

(03) Calcule os limites

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3}$

(b) $\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5}$ e $\lim_{x \to 5^-} \frac{6}{x-5}$

(c) $\lim_{x \to 2^+} \frac{6}{x^2-4}$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{6}{x^2-4}$

(d) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2-9}$ e $\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2-9}$

Resposta da atividade

(01) Calcule os limites

(a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0

(02) Calcule os limites

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$

(d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) 0

(g) $2/3$ (h) $-\infty$ (i) 0

(j) $1/3$

(03) Calcule os limites

(a) $+\infty$ e $-\infty$

(b) $+\infty$ e $-\infty$

(c) $+\infty$ e $-\infty$

(d) $+\infty$ e $-\infty$

AULA 3: LIMITES FUNDAMENTAIS

Objetivos:

- Apresentar o limite exponencial fundamental;
- Apresentar o limite fundamental trigonométrico;
- Calcular limites envolvendo o limite exponencial fundamental;
- Calcular limites envolvendo o limite fundamental trigonométrico.

Introdução

Vejamos a seguinte situação-problema!

Como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempos cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente incidissem as mesmas taxas de juros?

Este problema foi proposto por Jacques Bernoulli, matemático suíço, no século XVII.

A resolução do problema levou a necessidade de calcular o seguinte limite

$\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Vejamos alguns valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$!

Para n = 10 temos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.59374246010000

Para n = 100 temos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.70481382942153

Para n = 1000 temos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.71692393223559

Para n = 10000 temos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.71814592682493

Para n = 100000 temos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = 2.71826823719230

Como podemos observar que à medida que n aumenta o valor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge para um valor próximo de 2,7182818284.

O matemático suíço Loenardo Euler(pronuncia-se Oiler) dedicou-se ao problema proposto por Jacques Bernoulli e concluiu que o valor do limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é um número que converge para próximo 2,7182818284.

Anos depois outro matemático provou que o valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é um número irracional.

Hoje o número resultante do cálculo de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é representado pela letra **e** em homenagem ao matemático Euler.

Assim, podemos chegar ao seguinte resultado $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = e.

O limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = e

Vejamos um teorema, sem s... a dos naturais para os reais a variável n.

Teorema:

Seja f a função definida em { x∈R | x< -1 ou x > 0} por f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, então

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

O limite de f a função definida em

{ x∈R | x< -1 ou x > 0} por f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ que é $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ = e

é denominado limite exponencial fundamental.

Agora vejamos as seguintes proposições que são conseqüências do limite exponencial fundamental!

Proposição X

Seja f a função definida em { x∈R | x< -1 ou x > 0} por f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, então

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e .$$

Demonstração:

Seja f a função definida em {x∈R | x< -1 ou x > 0} por f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Fazendo x = - (w+1) e notando que se x tende a -∞ então w tende a +∞.

Assim, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{w\to+\infty}\left(1-\frac{1}{w+1}\right)^{-(w+1)}$$

$$= \lim_{w\to+\infty}\left(\frac{w}{w+1}\right)^{-(w+1)}$$

$$= \lim_{w\to+\infty}\left(\frac{w+1}{w}\right)^{(w+1)}$$

$$= \lim_{w\to+\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w+1}$$

$$= \lim_{w\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\bullet\left(1+\frac{1}{w}\right)\right] = \lim_{w\to+\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\bullet\lim_{w\to+\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)$$

$$= e \bullet 1 = e$$

Desse modo, fica demonstrado que se f é uma função definida em { x∈R | x < -1 ou x > 0 } por

f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, então $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ = e .

Proposição X

Seja f a função definida em { x∈R | -1< x ≠ 0} por f(x) = $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, então

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

Demonstração:

Seja f a função definida em { x∈R | -1< x ≠ 0} por f(x) = $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Fazendo x = $\frac{1}{y}$ temos que y = $\frac{1}{x}$.

Assim, temos que

- quando x tende a 0^+ , y tende a $+\infty$;
- quando x tende a 0^- , y tende a $-\infty$.

Desse modo, obtemos:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$ = e ;

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$ = e .

Como $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = e então

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = e , como queríamos demonstrar.

Agora vejamos a aplicação do limite exponencial e suas conseqüências no cálculo de alguns limites.

Exemplo 1:

Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

Solução:

Como $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}$ então

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = \left[\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = e^{3}.$$

Exemplo 2:

Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$.

Solução:

Fazendo w= $\frac{x}{4}$ temos que x = 4w .

Assim, quando x tende a $+\infty$, w também tende a $+\infty$.

Desse modo,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim_{w\to +\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{4w} = \lim_{w\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{4} = \left[\lim_{w\to +\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{4} = e^{4}$$

- **O limite trigonométrico fundamental**

Agora vamos ver um resultado importante no cálculo devido, entre outros motivos, o mesmo possibilitar a determinação do valor de outros limites**.**

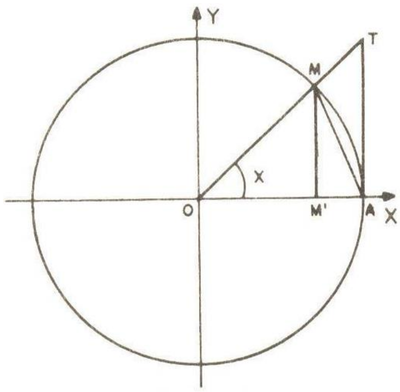
Teorema:

Seja f a função definida em R – {0} por f(x) = $\frac{senx}{x}$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{senx}{x} = 1$.

Demonstração:

Seja f a função definida em R – {0} por f(x) = $\frac{senx}{x}$.

Consideremos a figura abaixo



Suponhamos que o raio da circunferência é 1.

Seja x a medida em radianos do arco $A\hat{O}M$.

Limitando a variação de x ao intervalo (0 , $\frac{\pi}{2}$) podemos da observação da figura acima concluir que:

área do triângulo MOA < a área do setor MOA < área do triângulo AOT.

Que equivale a afirmar que $\frac{OA \times MM`}{2} < \frac{OA \times AM}{2} < \frac{OA \times AT}{2}$.

Multiplicando a desigualdade acima por 2 temos que

$$A\hat{O} \times M\hat{M}' < \hat{O}A \times A\hat{M} < \hat{O}A \times A\hat{T}$$

Como o raio AO é 1 então a ultima desigualdade é equivalente a

$$\overline{MM`} < AM < \overline{AT}$$

Da figura podemos concluir que $\overline{MM`}$ = senx , AM= x e $\overline{AT}$ = tgx.

Assim, a desigualdade $\overline{MM`}$< AM< $\overline{AT}$ se torna equivalente a senx < x < tgx .

Como senx > 0 para x em (0 , $\frac{\pi}{2}$), dividindo a desigualdade acima por senx obtemos a seguinte desigualdade

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo os termos da desigualdade teremos a inversão da desigualdade que nos dá a seguinte relação que é equivalente a ultima desigualdade

$$1 > \frac{senx}{x} > \cos x$$

Como as funções $\frac{senx}{x}$ e cosx são pares temos que

$$\frac{sen(-x)}{(-x)} = \frac{senx}{x} \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Assim, podemos concluir que a desigualdade

$1 > \frac{senx}{x} > \cos x$

é válida para todo x ≠ 0.

Calculando o limite de cada termo da desigualdade quando x tende a zero obtemos a seguintes desigualdade

$$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} < \lim_{x\to 0}\cos x$$

Como $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ e $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ então pelo teorema do confronto podemos afirmar que $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$.

Assim, demonstramos que $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$.

O limite $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$ é conhecido como limite trigonométrico fundamental!

Agora vejamos al[...]o fundamental no cálculo de outros limites.

Exemplo 3

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{x}$.

Solução:

Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3sen3x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}3 \times \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}$ = 3.1= 3, então podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{x}$ = 3.

Exemplo 4

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen7x}$.

Solução:

Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen7x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{sen3x}{x}}{\frac{sen7x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen7x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3sen3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{7sen7x}{7x}}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}3 \bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}7 \bullet \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen7x}{7x}} = \frac{3 \bullet 1}{7 \bullet 1} = \frac{3}{7}.$$

Assim podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen7x} = \frac{3}{7}$.

RESUMO

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é um número irracional aproximadamente igual a 2,7182818284;
- O número $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é representado por e em homenagem ao matemático suíço Leonardo Euler;
- Se f é a função definida em { x∈R | x< -1 ou x > 0} por f(x) = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, então $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ = e ;
- O $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ = e é denominado limite exponencial fundamental.
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ = e;
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ = e;
- O limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ =1 é conhecido como limite trigonométrico fundamental!

QUESTÕES

Calcule os limites abaixo

01) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}=$

02) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=$

03) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}}=$

04) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=$

05) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=$

06) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x}=$

07) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=$

08) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^{x}=$

09) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}=$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+3}=$

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen5x}{x}=$

12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen5x}{3x}=$

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen(x^2+x)}{(x^2+x)}=$

14) $\lim\limits_{x\to2}\frac{sen(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)}=$

15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senx^2}{x}=$

16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senx}{x^2}=$

17) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen(x-1)}{x^2-1}=$

18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen(x^2-4)}{x-2}=$

19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen^2x}{x}=$

20) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sen^2 4x}{2x^2}$

21) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senx\bullet sen3x\bullet sen5x}{x^3}=$

22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senx+sen3x+sen5x}{x}=$

RESPOSTAS

01) e^7 02) e^3 03) $e^{\frac{3}{4}}$ 04) e^{ab} 05) e^{-1} 06) e^{-3} 07) e^{-6} 08) e^7 09) e 10) e^{-3}

11) 5 12) $\frac{5}{3}$ 13) 1 14) 1 15)0 16) Não existe 17) 1/2 18) 4 19) 0 20) 8

21) 15 22) 9

AULA 4: VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Objetivos:

- Conceituar a variação instantânea de uma função;
- Calcular a variação instantânea de uma função.

Introdução

Vejamos a seguinte situação-problema!

Seja y = t^2 a função que descreve a posição em metros de um corpo numa trajetória em função do tempo em segundos. Qual é a velocidade do corpo média no intervalo de [2, 4] ? Qual é a velocidade do corpo no instante t = 3?

Solução:

Para calcularmos a velocidade média v_m do corpo no intervalo de tempo que vai de 2 a 4 devemos calcular a razão entre a variação da posição nos instante 2 e 4 e a variação do tempo.

A variação Δy da posição é dada por y(4)- y(2) = 16- 4= 12.

A variação Δt do tempo é dada por 4-2= 2.

Assim, a velocidade media do corpo no intervalo de 2 a 4segundos é

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(4) - y(2)}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ m/s}.$$

Para determinar a velocidade do corpo no instante t = 3 adotaremos o seguinte procedimento:

- Calcularemos a velocidade média do corpo no intervalo de 3 até 3+h;
- Calcularemos o valor da velocidade média do corpo quando h tender a 3.

O valor obtido para e velocidade media do corpo quando h tender a 3 será o valor da velocidade do corpo no instante t =3.

A velocidade média do corpo no intervalo de 3 até 3 +h é dada por

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(3+h) - y(3)}{3 + h - 3} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h}$$

O valor da velocidade média do corpo quando h tende a 2 é dado por

$$\lim_{h \to 3} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 3} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 3} (6 + h) = 6 + 3 = 9.$$

Portanto, a velocidade do corpo no instante t = 3 é v = 9m/s.

A velocidade de um corpo num dado instante é denominada de velocidade instantânea do corpo no instante dado!

Generalizando a situação-problema temos a seguinte questão:

Qual é a velocidade instantânea no instante t= t_0 de um corpo que se move por uma trajetória descrita para uma função y = f(t) continua?

Solução:
Como vimos na situação acima para resolver a questão proposta devemos:

- Calcular a velocidade média do corpo no intervalo de t_0 até t_0+h;
- Calcular o valor da velocidade média do corpo quando h tender a t_0.

Assim, a velocidade do corpo no instante t = t_0 será dada por

$$\lim_{h\to t_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h\to t_0}\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{t_0+h-t_0} = \lim_{h\to t_0}\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}.$$

Como h corresponde a variação Δt do tempo e quando h tende a t_0 , Δt tende a 0, podemos reescrever a expressão de velocidade no instante t_0 como sendo

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Generalizando novamente a situação-problema dada podemos propor a seguinte questão:

Seja y = f(x) uma grandeza qualquer qual é a taxa de variação dessa grandeza em x= x_0?

Solução:

Com raciocínio análogo ao utilizado na determinação da velocidade instantânea quando y = f(x), podemos afirmar que a taxa de variação T instantânea da grandeza y será dada por T = $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A expressão acima é de grande utilidade em diversas situações.

Agora resolva as questões a seguir!

RESUMO

- Para determinar a velocidade instantânea no instante t= t_0 de um corpo que se move por uma trajetória descrita para uma função y = f(t) continua devemos:
  1. Calcular a velocidade média do corpo no intervalo de t_0 até t_0+h;
  2. Calcular o valor da velocidade média do corpo quando h tender a t_0.
- A velocidade instantânea v no instante t= t_0 de um corpo que se move por uma trajetória descrita para uma função y = f(t) continua é dada por v = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$;
- Seja y = f(x) uma grandeza qualquer é a taxa T de variação dessa grandeza em x= x_0 é dada por T = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;

Agora resolva as questões abaixo!

QUESTÕES

1) Determine a variação instantânea de y = x^2 em x = 5.
2) Determine a variação instantânea de y = x^2 em x = -2.
3) Determine a variação instantânea de y = $\frac{x^2}{4}$ em x = -2.
4) Determine a variação instantânea de y= x^3 em x = 4.
5) Determine a variação instantânea de y= x^2 –x -1em x = 2
6) Determine a variação instantânea de y= x^2 –x -1 em x = 1
7) Determine a variação instantânea de y= x^2 +x -2 em x = -1.
8) Determine a variação instantânea de y= x^3 em x = -1.
9) Determine a variação instantânea de y= x^2 +2x + 2 em x = 2.
10) Determine a variação instantânea de y= x^2 + 3x -2 em x = -1.

RESPOSTAS

11)01) 10 02) -4 03) -1 04) 32 05) 3 06) 1 07) -1 08) 3 09) 6 10) -5

AULA 5: RETA TANGENTE A UMA CURVA

Objetivos:

- Resolver o problema da determinação da reta tangente a uma curva num ponto.
- Analisar as regularidades da resolução do problema da determinação da reta tangente a uma curva num ponto.
- Praticar a determinação da reta tangente a uma curva num ponto.
- Determinar a reta normal a uma curva num dado ponto.
- Praticar a determinação da reta normal a uma curva num ponto.

Introdução

Veja a seguinte situação-problema!

Determinar a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto x=2.

Solução:

Dos estudos de Geometria Analítica sabemos que a equação de uma reta que passa por um ponto (x_0, y_0) é dada por $y-y_0 = m(x - x_0)$, onde m é o coeficiente angular da reta, ou seja m é igual a valor da tangente do ângulo formado pela reta e o eixo x.

Na situação em questão não conhecemos o ponto que a reta tangente deve passar e não conhecemos o coeficiente angular da reta tangente!

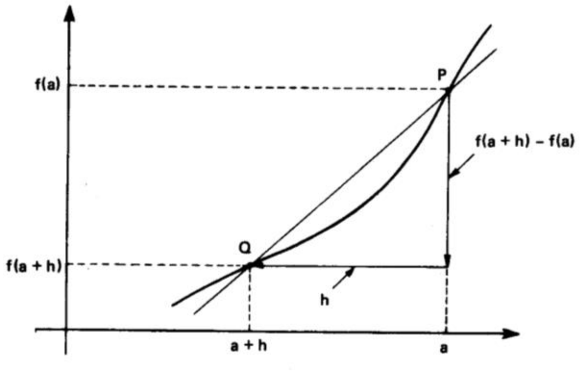
Para determinar o ponto que a reta deve passar basta calcular y(2)= 4. Logo, a reta deve passar pelo ponto de coordenadas (2,4)

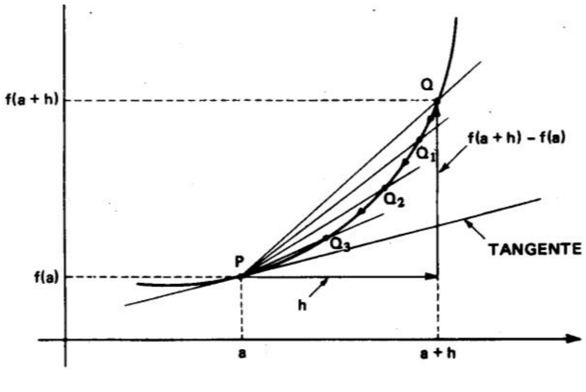
Para determinar o coeficiente da reta tangente adotaremos o seguinte procedimento:

- Determinaremos o coeficiente angular da reta secante à curva que passa nos pontos de abscissas x= 2 e x= 2 +h;
- Determinaremos o limite do coeficiente angular da secante quando h tender a zero.

Geometricamente este procedimento equivale a imaginar que enquanto o ponto P = (2,4) está fixo, o ponto $Q = (2+h, (2+h)^2)$ se aproxima de P, passando por sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3,.... sobre a curva até no limite chegar ponto P. Enquanto isso acontece os coeficientes angulares das retas secantes vão se aproximando do coeficiente angular reta tangente a curva no ponto P.

A figura abaixo ilustra a idéia!





Vejamos como funciona!

Os pontos P e Q sobre a curva tem as coordenadas dadas pelas abscissas x = 2 e x = 2+h. Logo, as ordenadas de P e Q são y(2)e y(2+h), respectivamente. Portanto, as ordenadas de P e Q são $y(2)= 2^2 = 4$ e $y(2 + h)= (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$.

Portanto, agora temos que P = (2,4) e Q = $(2 + h, 4 + 4h + h^2)$.

Como sabemos o coeficiente angular m de reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1,y_1) é dado por m = $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Assim, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P e Q é

$$m = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{2 + h - 2} = \frac{4h + h^2}{h}$$

O coeficiente angular da reta tangente é dado por $\lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$

O coeficiente angular da reta tangente é dado por $\lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h\left(\frac{4 + h}{h}\right) = \lim_{h \to 0}(4 + h) = 4.$

Agora nosso problema se resume a determinar a equação da reta que passa pelo ponto
P = (2,4) e tem coeficiente angular igual a 4.

Logo, a equação procurada é y-4 = 4(x-2).

Portanto, a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto x =2 é
y- 4 = 4(x-2).

Generalizando a situação problema temos a seguinte questão!

Determinar a equação da reta tangente à curva continua y = f(x) em $x = x_0$

Solução:

Essa situação pode ser resolvida de modo análoga a anterior.

Procederemos da seguinte maneira:

- obteremos o ponto P ao qual a reta tangente deve passar;
- determinaremos o coeficiente angular da reta secante à curva que passa nos pontos de abscissas $x = x_0$ e $x = x_0 + h$;
- em seguida obteremos o coeficiente angular m da reta tangente calculando o limite do coeficiente angular da secante quando h tender a zero.
- determinaremos a equação da reta que passa pelo ponto P e coeficiente angular m.

Podemos afirmar que o ponto ao qual a reta tangente deve passar é dado por

(x_0, f(x_0)) o que sempre existirá devido y = f(x) ser uma função continua por hipótese.

Como Δy e Δx são dados por $\Delta y = y(x_0 + h) - y(x_0)$ e $\Delta x = x_0 + h - x_0 = h$ então

o coeficiente angular m_s da reta secante a curva que passa pelos pontos P = (x_0 , y (x_0))

e Q = (x_0 + h , y (x_0 + h)) é $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Logo, o coeficiente angular m da reta tangente é dado por $m = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Como $\Delta x = h$ então podemos afirmar que o coeficiente angular m da reta tangente é dado por $m = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Desse modo, podemos afirmar que a equação da reta tangente a curva y = f(x) no ponto $x = x_0$ pode ser obtida com facilidade.

Vejamos agora a seguinte questão!

Qual é a equação da reta que é perpendicular à reta tangente a curva $y = x^2$ em x = 3.

Solução:

Esse problema consiste em determinar a equação da reta que é perpendicular a uma outra reta num dado ponto.

Neste caso o ponto é o ponto P de encontro da reta tangente com curva x = 3.

Logo, P = (3, 3^2) = (3,9)

Como a reta procurada é perpendicular à reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto x = 3. Podemos concluir que a reta em questão é a reta que passa pelo ponto de tangencia e é perpendicular a reta tangente neste ponto.

Sejam m e m_r os coeficientes angulares das retas tangente e normal a curva $y = x^2$, respectivamente. Como as retas tangente e normal são perpendiculares, da Geometria Analítica podemos afirmar que $m_r = -\frac{1}{m}$.

Como $m = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ então podemos afirmar que

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{3+h-3} = \lim_{h\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6 .$$

Assim, podemos concluir que o coeficiente angular m_r da reta perpendicular a reta tangente a curva em questão no ponto dado é $m_r = -\frac{1}{6}$

Desse modo a equação da reta perpendicular à curva $y = x^2$ no ponto $x = 3$ é $y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$.

A reta perpendicular à reta tangente a uma curva no ponto de tangencia é denominada de reta normal à curva.

Agora vejamos o resumo da aula!

RESUMO

- Para Determinar a equação da reta tangente à curva continua $y = f(x)$ em $x = x_0$ devemos:
    1. obter o ponto P ao qual a reta tangente deve passar;
    2. determinar o coeficiente angular da reta secante à curva que passa nos pontos de abscissas $x = x_0$ e $x = x_0 + h$;
    3. em seguida obter o coeficiente angular m da reta tangente calculando o limite do coeficiente angular da secante quando h tender a zero.
    4. determinar a equação da reta que passa pelo ponto P e coeficiente angular m.
- O coeficiente angular m da reta tangente à curva continua $y = f(x)$ em $x = x_0$ é dado por $m = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- A reta perpendicular à reta tangente a uma curva no ponto de tangencia é denominada de reta normal à curva;
- Se m e m_r são, respectivamente, os coeficientes angulares das retas tangente e normal a uma curva num dado ponto então $m_r = -\frac{1}{m}$.
- Para Determinar a equação da reta tangente à curva continua $y = f(x)$ em $x = x_0$ devemos:

  1-obter o ponto P ao qual a reta normal deve passar;

  2-determinar o coeficiente angular m da reta tangente em $x = x_0$;

  3- obter o coeficiente angular m_r da reta normal a curva no ponto $x = x_0$ por meio da relação $m_r = \frac{1}{m}$;

  4-Determinar equação da reta que passa por P e tem coeficiente angular m_r.

QUESTÕES

1) Determinar a equação da reta tangente à curva y = x^2 no ponto de abscissa x = 4.
2) Determine a equação da reta tangente à curva y = x^2 em x = 5.
3) Determine equação da reta tangente à curva y = x^2 em x = -2.
4) Determine equação da reta tangente à curva y = $\frac{x^2}{4}$ em x = -2.
5) Determine equação da reta tangente à curva y= x^3 em x = 4.
6) Determine equação da reta normal à curva y= x^2 –x -1em x = 2
7) Determine equação da reta normal à curva y= x^2 –x -1 em x = 1
8) Determine equação da reta normal à curva y= x^2 +x -2 em x = -1.
9) Determine equação da reta normal à curva y= x^3 em x = -1.
10) Determine equação da reta normal à curva y= x^2 +2x + 2 em x = 2.

RESPOSTAS

1) y - 16 = 8(x - 4)
2) y - 25 = 10(x - 5)
3) y - 4 = -4(x + 2)
4) y - 1 = -x-2
5) y - 64 = 48(x - 4)
6) y – 1= $-\frac{1}{3}$(x – 2)
7) y + 1 = x – 1
8) y + 2 = 1 – x
9) y + 1 = 3(x + 1)
10) y – 10 = 6(x – 2)

AULA 6: A DERIVADA E SUAS PROPRIEDADES

Objetivos:

- Conceituar a derivada de uma função.
- Calcular a derivada de uma função.
- Calcular derivadas sucessivas de uma função.
- Apresentar a derivada de operações com funções.

Introdução

Quando resolvemos o problema da taxa de variação instantânea de uma função y = f(x) chegamos à conclusão de a taxa de variação T é dada por

T = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$!

Quando resolvemos o problema da equação da reta tangente a uma curva continua y = f(x) também concluímos que o coeficiente angular m da reta tangente é dado por m = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Desse modo podemos afirmar que o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é útil na resolução de inúmeros problemas!

Muitos conceitos e operações matemáticas são frutos da observação de procedimentos que se repetem na solução de uma categoria de problemas de mesma natureza ou mesmo de procedimentos comuns a resolução de problemas de natureza distintas.

Como vimos na resolução dos problemas da taxa de variação e da reta tangente a uma curva somos levados a calcular o limite de $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Em virtude disso os estudiosos propuserem o conceito de derivada de uma função num ponto como está apresentado abaixo.

Definição:

Dada uma função y= f(x) uma função definida num intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no ponto x_0 ao número f`(x_0) dado pelo limite

$$f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este limite existir.

Considerando $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$ também podemos definir a derivada de uma função y = f(x) num ponto por meio das seguintes definições

Definição:

Dada uma função y= f(x) uma função definida num intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no ponto x_0 ao número f`(x_0) dado pelo limite.

$$f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir.

Ou pela definição

Definição:

Dada uma função y= f(x) uma função definida num intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no ponto x_0 ao número f`(x_0) dado pelo limite

$$f`(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

se este limite existir.

Esta última definição deixa bem clara a relação entre a derivada de uma função num ponto e os problemas da taxa de variação e da reta tangente a uma curva.

Usando a definição de derivada de uma função num ponto podemos afirmar que:

- a taxa de variação de uma função num dado ponto é dada pela de derivada da função no ponto;
- o coeficiente angular da reta tangente a uma curva representada por uma função num ponto é dado pela derivada da função no ponto.

Desse modo temos uma interpretação Física e outra Geométrica da derivada de uma função num ponto.

Vejamos dois exemplos do cálculo da derivada de uma função num ponto!

Exemplo 1

Dada a função f(x)= x^2 a derivada de f no ponto x = 4 é dada por

$$f`(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x+4) = 8.$$

Portanto, a derivada de f(x)= x^2 em x= 4 é f`(4)= 8.

Exemplo 2

Dada a função f(x)= x^3 a derivada de f no ponto x = 2 é dada por f`(2)= $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

= $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)$ = 2^2 + 2. 2 + 4 = 12.

Portanto, podemos afirmar que para f(x)= x^3 temos que f`(2)= 12.

Vejamos agora a definição de função derivada que é proveniente da intenção de obter uma expressão para a derivada de uma função para um ponto qualquer.

Definição:

Dada uma função y = f(x) chamamos de função derivada ou derivada de f a função f`(x) dada por f`(x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se este limite existir.

Vejamos dois exemplos do cálculo da derivada de uma função!

Exemplo 3

Dada a função f(x)= x^2 a sua derivada f`(x) é dada por

f`(x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x)-x^2}{\Delta x}$

= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta^2 x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$ = 2x.

Portanto, podemos afirmar que a derivada de f(x) = x^2 é f`(x)= 2x.

Exemplo 4

Dada a função f(x)= x^3 a sua derivada f`(x) é dada por

f`(x) = $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta^2 x+\Delta^3 x)-x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta^2 x+\Delta^3 x}{\Delta x}$

= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2 x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2 x)$ = $3x^2$

Portanto, podemos afirmar que a derivada de f(x) = x^3 é f`(x)= $3x^2$.

Felizmente não necessitamos mais realizar todos esses cálculos quando vamos determinar a derivada de uma função!

O quadro a seguir nos dá as derivadas de algumas funções usuais.

Função	Derivada
1) f(x) = c	f`(x)= 0
2) f(x) = x^n ,n∈R	f`(x)= nx^{n-1}
3) f(x) = cosx	f`(x)= - senx
4) f(x) = senx	f`(x)=cosx
5) f(x) = a^x	f`(x)= a^x.lna
6)f(x) = e^x	f`(x)= e^x
7)f(x) = $\log_a x$	f`(x)= $\frac{1}{x\ln a}$
8)f(x)= lnx	f`(x)= $\frac{1}{x}$
9) f(x)= tgx	f`(x)= $\sec^2 x$
10) f(x)=arcsenx	f`(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) f(x)=arccosx	f`(x)= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12) f(x)=arctgx	f`(x)= $\frac{1}{1+x^2}$
13) f (x) = cotg x,	f '(x) = $-\cos\mathrm{ec}^2$x
14) f (x) = sec x	f '(x) = tg x . sec x
15) f (x) = cossec x	f'(x) = –cotgx$\cdot$ cossec x

Agora que temos como determinar a derivada de algumas funções veremos como determinar a derivada de funções formadas por adições, diferenças, produtos, quocientes e composições de funções!

- **Derivada da adição:**

A derivada da soma é a soma das derivadas.

Em símbolos temos:

Se $f(x) = u(x) + v(x)$ então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Exemplos:

1) Para $f(x) = x^3 + 5x^2$ temos que $f'(x) = 3x^2 + 10x$

2) Para $f(x) = x^3 + sen\,x$ temos que $f'(x) = 3x^2 + \cos x$

3) Para $f(x) = e^{-x} + \ln x$ temos que $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x}$

- **Derivada da diferença:**

A derivada da diferença é a diferença das derivadas.

Em símbolos temos:

Se $f(x)=u(x)-v(x)$ então $f'(x)=u'(x)-v'(x)$

Exemplos:

1) Para $f(x)=x^3-x^2$ temos que $f'(x)=3x^2-2x$

2) Para $f(x)=x^5-tg\,x$ temos que $f'(x)=5x^4-\sec^2 x$

3) Para $f(x)=e^x-\ln x$ temos que $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$

• **Derivada do produto de uma função por um número.**

A derivada de uma função multiplicada por um número é igual ao número multiplicado pela derivada da função.

Em símbolos temos:

Se f(x)= k. g(x) então f\`(x)= k .g\`(x)

Exemplos

1) Para f(x)= 3senx temos que f\`(x)= 3cosx.
2) Para f(x)= 5lnx temos que f\`(x)= 5. $\frac{1}{x}$
3) Para f(x)= 7a^x temos que f\`(x) =7a^x. lna

•**Derivada do produto:**

A derivada de um produto de funções é dada pela derivada da 1ª função multiplicada pela 2ª função, adicionado com produto da 1ª função pela derivada da 2ª função.

Em símbolos temos:

Se $f(x)=u(x)\bullet v(x)$ então $f'(x)=u'(x)\bullet v(x)+u(x)\bullet v'(x)$

Exemplos:

1) Se $f(x)=x^3 sen\,x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(x^3)'sen\,x+x^3(sen\,x)'$

$\Rightarrow \quad f'(x)=3x^2\,sen\,x+x^3\cos x$

2) Se $f(x)=x^5 tg\,x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(x^5)'tg\,x+x^5\,(tg\,x)'$

$\Rightarrow \quad f'(x)=5x^4\,tg\,x+x^5\,\sec^2 x$

3) Se $f(x)=e^x\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$

•Derivada do quociente:

A derivada de um quociente de funções é dada pelo produto da derivada da1ª função pela 2ª função menos o produto da 1ª função pela derivada 2ª função, dividido pelo quadrado da 2ª função.

Em símbolos temos:

$$\text{Se } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ então } f'(x) = \frac{u'(x) \bullet v(x) - u(x) \bullet v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplos:

1) Se $f(x) = \dfrac{x^3}{sen\,x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{(x^3)'sen\,x - x^3(sen\,x)'}{[sen\,x]^2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2\,sen\,x - x^3 \cos x}{sen^2 x}$$

2) Se $f(x) = \dfrac{x^5}{tg\,x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{(x^5)'tg\,x - x^5\,(tg\,x)'}{[tg\,x]^2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5x^4\,tg\,x - x^5 \sec^2 x}{tg^2 x}$$

3) Se $f(x) = \dfrac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{(4)'x - 4(x)'}{x^2} = \dfrac{-4}{x^2}$

•DERIVADA FUNÇÃO COMPOSTA

A derivada da composição de gof(x) de duas funções é dada pelo produto g`(f(x)). f`(x).

Em símbolos temos:

Se w(x) = gof(x) então w`(x)= g`(f(x)). f`(x).

Exemplos:

1) Para f(x)= cós(2x) temos que f`(x)= -2xsen2x
2) Para f(x)= sen^{3}x temos que f`(x)= 3sen^{2}x.cosx
3) Para f(x)= e^{7x^2-2x} temos que f`(x)=(14x- 2). e^{7x^2-2x}
4)

DERIVADA SUCESSIVA

Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo aberto I e se a função f`(x) também for derivável em I, então sua derivada é a derivada segunda ou derivada de ordem 2 da função, indicada por $f''(x)$.

Exemplo:

1) Se $f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 20x^3$

2) Se $f(x) = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{3x}(3x)' = 3e^{3x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 3e^{3x}(3x)' = 9e^{3x}$

Se a função $f''(x)$ também for derivável em I, então sua derivada é a derivada terceira ou derivada de ordem 3 da função $f''(x)$ indicada por $f'''(x)$. E assim por diante, se a derivada de ordem *n* for derivável em I, pode-se obter a derivada de ordem n + 1, da função f.

1) Se $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4$ $\quad f''(x) = 20x^3$ $\quad f'''(x) = 60x^2$

$f^{iv}(x) = 120x$ $\quad f^{v}(x) = 120$ $\quad f^{vi}(x) = 0$

2) Se $f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x}$ $\quad f''(x) = e^{-x}$ $\quad f'''(x) = -e^{-x}$

$f^{iv}(x) = e^{-x}$ $\quad f^{v}(x) = -e^{-x}$ $\quad f^{vi}(x) = e^{-x}$

RESUMO

- Dada uma função y= f(x) uma função definida num intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no ponto x_0 ao número f`($x_0$) dado pelo limite f`(x_0) = $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se este limite existir.
- Dada uma função y = f(x) chamamos de função derivada ou derivada de f a função f`(x) dada por f`(x) = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se este limite existir.
- A taxa de variação de uma função num dado ponto é dada pela de derivada da função no ponto;
- O coeficiente angular da reta tangente a uma curva representada por uma função num ponto é dado pela derivada da função no ponto.
- Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$
- Dada a função f (x) = k, $k \in \Re$, temos: f ' (x) = 0.
- Dada a função f (x) = sen x, temos: f ' (x) = cos x .
- Dada a função f (x) = cos x, temos: f ' (x) = - sen x.
- Dada a função f (x) = tg x, temos: f ' (x) = $\sec^2 x$
- Dada a função f (x) = cotg x, temos: f ' (x) = $-\operatorname{cosec}^2 x$.
- Dada a função f (x) = sec x, temos: f ' (x) = tg x . sec x
- Dada a função f (x) = cossec x, temos: f ' (x) = – cotg x · cossec x
- Dada a função f (x) = a^x, com a $\in \Re_+^*$ e $a \neq 1$, temos f ' (x) = $a^x . \ln(a)$

- Dada a função f (x) = $\log_a x$, temos: f '(x) = $\dfrac{1}{x \ln a}$
- Se f(x)= k g(x) com $k \in \Re$, então f`(x)= k.g`(x)
- Se $f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Se $f(x) = u(x) - v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) - v'(x)$
- Se $f(x) = u(x) * v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
- Se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2}$
- Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo aberto I e se a função também for derivável em I, então sua derivada é a derivada segunda ou derivada de ordem 2 da função, indicada por $f''(x)$.

QUESTÕES

(1) Seja $f(x) = x^2 + 1$. Calcule

(a) $f'(x)$ (b) $f'(0)$ (c) $f'(1)$

(2) Seja $f(x) = 3x + 2$. Calcule

(a) $f'(x)$ (b) $f'(3)$ (c) $f'(2)$

(3) Determine a equação da reta tangente a curva $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $x = 3$.

(4) Determine a equação da reta tangente a curva $f(x) = x^3 - x$ no ponto $x = 2$.

(5) Calcule $f'(x)$, onde

(a) $f(x) = x^2 + x$

(b) $f(x) = 5x - 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = 2x^3 - x^2$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(6) Calcular $f'(x)$, onde

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(d) $f(x) = x^{-7}$

(e) $f(x)=\sqrt[5]{x}$

(f) $f(x)=\sqrt[7]{x^5}$

(g) $f(x)=(x^2-3)^4$

(h) $f(x)=\dfrac{3-2x}{3+2x}$

(i) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-3}$

(j) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$

(k) $f(x)=(2x+1)\sqrt{3-x^2}$

(l) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

RESPOSTA

(1) (a) $f'(x)=2x$ (b) $f'(0)=0$ (c) $f'(1)=2$

(2) (a) $f'(3)=3$ (b) $f'(3)=3$ (c) $f'(2)=3$

(3) $y=6x-8$

(4) $y=11x-6$

(5) (a) $f'(x)=2x\ +1$

(b) $f'(x)=5$

(c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(d) $f'(x)=6x^2-2x$

(e) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

(f) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$

(g) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(6)(a)

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

(b) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$

(c) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$

(d) $f'(x)=-7x^{-8}$

(e) $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

(f) $f'(x)=\dfrac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

(g) $f'(x)=8x(x^2-3)^3$

(h) $f'(x)=-\dfrac{12}{(3+2x)^2}$

(i) $f'(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-3}}$

(j) $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

(k) $f'(x)=2\sqrt{3-x^2}-\dfrac{3x}{\sqrt{3-x^2}}$

(l) $f'(x)=\dfrac{9x-2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

AULA 7: ESTUDO DAS FUNÇÕES

Objetivos:

- Determina os pontos críticos de uma função;
- Determina os intervalos onde a função é crescente e decrescente.
- Determinar os pontos de máximo ou de mínimo de uma função.

Introdução

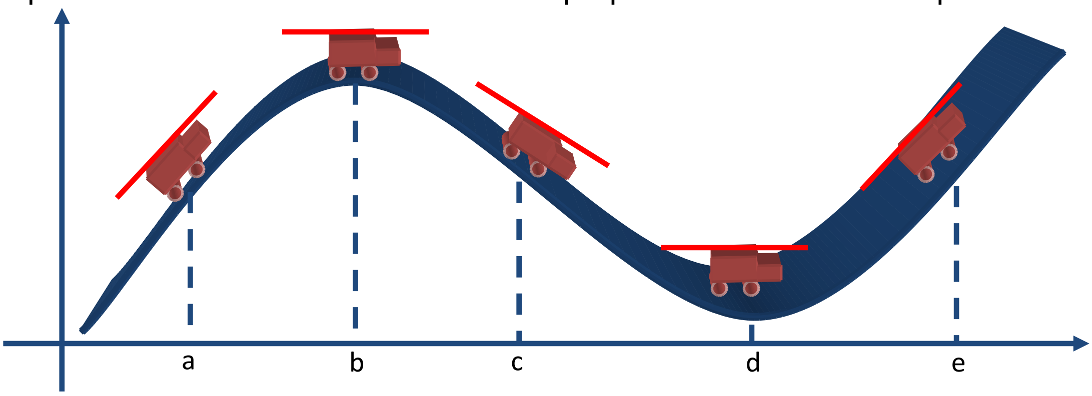
Veja a seguinte situação-problema!

Determinar o valor de x em que a função $y = (x-2)^2$, assume um ponto máximo e/ou mínimo.

Solução

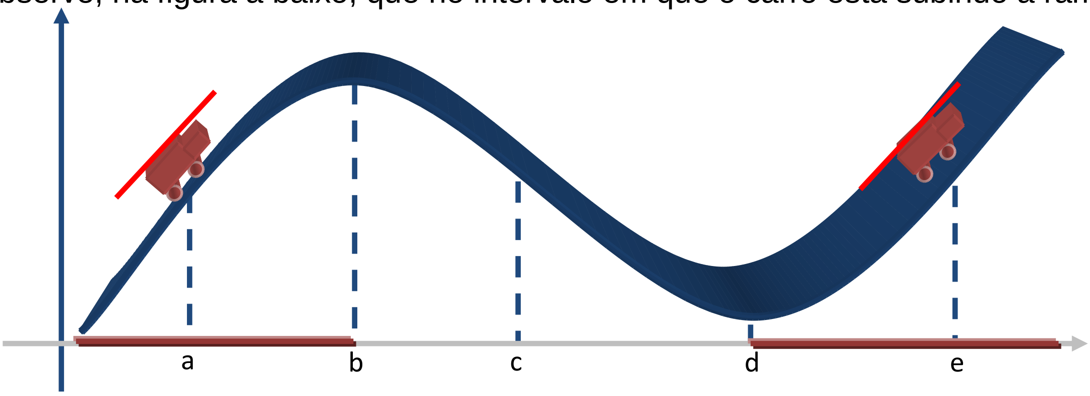
Para compreendermos o princípio utilizado para identificar o ponto de máximo ou de mínimo, devemos imaginar um carro se deslocando na uma montanha russa,

só que este carrinho estará levando uma pequena "vara" em seu capu.

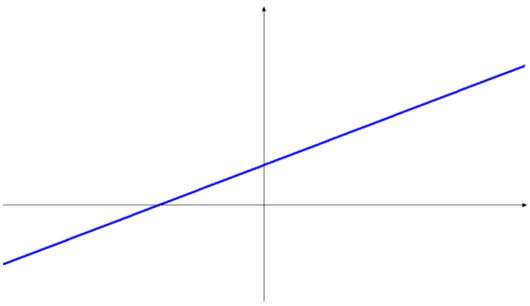


<u>1° Caso</u>:

Observe, na figura a baixo, que no intervalo em que o carro está subindo a rampa, a



"vara" que está encima do capu do carro, e que representa a reta tangente a curva no ponto onde o carro está, é semelhante a uma reta crescente.



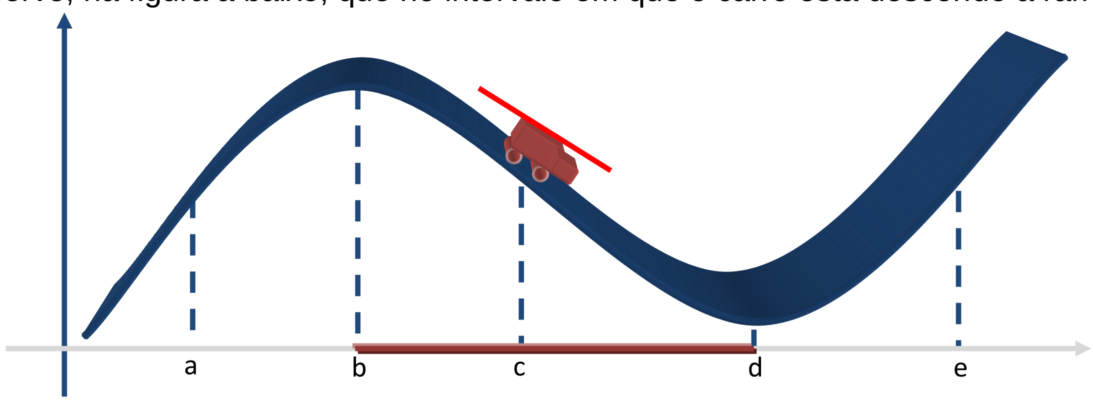
Reta crescente, seu coeficiente angular é positivo!

Como o coeficiente angular da reta tangente é a derivada no ponto, podemos então afirmar que:

> Quando a derivada $f'(x)$ for positiva em um determinado intervalo, significa que a função $f(x)$ é crescente neste intervalo.

<u>2° Caso</u>:

Observe, na figura a baixo, que no intervalo em que o carro está descendo a rampa

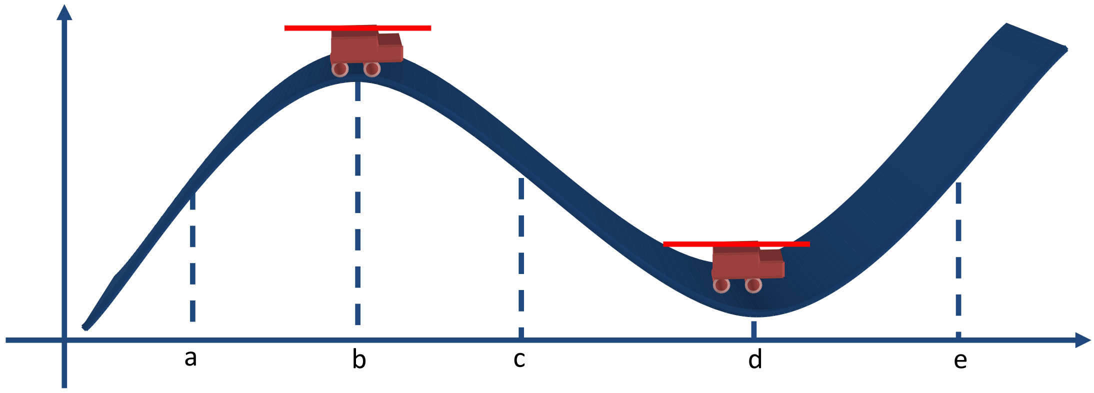


a "vara" que está encima do capu do carro, e que representa a reta tangente a curva no ponto onde o carro está, é semelhante a uma reta decrescente. Como o coeficiente angular da reta tangente é a derivada no ponto, podemos então afirmar que:

> Quando a derivada $f'(x)$ for negativa em um determinado intervalo, significa que a função $f(x)$ é decrescente neste intervalo.

<u>3° Caso</u>:

Observe, na figura a baixo, que nas duas posições a “varas” que está encima do



capu do carro, e que representa a reta tangente a curva no ponto onde o carro está, é paralela ao eixo dos x, logo seu coeficiente angular é zero. Como o coeficiente angular da reta tangente é a derivada no ponto, podemos então afirmar que:

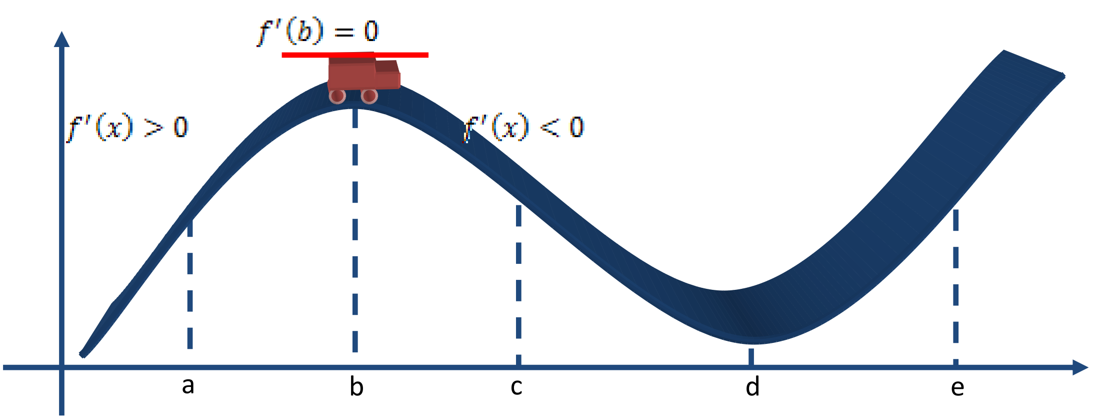
> Quando a derivada $f'(x_0) = 0$, significa que a função $f(x)$ possui um ponto crítico em x_0.

<u>O MÁXIMO</u>

O máximo de uma função ocorre quando duas condições são satisfeitas

<u>1° Condição</u>: a derivada no ponto é zero, $f'(b) = 0$;

<u>2° Condição</u>: o sinal da derivada no intervalo do lado esquerdo do ponto é positivo $f'(x) > 0$ e o sinal da derivada no intervalo do lado direito do ponto é negativo $f'(x) < 0$.

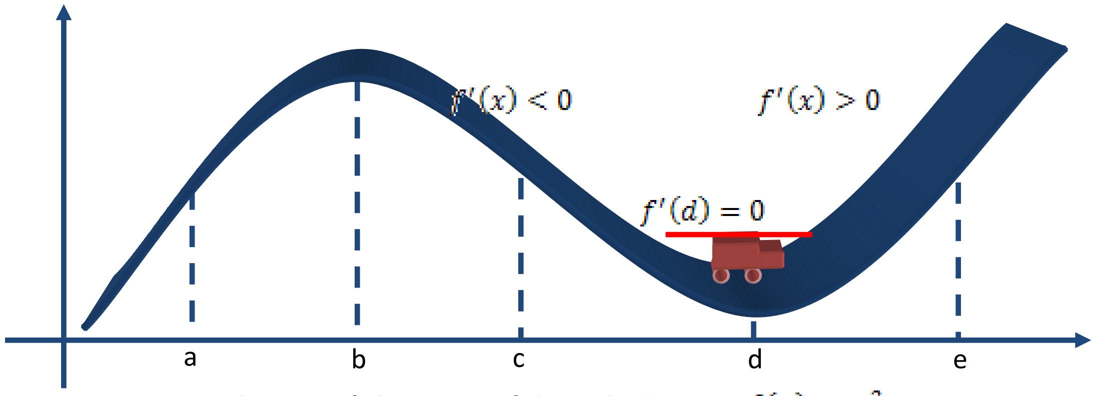


O MÍNIMO

O mínimo de uma função ocorre quando duas condições são satisfeitas

1° Condição: a derivada no ponto é zero, $f'(d) = 0$;

2° Condição: o sinal da derivada no intervalo do lado esquerdo do ponto é negativo $f'(x) < 0$ e no intervalo do lado direito do ponto é positivo $f'(x) > 0$.

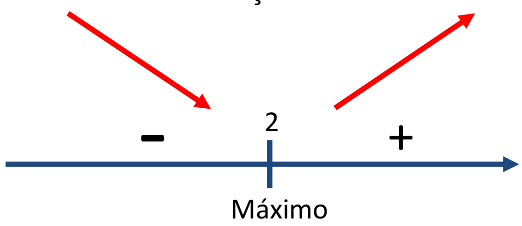


Exemplo 1 – Determine o máximo ou mínimo da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Solução

Vamos primeiramente determinar a derivada da função: $f'(x) = 2x - 4$

Faremos agora o estudo do sinal da função derivada



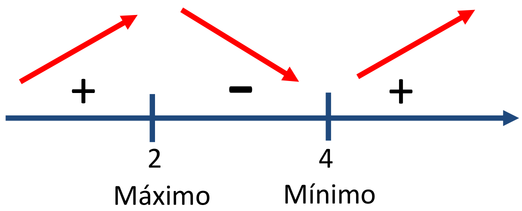
Lembre-se que a função $f(x)$ é decrescente quando a derivada é negativa e a função $f(x)$ é crescente quando a derivada é positiva. Logo podemos afirmar que a função possui um máximo no ponto x = 2.

Exemplo 2 – Determine o máximo ou mínimo da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 5$.

Solução

Vamos primeiramente determinar a derivada da função: $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

Faremos agora o estudo do sinal da função derivada



Logo podemos afirmar que a função possui um máximo no ponto x = 2 e um mínimo no ponto x = 4.

RESUMO

- Quando a derivada $f'(x)$ for positiva em um determinado intervalo, significa que a função $f(x)$ é crescente neste intervalo.
- Quando a derivada $f'(x)$ for negativa em um determinado intervalo, significa que a função $f(x)$ é decrescente neste intervalo.
- Quando a derivada $f'(x_0) = 0$, significa que a função $f(x)$ possui um ponto crítico em x_0.

- O máximo de uma função ocorre quando duas condições são satisfeitas

  <u>1° Condição</u>: a derivada no ponto é zero, $f'(b) = 0$;

  <u>2° Condição</u>: o sinal da derivada no intervalo do lado esquerdo do ponto é positivo $f'(x) > 0$ e o sinal da derivada no intervalo do lado direito do ponto é negativo $f'(x) < 0$.
- O mínimo de uma função ocorre quando duas condições são satisfeitas

  <u>1° Condição</u>: a derivada no ponto é zero, $f'(d) = 0$;

  <u>2° Condição</u>: o sinal da derivada no intervalo do lado esquerdo do ponto é negativo $f'(x) < 0$ e no lado direito do ponto é positivo $f'(x) > 0$.

QUESTÕES

(01) Determine o máximo ou mínimo das funções:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 5$

(b) $f(x) = -x^2 + 7x - 10$

(c) $f(x) = x^2 - 7x + 12$

(d) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3$

(e) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x - 5$

Respostas

(01) (a) x = 1 (máximo) e x = 5 (mínimo)

(b) x = 3,5 (máximo)

(c) x = 3,5 (mínimo)

(d) x = 0 (mínimo) e x = 4 (máximo)

(e) x = 2 (máximo) e x = 6 (mínimo)

AULA 8: OTIMIZAÇÃO

Objetivo:

- Resolver questões que envolvam problemas de máximo e mínimo de funções;

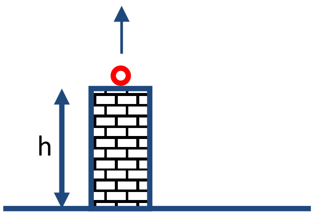
Introdução

A partir da definição matemática de máximos e míninos, abordado na aula passada, iremos nesta aula resolver problemas que envolvam maximização ou minimização de parâmetros.

Exemplo 1 - Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (metros), em relação ao solo, é dada por $h = 30 + 20t - 5t^2$, em que t indica o número de segundos decorridos após o lançamento. Em que instante a pedra atingirá sua altura máxima?

Solução

Esquematicamente o problema pode ser representado pela figura abaixo



É importante que quando a pedra alcançar a altura máxima sua velocidade será igual a zero. Você deve saber que a equação da velocidade pode ser obtida derivando-se a equação da posição do móvel, que simbolicamente pode ser representado por:

$$\boxed{v = \frac{dh}{dt}}$$

Logo: $v = 20 - 10t$

O instante em que o móvel alcança a altura máxima é obtido determinando-se o zero da função velocidade.

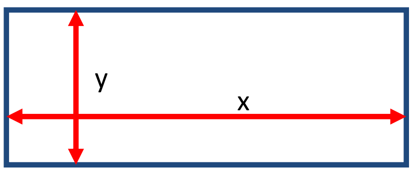
$v = 20 - 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$

Isto é o móvel alcançou a altura máxima no instante 2s.

Exemplo 2 - Um retângulo de dimensões x e y tem perímetro $2a$ (a é constante dada). Determine x e y para que sua área seja máxima.

Solução

Esquematicamente o problema pode ser representado pela figura abaixo



Sabemos que o perímetro do retângulo é: $2x+2y=2a$ de onde tiramos a seguinte expressão:

$$\boxed{y=a-x}$$

Como desejamos determine x e y para que sua área seja máxima, tememos a área do retângulo:

$$\boxed{Area=x.y}$$

Substituindo na expressão acima a equação $y=a-x$, temos:

$$Area=x.(a-x)$$

Que após manipulação algébrica toma a seguinte forma:

$$Area=ax-x^2$$

Como o parâmetro que desejamos maximizar é a área, então devemos derivar a função da área e igualá-la a zero.

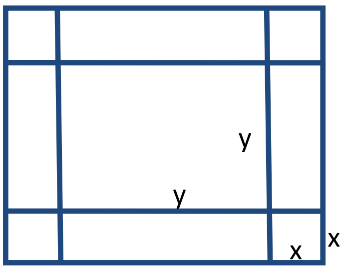
$$\frac{dArea}{dx}=a-2x=0$$

De onde temos $x=\frac{a}{2}$,

Substituindo na expressão $y=a-x$, temos que $y=\frac{a}{2}$.

Logo para termos área máxima devemos ter as seguintes dimensões: $x=\frac{a}{2}$ e $y=\frac{a}{2}$.

Exemplo 3 - Um fabricante de caixa quadrada de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrados de 576 cm^2, cortando quadrado iguais nas quatro pontas e dobrando os lados. Calcule a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.
Solução
Esquematicamente o problema pode ser representado pela figura abaixo



Como a folha é quadrada e que a área é 576 cm^2, temos que

$$(y+2x)^2=576$$

de onde temos: $y=24-2x$. O volume da caixa, considerando uma altura x, é dado pela expressão: $V=y^2.x$

Substituindo $y=24-2x$, na equação do volume temos: $V=x.(24-x)$

Que após manipulação algébrica temos: $V=24x-x^2$

Como o parâmetro que desejamos maximizar é o volume, então devemos derivar a função do volume e igualá-la a zero.

$$\frac{dV}{dx}=24-2x=0$$

De onde temos $x=12$ e $y=12$,

RESUMO

A resolução de todos os problemas de otimização segue os passo as seguir:
1º Passo: Analisar o problema e identificar as expressões matemáticas envolvidas que em geral são duas expressões.
2º Passo: Devemos isolar um dos parâmetros na primeira expressão e substitui-lo na segunda, de forma que está fique só com uma variável.
3º Passo: devemos derivar a segunda expressão e igualar o resultado da derivada a zero, com isto estaremos achando os pontos críticos que podem estar relacionados ao máximo ou ao mínimo da função.
4º Passo: definido os valores de x onde podem acontecer os máximos e mínimos, devemos substituir este valores na função para assim realmente determinar o máximo ou mínimo da função.

QUESTÕES

(01) Um fazendeiro precisa construir dois currais lado a lado, com uma cerca comum. Se cada curral deve ter uma certa área A, qual o comprimento mínimo que a cerca deve ter?
Resp: $L_{min} = 4\sqrt{3A}$

(02) Quais são os pontos do gráfico de $y = 4 - x^2$ mais próximo do ponto $(0,2)$?
Resp: $\left(\sqrt{3/2}, 5/2\right)$ e $\left(-\sqrt{3/2}, 5/2\right)$

(03) Uma página retangular contém 24 polegadas quadradas de área impressa. As margens no topo e na parte inferior da página são de $1\frac{1}{2}$ polegada cada. As margens laterais são de uma polegada cada. Que dimensões a página deve ter para que o consumo de papel seja mínimo?
Resp: $x = 9$polegadas e $y = 6$polegadas

(04) Demonstre que a função f(x)= ax^2 +bx +c possui um máximo quando a$>$ 0.

(05) Demonstre que a função f(x)= ax^2 +bx +c possui um mínimo quando a$<$ 0.

(06) Achar dois números positivos cuja soma é 70 e cujo produto seja máximo.

(07) Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V, de forma que sua área total seja máxima.

(08) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por C(x)= $2x^3$ +$6x^2$+18x + 60 e o valor obtido pela venda é dado por V(x)= 60x – $12x^2$, determinar o número de unidades mensais do artigo que maximiza o lucro da fábrica.

(09) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrado de 900cm^2 , cortando quadrados iguais nas suas pontas e dobrando os lados. Calcule a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

(10) Uma ilha está em um ponto A , a 10Km do ponto B mais próximo sobre uma praia reta. Um armazém está no ponto C, a 7Km de B sobre a praia. Se um homem pode remar à 4Km/h e andar à razão de 5Km/h, aonde deveria desembarcar para ir da ilha ao armazém no menor tempo possível.

(11) Demonstre que o ponto de máximo ou de mínimo da função f(x)= ax^2 +bx +c tem as coordenadas ($-\frac{b}{2a}$, $-\frac{\Delta}{4a}$).

(12) Demonstre que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo é o quadrado.

(13) Demonstre que o retângulo de área máxima e perímetro dado é o quadrado.

(14) Demonstre que entre os retângulos de mesma área o que possui o menor perímetro é o quadrado.

(15) Demonstre que entre os triângulos de mesmo perímetro o que possui a maior área é o triangulo isósceles.

AULA 9: REGRA DE L'HOSPITAL

Objetivo:

- Resolver limites com problema de indeterminação;

Introdução

Uma das principais aplicações da derivada é o levantamento da indeterminação que possibilita o cálculo de limites de funções que possuem alguns tipos de indeterminação, para compreendermos melhor vejamos a seguir uma situação problemas.

Situação Problema

Exemplo 1 - Determine o limite $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

Solução

Se fizermos a substituição do valos $x = 4$ na expressão temos

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Como $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, surge a necessidade de levantá-la para podermos calcularmos o valor do limite, para isto há dois caminhos possíveis que são o uso de manipulação algébrica e o outro mais eficiente é o uso da regra de L'Hospital. Antes de começarmos a resolver o limite vamos agora mostrar a definição da regra de L'Hospital.

<u>Regra de l'Hospital</u>

Se para $x=a$ (finito ou infinito) $f(x)$ e $g(x)$ tendem para zero ou infinito, tomando $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ então:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

x

a

<u>Forma de resolvermos o limite</u>: Uso da Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)'}{(x-4)'}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{1}=2\times 4=8$$

Exemplo 2 - Determine o limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Solução

Uso da Regra de L'Hospital

Se substituirmos o valor $x = 3$ na expressão teremos $\frac{0}{0}$ que é indeterminado, logo podemos aplicar a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^2 - 9)'} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 5}{2x}$$

se substituirmos agora o valor $x = 3$ na expressão não resultará mais em $\frac{0}{0}$, logo se prossegue normalmente resolvendo o limite.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{2 \times 3 - 5}{2 \times 3} = \frac{6 - 5}{6} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 3 - Determine o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 9}$

Solução

Uso da Regra de L'Hospital

Se substituirmos o valor $x = +\infty$ na expressão teremos $\frac{\infty}{\infty}$ que é indeterminado, logo podemos aplicar a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - x + 6)'}{(x^2 - 9)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{2x}$$

se substituirmos agora valor $x = +\infty$ na expressão teremos novamente $\frac{\infty}{\infty}$ que é indeterminado, logo devemos aplicar novamente a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Exemplo 4 - Determine o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + 6}{x^2 - 9}$

Solução

Uso da Regra de L'Hospital

Se substituirmos o valor $x = +\infty$ na expressão teremos $\frac{\infty}{\infty}$ que é indeterminado, logo podemos aplicar a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x + 6)'}{(x^2 - 9)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x}$$

se substituirmos agora valor $x = +\infty$ não resulta mais ma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, logo não se aplica mais a regra de L'Hospital, logo o limite é:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Exemplo 4 - Determine o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9}{x + 6}$

Solução

Uso da Regra de L'Hospital

Se substituirmos o valor $x = +\infty$ na expressão teremos $\frac{\infty}{\infty}$ que é indeterminado, logo podemos aplicar a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 9)'}{(x + 6)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1}$$

se substituirmos agora valor $x = +\infty$ não resulta mais ma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, logo não se aplica mais a regra de L'Hospital, logo o limite é:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$$

QUESTÕES

Determine os limites

(01) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(02) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

(03) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$

(04) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$

(05) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$

(06) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

(07) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x^2 + x}$

(08) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

(09) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$

(10) $\lim_{x \to 0^+} (x^2 \ln x)$