UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA.
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA MODALIDADE A DISTÂNCIA

ESTATÍSTICA

Prof . Dr. Fábio José da Costa Alves

BELÉM-PA-2008

Prof. Dr[a] Marília Brasil Xavier

REITORA

Prof[a]. M.Sc. Elvira Maria Ferreira Soares

VICE-REITORA

Prof. M.Sc. Neivaldo Oliveira Silva

PRÓ-REITORA DE GRADUAÇÃO

Prof[a]. M.Sc. Maria José de Souza Cravo

DIRETORA DO CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

Prof. M.Sc. Gilberto Emanuel Reis Vogado

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA.

Prof[a]. M.Sc. Aldeniza de Oliveira Ximenes

COORDENADOR DO NECAD – NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA.

Prof. M.Sc. Rubens Vilhena Fonseca

COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA MODALIDADE A DISTÂNCIA

Apresentação

Cara aluno, diariamente jornais, televisão, rádio, revistas e outros meios de comunicação nos bombardeiam com notícias, baseadas em estatísticas, como se fossem verdades absolutas. Nessa hora, provavelmente, você sente a importância de ser capaz de avaliar corretamente o que lhe dizem. Todavia, será que os números apresentados resultam de uma análise estatística cuidadosa? O perigo está no fato de que, se não consegue distinguir as afirmações falsas das verdadeiras, então você está vulnerável à manipulação por outras pessoas, cujas conclusões podem conduzir você para decidir contra os interesses seus e, depois, arrepender-se.

Por estas razões convidamos você a iniciarmos um estudo sobre a Estatística, que é a parte da ciência que coleta, organiza e interpreta dados utilizando técnicas para lidar com a variabilidade, ou seja, é uma coleção de métodos utilizados para converter dados brutos em informações que auxiliem na tomada de decisão.

Portanto, caro aluno, a Estatística pode ser aplicada em diversas áreas: em pesquisa de opinião ou de mercado, coletando informações cuidadosamente de uma amostra específica para expandir os resultados para toda a população; na área governamental, conduzindo experimentos para auxiliar no desenvolvimento de políticas públicas e programas sociais; em pesquisa científica para embasar as conclusões; em negócios e indústrias, quantificando incertezas para otimizar recursos.

Para você alcançar uma boa aprendizagem, leia a parte teórica de cada aula mais de uma vez, refazendo, com atenção, os exemplos ilustrativos e quando perceber ter domínio sobre o assunto abordado na aula, faça as questões que existem no final de cada aula e envie a sua resposta para o tutor da disciplina.

Desejamos a você um bom estudo!

SUMÁRIO

AULA 1: INTRODUÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Objetivos:

- Conceituar estatística, população, amostra, variáveis, dados brutos e rol;
- Construir distribuição de freqüência;
- Construir representações gráficas.

Caro aluno, nesta aula iniciará nosso estudo sobre estatística, iremos estudar seus conceitos e classificação, a organização e formas de representar dados para facilitar sua analise e interpretação.

É muito comum estarmos interessado em extrair conclusões sobre um grupo grande de indivíduos ou objetos, onde é difícil ou impossível examinar todos os seus elementos, neste momento recorremos a **estatística** que contém os métodos científicos para coleta, organização, resumo, apresentação e análise de dados que conduzam a conclusões válidas e decisões plausíveis.

A estatística possibilita inferirmos conclusões sobre um grupo inteiro, chamado de **população,** a partir dos resultados encontrados examinado uma pequena parte desse, chamado de **amostra.** Observe os exemplos:

1) Desejamos extrair conclusões sobre as alturas de 1.000 estudantes de uma escola secundária, para isto analisamos a altura de 50 estudantes selecionados (que é uma amostra dessa população).
2) Desejamos extrair conclusões sobre a porcentagem de parafusos de porca defeituosos produzidos em uma fábrica. Para isto examinando 20 parafusos produzidos diariamente durante uma semana (os parafusos selecionados compõem uma amostra).

É importante que você saiba que a população pode ser finita ou infinita, por exemplo:

1) Todos os parafusos produzidos numa fábrica em certo dia constituem uma **População Finita**;
2) Todos os resultados (cara ou coroa) em sucessivos lances de urna moeda constituem uma **População Infinita**.

O termo **estatística** surge da expressão em Latim statisticum collegium palestra sobre os assuntos do Estado, de onde surgiu a palavra em língua italiana statista, que significa "homem de estado", ou político, e a palavra alemã Statistik, designando a análise de dados sobre o Estado. A palavra foi proposta pela primeira vez no século XVII, em latim, por Schmeitzel na Universidade de Lena e adotada pelo acadêmico alemão Godofredo Achenwall. Aparece como vocabulário na Enciclopédia Britânica em 1797, e adquiriu um significado de coleta e classificação de dados, no início do século 19.

A estatística se divide em:

1) **Estatística indutiva ou inferência estatística** – é a parte da estatística que trata das condições sob as quais essas inferências são válidas, como essas inferências não podem ser absolutamente certas, a probabilidade é muitas vezes usada no estabelecimento das conclusões.

2) **Estatística descritiva ou estatística dedutiva** – é a parte da estatística que procura somente descrever e analisar certo grupo, sem tirar quaisquer conclusões ou inferências sobre um grupo maior.

Para fazermos um bom curso de estatística devemos primeiramente entender o conceito de variável, para isto observe o exemplo a seguir.

Exemplo:

Com o objetivo traçar um perfil dos alunos freqüentadores da biblioteca de certa universidade foi entrevistado 20 alunos, sendo o resultado, dos questionários aplicados, mostrado na tabela a seguir.

Tabela 1 – Dados obtidos com a entrevista dos 20 alunos.

Ordem dos entrevistados	Sexo	Idade	Frequência semanal	Estado civil	Turno que estuda	Tempo de permanência	Renda familiar mensal (em salário mínimo)
1º Entrevistado	Masculino	19	3	Solteiro	Manhã	1h 45 min	9,5
2º Entrevistado	Masculino	32	3	Casado	Noite	1 h	9,3
3º Entrevistado	Masculino	27	2	Separado	Manhã	1h 30min	10,2
4º Entrevistado	Feminino	35	2	Casada	Noite	2h 45 min	12,4
5º Entrevistado	Masculino	25	2	Solteiro	Tarde	1h 40min	10,7
6º Entrevistado	Feminino	18	3	Solteiro	Manhã	2h l5min	14,7
7º Entrevistado	Masculino	21	4	Solteiro	Manhã	1 h	16,6
8º Entrevistado	Masculino	36	1	Casado	Tarde	1 h	12,5
9º Entrevistado	Feminino	31	3	Solteira	Tarde	2 h	8,2
10º Entrevistado	Masculino	36	1	Viúvo	Noite	30 min	15,4
11º Entrevistado	Feminino	23	3	Solteira	Manhã	2h 30min	8,8
12º Entrevistado	Masculino	38	1	Casado	Tarde	50 min	12,1
13º Entrevistado	Feminino	29	1	Solteira	Noite	40 min	5,0
14º Entrevistado	Masculino	25	2	Casado	Manhã	1h	7,6
15º Entrevistado	Masculino	26	2	Casado	Noite	30 min	13,3
16º Entrevistado	Masculino	23	3	Solteiro	Tarde	35 min	11,8
17º Entrevistado	Feminino	31	1	Solteira	Noite	2h 50min	8,9
18º Entrevistado	Masculino	30	3	Solteira	Noite	30 min	13,9
19º Entrevistado	Feminino	19	5	Solteira	Manhã	1 h	11,6
20º Entrevistado	Feminino	20	4	Solteira	Manhã	2h 20min	6,0

É importante ressaltar que cada um dos aspectos investigados, que permitirão fazer a análise desejada é denominado **variável**.

As variáveis, como sexo, estado civil e turno que estuda apresentam como resposta um atributo, qualidade ou preferência do entrevistado, elas recebem o nome de **variáveis qualitativas**.

As variáveis, como idade, freqüência semanal, tempo de permanência e renda familiar mensal apresentam como resposta um número, e assas variáveis são denominadas **variáveis quantitativas**.

As **vaiáveis quantitativas** são classificá-las em dois grupos:

1) **Variáveis quantitativas discretas** – são aquelas cujos valores são obtidos por contagem e representados por elementos de um conjunto finito ou enumerável. Exemplo: a variável freqüência semanal é discreta, e seus valores são l, 2, 3, 4 ou 5.

2) **Variáveis quantitativas contínuas** – são aquelas cujos valores são obtidos por mensuração e representados por valores pertencentes a um intervalo real. No exemplo, as variáveis: idade, tempo de permanência e renda familiar mensal são contínuas e seus valores se distribuem em determinado intervalo real. A variável tempo de permanência, tem valores (em horas) pertencentes ao intervalo [0,5 ; 3 [.

DADOS BRUTOS

A tabela do exemplo 1 apresenta os dados da forma que foram obtidos no levantamento, isto é, eles ainda não foram numericamente organizados, por isto denominamos de **dados brutos.**

ROL

Um rol é um arranjo de dados numéricos brutos em ordem crescente ou decrescente de grandeza. A diferença entre o maior e o menor número do rol chama-se **amplitude total dos dados**.

A simples leitura dos dados brutos não permite a perfeita compreensão das informações ali contidas, e para termos as condições ideais para uma leitura mais resumida dos dados devemos construir das tabelas de freqüência de cada variável estudada.

A construção das tabelas de freqüência do sexo dos entrevistados, estado civil e turno que o aluno estuda, começa com a contagem do número de vezes que ocorre a variável (ou realizações), sendo esse número chamado de **freqüência absoluta,** e indicado por n_i, e para cada variável devemos calcular a freqüência relativa (f_i), que é a razão entre a freqüência absoluta (n_i) e o número total de dados (n), isto é:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Observações:

1) Como $n_i \le n$, segue que, para cada i, $0 \le f_i \le 1$, é comum a freqüência relativa ser expressa em porcentagem.

2) A soma das freqüências relativas dos valores assumidos por determinada variável é sempre igual a 1.

Construiremos agora as tabelas de freqüência para cada variável do exemplo 1.

Tabela 2 – Tabela de freqüência do sexo dos entrevistados (dados da Tabela 1).

Sexo	**Freqüência Absoluta** n_i	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$	**Porcentagem** %
Feminino	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40
Masculino	12	$\frac{12}{20} = 0,6$	60
Total	**20**	**1**	**100**

Tabela 3 – Tabela de freqüência do estado civil (dados da Tabela 1).

Estado Civil	**Freqüência Absoluta** n_i	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$	**Porcentagem** %
Separado	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	5
Solteiro	12	$\frac{12}{20} = 0,6$	60
Casado	6	$\frac{6}{20} = 0,3$	30
Viúvo	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	5
Total	**n = 20**	**1**	**100**

Tabela 4 – Tabela de freqüência do turno que o aluno estuda (dados da Tabela 1).

Turno que estuda	**Freqüência Absoluta** n_i	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$	**Porcentagem** %
Manhã	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40
Tarde	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	25
Noite	7	$\frac{7}{20} = 0,35$	35
Total	**20**	**1**	**100**

Tabela 5 – Tabela de freqüência do numero de vezes que o aluno vai a biblioteca durante a semana (dados da Tabela 1).

Freqüência semanal	Freqüência Absoluta n_i	Freqüência Relativa $f_i = \frac{n_i}{n}$	Porcentagem %
1 vez por semana	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
2 vezes por semana	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
3 vezes por semana	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35
4 vezes por semana	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10
5 vezes por semana	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
Total	**20**	**1**	**100**

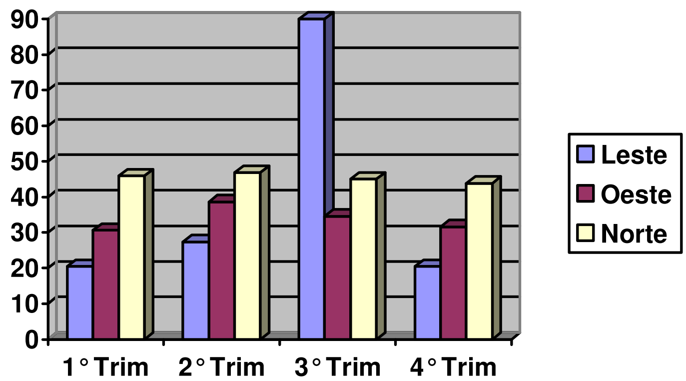
Já para a construção das tabelas de freqüência da idade dos entrevistados, tempo de permanência na biblioteca e renda familiar mensal do entrevistado é necessário antes entendermos os conceitos: intervalo de classe, amplitude do intervalo, amplitude total e ponto médio de uma classe.

Intervalo de classe – vamos convencionar que cada intervalo construído é fechado à esquerda e aberto à direita, isto é, a notação $a|\!\!—b$ refere-se ao intervalo real $[a, b[$, que inclui a e não inclui b, isto é:

$$[a, b[\;=\; \{x \in R \,/\, a \le x < b\}$$

Amplitude do intervalo – A amplitude do intervalo $a|\!\!—b$ é dada pela diferença $b - a$, e representara o comprimento da classe.

Amplitude total – A amplitude total é a diferença entre o maior e o menor valor da variável em estudo.



Ponto médio de uma classe – é obtido somando-se os limites inferior e superior e dividindo-se a soma por 2, $m = \frac{a+b}{2}$

Etapas para elaborar uma distribuição de freqüência

1. Determinam-se a amplitude total (diferença entre o maior e o menor da variável).

2. Divide-se a amplitude total em um número conveniente de intervalos de classe que tenham a mesma amplitude. Os intervalos de classe são escolhidos também, de maneira que seus pontos médios coincidam com dados realmente observados. Isso tende a diminuir o denominado erro de agrupamento que surge em análises matemáticas.

3. Determina-se o número de observações que caem dentro de cada intervalo de classe, isto é, calculam-se as freqüências de classe.

Para construirmos a tabela de freqüência da idade dos alunos que freqüentam a biblioteca tomaremos primeiramente a menor e a maior idade para o cálculo da amplitude total.
Menor idade = 18 anos
Maior idade = 38 anos

Amplitude total = 38 – 18 = 20

A nossa tabelas terá 4 classe, logo a amplitude das classes será igual a 5.

Amplitude das classes = $\frac{38-18}{4} = 5$

Tabela 6 – Tabela de freqüência da idade dos alunos que freqüentam a biblioteca, onde a amplitude das classes é 5 (dados da Tabela 1).

Idade dos alunos	Freqüência Absoluta n_i	Freqüência Relativa $f_i = \frac{n_i}{n}$	Porcentagem %
$18 \vert\!\!— 23$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
$23 \vert\!\!— 28$	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	30
$28 \vert\!\!— 33$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
$33 \vert\!\!— 38$	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20
Total	**20**	**1**	**100**

Tabela 7 – Tabela de freqüência do tempo de permanência do aluno na biblioteca, onde a amplitude das classes é 55 (dados da Tabela 1).

Tempo de permanência (em minutos)	Freqüência Absoluta n_i	Freqüência Relativa $f_i = \frac{n_i}{n}$	Porcentagem %
$30 \vert\!\!— 65$	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40
$65 \vert\!\!— 100$	6	$\frac{6}{20} = 0,3$	30
$100 \vert\!\!— 135$	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	5
$135 \vert\!\!— 170$	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	25
Total	**20**	**1**	**100**

Tabela 8 – Tabela de freqüência da renda mensal familiar, onde a amplitude das classes é 1,7 (dados da Tabela 1).

Renda familiar mensal (em salário mínimo)	Freqüência Absoluta n_i	Freqüência Relativa $f_i = \frac{n_i}{n}$	Porcentagem %
$5 \vert\!\!— 6,7$	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
$6,7 \vert\!\!— 8,3$	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
$8,3 \vert\!\!— 10$	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20
$10 \vert\!\!— 11,6$	12	$\frac{12}{20} = 0,6$	60
Total	**20**	**1**	**100**

Representação gráfica

Para analisar e interpretar das informações contidas nas tabelas utilizamos gráficos para ilustrar os dados facilitando sua compreensão.

Estudaremos quatro tipos de representações gráficas: o gráfico de setores (ou "pizza"), o gráfico de barras (verticais ou horizontais), o histograma e o gráfico de linhas (poligonal).

1) Gráfico de setores

A representação por setores consiste em dividir um círculo em partes (setores circulares), com ângulos de medida proporcional à porcentagem da variável tabelada.

Exemplo:

Tabela 2 – Tabela de freqüência do sexo dos entrevistados (dados da Tabela 1).

Sexo	**Freqüência Absoluta** n_i	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$	**Porcentagem** %
Feminino	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$	40
Masculino	12	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	60
Total	**20**	**1**	**100**

Calculo para a determinação do ângulo que representa o percentual da variável

Masculino

100% ------- 360º

60% ------- x

x = 216º

Feminino

100% ------- 360º

40% ------- x

x = 144º

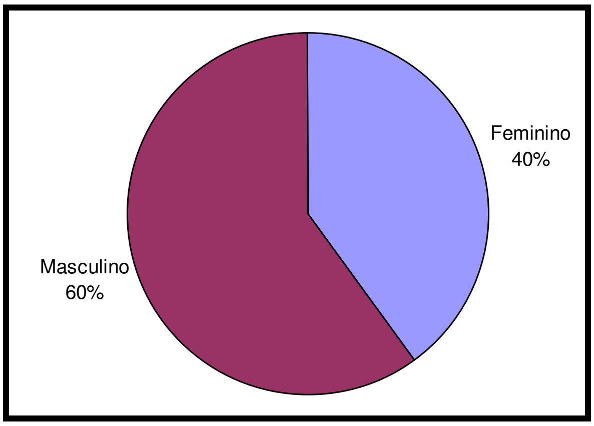


Figura 1 – Gráfico de setores representando o sexo dos entrevistados.

Exemplo:

Tabela 3 – Tabela de freqüência do estado civil (dados da Tabela 1).

Estado Civil	**Freqüência Absoluta** n_i	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$	**Porcentagem** %
Separado	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
Solteiro	12	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	60
Casado	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	30
Viúvo	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
Total	**n = 20**	**1**	**100**

Separado

100% --- 360º

5% --- x

Solteiro

100% --- 360º

60% --- x

Casado

100% --- 360º

30% --- x

Viúvo

100% --- 360º

5% --- x

x = 18º x = 216 x = 108º x = 18º

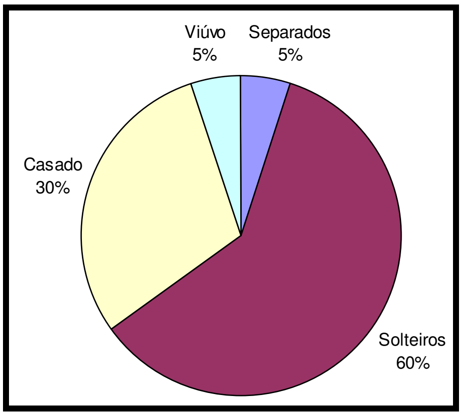


Figura 2 – Gráfico de setores representando o estado civil dos entrevistados.

2) Gráfico de barras

Para construir esse tipo de gráfico basta estabelecer uma escala conveniente para definir o tamanho da barra e usar a freqüência de cada ocorrência da variável em estudo na representação.

Exemplo:

Tabela 9 – Número de alunos que freqüentaram a biblioteca X.

Ano	Número de alunos que usaram a biblioteca
2000	1500
2001	2350
2002	3100
2003	3250
2004	3500
2005	4050
2006	4300
2007	4550

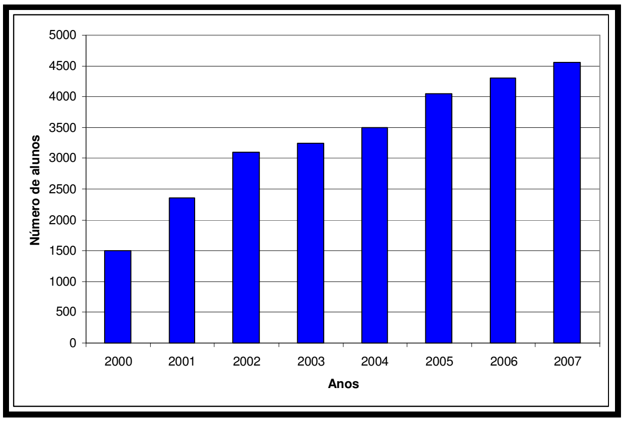


Figura 3 – Gráfico de barras ilustrando a freqüência dos alunos na biblioteca por ano.

3) Histograma

Consiste em um conjunto de retângulos que tem:

(a) as bases sobre um eixo horizontal (eixo dos X) com centro no ponto médio e as larguras iguais às amplitudes dos intervalos das classes;

(b) as áreas proporcionais às freqüências das classes.

Se todos os intervalos tiverem a mesma amplitude, as alturas dos retângulos serão proporcionais às freqüências das classes.

Exemplo:

Tabela 7 – Tabela de freqüência do tempo de permanência do aluno na biblioteca, onde a amplitude das classes é 55 (dados da Tabela 1).

Tempo de permanência (em minutos)	Freqüência Absoluta n_i	Freqüência Relativa $f_i = \frac{n_i}{n}$	Porcentagem %
$30 \vdash 65$	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$	40
$65 \vdash 100$	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$	30
$100 \vdash 135$	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
$135 \vdash 170$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
Total	**20**	**1**	**100**

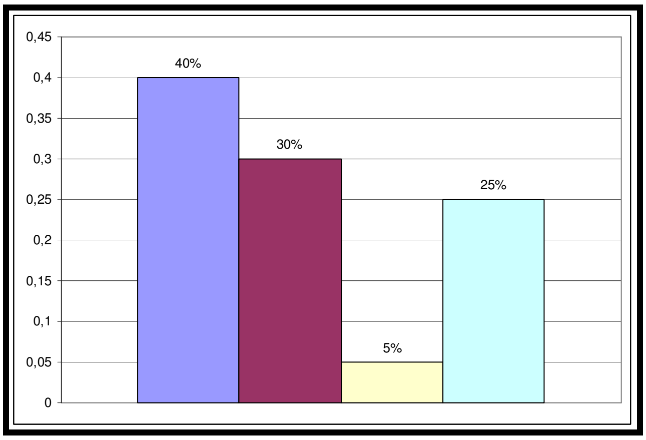


Figura 4 – Histograma ilustrando o tempo de permanência dos alunos a biblioteca.

4) Gráfico de Linhas

Neste tipo de gráfico determinamos diversos pontos, que são unindo-os por segmentos de reta, construindo desta forma uma curva poligonal. É importante lembrar que esse tipo de gráfico representa a função entre as variáveis envolvidas.

Exemplo:

Tabela 8 – Dados do número de alunos que freqüentam a biblioteca por ano.

Ano	Número de alunos que usaram a biblioteca
2000	1500
2001	2350
2002	3100
2003	3250
2004	3500
2005	4050
2006	4300
2007	4550

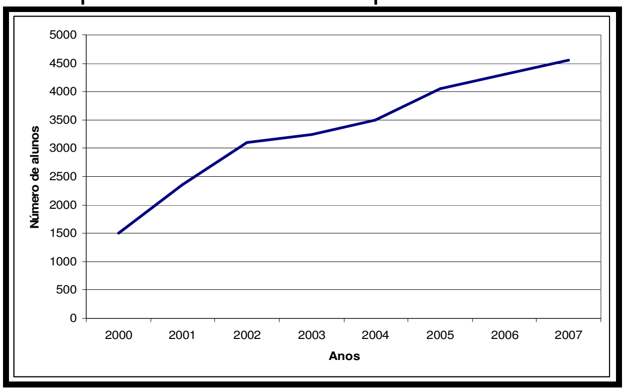


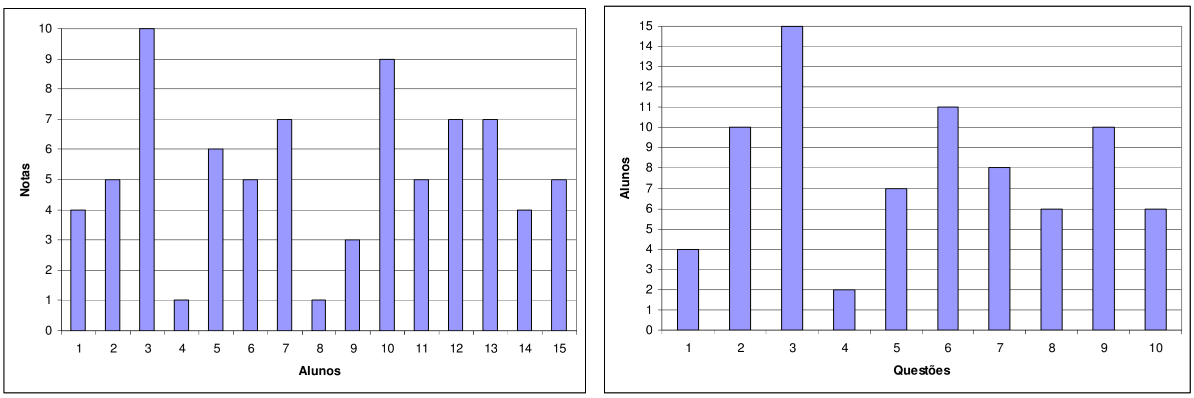
Figura 5 – Gráfico de linhas ilustrando a freqüência dos alunos na biblioteca.

Exemplo:
Um professor de matemática passou uma prova com dez questões em uma turma de 15 alunos, estando o desempenho da turma expresso na tabela a seguir, onde o X assina-la as questões que os alunos acertaram.

Tabela 9 – Desempenho de 15 alunos em uma prova de matemática.

	Questões da prova										
Alunos	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	Nota
1º aluno	X		X			X	X				4,0
2º aluno		X	X			X	X	X			5,0
3º aluno	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10,0
4º aluno			X								1,0
5º aluno		X	X		X			X	X	X	6,0
6º aluno		X	X		X			X	X		5,0
7º aluno		X	X			X	X	X	X	X	7,0
8º aluno			X								1,0
9º aluno		X	X			X					3,0
10º aluno	X	X	X		X	X	X	X	X	X	9,0
11º aluno			X		X	X	X		X		5,0
12º aluno		X	X	X	X	X			X	X	7,0
13º aluno	X	X	X		X	X	X		X		7,0
14º aluno			X			X			X	X	4,0
15º aluno		X	X			X	X		X		5,0
Total de alunos que acertaram a questão	4	10	15	2	7	11	8	6	10	6	

Para compreender melhor a Tabela 9 devemos analisar os gráficos de barra que estão ilustrado na Figura 6, onde estão graficadas as notas dos alunos e o numero de alunos que acertaram cada questão da prova.



(a) (b)

Figura 6 – Gráfico de barras ilustrando: (a) as notas tiradas pelos 15 alunos; (b) o número de alunos que acertaram cada questão da prova.

ATIVIDADES

01) As notas da prova de uma turma de matemática de 50 estudantes estão relacionados na tabela abaixo.

5,0	7,0	2,0	2,0	6,5	3,5	8,0	7,5	6,0	4,0
10,0	9,0	5,0	8,0	2,5	3,0	6,5	6,0	7,5	4,5
5,0	7,5	8,0	8,5	5,5	5,0	7,0	7,5	9,0	8,0
2,5	6,5	2,5	7,0	5,0	6,0	8,0	9,5	7,0	5,5
10,0	3,0	6,0	7,5	7,5	8,0	7,0	7,5	8,0	5,0

Monte uma tabela de freqüência com 4 classe e ilustre-a com o gráfico de setores.

02) Os dados da tabela abaixo se referem ao tempo de espera (em minutos) de 30 clientes em uma fila de banco em um dia de grande movimento:

20	25	32	15	17	18
24	32	30	19	18	22
21	28	19	28	36	36
17	22	20	31	32	30
15	23	17	20	21	40

Construa uma tabela de frequência, agrupando as informações em classes de amplitude igual a 5, a partir do menor tempo encontrado.

03) Uma comissão de técnica escolheu 25 jovens para participar da seleção de vôlei da cidade. As alturas dos jovens (em metro) são:

1,82	1,78	1,72	1,81	1,89
1,77	1,70	1,87	1,98	1,65
1,88	1,95	1,90	1,80	1,70
1,76	1,79	1,82	1,86	1,89
1,91	1,83	1,74	1,69	1,68

A partir da menor altura encontrada, agrupe os dados em classes de amplitude 5 cm e faça a tabela de frequência correspondente.

04) Uma pesquisa realizada com 200 pessoas às vésperas de um feriado prolongado perguntava: "O que você pretende fazer nesse feriado?". Os resultados foram:

Intenção	Número de pessoas
Descansar em casa	60
Viajar	100
Passear na própria cidade	20
Trabalhar	20

Faça um gráfico de setores para representar esses resultados.

05) Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Construir a tabela de frequência e faça sua representação gráfica.

69	82	75	66	72	62,5	74,5	78,5
73	79	70	73,5	68	74	76	72
84	63	69	88	81,5	59,5	77	82,5
73	86,5	71	73,5	67,5	76,5	70	67,5
80,5	72,5	67,5	71	75	72,5	72,5	64

06) O funcionário da bilheteria de um estádio de futebol classificou durante dez minutos, em uma única entrada, os torcedores que compareceram ao jogo segundo o critério: pagante (P), convidado (C) e estudante (E), contruindo a segunte tabela:

P	E	C	C	P	E	P	C
E	P	E	E	P	P	E	E
E	E	P	E	P	E	C	P
P	E	P	E	P	P	P	P
C	P	P	P	P	E	E	E

Faça um gráfico de setores para representar esses resultados.

07) A tabela apresenta a quantidade de três produtos vendidos em uma loja.

Ano	Produto 1	Produto 2	Produto 3
1999	50	75	100
2000	75	100	150
2001	100	125	200
2002	150	175	300

Faça a representação gráfica dessa tabela.

08) Numa prova com dez questões, 15 alunos tiveram o desempenho expresso na tabela a seguir, onde o X assina-la as questões que os alunos acertaram.

	Questões da prova									
Alunos	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
1º aluno	X		X			X	X			
2º aluno		X	X			X	X	X		
3º aluno	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4º aluno		X	X			X				
5º aluno		X	X			X		X	X	X
6º aluno		X	X		X			X	X	
7º aluno		X	X			X	X	X	X	X
8º aluno		X	X			X	X			
9º aluno		X	X			X				
10º aluno	X	X	X		X	X		X	X	X
11º aluno			X		X	X	X			
12º aluno		X	X	X	X	X	X		X	X
13º aluno	X	X	X		X	X	X		X	

14º aluno			X			X	X		X	X
15º aluno		X	X			X	X		X	

Comente sobre o desempenho da turma e do vivel dificuldade da prova, com base em gráficos obtids a partir da tabela.

RESUMO

- A estatística é a parte da ciência que possibilita inferirmos fatos e conclusões sobre um grupo, a partir de pequena amostra significativa do mesmo;
- População é a denominação feita a todo conjunto a ser estudado;
- a amostra é a parte da população utilizada para inferirmos resultados sobre a população;
- As populações podem ser finitas ou infinitas, dependendo de seus elementos;
- A estatística se divide em estatística indutiva ou inferência estatística e estatística descritiva ou estatística dedutiva;
- As variáveis podem ser classificadas como variáveis qualitativas ou variáveis quantitativas;
- As vaiáveis quantitativas são classificá-las discretas e contínuas;
- Dados brutos são aqueles que ainda não foram numericamente organizados;
- Rol é um arranjo numérico dos dados brutos;
- A amplitude do intervalo $a \vdash b$ é dada pela diferença $b-a$;
- A amplitude total é a diferença entre o maior e o menor valor da variável em estudo.
- Ponto médio de uma classe é obtido somando-se os limites inferior e superior e dividindo-se a soma por 2, $m=\dfrac{a+b}{2}$
- Etapas para elaborar uma distribuição de freqüência

1. Determinam-se a amplitude total (diferença entre o maior e o menor da variável).
2. Divide-se a amplitude total em um número conveniente de intervalos de classe que tenham a mesma amplitude. Os intervalos de classe são escolhidos também, de maneira que seus pontos médios coincidam com dados realmente observados. Isso tende a diminuir o denominado erro de agrupamento que surge em análises matemáticas.
3. Determina-se o número de observações que caem dentro de cada intervalo de classe, isto é, calculam-se as freqüências de classe.

AULA 2: MÉDIA ARITMÉTICA

Objetivos:

- Calcular média aritmética;
- Identificar as propriedades de média aritmética;
- Calcular média aritmética ponderada.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Imagine você numa parada de ônibus quando alguém se dirige a você e lhe pergunta – “quanto tempo demora em passar um determinado ônibus da linha X?”. Você poderia dar como resposta uma tabela de freqüência que pacientemente coletou no último mês! Mas isto não seria muito conveniente! É neste momento que você precisa de um valor que resuma os valores da tabela de freqüência. Para facilitar a nossa vida, a estatística possui algumas medidas de tendência central que resumem o conjunto de valores representativos dos fenômenos que se deseja estudar. Entre as medidas de tendência centrais mais usadas estão a moda, a mediana e média aritmética, são utilizadas quando se deseja apresentar um conjunto de dados por um único valor, estudaremos nesta aula a média aritmética.

MÉDIA ARITMÉTICA

Seja x uma variável quantitativa e x_1 , x_2, ... , x_n os valores assumidos por x. Definimos média aritmética de x, e indicamos por $\bar{x}$, como a divisão da soma de todos esses valores x_i pelo número de valores n, isto é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Quando os dados são expressos por uma tabele de freqüência

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

Temos que o cálculo da média aritmética é

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}$$

Exemplos:

1) Calcule a média aritmética dos números 8 , 3 , 6 , 12 e 10

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{8+3+6+12+10}{5} = \frac{39}{5} = 7,8$$

2) Calcule a média aritmética dos números

x_i	f_i (freqüência)
5	3
8	2
6	4
2	1

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{(5)(3)+(8)(2)+(6)(4)+(2)(1)}{3+2+4+1} = 5{,}7$$

PROPRIEDADES DA MÉDIA ARITMÉTICA

Propriedade 1 - A soma algébrica dos desvios de um conjunto de números, em relação à média aritmética é zero.
Exemplo:
Dado o conjunto de números 8 , 3 , 5 , 12 , 10 a média aritmética é 7,6.
O desvio dos números em relação á média é:
8 - 7,6 ; 3 - 7,6 ; 5 - 7,6 ; 12 - 7,6 ; 10 - 7,6
A soma algébrica é igual a 0,4 + (-4,6) + (-2,6) + 4,4 + 2,4 = 0

Propriedade 2 - A soma dos quadrados dos desvios de um conjunto numérico X_i, em relação a qualquer número a é um mínimo quando $a = \bar{X}$ ($\bar{X}$ é a média do conjunto X_i) e somente neste caso.

Propriedade 3 - Se f_1 números têm média m_1, f_2 números têm média m_2, ... , f_n números têm média m_n a média de todos os números é

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + ... + f_n m_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

Exemplo:
1) Em uma companhia que tem 80 operários, 60 recebem R$ 800,00 e 20 recebem R$ 450,00 por mês. Calcule o salário médio.
Solução

$$\bar{X} = \frac{(60)(800)+(20)(450)}{60+20} = 611{,}25$$

O salário médio é de R$ 611,25.

Propriedade 4 - Se A é um número real e $d_i = X_i - A$ são os desvios de X_i em relação a A então $\bar{d} = \bar{X} - A$
Exemplo:
Seja $A = 3$ e X_i um conjunto formado pelos números 3 , 5 , 7 , 9 , 6 , 4 , 12, que tem média $\bar{X} = 6{,}57143$ então
$d_i = X_i - A$ é formado pelos números $3-3$, $5-3$, $7-3$, $9-3$, $6-3$, $4-3$, $12-3$

Logo d_i contém os números $0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ 9$ cuja média é $\bar{d} = 3{,}57143$ então $3{,}57143 = 6{,}57143 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad d_i = X_i - A$

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Seja x uma variável quantitativa que assume os valores $x_1\ ,\ x_2, \dots ,\ x_k$ com freqüências absolutas respectivamente iguais a $n_1\ ,\ n_2, \dots ,\ n_k$. A média aritmética ponderada de x, indicada por $\bar{x}$, é a razão da soma de todos os produtos $x_i.n_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) pela soma das freqüências $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, isto é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

<u>Exemplo</u>:

1) Para se ingressar um uma determinada Instituição de Ensino o candidato deve fazer três provas, uma de matemática, outra português e a de conhecimentos gerais e deve obter no mínimo média 6,0 para ser classificado, disputando a vaga com os demais candidatos segundo a ordem de classificação. O que podemos afirmar sobre um candidato que obteve as notas mostrada na tabela a seguir.

Provas	Pesos das Provas	Notas do Candidato A
Matemática	7	8,0
Português	6	6,0
Conhecimento Gerais	5	4,0

Solução

Para determinamos a média ponderada, devemos utilizar a expressão

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{3} n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

e a partir dos dados da tabela teremos

$$\bar{x} = \frac{8*7 + 6*6 + 4*5}{7 + 6 + 5} = 6{,}22$$

A partir do resultado da média podemos afirmar que o candidato esta classificado e apto para disputar sua vaga com os demais candidatos segundo a ordem de classificação.

Se os dados estiverem contidos dentro de intervalos de classes devemos trabalhar com o ponto médio das classes e a freqüência relativa da classe (f_i) é definida por

$$f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Isolando o valor de n_i, temos:

$$n_i = f_i \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Tomando a fórmula da média ponderada temos

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \frac{x_2 n_2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \ldots + \frac{x_k n_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$\bar{x} = x_1 \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + x_2 \frac{n_2}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \ldots + x_k \frac{n_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

Como $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$, podemos simplificar a expressão para

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

<u>Exemplo</u>:

1) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de um grupo de estudante. Determine a renda média desse grupo.

Renda familiar mensal (em salário mínimo)	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$
$5 \vert\!— 6,7$	0,1
$6,7 \vert\!— 8,3$	0,1
$8,3 \vert\!— 10$	0,2
$10 \vert\!— 11,6$	0,6

Solução

Para calcular a renda média devemos primeiro calcular o ponto médio das classes

Renda familiar mensal (em salário mínimo)	Ponto médio das classes	**Freqüência Relativa** $f_i = \frac{n_i}{n}$
$5 \vert\!\!— 6,7$	$\frac{5+6,7}{2} = 5,85$	0,1
$6,7 \vert\!\!— 8,3$	$\frac{6,7+8,3}{2} = 7,5$	0,1
$8,3 \vert\!\!— 10$	$\frac{8,3+10}{2} = 9,15$	0,2
$10 \vert\!\!— 11,6$	$\frac{10+11,6}{2} = 10,8$	0,6

$\bar{x} = 5,85*0,1 + 7,5*0,1 + 9,15*0,2 + 10,8*0,6 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 9,645$

A renda familiar média mensal é de 9,645 salários mínimo.

ATIVIDADE

01) As notas de um aluno em seis disciplina de bimestre estão expressa na tabela abaixo, determine a sua média neste bimestre.

Disciplina	Notas
Matemática	8,5
Português	6,5
Ciências	7,0
Ed Física	9,0
História	6,5
Geografia	7,5

02) O quadro abaixo apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine a média salarial que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

03) Um ônibus de excursão partiu com a lotação completa de 45 lugares, dos quais 12 reservaram a viajem com antecedência e por isto pagaram, cada um, R$ 850,00. Os demais ocupantes do ônibus pagaram R$ 1.000,00 pela viagem. Qual foi o preço médio que cada passageiro pagou por essa excursão?

04) A média aritmética de 50 números é igual a 70. Adicionando-se a esse conjunto de valores o número 456, qual será a nova média aritmética?

05) A média de pesos de 25 clientes hospedadas em um SPA era de 84 kg. A elas juntou-se um grupo de **n** amigas, onde curiosamente cada amiga desse grupo pesava 90 kg. Determine o valor de **n**, sabendo que a média dos pesos de todas as clientes hospedadas no SPA aumentou em 1 kg.

06) Cada um dos 60 alunos da turma A obteve, na avaliação de um trabalho, nota 5 ou nota 10. A média aritmética dessas notas foi 6. Determine quantos alunos obtiveram notas 5 e quantos alunos obtiveram nota 10.

07) Um grupo de 20 nadadores, cuja média de altura é 1,8 m está treinando para uma competição. Se um grupo de 7 atletas cuja média de altura é de 1,68 se ajunta ao primeiro grupo, qual será a média da altura dos 27 atletas?

08) Em um time de futebol, o jogador mais velho entre os onzes titulares foi substituído por um jogador de 16 anos. Isto fez com que a média de idade dos 11 jogadores diminuísse 2 anos. Calcule a idade do jogador mais velho que foi substituído.

09) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine a renda média desses funcionários.

Renda familiar mensal	Número de Funcionários
$1 \vdash 3$	30
$3 \vdash 5$	12
$5 \vdash 7$	6
$7 \vdash 9$	3

10) A tabela a seguir contém informações da altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine a altura média dos estudantes.

Altura (m)	Número de Estudantes
$1{,}51 \vdash 1{,}58$	5
$1{,}59 \vdash 1{,}66$	18
$1{,}67 \vdash 1{,}74$	42
$1{,}75 \vdash 1{,}82$	27
$1{,}83 \vdash 1{,}90$	8

11) Para um aluno passa em uma disciplina em uma determinada instituição sem fazer prova final, ele deve obter média 8.0 nas quatro primeiras avaliações, sendo que a 1ª e a 3ª avaliação tem peso 2 e a 2ª e a 4ª tem peso 3. Um dado aluno que tem as notas em uma determinada disciplina mostrado na tabela abaixo, deverá ou não fazer a prova final

Disciplina: Estatística	Notas
1ª Avaliação	7,5
2ª Avaliação	8,5
3ª Avaliação	6,5
4ª Avaliação	10,0

12) Uma feirante possuía 50 kg de maçã para vender em uma manhã. Começou a vender as frutas por R$ 2,50 o quilo e, com o passar das horas reduziu o preço em duas ocasiões para não haver sobras. A tabela a seguir informa a quantidade de maçãs vendidas em cada período, bem como os diferentes preços cobrados pelo feirante.

Período	**Preço por quilo**	**Quantidade de quilos vendidos**
Até às 10h	R$ 2,50	32
Das 10h às 11h	R$ 2,00	13
Das 11h às 12h	R$ 1,40	5

RESUMO

- Média aritmética das variáveis x_1 , $x_2, \dots, x_n$ é: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

- Média aritmética das variáveis x_1 , $x_2, \dots, x_n$ expressas pela tabela de freqüência

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

É dada por: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

- Média aritmética ponderada das variáveis x_1 , $x_2, \dots, x_n$ com freqüências absolutas respectivamente iguais a n_1 , $n_2, \dots, n_k$ é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

AULA 3: MEDIANA E MODA

Objetivos:

- Definir mediana e moda;
- Calcular o valor da mediana e da moda;
- Estabelecer relação entre os valores da média, mediana e moda.

Entre as medidas de tendência central mais usadas estão a moda, a mediana e média aritmética, são utilizadas quando se deseja apresentar um conjunto de dados por um único valor, estudaremos nesta aula a mediana e a moda.

MEDIANA

A mediana de um conjunto de números, ordenados em ordem de grandeza (isto é, em um rol), é o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo:

1) Dado o conjunto de números 8, 4, 10, 8, 6, 8, 3, 5, 4 determine a sua mediana!
solução
Primeiramente devemos colocar a seqüência numérica em ordem crescente e como a quantidade de elementos é impar, isto é, a seqüência possui 9 elementos então a mediana é o número central.

$\underbrace{3,4,4,5,}_{4\,elementos}\ \underset{mediana}{\underset{\downarrow}{6}}\ ,\underbrace{8,8,8,10}_{4\,\text{elementos}}$ a mediana é 6.

2) Dado o conjunto de números 11, 15, 7, 18, 5, 12, 5, 9 determine sua mediana.
Solução
Primeiramente devemos colocar a seqüência numérica em ordem crescente e como a quantidade de elementos é par, isto é, a seqüência possui 8 elementos então a mediana é a média dos dois números centrais.

$\underbrace{5\,,5\,,7\,,9}_{4\,elementos}\,,\underbrace{11\,,12\,,15\,,18}_{4\,elementos}$

$$5\,,5\,,7\,,\ \underbrace{9\,,11}_{numero\ centrais}\ ,12\,,15\,,18 \quad \Rightarrow \quad \text{mediana} = \frac{9+11}{2} = 10$$

Para os dados agrupados, a mediana, obtida por interpolação, é dada pela fórmula:

$$\text{Mediana} = \text{L}_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - \left(\sum f\right)_1}{f_{mediana}} \right) c$$

em que:

L_1 = limite inferior verdadeiro da classe mediana (da classe que contém a mediana);
N = número de itens dos dados (isto é, freqüência total);
$\left(\sum f\right)_1$ = soma de todas as freqüências das classes inferiores à mediana;
$f_{mediana}$ = freqüência da classe mediana;
c = amplitude do intervalo da classe mediana.

Geometricamente, a mediana é o valor de X (abscissa) correspondente à vertical que divide o histograma em duas partes de áreas iguais.
Exemplo:

1) Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Determinar a mediana do peso dos alunos.

69	82	75	66	72	62,5	74,5	78,5
73	79	70	73,5	68	74	76	72
84	63	69	88	81,5	59,5	77	82,5
73	86,5	71	73,5	67,5	76,5	70	67,5
80,5	72,5	67,5	71	75	72,5	72,5	64

Solução
Primeiramente deems construir da tabela de frequencia onde se adimite que os pesos se distriuem continuamente.

Pêso	Frequência
59 — 63	3
63,5 — 67,5	5
68 — 72	9
72,5 — 76,5	12
77 — 81	5
81,5 — 85,5	4
86 — 90	2
	Total 40

Como a freqüência total é de 40 elementos, então devemos encontrar a 20ª posição, e como a soma das três primeiras classes é $3+5+9=17$, então faltam 3 elementos para o 20ª peso que está na 4ª classe que contém 12 elementos. Logo

L_1 = limite inferior verdadeiro da classe mediana = 72,25
N = número de itens dos dados = 40
$\left(\sum f\right)_1$ = soma das freqüências das classes inferiores à mediana = 3+5+9 = 17
$f_{mediana}$ = freqüência da classe mediana = 12
c = amplitude do intervalo da classe mediana = 4,5 (devido o intervalo verdadeiro ocorrer entre $72{,}25 \ e \ 76{,}75$)

$$\text{Mediana} = \text{L}_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - \left(\sum f\right)_1}{f_{mediana}} \right) c = 72{,}25 + \left(\frac{\frac{40}{2} - 17}{12} \right) 4{,}5 = 73{,}375 \cong 73{,}4$$

Ordenando o rol, temos:

59,5 62,5 63 64 66 67,5 68 69 70 70 71 71 72 72 72,5 72,5 73 73 73,5 $\underset{\substack{\Uparrow \\ mediana}}{}$ 73,5 74 74,5 75 76 76,5 77 78 78,5 79 80,5 81,5 82 82,5 84 86,5 88

MODA

A moda de um conjunto de números é o valor que ocorre com a maior freqüência, ou seja, é o valor mais comum. A moda pode não existir e, mesmo que exista, pode não ser única.

Exemplo:

1) Dado o conjunto de números 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 encontre a moda.

Solução

Observe que o 9 se repete 3 vezes, logo a moda do conjunto é 9. Uma distribuição que tem apenas uma única moda é denominada **unimodal**.

2) Dado o conjunto de números 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 encontre a moda.

Solução

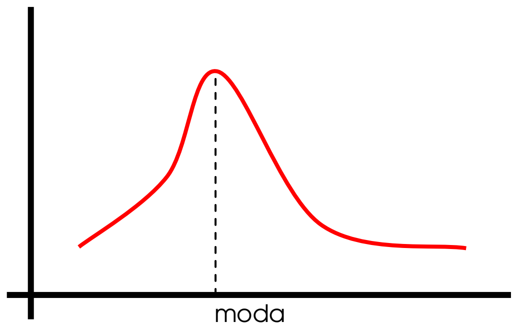
Observe que não repetição de números, logo não há moda.

3) Dado o conjunto de números 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 encontre a moda.

Solução

Observe que os números 4 e 7 se repetem 3 vezes, logo o conjunto possui duas modas que são 4 e 7. Dizemos que o conjunto é **bimodal**.

No caso de dados agrupados para os quais foi construída uma curva de freqüência que a eles se ajuste, a moda será o valor (ou valores) de X correspondente ao ponto de ordenada máxima (ou pontos) da curva.



Para uma distribuição de freqüência ou histograma a moda pode ser obtida por meio da fórmula:

$$Moda = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

em que:

L_1 = limite verdadeiro inferior da classe modal (isto é, a que contém a moda);

Δ_1 = excesso da freqüência modal sobre a da classe imediatamente inferior;

Δ_2 = excesso da freqüência modal sobre a da classe imediatamente superior;

c = amplitude do intervalo da classe modal.

Exemplo:

1) A tabela a seguir contém o salário mensal de 65 funcionários da Companhia ABC, determine a moda.

Salários (X)	Frequência
R$ 550,00	8
R$ 650,00	10
R$ 750,00	16
R$ 850,00	14
R$ 950,00	10
R$ 1.050,00	5
R$ 1.150,00	2
	N = 65

Solução

L_1 = limite verdadeiro inferior da classe modal = 700,00

Δ_1 = excesso da freqüência modal sobre a da classe imediatamente inferior;

Δ_1 = 16 – 10 = 6

Δ_2 = excesso da freqüência modal sobre a da classe imediatamente superior;

Δ_2 = 16 – 14 = 2

c = amplitude do intervalo da classe modal = R$ 100,00

$$Moda = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) c = 700 + \left(\frac{6}{6+2}\right) 100 = 775,00$$

A moda é R$ 775,00

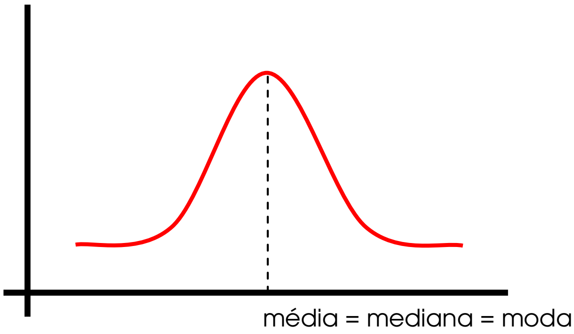
COMPARAÇÃO ENTRE A MÉDIA, A MEDIANA E A MODA:

MEDIDA DE POSIÇÃO	VANTAGENS	DESVANTAGENS
MÉDIA	Reflete cada valor observado na distribuição	É influenciada por valores extremos
MEDIANA	Menos sensível a valores extremos do que a Média	Difícil de determinar para grande quantidade de dados
MODA	Maior quantidade de valores concentrados neste ponto	Não se presta à análise Matemática

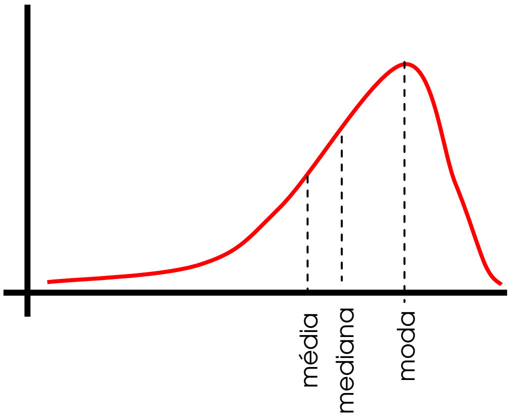
RELAÇÃO EMPÍRICA ENTRE A MÉDIA, A MEDIANA E A MODA

Como o próprio nome sugere o valor da Mediana (que ocupa a posição central numa distribuição de freqüência), deve estar em algum ponto entre o valor da Média e o valor da Moda, mas pode também ser igual à Moda e à Média. Com essas três Medidas de Posição, podemos determinar a ASSIMETRIA da curva de distribuição de freqüência. Três casos podem ocorrer:

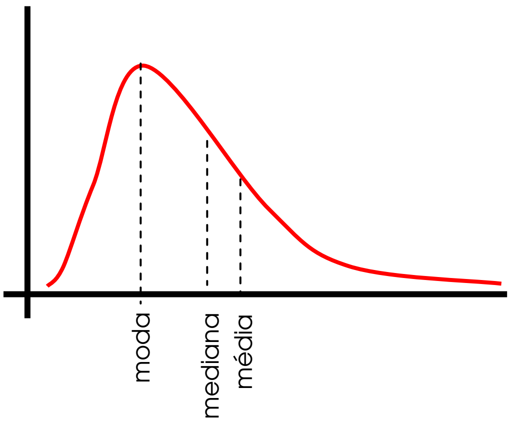
1º Caso:
Média = Mediana = Moda → a curva da distribuição é ***SIMÉTRICA***



2º Caso:
Média < Mediana < **Moda** → a curva da distribuição tem ***ASSIMETRIA NEGATIVA***



3º Caso:
Média > Mediana > **Moda** → a curva da distribuição tem ***ASSIMETRIA POSITIVA***



Para as curvas de freqüência unimodal moderadamente desviadas (assimétricas), vigora a relação empírica.

Média - Moda = 3 (Média - Mediana).

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 Determinar a mediana das notas.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo, determinar a mediana do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) O quadro abaixo apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine a mediana dos salários que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

04) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine a mediana da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	Número de Funcionários
1 ├── 3	30
3 ├── 5	12
5 ├── 7	6
7 ├── 9	3

05) A tabela a seguir contém informações da altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine a mediana altura dos estudantes.

Altura (m)	Número de Estudantes
1,51 ├── 1,58	5
1,59 ├── 1,66	18
1,67 ├── 1,74	42
1,75 ├── 1,82	27
1,83 ├── 1,90	8

06) A tabela contém o número de defeito, por peça, encontrados durante uma inspeção feita em um lote de 80 peças que chegou a um determinado porto. Considerando o número de defeitos por peça, qual é a mediana dos valores encontrados?

Número de defeito por peças	0	1	2	3	4
Número de peças	12	20	24	16	8

07) Uma instituição de pesquisa fez um levantamento de vários produtos adquiridos normalmente em uma feira popular. O resultado está na tabela a seguir. Determine a média, mediana e moda do preço dos produtos pesquisado.

Produtos	Preço
Tomate	R$ 2,50
Cebola	R$ 2,00
Batata	R$ 2,30
Cenora	R$ 1,70
Repolho	R$ 2,00
Pimentão	R$ 1,90
Abobora	R$ 2,70

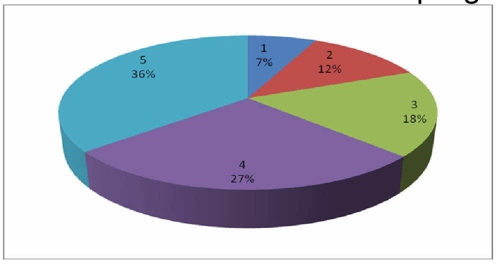
08) A tabela a seguir apresenta os dados brutos de uma pesquisa sobre a altura de alunos, em metros, de uma determinada instituição de nível superior. Determine a média, mediana e a moda dos dados.

1,6	1,5	1,7	1,5	1,6	1,8	1,4	1,6	1,6	1,8
1,4	1,2	1,3	1,5	1,8	1,4	1,7	1,5	1,6	1,6
1,2	1,4	1,6	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6	1,5
1,3	1,5	1,4	1,5	1,6	1,7	1,4	1,6	1,5	1,7
1,5	1,6	1,5	1,6	1,7	1,3	1,5	1,7	1,8	1,8

09) A tabela a seguir contém o salário mensal de 50 funcionários da Companhia, determine a média, mediana e a moda.

Salários (X)	Frequência
R$ 500,00	2
R$ 600,00	4
R$ 700,00	8
R$ 800,00	15
R$ 900,00	12
R$ 1.200,00	7
R$ 1.500,00	2
	$N = 50$

10) O gráfico a seguir informa a distribuição, em percentual, dos 800 funcionários de uma empresa com o número de filhos que cada funcionário possui. Determine a média, mediana e a moda do número de filhos dos empregados.



RESUMO

- A mediana de um conjunto de números, ordenados em ordem de grandeza é o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais;

- A moda de um conjunto de números é o valor que ocorre com a maior freqüência. A moda pode não existir e, mesmo que exista, pode não ser única.

- Para as curvas de freqüência unimodal moderadamente desviadas, vale a relação

Média - Moda = 3 (Média - Mediana).

AULA 4: MÉDIA GEOMÉTRICA, HARMÔNOCA E QUADRATICA

Objetivos:

- Definir médias geométrica, harmônica e quadrática;
- Calcular as médias geométrica, harmônica e quadrática;
- Estabelecer relação entre as médias geométrica, harmônica e quadrática.

A mais importante medida de tendência central é a média aritmética, além desta há as médias geométricas, harmônicas e quadráticas que estudaremos nesta aula.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica G de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é a raiz de ordem n do produto desses números:

$$G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 ..... x_n}$$

Exemplo:

1) Determine a média geométrica dos números 2 , 4 e 8.

Solução

$$G = \sqrt[3]{2 . 4 . 8} = 4$$

MÉDIA HARMÓNICA

A média harmônica H de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é a recíproca da média aritmética das recíprocas dos números:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

Exemplo:

1) Determine a media harmônica dos números 2 , 4 e 8.

Solução

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = 3{,}43$$

Para dados agrupados, onde $X_1, X_2, X_3, \ldots$ representam os pontos médios de uma distribuição de freqüência com as correspondentes freqüências de classe $f_1, f_2, f_3, \ldots$, respectivamente, a média harmônica é determinada pela expressão:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum\frac{f_i}{X_i}} = \frac{N}{\sum\frac{f_i}{X_i}}$$

em que $N = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = \sum f$

Exemplo:

1) A tabela a seguir mostra a distribuição, em toneladas, das cargas máximas suportadas por certos cabos fabricados por uma companhia. Determine a média harmônica.

Carga Máxima (toneladas)	Número de cabos
9,3 --- 9,7	2
9,8 --- 10,2	5
10,3 --- 10,7	12
10,8 --- 11,2	17
11,3 --- 11,7	14
11,8 --- 12,2	6
12,3 --- 12,7	3
12,8 --- 13,2	1
	N = 60

Solução
O primeiro passo é determinar o ponto médio do intervalo das classes

Carga Máxima (toneladas)	Ponto médio das classes	Número de cabos
9,3 --- 9,7	9,5	2
9,8 --- 10,2	10	5
10,3 --- 10,7	10,5	12
10,8 --- 11,2	11	17
11,3 --- 11,7	11,5	14
11,8 --- 12,2	12	6
12,3 --- 12,7	12,5	3
12,8 --- 13,2	13	1
		N = 60

Temos que N = 60.

$$H = \frac{60}{\frac{2}{9,5}+\frac{5}{10}+\frac{12}{10,5}+\frac{17}{11}+\frac{14}{11,5}+\frac{6}{12}+\frac{3}{12,5}+\frac{1}{13}} = 11,04$$

RELAÇÃO ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HARMÓNICA

A média geométrica de um conjunto de números positivos x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n é menor ou igual à sua média aritmética, mas é maior ou igual à sua média harmônica.

Média Harmônica $\leq$ Média Geométrica $\leq$ Média Aritmética

Exemplo:
1) Dado o conjunto de números 2 , 4 e 8, determine as médias aritmética, geométricas e harmônicas.

Média Aritmética $\Rightarrow$ $\overline{X} = \dfrac{2+4+8}{3} = \dfrac{14}{3} = 4{,}67$

Média Geométrica $\Rightarrow$ $G = \sqrt[3]{2*4*8} = 4$

Média Harmônica $\Rightarrow$ $H = \dfrac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 3{,}43$

$3{,}43 \le 4 \le 4{,}67 \quad \Rightarrow \quad H \le G \le \overline{X}$

MÉDIA QUADRÁTICA

A média quadrática (MQ) ou raiz média quadrática de um conjunto de números x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n é determinada por:

$$MQ = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Exemplo:

1) Dado o conjunto de números 1 , 3 , 4 , 5 e 7, determine a média quadrática.

$$MQ = \sqrt{\frac{1^2+3^2+4^2+5^2+7^2}{5}} = \sqrt{20} = 4{,}47$$

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 . Determinar as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo, determinar as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) A tabela apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática dos salários que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

04) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	Número de Funcionários
$1 \vdash 3$	30
$3 \vdash 5$	12
$5 \vdash 7$	6
$7 \vdash 9$	3

05) A tabela a seguir contém a altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática altura dos estudantes.

Altura (m)	Número de Estudantes
$1{,}51 \vdash 1{,}58$	5
$1{,}59 \vdash 1{,}66$	18
$1{,}67 \vdash 1{,}74$	42
$1{,}75 \vdash 1{,}82$	27
$1{,}83 \vdash 1{,}90$	8

RESUMO

- A média geométrica dos valores $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$ é: $G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_n}$

- A média harmônica dos $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$ é: $H = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}} = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$

- A média quadrática ou raiz média quadrática dos valores $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots, x_n$ é:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

- Relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica é

Média Harmônica $\leq$ Média Geométrica $\leq$ Média Aritmética

AULA 5: QUARTIS, DECIS E PERCENTIS

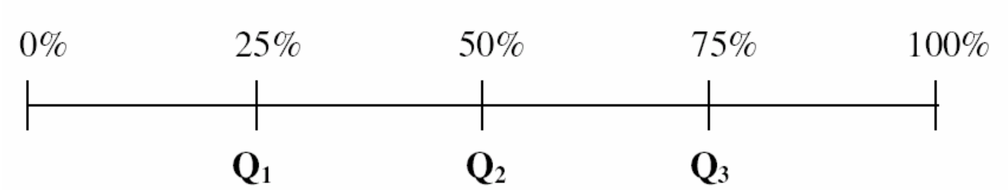
Objetivos:

- Definir quartis, decis e percentis;
- Determinar quartis, decis e percentis.

Há outras medidas de posição, que são separatrizes de dados denominadas de quartis, decis e percentis que serão estudas nesta aula.

QUARTIS

Dado um conjunto de dados, primeiramente devemos ordenado-los em ordem de grandeza, em seguida dividemos (separemos) a distribuição de freqüência em 4 partes iguais.



Onde Q_1, Q_2 e Q_3 denominam-se primeiro, segundo e terceiro quartis, respectivamente.

No 1º Quartil (Q1), 25% dos elementos estarão abaixo dele e 75%, acima.
No 2º Quartil (Q2), 50% dos elementos estarão abaixo dele e 50%, acima. Observe então que o 2º Quartil é igual à Mediana.
No 3º Quartil (Q3), 75% dos elementos estarão abaixo dele e 25%, acima.

<u>Exemplo</u>:

1) Dado o conjunto de números 7, 3, 10, 8, 7, 6, 9, 5, 3, 5, 4 determine seu primeiro, segundo e terceiro quartis
solução
Primeiramente devemos colocar a seqüência numérica em ordem crescente

$$3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

como a quantidade de elementos é impar, isto é, a seqüência possui 11 elementos, então o número central é o segundo quartis, ou seja a mediana.

$$\underbrace{3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,}\quad \underset{\substack{\updownarrow \\ D_2 \to Mediana}}{6}\quad ,\ \underbrace{7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}$$

Então podemos afirmar que o segundo quartis é 6. Seguindo o mesmo principio, dividiremos as duas seqüências de números, antes e depois da mediana, em partes iguais para obtermos o primeiro e o terceiro quartis

$$\underbrace{3,\ 3,}\ \underset{\substack{\updownarrow \\ D_1}}{4}\ ,\ \underbrace{5,\ 5,}\quad \underset{\substack{\updownarrow \\ D_2 \to Mediana}}{6}\quad ,\ \underbrace{7,\ 7,}\ \underset{\substack{\updownarrow \\ D_3}}{8}\ ,\ \underbrace{9,\ 10}$$

Primeiro quartis = 4
Terceiro quartis = 8

2) Dado o conjunto de números 7, 2, 10, 8, 7, 1, 11, 6, 9, 5, 3, 5, 4 determine seu primeiro, segundo e terceiro quartis
solução

Primeiramente devemos colocar a seqüência numérica em ordem crescente

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

como a quantidade de elementos é impar, isto é, a seqüência possui 13 elementos, então o número central é o segundo quartis, ou seja a mediana.

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,}\ \ \underset{\substack{\updownarrow \\ D_2=Mediana}}{6}\ \ ,\ \underbrace{7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11}$$

Então podemos afirmar que o segundo quartis é 6. Seguindo o mesmo principio, dividiremos as duas seqüências de números, a partir das quais determinaremos o primeiro e o terceiro quartis

$$1,\ 2,\ \underbrace{3,\ 4}_{D_2=\frac{3+4}{2}=3,5}\ ,\ 5,\ 5,\ \ \underset{\substack{\updownarrow \\ D_2=Mediana}}{6}\ \ ,\ 7,\ 7,\ \underbrace{8,\ 9}_{D_3=\frac{8+9}{2}=8,5}\ ,\ 10,\ 11$$

Primeiro quartis = 3,5
Terceiro quartis = 8,5

3) A tabela a seguir mostra a distribuição de freqüência dos salários semana, em reais, de 65 funcionários da Companhia ABC. Determinar o primeiro, o segundo e o terceiro quartis.

Salários (Reais)	Número de empregados
100,00 --- 199,00	8
200,00 --- 299,00	10
300,00 --- 399,00	16
400,00 --- 499,00	14
500,00 --- 599,00	10
600,00 --- 699,00	5
700,00 --- 799,00	2
	Total = 65

Solução

O primeiro quartis Q_1 é o salário obtido mediante a contagem de

$$N = \frac{65}{4} = 16,25$$

16,25 casos a partir da primeira classe, isto é, da classe mais baixa. Como a primeira classe contém 8 casos, devemos tomar

$$16,25 - 8 = 8,25$$

8,25 dos 10 casos que existem na segunda classe, e mediante o método da interpolação linear temos

$$Q_1 = 199 + \frac{8,25}{10}100 = 281,50$$

O segundo quartis Q_2 é obtido mediante a contagem dos primeiros

$$N = \frac{65}{2} = 32,5$$

32,25 casos, e como as duas primeiras classes compreendem 18 casos, deve-se tomar

$$32{,}5 - 18 = 14{,}5$$

14,5 dos 16 casos existente na terceira classe, então

$$Q_2 = 299 + \frac{14{,}5}{16}100 = 389{,}62$$

O terceiro quartis Q_3 é obtido mediante a contagem dos primeiros

$$\frac{3N}{4} = \frac{3*65}{4} = 48{,}75$$

48,75 casos, e como as quatro primeiras classes compreendem 48 casos, deve-se tomar

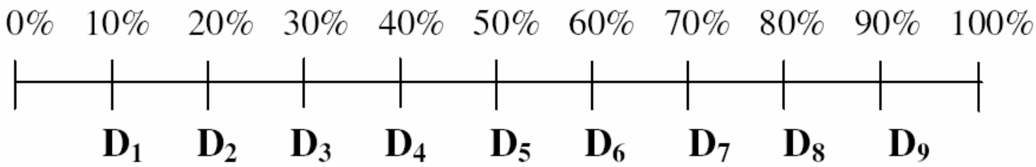
$$48{,}75 - 48 = 0{,}75$$

0,75 dos 10 casos existente na quinta classe, então

$$Q_3 = 499 + \frac{0{,}75}{10}100 = 506{,}50$$

DECIS

Dado um conjunto de dados, primeiramente devemos ordenado-los em ordem de grandeza, em seguida dividemos (separemos) a distribuição de freqüência em 10 partes iguais.



No 1º Decil (D1), 10% dos elementos estarão abaixo dele e 90%, acima.
No 2º Decil (D2), 20% dos elementos estarão abaixo dele e 80%, acima.
No 3º Decil (D3), 30% dos elementos estarão abaixo dele e 70%, acima.
E assim por diante.

PERCENTIS

Dado um conjunto de dados, primeiramente devemos ordenado-los em ordem de grandeza, em seguida dividemos (separemos) a distribuição de freqüência em 100 partes iguais. Então:
No 1º Percentil (P1), 1% dos elementos estarão abaixo dele e 99% estarão acima.
No 2º Percentil (P2), 2% dos elementos estarão abaixo dele e 98% estarão acima.
No 3º Percentil (P3), 3% dos elementos estarão abaixo dele e 97% estarão acima.
. . .
. . .
. . .
No 99º Percentil (P99), 99% dos elementos estarão abaixo dele e 1% estarão acima.
E assim por diante.

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 Determinar o primeiro, o segundo e o terceiro quartis das notas.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo, determinar o primeiro, o segundo e o terceiro quartis do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine o primeiro, o segundo e o terceiro quartis da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	**Número de Funcionários**
1 |— 3	30
3 |— 5	12
5 |— 7	6
7 |— 9	3

05) A tabela a seguir contém informações da altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine o primeiro, o segundo e o terceiro quartis da altura dos estudantes.

Altura (m)	**Número de Estudantes**
1,51 |— 1,58	5
1,59 |— 1,66	18
1,67 |— 1,74	42
1,75 |— 1,82	27
1,83 |— 1,90	8

RESUMO

- O quartis divide a distribuição de freqüência em 4 partes iguais.

- O decis divide a distribuição de freqüência em 10 partes iguais.

- O percentis divide a distribuição de freqüência em 100 partes iguais.

AULA 6: DESVIO MÉDIO

Objetivos:

- Determinar a amplitude total de um dado;
- Determinar o desvio médio de certo dado.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de tendência central fornecem uma idéia do comportamento das variáveis. Porém essas medidas não são suficientes para descrever e discriminar diferentes conjuntos de dados, por não revelar outras informações valiosas contidas nos dados.

Por exemplo, se fizermos um estudo da renda de uma cidade, como São Paulo, podemos determinar a renda média dos bairros. Certamente os altos rendimentos de alguns residentes serão suficientes para fazer a média atingir um patamar comparável das melhores economias do mundo, porém a discrepância desses salários como os dos demais moradores do bairro deve ser muito grande, isto é, a variabilidade dos valores dos salários não é captada pela média, sendo necessário para isto medidas de dispersão. Por exemplo, se analisarmos os dois conjuntos de valores $A_1 = \{0, 20, 40\}$ e $A_2 = \{20, 20, 20\}$, os dois conjuntos têm valores bem diferentes, apesar de terem a mesma média. Logo só as medidas de dispersão dos dados, são capaz de dizer como os valores do conjunto se espalham, fornecendo assim preciosa informação para quem for analisá-lo.

O grau ao qual os dados numéricos tendem a dispersar-se em torno de um valor médio chama-se **variação** ou **dispersão** dos dados. Há várias medidas de dispersão ou de variação, sendo as mais comuns a amplitude total, o desvio médio, a amplitude semi-interquartílica, a amplitude entre os centis 10-90 e o desvio padrão.

AMPLITUDE TOTAL

A amplitude total de um conjunto de números é a diferença entre o mais alto e o mais baixo do conjunto.

Exemplo: A amplitude total do conjunto $A = \{2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12\}$ é: $12 - 2 = 10$.

DESVIO MÉDIO

O desvio médio (DM → **D**esvio **M**édio) de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definido por:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $|x_i - \bar{x}|$ é o valor absoluto do desvio de x_i em relação a $\bar{x}$.

Exemplo:

1) Determinar o desvio médio do conjunto de números 2 , 3 , 6 , 8 e 11.

Solução: Devemos primeiro calcular a média aritmética $\bar{x} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$

de posse da média aritmética calculemos o desvio médio:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5} \quad \Rightarrow \quad DM = 2,8$$

Para dados agrupados, onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, o desvio médio é determinado pela forma:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \,|\, x_i - \bar{x} \,|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $|\, x_i - \bar{x} \,|$ é o valor absoluto do desvio de x_i em relação a $\bar{x}$, k é o númeo de classes e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Exemplo:

1) Determinar o desvio médio do conjunto de números.

x_i	f_i (freqüência)
5	3
8	2
6	4
2	1

Solução

Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{5*3+8*2+6*4+2*1}{3+2+4+1} = \frac{57}{10} = 5{,}7$$

de posse da média aritmética calculemos o desvio médio:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} |\, x_i - \bar{x} \,|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{3*|\,5-5{,}7\,|+2*|\,8-5{,}7\,|+4*|\,6-5{,}7\,|+1*|\,2-5{,}7\,|}{3+2+4+1}$$

$$DM = \frac{11{,}6}{10} = 1{,}16$$

2) A tabela a seguir mostra a distribuição de freqüência dos salários semana, em reais, de 65 funcionários da Companhia ABC. Determinar o desvio médio dos salários.

Salários (Reais)	Número de empregados
100,00 --- 199,00	8
200,00 --- 299,00	10
300,00 --- 399,00	16
400,00 --- 499,00	14
500,00 --- 599,00	10
600,00 --- 699,00	5
700,00 --- 799,00	2
	Total = 65

Solução

Primeiramente devemos determinar o ponto médio do intervalo

Salários (Reais)	Salário médio	Número de empregados
100,00 --- 199,00	149,50	8
200,00 --- 299,00	249,50	10
300,00 --- 399,00	349,50	16
400,00 --- 499,00	449,50	14
500,00 --- 599,00	549,50	10
600,00 --- 699,00	649,50	5
700,00 --- 799,00	749,50	2
		Total = 65

Calcularemos agora a média aritmética a partir da expressão

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Alimentando a expressão com os dados da tabela retemos:

$$\bar{x} = \frac{149{,}50*8+249{,}50*10+349{,}50*16+449{,}50*14+549{,}50*10+649{,}50*5+749{,}50*2}{8+10+16+14+10+5+2}$$

que resulta em

$$\bar{x} = \frac{25817{,}50}{65} = 397{,}19$$

de posse da média aritmética calculemos o desvio médio, com a expressão:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

de onde temos

$$DM = \frac{|149{,}50-397{,}19|*8+|249{,}50-397{,}19|*10+|349{,}50-397{,}19|*16+|449{,}50-397{,}19|*14+|549{,}50-397{,}19|*10+|649{,}50-397{,}19|*5+|749{,}50-397{,}19|*2}{8+10+16+14+10+5+2}$$

de onde temos

$$DM = \frac{8443{,}07}{65} = 129{,}89$$

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 . Determinar o desvio médio dos pontos do aluno.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo, determinar o desvio médio do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) A tabela apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine o desvio médio dos salários que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

04) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine o desvio médio da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	**Número de Funcionários**
1 |— 3	30
3 |— 5	12
5 |— 7	6
7 |— 9	3

05) A tabela a seguir contém a altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine o desvio médio da altura dos estudantes.

Altura (m)	**Número de Estudantes**
1,51 |— 1,58	5
1,59 |— 1,66	18
1,67 |— 1,74	42
1,75 |— 1,82	27
1,83 |— 1,90	8

06) Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Determinar o desvio médio do peso dos alunos.

69	82	75	66	72	62,5	74,5	78,5
73	79	70	73,5	68	74	76	72
84	63	69	88	81,5	59,5	77	82,5
73	86,5	71	73,5	67,5	76,5	70	67,5
80,5	72,5	67,5	71	75	72,5	72,5	64

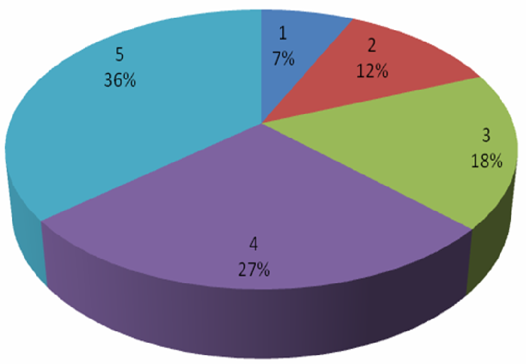
07) A tabela a seguir contém o salário mensal de 50 funcionários da Companhia, determine o desvio médio dos salários.

Salários (X)	Frequência
R$ 500,00	2
R$ 600,00	4
R$ 700,00	8
R$ 800,00	15
R$ 900,00	12
R$ 1.200,00	7
R$ 1.500,00	2
	$N = 50$

08) Uma instituição de pesquisa fez um levantamento de vários produtos adquiridos normalmente em uma feira popular. O resultado está na tabela a seguir. Determine o desvio médio do preço dos produtos pesquisado.

Produtos	Preço
Tomate	R$ 2,50
Cebola	R$ 2,00
Batata	R$ 2,30
Cenora	R$ 1,70
Repolho	R$ 2,00
Pimentão	R$ 1,90
Abobora	R$ 2,70

09) O gráfico a seguir informa a distribuição, em percentual, dos 800 funcionários de uma empresa com o número de filhos que cada funcionário possui. Determine o desvio médio do número de filhos dos empregados.



RESUMO

- variação ou dispersão dos dados é o grau ao qual os dados numéricos tendem a dispersar-se em torno de um valor médio;

- A amplitude total de um conjunto de números é a diferença entre o mais alto e o mais baixo do conjunto;

- O desvio médio de um conjunto $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, onde $\bar{x}$ é a média aritmética é definido por:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

- O desvio médio para dados agrupados, onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ é determinado pela forma:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

AULA 7: DESVIO PADÃO E VARIÂNCIA

Objetivos:

- Determinar o desvio padrão de um dado;
- Determinar a variância de certo dado.

Nesta aula, continuaremos a estutar as médidas de dispersão, em particular o desvio padrão e a variância. O termo desvio padrão foi introduzido na estatística por Karl Pearson no seu livro de 1894: "Sobre a dissecção de curvas de frequência assimétricas", e é a medida mais comum da dispersão estatística. Para você compreender a importancia dessas medidas observe o exemplo a seguir.

Exemplo:

01) Mária pergunta para seu filho João, ‘quanto foi a sua média de matemática este ano?’.

Lembre-se que, em estatística, a **média** nada mais é que um valor que "representa" vários outros.

João tirou as seguintes notas neste ano:

Avaliações	Notas
1ª Avaliação	9,0
2ª Avaliação	7,0
3ª Avaliação	4,0
4ª Avaliação	3,0
5ª Avaliação	2,0

Observe que a média de João foi

$$Média = \frac{9{,}0 + 7{,}0 + 4{,}0 + 3{,}0 + 2{,}0}{5} = 5{,}0$$

Note que a sua média não é igual a nenhuma das notas que ele tirou. É um número que mostra mais ou menos como João foi no ano.

Dizer que João tirou média 5,0 não é suficiente para avaliarmos seu desempenho ao longo do ano, pois na média não é póssivel perceber que João começos o ano muito bem e terminou muito mal.

Para entendermos o que aconteceu com as notas de João ao longo do ano devemos determinar o devio delas em relação a média, que é a diferença de cada nota em relação à média.

Avaliações	Notas	Média	Desvio
1ª Avaliação	9,0	5,0	4,0
2ª Avaliação	7,0	5,0	2,0
3ª Avaliação	4,0	5,0	- 1,0
4ª Avaliação	3,0	5,0	- 2,0
5ª Avaliação	2,0	5,0	- 3,0

Repare que a soma dos desvios resultará em zero. Note que, apesar de João ter tido média 5, seu desempenho foi muito irregular, o que não é tão bom assim. Outro dado importante em estatística é obtido pela soma dos desvios ao quadrado. Cada desvio é elevado ao quadrado e, em seguida, somados:

Avaliações	Notas	Média	Desvio	Quadrado dos Desvios
1ª Avaliação	9,0	5,0	4,0	16
2ª Avaliação	7,0	5,0	2,0	4
3ª Avaliação	4,0	5,0	- 1,0	1
4ª Avaliação	3,0	5,0	- 2,0	4
5ª Avaliação	2,0	5,0	- 3,0	9
Soma dos quadrados dos desvios =				34

A soma dos quadrados dos desvios dividida pelo número de ocorrências é chamada de variância, logo:

$$\text{variância} = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

A dispersão das notas de João em relação a sua média pode ser observada pelo desvio padrão, para isto devemos apenas tirar a raiz quadrada da variância, logo:

$$\text{desvio padão} = 2{,}6$$

Para entendermos a disperção que o desvio padrão representa obser a mesma análise feita nas notas de Pedro:

Avaliações	Notas	Média	Desvio	Quadrado dos Desvios
1ª Avaliação	5,5	5,0	0,5	0,25
2ª Avaliação	4,5	5,0	- 0,5	0,25
3ª Avaliação	6,0	5,0	1,0	1
4ª Avaliação	4,0	5,0	- 1,0	1
5ª Avaliação	5,0	5,0	0,0	0
Soma dos quadrados dos desvios =				2,5

$$\text{variância} = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$$

$$\text{desvio padão} = 0{,}7071$$

Observe que o desvio padrão das notas de Pedro é bem menor que os da nostas de João, o que significa que ele teve umcomportamento mais regular, suas notas ficaram, todas, próximo da média.

Agora que já e já entendemos a importância das medidas de dispersão vamos formaliza-las e resolver alguma atividades.

DESVIO PADÃO

O desvio padrão (símbolo → σ) de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definido por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

em que n é o número de elementos o conjunto, $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $x_i - \bar{x}$ é o desvio de x_i em relação a $\bar{x}$.

Exemplo:
1) Determinar o desvio padão do conjunto de números 2 , 3 , 6 , 8 e 11.
Solução: Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

de posse da média aritmética calculemos o desvio médio:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{54}{5}} = 3{,}2863$$

Para dados agrupados, onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, o desvio padão é determinado pela forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $(x_i - \bar{x})$ é o desvio de x_i em relação a $\bar{x}$, k é o númeo de classes e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Exemplo:
1) Determinar o desvio padrão do conjunto de números.

x_i	f_i (freqüência)
5	3
8	2
6	4
2	1

Solução
Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{5*3+8*2+6*4+2*1}{3+2+4+1} = \frac{57}{10} = 5{,}7$$

de posse da média aritmética calculemos o desvio padrão (σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}} = \sqrt{\frac{3*(5-5{,}7)^2 + 2*(8-5{,}7)^2 + 4*(6-5{,}7)^2 + 1*(2-5{,}7)^2}{3+2+4+1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{26{,}1}{10}} = 1{,}6155$$

VARIÂNCIA

A variância (símbolo $\rightarrow \sigma^2$) de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definido por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

em que n é o número de elementos o conjunto, $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $x_i - \bar{x}$ é o desvio de x_i em relação a $\bar{x}$. A variância é o quadrado do desvio padrão e observemos na fórmula que o numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio. Essa diferença traduz o quanto o valor observado se distancia do valor médio, sendo, portanto uma medida do grau de variabilidade existente nos dados.

<u>Exemplo</u>:

1) Determinar a variância do conjunto de números 1 , 2 , 4 , 6 , 8 e 10.

Solução

Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+6+8+10}{6} = 5{,}167$$

de posse da média aritmética calculemos a variância:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5{,}167)^2 + (2-5{,}167)^2 + (4-5{,}167)^2 + (6-5{,}167)^2 + (8-5{,}167)^2 + (10-5{,}167)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{60{,}83}{6} = 10{,}1389$$

Para dados agrupados, onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, a variância é determinado pela forma:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

em que $\bar{x}$ é a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $(x_i - \bar{x})$ é o desvio de x_i em relação a $\bar{x}$, k é o númeo de classes e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Exemplo:

1) Determinar o desvio padrão do conjunto de números.

x_i	f_i (freqüência)
2	3
4	2
6	4
4	3
1	1

Solução

Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{2*3+4*2+6*4+4*3+1*1}{3+2+4+3+1} = \frac{47}{13} = 3{,}9231$$

de posse da média aritmética calculemos a variância (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{3*(2-3{,}9231)^2 + 2*(4-3{,}9231)^2 + 4*(6-3{,}9231)^2 + 3*(4-3{,}9231)^2 + 1*(1-3{,}9231)^2}{3+2+4+3+1}$$

$$\sigma^2 = 2{,}8402$$

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 . Determinar o desvio padrão e variância dos pontos do aluno.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo, determinar o desvio padrão e variância do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) A tabela apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine o desvio padrão e variância dos salários que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

04) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine o desvio padrão e variância da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	Número de Funcionários
1 ⊢ 3	30
3 ⊢ 5	12
5 ⊢ 7	6
7 ⊢ 9	3

05) A tabela a seguir contém a altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine o desvio padrão e variância da altura dos estudantes.

Altura (m)	Número de Estudantes
1,51 ⊢ 1,58	5
1,59 ⊢ 1,66	18
1,67 ⊢ 1,74	42
1,75 ⊢ 1,82	27
1,83 ⊢ 1,90	8

06) Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Determinar o desvio padrão e variância do peso dos alunos.

69	82	75	66	72	62,5	74,5	78,5
73	79	70	73,5	68	74	76	72
84	63	69	88	81,5	59,5	77	82,5
73	86,5	71	73,5	67,5	76,5	70	67,5
80,5	72,5	67,5	71	75	72,5	72,5	64

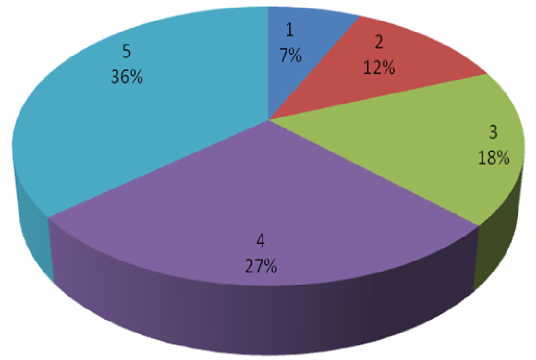
07) A tabela a seguir contém o salário mensal de 50 funcionários da Companhia, determine o desvio padrão e variância dos salários.

Salários (X)	Frequência
R$ 500,00	2
R$ 600,00	4
R$ 700,00	8
R$ 800,00	15
R$ 900,00	12
R$ 1.200,00	7
R$ 1.500,00	2
	$N = 50$

08) Uma instituição de pesquisa fez um levantamento de vários produtos adquiridos normalmente em uma feira popular. O resultado está na tabela a seguir. Determine o desvio padrão e variância do preço dos produtos pesquisado.

Produtos	Preço
Tomate	R$ 2,50
Cebola	R$ 2,00
Batata	R$ 2,30
Cenora	R$ 1,70
Repolho	R$ 2,00
Pimentão	R$ 1,90
Abobora	R$ 2,70

09) O gráfico a seguir informa a distribuição, em percentual, dos 800 funcionários de uma empresa com o número de filhos que cada funcionário possui. Determine o desvio padrão e variância do número de filhos dos empregados.



RESUMO

- O desvio padrão de um conjunto $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, onde $\bar{x}$ é a média aritmética é definido por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

- Para dados agrupados, onde $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, o desvio padão é determinado pela forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$$

- A variância de um conjunto $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definido por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

AULA 8: MOMENTOS DE ORDEM r
Objetivos:

- Determinar os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem;
- Determinar os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem centrado numa origem definida;
- Determinar os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem de dados agrupados.

MOMENTO

Seja um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, representamos o momento de ordem r por $\overline{X}^r$ é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{x_1^r + x_2^r + x_3^r + ... + x_n^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$$

Exemplo:
01) Dado o conjunto de números $2, 3, 7, 8\ e\ 10$ determine:
a) momento de primeira ordem
b) momento de segunda ordem
c) momento de terceira ordem
d) momento de quarta ordem
Solução

a) $\overline{X}^1 = \frac{2+3+7+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$ momento de primeira ordem

b) $\overline{X}^2 = \frac{2^2+3^2+7^2+8^2+10^2}{5} = \frac{226}{5} = 45{,}2$ momento de segunda ordem

c) $\overline{X}^3 = \frac{2^3+3^3+7^3+8^3+10^3}{5} = \frac{1890}{5} = 378$ momento de terceira ordem

d) $\overline{X}^4 = \frac{2^4+3^4+7^4+8^4+10^4}{5} = \frac{16594}{5} = 3318{,}8$ momento de quarta ordem

Se $r = 1$, temos o momento de primeira ordem que é a média aritmética $\overline{X}$.

$$\overline{X}^r = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplo:
01) Dado o conjunto de números $2, 4, 6, 8\ e\ 10$ determine momento de primeira ordem (média aritmética)

Solução
$\overline{X} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

O momento de ordem r centrado na média $\overline{X}$ é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{(x_1 - \overline{X})^r + (x_2 - \overline{X})^r + (x_3 - \overline{X})^r + ... + (x_n - \overline{X})^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^r}{n}$$

Exemplo:
01) Dado o conjunto de números $2, 3, 7, 8\ e\ 10$ determine os momentos abaixo centrados na média:
a) momento de primeira ordem
b) momento de segunda ordem
c) momento de terceira ordem
d) momento de quarta ordem
Solução
Primeiramente vamos calcular o valor da média aritmética

$$\overline{X} = \frac{2+3+7+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

a) $\overline{X}^1 = \frac{(2-6)^1 + (3-6)^1 + (7-6)^1 + (8-6)^1 + (10-6)^1}{5} = \frac{0}{5} = 0$

b) $\overline{X}^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2$

c) $\overline{X}^3 = \frac{(2-6)^3 + (3-6)^3 + (7-6)^3 + (8-6)^3 + (10-6)^3}{5} = \frac{-18}{5} = -3{,}6$

d) $\overline{X}^4 = \frac{(2-6)^4 + (3-6)^4 + (7-6)^4 + (8-6)^4 + (10-6)^4}{5} = \frac{610}{5} = 122$

Se $r = 2$ e se centrarmos o momento na média teremos então a variância:

$$\overline{X}^2 = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + (x_3 - \overline{X})^2 + ... + (x_n - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$$

<u>Exemplo</u>:
1) Determinar a variância do conjunto de números 1 , 2 , 4 , 6 , 8 e 10.
Solução
Devemos primeiro calcular a média aritmética

$$\overline{X}^2 = \frac{1+2+4+6+8+10}{6} = 5{,}167$$

de posse da média aritmética calculemos a variância:

$$\overline{X}^2 = \frac{(x_1 - 5{,}167)^2 + (x_2 - 5{,}167)^2 + (x_3 - 5{,}167)^2 + ... + (x_n - 5{,}167)^2}{n}$$

$$\overline{X}^2 = \frac{(1-5{,}167)^2 + (2-5{,}167)^2 + (4-5{,}167)^2 + (6-5{,}167)^2 + (8-5{,}167)^2 + (10-5{,}167)^2}{6}$$

$$\overline{X}^2 = \frac{60{,}83}{6} = 10{,}1389$$

O momento de ordem r centrado numa origem qualquer A é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{(x_1 - A)^r + (x_2 - A)^r + (x_3 - A)^r + ... + (x_n - A)^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^r}{n}$$

em que $x_i - A$ é o desvio de cada valor de x_i em relação a A. Se $A = 0$, $\overline{X}^r$ é denominado de momento de ordem r centrado na origem.

01) Dado o conjunto de números $2, 3, 7, 8\ e\ 10$ determine os momentos abaixo centrados na origem 4.
a) momento de primeira ordem
b) momento de segunda ordem
c) momento de terceira ordem
d) momento de quarta ordem
Solução

a) $\overline{X}^1 = \frac{(2-4)^1 + (3-4)^1 + (7-4)^1 + (8-4)^1 + (10-4)^1}{5} = \frac{10}{5} = 2$

b) $\overline{X}^2 = \frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2 + (8-4)^2 + (10-4)^2}{5} = \frac{66}{5} = 13{,}2$

c) $\overline{X}^3 = \frac{(2-4)^3 + (3-4)^3 + (7-4)^3 + (8-4)^3 + (10-4)^3}{5} = \frac{298}{5} = 59{,}6$

d) $\overline{X}^4 = \frac{(2-4)^4 + (3-4)^4 + (7-4)^4 + (8-4)^4 + (10-4)^4}{5} = \frac{1650}{5} = 330$

MOMENTO DE DADOS AGRUPADOS

Se os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_K$ ocorrem com as freqüências $f_1, f_2, f_3, ..., f_K$, respectivamente, o momento de ordem r por $\overline{X}^r$ é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{f_1 x_1^r + f_2 x_2^r + f_3 x_3^r + ... + f_n x_n^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i x_i^r}{n}$$

Exemplo:
01) A tabela abaixo apresenta a altura de 100 estudantes do sexo masculino da Universidade XYZ.

Alturas (cm)	**Frequência** (f_i)
151 – 158	5
159 – 166	18
167 – 174	42
175 – 182	27
183 – 190	8
Total	100

Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem.

Solução
Primeiro devemos achar o ponto médio de cada classe

Alturas (cm)	**Ponto Médio** (x_i)	**Frequência** (f_i)
151 – 158	154,5	5
159 – 166	162,5	18
167 – 174	170,5	42
175 – 182	178,5	27
183 – 190	186,5	8
Total		100

Calculemos os seguintes produtos $f_i\,x_i$, $f_i\,x_i^2$, $f_i\,x_i^3$ e $f_i\,x_i^4$

Ponto Médio (x_i)	**Frequência** (f_i)	$f_i\,x_i$	$f_i\,x_i^2$	$f_i\,x_i^3$	$f_i\,x_i^4$
154,5	5	772,5	119351,25	18439768,13	2848944175,31
162,5	18	2925,0	475312,00	77238281,25	12551220703,13
170,5	42	7161,0	1220950,00	208172060,25	35493336272,63
178,5	27	4819,5	860280,75	153560113,88	27410480326,69
186,5	8	1492,0	278258,00	51895117,00	9678439320,50
Total	100	17170,0	2954153,00	509305340,50	87982420798,25

a) $\overline{X}^1 = \dfrac{17170,0}{100} = 171,70$ momento de primeira ordem

b) $\overline{X}^2 = \dfrac{2954153,00}{100} = 29541,53$ momento de segunda ordem

c) $\overline{X}^3 = \dfrac{509305340,50}{100} = 5093053,405$ momento de terceira ordem

d) $\overline{X}^4 = \dfrac{87982420798,25}{100} = 879824207,9825$ momento de quarta ordem

MOMENTO DE DADOS AGRUPADOS CENTRADO NO VALOR A

Se os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_K$ ocorrem com as freqüências $f_1, f_2, f_3, ..., f_K$, respectivamente, o momento de ordem r centrado em A é definido por:

$$\overline{X}^{r}{}' = \frac{f_1\,(x_1 - A)^r + f_2\,(x_2 - A)^r + f_3\,(x_2 - A)^r + ... + f_n\,(x_n - A)^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i\,(x_i - A)^r}{n}$$

Exemplo:
01) A tabela abaixo apresenta a altura de 100 estudantes do sexo masculino da Universidade XYZ.

Alturas (cm)	**Frequência** (f_i)
151 – 158	5
159 – 166	18
167 – 174	42
175 – 182	27
183 – 190	8
Total	100

Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem centrados na média.
Solução
Primeiro devemos achar o ponto médio de cada classe

Alturas (cm)	**Ponto Médio** (x_i)	**Frequência** (f_i)
151 – 158	154,5	5
159 – 166	162,5	18
167 – 174	170,5	42
175 – 182	178,5	27
183 – 190	186,5	8
Total		100

Devemos calcular o valor médio

$$media = \frac{154{,}5*5+162{,}5*18+170{,}5*42+178{,}5*27+186{,}5*8}{100} = 171{,}70$$

Calculemos os seguintes produtos $f_i\,x_i$, $f_i\,x_i^2$, $f_i\,x_i^3$ e $f_i\,x_i^4$

Ponto Médio (x_i)	$x_i - \overline{x}$	**Frequência** (f_i)	$f_i\,(x_i-\overline{x})$	$f_i\,(x_i-\overline{x})^2$	$f_i\,(x_i-\overline{x})^3$	$f_i\,(x_i-\overline{x})^4$
154,5	- 17,20	5	-86,00	1479,20	-25442,24	437606,53
162,5	- 9,20	18	-165,60	1523,52	-14016,38	128950,73
170,5	- 1,20	42	-50,40	60,48	-72,58	87,09
178,5	6,80	27	183,60	1248,48	8489,66	57729,72
186,5	14,80	8	118,40	1752,32	25934,34	383828,17
Total		100	0,00	6064,00	-5107,20	1008202,24

a) $\overline{X}^1 = \frac{0}{100} = 0$ momento de primeira ordem

b) $\overline{X}^2 = \frac{6064{,}00}{100} = 60{,}64$ momento de segunda ordem

c) $\overline{X}^3 = \frac{-5107{,}20}{100} = -51{,}072$ momento de terceira ordem

d) $\overline{X}^4 = \frac{1008202.24}{100} = 10082{,}0224$ momento de quarta ordem

ATIVIDADE

01) A pontuação de um aluno em uma seqüência de prova foi: 8.4 , 9.1 , 7.2 , 6.8 , 8.7 e 7.8 . Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem dos pontos do aluno.

02) O valor da hora-trabalho de 5 empregados de uma firma esta mostrado na tabela a baixo. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem do valor da hora-trabalho.

Tipo de trabalhador	Valor da hora-trabalho
Trabalhador Classe A	R$ 7,50
Trabalhador Classe B	R$ 12,50
Trabalhador Classe C	R$ 17,00
Trabalhador Classe D	R$ 25,00
Trabalhador Classe E	R$ 32,00

03) A tabela apresenta os salários recebidos por funcionários de uma empresa segundo o cargo que ocupam. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem dos salários que a empresa paga para seus funcionários.

Cargos	Notas
Diretor	2.500,00
Chefe de departamento	1.700,00
Agente Administrativo	800,00
Serviços Gerais	500,00
Segurança	450,00
Apoio Técnico	600,00

04) A tabela a seguir contém informações da renda família mensal de funcionários de uma determinada empresa. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem da renda desses funcionários.

Renda familiar mensal	**Número de Funcionários**
1 |— 3	30
3 |— 5	12
5 |— 7	6
7 |— 9	3

05) A tabela a seguir contém a altura de 100 estudantes do sexo masculino de uma determinada universidade. A partir das informações contidas na tabela determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem da altura dos estudantes.

Altura (m)	**Número de Estudantes**
1,51 |— 1,58	5
1,59 |— 1,66	18
1,67 |— 1,74	42
1,75 |— 1,82	27
1,83 |— 1,90	8

06) Na tabela seguinte estão relacionados os pesos de quarenta estudantes do sexo masculino da Universidade Estadual, arredondados para meio quilo. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem do peso dos alunos.

69	82	75	66	72	62,5	74,5	78,5
73	79	70	73,5	68	74	76	72
84	63	69	88	81,5	59,5	77	82,5
73	86,5	71	73,5	67,5	76,5	70	67,5
80,5	72,5	67,5	71	75	72,5	72,5	64

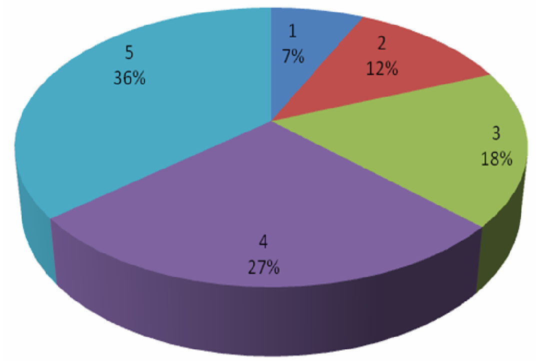
07) A tabela a seguir contém o salário mensal de 50 funcionários da Companhia, determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem dos salários.

Salários (X)	Frequência
R$ 500,00	2
R$ 600,00	4
R$ 700,00	8
R$ 800,00	15
R$ 900,00	12
R$ 1.200,00	7
R$ 1.500,00	2
	N = 50

08) Uma instituição de pesquisa fez um levantamento de vários produtos adquiridos normalmente em uma feira popular. O resultado está na tabela a seguir. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem do preço dos produtos pesquisado.

Produtos	Preço
Tomate	R$ 2,50
Cebola	R$ 2,00
Batata	R$ 2,30
Cenora	R$ 1,70
Repolho	R$ 2,00
Pimentão	R$ 1,90
Abobora	R$ 2,70

09) O gráfico a seguir informa a distribuição, em percentual, dos 800 funcionários de uma empresa com o número de filhos que cada funcionário possui. Determine os momentos de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª ordem do número de filhos dos empregados.



RESUMO

- O momento de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{x_1^r + x_2^r + x_3^r + ... + x_n^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$$

- O momento de ordem r centrado na média $\overline{X}$ é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{(x_1 - \overline{X})^r + (x_2 - \overline{X})^r + (x_3 - \overline{X})^r + ... + (x_n - \overline{X})^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^r}{n}$$

- O momento de ordem r centrado numa origem qualquer A é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{(x_1 - A)^r + (x_2 - A)^r + (x_3 - A)^r + ... + (x_n - A)^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - A)^r}{n}$$

- Se os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_K$ ocorrem com as freqüências $f_1, f_2, f_3, ..., f_K$, respectivamente, é definido por:

$$\overline{X}^r = \frac{f_1\, x_1^r + f_2\, x_2^r + f_3\, x_3^r + ... + f_n\, x_n^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i\, x_i^r}{n}$$

- Se os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_K$ ocorrem com as freqüências $f_1, f_2, f_3, ..., f_K$, respectivamente, o momento de ordem r centrado em A é definido por:

$$\overline{X}^{r}{}' = \frac{f_1\,(x_1 - A)^r + f_2\,(x_2 - A)^r + f_3\,(x_2 - A)^r + ... + f_n\,(x_n - A)^r}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i\,(x_i - A)^r}{n}$$