RECURSO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TÓPICOS DA ARITMÉTICA MODULAR NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

ORIENTADOR: PROF. DR. ALDO AMILCAR BAZAN PACORICONA

DISCENTE: WANDERLAN CARMINATTI DE OLIVEIRA

PROFMAT

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

NITERÓI
ABRIL/2024

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este produto educacional, caderno de atividades, é referente a dissertação intitulada “Elementos da Aritmética Modular e o seu papel nos anos finais do ensino fundamental e no ensino superior”, consequência da pesquisa ligada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado ao Instituto de Matemática e Estatística, da UFF (Universidade Federal Fluminense).

Este tem como finalidade complementar e sustentar as orientações metodológicas recomendadas na última unidade do trabalho citado acima. Está fracionada em três sequências constituídas por parte teórica, tendo como continuidade recomendações de exercícios do banco de questões do concurso do Colégio Naval, da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), e da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), que buscam potencializar a aprendizagem do assunto compreendido.

São elas:

I. Congruências modulares.

II. Equações Diofantinas Lineares.

2 ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Este material é composto por 10 atividades que abordam a resolução de problemas de congruência modular e equações Diofantinas Lineares. Todas as atividades foram desenvolvidas para aplicação no 8°e 9º ano do Ensino Fundamental. Contudo, dependendo do entusiasmo da turma e do nível de desenvolvimento, o professor pode ficar à vontade para aplicar as atividades em suas turmas.

2.1 ORIENTAÇÕES AO DISCENTE

Este material é composto por 10 atividades que abordam a resolução de problemas de congruência modular e equações Diofantinas Lineares. Todas as atividades foram desenvolvidas para aplicação no 8°e 9º ano do Ensino Fundamental. É importante que os alunos intensifiquem os estudos no conteúdo de algoritmo da divisão de Euclides, pois esse é peça essencial para o entendimento dos problemas propostos.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta, atribui-se que a audiência possua conhecimentos pregressos sobre:

- Múltiplos e divisores de um número inteiro.
- Algoritmo da Divisão de Euclides.
- Máximo Divisor Comum.
- Mínimo Múltiplo Comum.

Na hipótese de os discentes não tenham domínio dos assuntos mencionados, orienta-se que utilizem as unidades 2 e 3 da dissertação citada, com o intuito de auxiliar na resolução das questões.

3.1 CONGRUÊNCIA MODULAR

Objetivo:

- Alcançar os conceitos e definições de congruência modular.
- Apresentar as principais propriedades de congruência modular.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, videoaulas de sua preferência sobre o tema.

Tipo de atividade: individual.

Duração: 6 aulas de 50 minutos.

Neste primeiro instante é essencial uma aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com auxílio de pilotos coloridos. Entretanto, se tiver a chance de exibir uma mídia digital, recomenda-se que utilize videoaulas de sua preferência sobre o assunto.

Registros para serem apresentados na lousa:

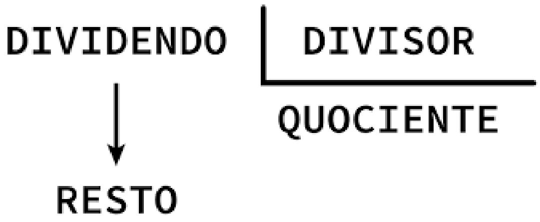
3.1.1 Introdução ao estudo de congruência modular

Primeiramente é necessário realizar uma revisão sobre o Algoritmo da Divisão:
Dicas → Deve-se exemplificar oralmente com exemplos lúdicos que façam parte do cotidiano dos alunos, para melhor compreensão.
Tipo:

- Temos 42 frutas que serão divididas entre 6 alunos, quantas frutas cada aluno receberá? (Nesse momento, é interessante usar o nome de seis estudantes presentes na sala de aula). Após a reposta da turma, escrever o Algoritmo da divisão na lousa: 42 = 6 · 7 + 0, ressaltando que o zero é o resto da divisão, e com isso temos que 42 é múltiplo de 6.

- A reunião de Paulo receberá 7 convidados, que receberão lembranças confeccionadas por sua mãe. Sabendo que foram produzidos 20 brindes, quantas lembranças cada convidado receberá? E ainda, perguntar se sobrarão lembranças nessa ocasião. Em seguida, espera a resposta dos discentes, e registre o Algoritmo da divisão na lousa: 20 = 7 · 2 + 6.

Algoritmo da Divisão: É um método para dividir um número por outro, obtendo um quociente como resultado e, algumas vezes, um resto. Além das duas partes citadas, temos o dividendo e o divisor.



Exemplo 3.1:

Efetue a divisão de 17 por 5, utilizando o Algoritmo da divisão. Em seguida, destaque o dividendo, divisor, quociente e o resto

Resolução:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

Onde: Dividendo = 17, divisor = 5, quociente = 3 e o resto = 2.

Passada a revisão do conteúdo citado acima, é imprescindível mostrar que o Algoritmo da divisão pode ser reescrito na forma de congruência modular. É importante salientar que essa transformação vai oferecer a utilização de propriedades importantes, primordiais na resolução dos exercícios propostos futuramente.

Dica → Utilize cores diferentes para representar os elementos do Algoritmo da divisão, e use essas mesmas cores para reescrever no formato de congruência modular.

Dado o Algoritmo da divisão 34 = 6 · 5 + 4, temos: Dividendo = 34, divisor = 6, quociente = 5 e o resto = 4, que será reescrito na forma: $34 \equiv 4 \pmod{6}$.

Essa nova forma significa que 34 e 4 deixam o mesmo resto 4, quando são divididos por 6 separadamente. E reparem que ao escrever a congruência modular usamos o dividendo, o resto e o divisor.

Exemplo 3.2:

Dada a divisão de 57 por 9, escreva o Algoritmo da divisão e, em seguida, transforme o algoritmo em congruência modular.

Resolução:

$57 = 9 \cdot 6 + 3$ temos: Dividendo = 57, divisor = 9, quociente = 6 e o resto = 3, que será reescrito na forma: $57 \equiv 3 \pmod{9}$.

Após mostrar que o Algoritmo da divisão pode ser reescrito como congruência modular, trabalharemos com algumas propriedades.

Propriedades importantes de congruência modular

Propriedade 3.1: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

Exemplo 3.3:

Dada a congruência $10 \equiv 3$ (mod7). Agora vamos somar 5 a ambos os membros:

$10 + 5 \equiv 3 + 5$ (mod7) $\Leftrightarrow 15 \equiv 8$ (mod7).

Propriedade 3.2: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - c \equiv b - c \pmod{m}$.

Exemplo 3.4:

Dada a congruência $10 \equiv 3$ (mod7). Agora vamos subtrair 2 a ambos os membros: $10 - 2 \equiv 3 - 2$ (mod7) $\Leftrightarrow 8 \equiv 1$ (mod7).

Propriedade 3.3: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$.

Exemplo:

Dada a congruência $10 \equiv 3$ (mod7). Agora vamos multiplicar 2 a ambos os membros:$10 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 2$ (mod7) $\Leftrightarrow 20 \equiv 6$ (mod7).

Propriedade 2.4: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Exemplo 3.5:

Dada a congruência $10 \equiv 3$ (mod7). Agora vamos elevar ambos os membros da congruência a 11: $10 \equiv 3$ (mod7) $\Rightarrow 10^{11} \equiv 3^{11}$ (mod7).

Como a propriedade 2.4 é muito importante, vamos a outro exemplo.

Exemplo 3.6:

Ache o resto da divisão de 2^{45} por 7.

Resolução:

Como 8 e 1 deixam o mesmo resto 1, quando divididos por 7, podemos escrever:

$8 \equiv 1$ (mod7). E ainda, $2^3 = 8$. Daí, temos:

$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (2^3)^{15} \equiv 1^{15} \pmod{7} \Rightarrow 2^{45} \equiv 1 \pmod{7}$.

Portanto, o resto da divisão de 2^{45} por 7 é 1.

Observação 3.1: Uma congruência modular pode ser reescrita somando ou subtraindo os múltiplos do módulo, do lado direito da congruência.

Exemplo 3.7:

Considere a congruência $17 \equiv 2 \bmod 5$, que pode ser reescrita de várias maneiras: $17 \equiv 2 + 5 \bmod 5 \Leftrightarrow 17 \equiv 7 \bmod 5$, $17 \equiv 2 - 5 \bmod 5 \Leftrightarrow 17 \equiv -3 \bmod 5$.

Exemplo 3.8:

Dada a congruência modular $13 \equiv 6 \bmod 7$, que será reescrita subtraindo o módulo 7 do lado direito, segue que: $13 \equiv 6 - 7 \bmod 7 \Leftrightarrow 13 \equiv -1 \bmod 7$. Essa ferramenta é muito utilizada, pois ficamos com -1 do lado direito, e com isso é possível aplicar o Corolário 2, colocando um expoente com valor alto e não alterará em nada, já que um dos números elevados a esse expoente será -1.

A seguir, serão apresentadas questões do assunto congruência modular e suas respectivas resoluções.

Questão 1 (OBMEP – 2010 – nível 1 – 1ª fase)

Paula iniciou um programa de ginástica no qual os dias de treino são separados por dois dias de descanso. Se o primeiro treino foi em uma segunda-feira, em qual dia da semana cairá o centésimo treino?

a) Domingo

b) Segunda-feira

c) Terça-feira

d) Quinta-feira

e) Sexta-feira

Resolução:

Podemos organizar a sequência de dias da semana em que Paula realizará seus treinos em uma tabela, como mostrado abaixo:

Segunda-feira	1º treino					8º treino
Terça-feira					6º treino	
Quarta-feira				4º treino		
Quinta-feira		2º treino				
Sexta-feira					7º treino	
Sábado				5ºtreino		
Domingo			3ºtreino			

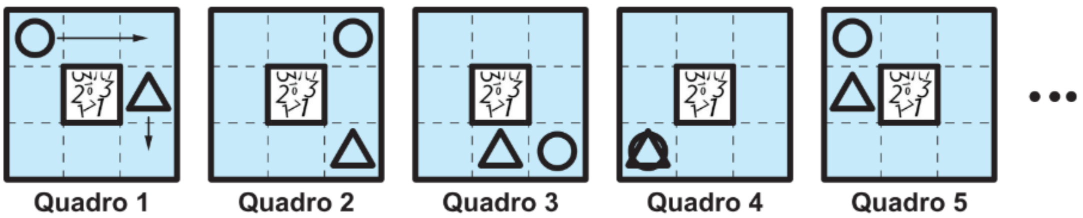
Podemos observar que depois do sétimo treino a ordem dos dias da semana para os próximos treinos se repetirá. Então, devemos encontrar o número que é resto da divisão de 100 por 7, isto é, o número que é congruente a 100 módulo 7. Temos que:

$$100 \equiv 2 \text{ mod } 7.$$

Portanto, podemos concluir que o centésimo treino será no mesmo dia do segundo treino, ou seja, em uma quinta-feira.

Questão 2 (OBMEP – 2015 – nível 1 – 2ª fase)

Na sequência de quadros abaixo, uma bolinha e um triângulo caminham no sentido horário pelas casas sombreadas. De um quadro para o seguinte, o triângulo passa de uma casa para a casa vizinha, e a bolinha pula uma casa. Desenhe a bolinha e o triângulo do quadro 2015.



<u>Resolução</u>:

Podemos perceber pela Figura que a cada 8 quadros, a sequência de desenhos se repete. Como queremos saber o quadro 2015, temos que encontrar o resto da divisão de 2015 por 8, isto é, o número que é congruente a 2015 módulo 8, segue que

$2015 \equiv 7 \bmod 8.$

Logo, concluímos que o quadro 2015 será igual ao quadro 7.

<u>Questão 3</u> (Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina – 2017 – Nível Intermediário)

Jucavo propõe o seguinte desafio: “Eu vou pensar em um número. A seguir, darei três dicas e você terá que dizer qual foi o número em que pensei”. Você aceita o desafio? Jucavo, então pensa em um número e fornece as seguintes dicas:

- o número que eu pensei é um múltiplo de 7;
- quando eu subtraio 17 do número que eu pensei, resultado obtido é múltiplo de 4;
- o número que eu pensei é um número natural entre 2000 e 2017.

Assinale a alternativa que corresponde ao número que Jucavo pensou.

a) 2005

b) 2009

c) 2002

d) 2016

e) 2003

<u>Resolução</u>:

Seja x o número que Jucavo pensou. Dadas as três condições, buscamos um número x tal que:

$x \equiv 0 \bmod 7,$

$x - 17 \equiv 0 \bmod 4 \Rightarrow x - 17 + 17 \equiv 0 + 17 \bmod 4 \Rightarrow x \equiv 17 \bmod 4,$

$2000 < x < 2017.$

Primeiramente, vamos obter o resto da divisão de 2002 por 7, isto é, o número que é congruente a 2002 módulo 7, note que

$2002 \equiv 0 \bmod 7.$

Com isso, podemos concluir que 2002 é um múltiplo de 7. Da terceira dicas temos que os próximos múltiplos de 7 são 2009 e 2016. Então, temos três candidatos ao número pensado por Jucavo: 2002, 2009 e 2016.

Agora, de acordo com a segunda dica, vamos verificar qual número deixa resto 17 ao ser dividido por 4, obtemos

$2002 \equiv 2 \mod 4$,

$2009 \equiv 17 \mod 4$,

$2016 \equiv 0 \mod 4$.

Daí, o número pensado é 2009.

Questão 4 (Olimpíada Brasileira de Matemática – 2001 – Nível 2 – 1ª fase)

Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo -se que 15 alunos são meninas e que nessa classe o número de meninas é maior que o meninos, o número de meninos nessa classe é:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução:

Sabe-se que 15 é o número de meninas e sendo o número de meninas maior que o de meninos, concluímos que pode haver de 1 a 14 meninos. Portanto, o total de alunos é um número compreendido entre 16 e 29. Denotando x o número total de alunos, segue que

$x \equiv 1 \mod 5, \quad 16 \leq x \leq 29$

Daí, x pode ser igual a 16, 21 e 26. Além disso, se contarmos o número de 4 em 4 sobram 2. Então, $x \equiv 2 \mod 4$.

Logo, o único que satisfaz a última condição é o 26.

Portanto, são 26 alunos e o número de meninos é 26 – 15 = 11.

Questão 5 (Colégio Naval 1994)

O resto da divisão do número 743^{48} por 6, é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Resolução:

Primeiramente, devemos encontrar o número que é resto da divisão de 743 por 6, isto é, o número que é congruente a 743 módulo 6. Temos que

$743 \equiv 5 \bmod 6.$

Um artifício muito utilizado é somar ou subtrair o módulo no resto, para encontramos 1 ou -1, que podem ser elevados a qualquer expoente. Com isso, vamos subtrair 6 ao 5, note que

$743 \equiv 5 - 6 \bmod 6 \Leftrightarrow 743 \equiv -1 \bmod 6.$

Por fim, podemos elevar ambos os membros da congruência a 48, obtemos

$743^{48} \equiv (-1)^{48} \bmod 6 \Rightarrow 743^{48} \equiv 1 \bmod 6.$

Logo, o resto procurado é 1.

3.2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

3.2.1 Introdução ao estudo de equações Diofantinas Lineares

Objetivo:

- Alcançar os conceitos e definições de equações Diofantinas Lineares.
- Encontrar soluções geral e particular das equações Diofantinas Lineares.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, videoaulas de sua preferência sobre o tema.

Tipo de atividade: individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Neste primeiro instante é primordial uma aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com auxílio de pilotos coloridos. Entretanto, se tiver a chance de exibir uma mídia digital, recomenda-se que utilize videoaulas de sua preferência sobre o assunto.

Registros para serem apresentados na lousa:

Vamos apresentar a equação Diofantina linear
Dica → Deve-se exemplificar oralmente com exemplos lúdicos que façam parte do cotidiano dos alunos, para melhor compreensão.
Tipo:

- **Temos 14 animais com duas e quatro patas e um total de 22 patas em um zoológico. Sabendo que há animais de duas patas e de 4 patas, qual equação podemos montar para representar o total de animais e qual equação para denotar o total de patas? Após a reposta da turma, escrever a equação na lousa: x + y = 14 e 2x + 4y = 22, ressaltando que x é o número total de animas com duas patas e y o número total de animais de quatro patas.**

A seguir, serão apresentadas questões do conteúdo equações Diofantinas Lineares e suas respectivas resoluções

Questão 1: Prova final da Olimpíada de Matemática de São Paulo

Peça a um amigo que multiplique o dia de seu aniversário por 12, o mês do aniversário por 31 e some os dois resultados. Sabendo que o amigo seguiu as instruções e a soma deu 368. Quando é o aniversário dele?

Resolução:

Sejam d e m, respectivamente, o dia e o mês do nascimento. Então, (i)12d + 31m = 368.

Por inspeção, verificamos que x = 10 e y = 8 é uma das soluções de (i).

Onde x_0 = 10 e y_0 = 8 é uma solução particular da equação (i) e as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 10 + 31t \\ y = y_0 - at = 8 - 12t \end{cases}$$, com $t \in \mathbb{Z}$

Na busca de soluções não negativas devem ser satisfeitas as desigualdades:

x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0, assim temos que 10 $+ 31t \geq 0$ e 8 - 12$t \geq 0$

o que implica que t $\in$ {0}. Com isso, temos uma possibilidade a saber:

Para t = 0, temos o dia 10 e o mês 8.

Portanto, o aniversário do amigo é 10 de agosto.

Questão 2: (Problema do século XVI)

Um total de 41 pessoas entre homens, mulheres e crianças foram a um banquete e juntos gastaram 40 patacas. Cada homem pagou 4 patacas, cada mulher 3 patacas e cada criança um terço de pataca. Quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças havia no banquete?

Resolução:

Primeiramente vamos identificar as variáveis do problema, seja H a quantidade de homens, M a quantidade de mulheres e C a quantidade de crianças. Dessa forma as equações representativas são:

(i)H + M + C = 41

(ii)4H + 3M + $\frac{1}{3}$ C = 40

Multiplicando (ii) por 3, obtemos 12H + 9M + C = 120. Entretanto, utilizando (i), obtemos uma equação diofantina de duas variáveis, como segue:

11H + 8M + (H + M + C) = 11H + 8M + 41 = 120 $\Leftrightarrow$ (iii) 11H + 8M = 79.

Como o mdc(11,8) = 1, a equação (iii) tem solução pois 1|79.

Por inspeção, verificamos que H = 5 e M = 3 é uma das soluções de (iii).

Onde H_0 = 5 e M_0 = 3 é uma solução particular da equação (i) e as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$\begin{cases} H = H_0 + bt = 5 + 8t \\ M = M_0 - at = 3 - 11t \end{cases}$, com $t \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução da equação (iii) é dado por:

S = {(5 + 8t, 3 – 11t) | $t \in \mathbb{Z}$}.

É fato que

5 + 8t > 0 e 3 – 11t> 0.

Daí segue que $-\frac{5}{8}$ < t < $\frac{3}{11}$. Como t é inteiro, o único valor possível é t = 0. Sendo assim, o número de homens e mulheres, respectivamente, presentes no banquete é 5 e 3. Logo o número de crianças é C = 33.

Questão 3

Uma certa quantidade de maças é dividida em 37 montes de igual número. Após serem retiradas 17 frutas, as restantes são acondicionadas em 79 caixas, cada uma com a mesma quantidade. Quantas maças foram colocadas em cada caixa? Quantas maças tinha cada monte?

Resolução: Seja x a quantidade de maças, y o número de maças em cada monte e z número de maças dentro de cada caixa.

Observemos, inicialmente, x foi dividida em 37 monte, ou seja,

(i)x = 37y.

Por outro lado, se forem retiradas do total 17 frutas, restante pode ser acondicionado em 79 caixas, ou seja,

(ii)x – 17 = 79z

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

(iii)37y – 79z = 17

Basta agora calcularmos a solução para (iii), uma vez que ela admite solução já que mdc(37,79) = 1.

Por inspeção, verificamos que y = 9 e z = 4 é uma das soluções de (iii).

Onde y_0 = 9 e z_0 = 4 é uma solução particular da equação (iii). Assim a solução geral é dada por:

S = {(9 - 79t, 4 – 37t) | $t \in \mathbb{Z}$}.

Mais uma vez, o único valor possível de t é 0. Logo, em cada monte foram colocadas 9 maças e em cada caixa, 4 maças.

<u>Questão 4</u>

Para o retorno às aulas, a mãe de Maíra, comprou cadernos e jogos de canetas para sua filha. Cada caderno escolhido por Maíra custa R$ 12,00 e os jogos de canetas R$ 8,00. Com R$ 80,00, quais as possíveis quantidades de cadernos e jogos de canetas que ela poderá comprar, sabendo que irá comprar no mínimo 2 cadernos e 3 jogos de canetas?

<u>Resolução</u>:

Vamos identificar as variáveis do problema, seja C a quantidade de cadernos e L a quantidade de jogos de canetas. Dessa forma a equação representativa é: (i) 12C + 8L = 80.

Como o mdc(12,8) = 4 e 4|80, a equação (i) possui solução.

Escrevendo 4 como combinação linear de 12 e 8 temos:

(ii) 12 · (1) + 8 · (-1) = 4

Multiplicando (ii) por 20, obtemos:

(iii) 12 · (20) + 8 · (-20) = 80

Logo, o par de inteiros C_0 = 20 e L_0 = -20 é uma solução particular da equação (i) e as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$\begin{cases} C = C_0 + \text{bt} = 20 + 8\text{t} \\ L = L_0 - at = -20 - 12t \end{cases}$, com $t \in \mathbb{Z}$

Observando -se as restrições do problema, para calcular os possíveis valores de $t \in \mathbb{Z}$, teremos:

20 + 8t $\geq$ 2 e -20 -12t $\geq$ 3.

Isto é:

t $\geq -\frac{18}{8}$ e t $\leq -\frac{23}{12}$, daí temos que - $\frac{18}{8} \leq$ t $\leq$ - $\frac{23}{12}$

o que implica que t $\in$ {-2}. Com isso, temos apenas uma possibilidade a saber: Para t = -2, temos 4 cadernos e 4 jogos de canetas.

Questão 5

Quando 100 quilogramas de grãos são distribuídos entre 100 pessoas, de modo que cada homem recebe 3 quilogramas, cada mulher recebe 2 quilogramas, e cada criança recebe meio quilograma. Quantos homens, mulheres e crianças havia?

Resolução:

Chamando de x, y e z o número de homens, mulheres e crianças, respectivamente, obtemos as seguintes equações:

3x + 2y + $\frac{z}{2}$ = 100

X + Y + Z = 100

Agora vamos resolver o sistema de equações:

$\begin{cases} X + Y + Z = 100 \\ 3X + 2Y + \frac{Z}{2} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y + Z = 100 \\ 6X + 4Y + Z = 100 \end{cases} \Leftrightarrow$ (i) 5X + 3Y = 100

Sabendo que (i) é uma equação Diofantina, vamos a resolução:

Se mdc(5,3) = 1 e 1|100, então a equação tem solução inteira.

Escrevendo 5 como combinação linear de 2 e 3 temos:

(ii) 3 · (1) + 2 · (1) = 5 $\Leftrightarrow$ 2 = 5 · (1) - 3 · (1)

Multiplicando (ii) por 50, obtemos:

(iii) 5 · (50) + 3 · (-50) = 100

Onde x_0 = 50 e y_0 = -50 é uma solução particular da equação (i).

Assim, a solução geral é da forma x = 50 + 3t, e y = -50 – 5t, com $t \in \mathbb{Z}$. Como os valores de x e y devem ser positivos, pois o problema se refere a homens e mulheres, temos que t $\geq -\frac{50}{3}$ e t $\leq$ -10, daí temos que - $\frac{50}{3} \leq$ t $\leq$ - 10. Daí, t $\in$ {-16, -15, -14, -13, -12, -11, -10}. Com isso, temos sete possibilidades a saber:

Se t = -10, obtemos x = 20 e y = 0, e encontramos z = 80.

Se t = -11, obtemos x = 17 e y = 5, e encontramos z = 78.

Se t = -12, obtemos x = 14 e y = 10, e encontramos z = 76.

Se t = -13, obtemos x = 11 e y = 15, e encontramos z = 74.

Se t = -14, obtemos x = 8 e y = 20, e encontramos z = 72.

Se t = -15, obtemos x = 5 e y = 25, e encontramos z = 70.

Se t = -16, obtemos x = 2 e y = 30, e encontramos z = 68.

Como não foi dada nenhuma restrição no enunciado do problema, devemos considerar as respostas acima.

Questão 6: OBMEP 2018 – NIVEL 3 – 1ª FASE

De quantas maneiras podemos trocar uma nota de R$ 20,00 por moedas de R$ 0,10 e R$ 0,25.

(A) 21

(B) 36

(C) 38

(D) 41

(E) 56

<u>Resolução</u>:

Sejam x e y as quantidades de moedas R$ 0,10 e R$ 0,25, respectivamente, usadas para formar a quantia de R$ 20,00. Assim, temos a equação Diofantina:

(i) 0,10x + 0,25y = 20

Multiplicando (i) por 20, obtemos

(ii) 2x + 5y = 400.

Como mdc(5,2) = 1 e 1|400, a equação tem solução inteira.

O número 400 é múltiplo de 2 e 5, então podemos considerar x_0 = 200 e y_0 = 0 é uma solução particular da equação (ii) e as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 200 + 5t \\ y = y_0 - at = -2t \end{cases}$$, com $t \in \mathbb{Z}$

x $\geq$ 0 e y $\geq$ 0, assim temos que 200 $+ 5t \geq 0$ e -2$t \geq 0$

o que implica que t $\in$ {-40, -39, -38, ..., -1, 0}. Com isso, temos 41 maneiras de trocar uma nota de R$ 20,00 por moedas de R$ 0,10 e R$ 0,25.

Cabe ressaltar que podemos considerar t = 0, pois não foi dada nenhuma restrição no problema.

REFERÊNCIAS

OLIVEIRA, Wanderlan Carminatti. **Elementos da Aritmética Modular e seu papel nos anos finais do Ensino Fundamental e na Educação superior**. 2024. 125f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

DOMINGUES, Hygino, H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Editora Atual, 1991.

SANTOS, Filipe da Costa Neves. **Educação financeira dentro do ensino de matemática na educação básica – algumas possíveis abordagens nos anos finais do ensino fundamental 2**. 2023. 141f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2023.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/>. Acesso em: 16 jan. 2023.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - **OBMEP | Somando novos talentos para o Brasil.** Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 21 dez. 2023

SSPM. **Serviço de Seleção de Pessoal da Marinha**. Disponível em: https://www.marinha.mil.br/sspm/colegionaval/colegio_princ . Acesso em: 25 nov. 2023.

SSPM. **Serviço de Seleção de Pessoal da Marinha**. Disponível em: https://www.marinha.mil.br/sspm/?q=colegionaval/a-cn-provag . Acesso em: 25 nov. 2023.