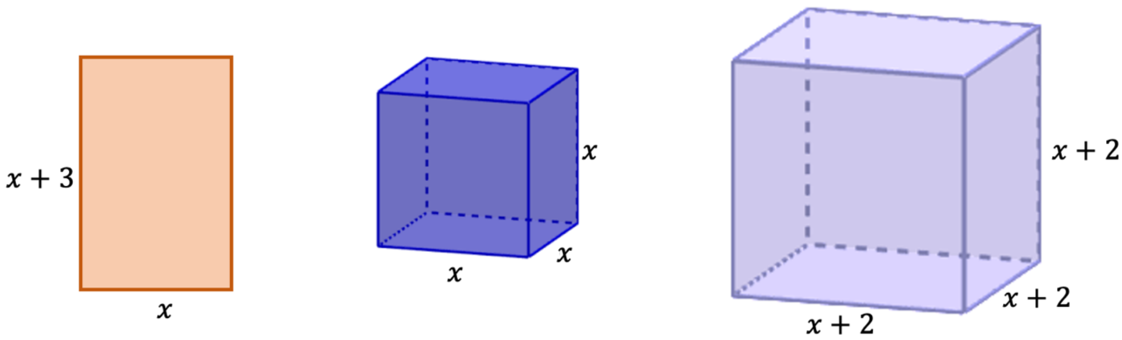
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus Viana

Minicurso de Álgebra – Operações com Polinômios

Profª. Rúbia Pereira, Prof. Alex Jordane e Prof. Alex Mofardini

Introdução

Na resolução de problemas é muito comum o uso de expressões algébricas para a modelagem de situações. Por exemplo, observe as três figuras a seguir:



A figura da esquerda, representa uma região retangular de dimensões x e $x + 3$, cujo perímetro e a área são representados pelas expressões:

$$p = x + x + 3 + x + x + 3 = 2x + 2 \cdot (x + 3) = 4x + 6$$

$$A = x \cdot (x + 3) = x^2 + 3x$$

Já a figura do centro representa um cubo com aresta medindo x, com área total igual a $A_{1T} = 6x^2$ e volume $V_1 = x^3$.

Na figura da direita, temos também a representação de um cubo com arestas medindo $x + 2$, cuja área total é $A_{2T} = 6 \cdot (x + 2)^2 = 6 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 6x^2 + 24x + 24$ e o volume é dado por $V_2 = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Todas essas expressões são chamadas de polinômios e é o objeto de estudo deste trabalho, que tem por objetivo compreender as operações polinomiais, com polinômios de grau menor que 3, por meio do recurso Ladrilhos de Álgebra do Mathigon[1], que é uma

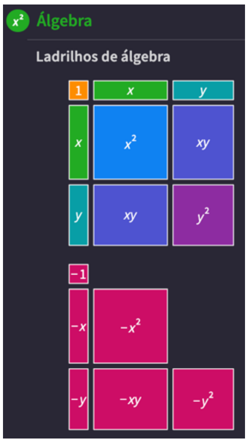
[1] https://polypad.amplify.com/p

plataforma de aprendizagem interativa para matemática que permite manipulações para resolver problemas e ressignificar a aprendizagem da matemática.

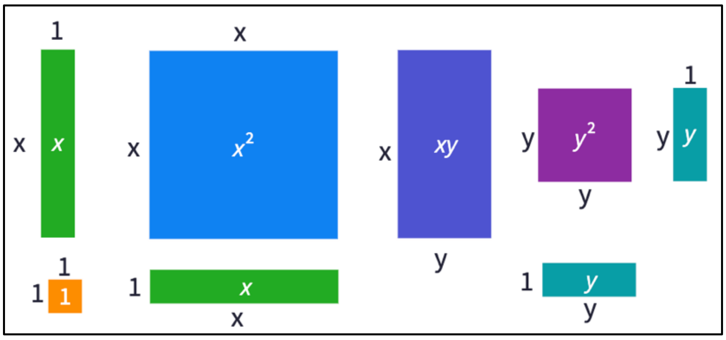
1. Representação de polinômios usando o recurso Ladrilhos de Álgebra no Mathigon.

Considere a expressão $p_1(x) = 4x + 6$. Essa expressão é um polinômio de grau 1. Já a expressão $p_2(x) = x^2 + 3x$ é um polinômio de grau 2. Vamos representá-los no Mathigon, mas antes, vamos interpretar os ladrilhos da plataforma.

Os ladrilhos da álgebra do Mathigon estão representados na figura a seguir:

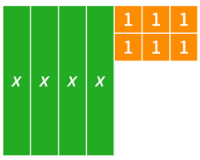


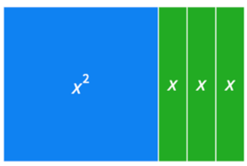
Há regiões quadradas e retangulares. Os marcadores descritos na parte interior das regiões, representam suas respectivas áreas, como explica a imagem abaixo:



Os blocos negativos, representam as negativas das áreas. Isto é, a área vezes –1.

Assim, a representação dos polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$[2] são respectivamente:

$p_1(x) = 4x + 6$ 

$p_2(x) = x^2 + 3x$ 

[2] Lê-se p um de x e p dois de x.

Tarefa 1 – Represente os polinômios usando os ladrilhos da álgebra do Mathigon

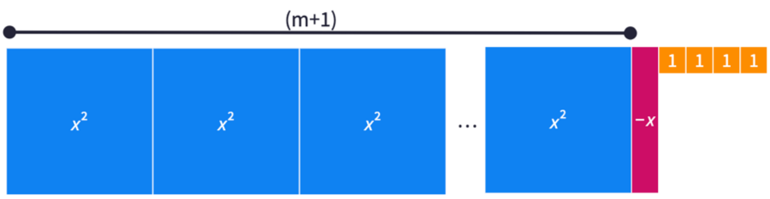
a. p(x) = 5
b. q(x) = $2x + 1$
c. s(x) = $x^2 - 5x + 6$

Na tarefa 1, o polinômio do item a é de grau zero, do item b é de grau 1, já o polinômio do item c, é de grau 2. **Como você pode descrever a classificação do grau de um polinômio?**

____

____

Tarefa 2 – Seja m ∈ $\mathbb{R}$ e p(x) um polinômio com a seguinte representação:



Discuta o grau de p(x).

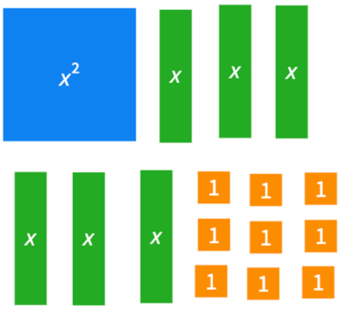
É hora de formalizar uma definição para polinômio:

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são números complexos chamados coeficientes, n é um inteiro não negativo e o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau do polinômio. O polinômio nulo tem todos os coeficientes nulos.

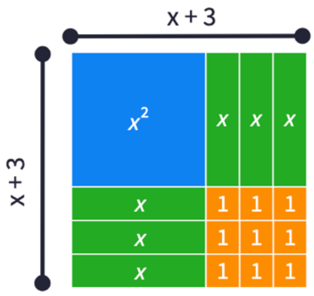
2. Fatoração de um polinômio

A fatoração consiste em escrever um polinômio de grau maior como produto de dois ou mais polinômios de grau inferior. Por exemplo, o polinômio p$(x) = x^2 + 6x + 9$ pode ser fatorado em polinômios de grau 1, de forma que p$(x) = (x + 3) \cdot (x + 3) = (x + 3)^2$.

Para fazer essa operação usando o Mathigon, escreva o polinômio com o objetivo de formar um quadrado. Veja:



Polinômio p(x) = $x^2 + 6x + 9$



Polinômio p(x) = $x^2 + 6x + 9$
em formato de quadrado

Perceba que o lado desse quadrado é o polinômio $x + 3$.

Tarefa 3 – Usando o Mathigon, represente a forma fatorada dos seguintes polinômios:

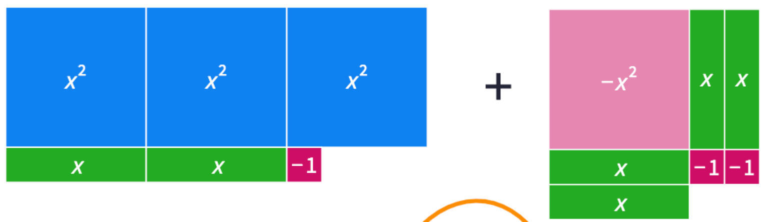
a. $x^2 + 3x + 2$
b. $x^2 - 3x + 2$
c. $2x^2 + 4x + 6$

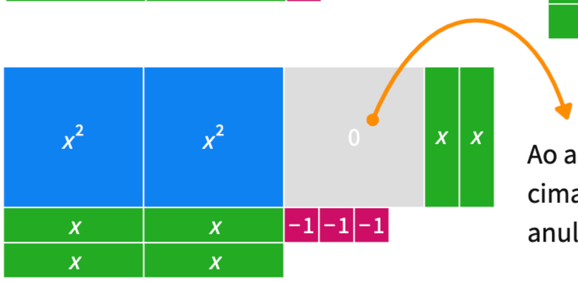
3. Operações com polinômios usando as representações de Ladrilhos do Mathigon

Por meio de exemplos vamos estabelecer um procedimento para operar polinômios por meio dos ladrilhos do Mathigon.

3.1 Adição

$p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^2 + 4x - 2$

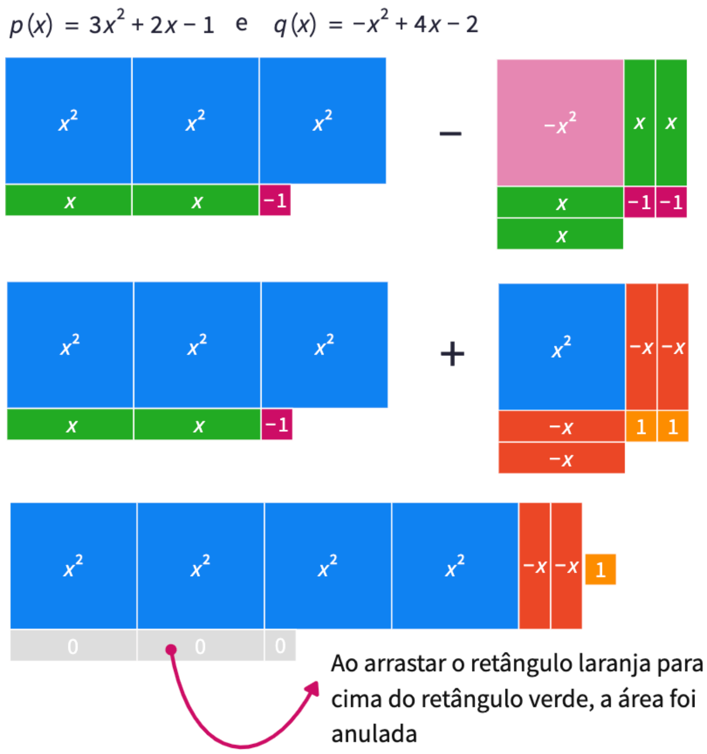




Ao arrastar o quadrado rosa para cima do quadrado azul, a área foi anulada

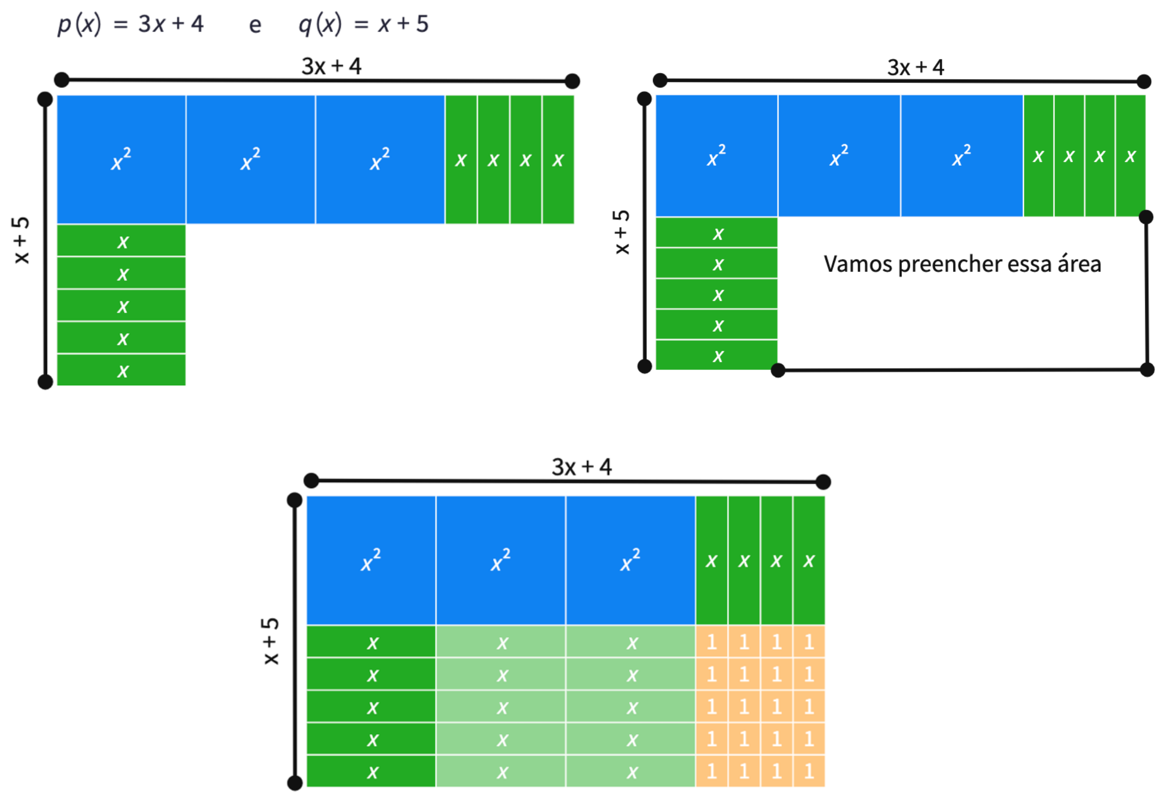
$$p + q\,(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

3.2 Subtração



$$p - q\ (x) = 4x^2 - 2x + 1$$

3.3 Produto



$$p \cdot q\ (x) = 3x^2 + 19x + 20$$

Perceba que o movimento para calcular o produto de dois polinômios é o inverso da operação de fatoração.

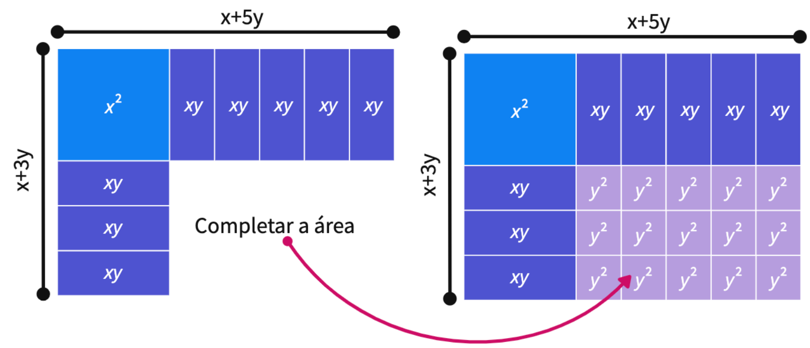
Tarefa 4 – Dados os polinômios p$(x) = x^2 - 4x + 3$, q$(x) = 2x + 4$, r$(x) = 2x^2 + x + 5$ e s(x) = x + 2, usando as representações do ladrilho do Mathigon, calcule as operações:

a. (p + r) (x) b. (r – p) (x) c. q$^2(x)$ d. (q·s) (x)

Agora, refaça os cálculos da Tarefa 4 acima aplicando a propriedade distributiva e compare com os resultados obtidos usando o Mathigon.

É possível operar polinômios de duas variáveis, x e y

p(x,y) = x + 5y e q(x,y) = x + 3y



$$p \cdot q\ (x, y) = \ x^2 + 8xy + 15y^2$$

Tarefa 5 – Usando o Mathigon, calcule os produtos (p·q)(x, y), p$^2(x, y)$ e q$^2(x, y)$, sendo p(x, y) = $2x$ + y e q(x, y) = x + $2y$.

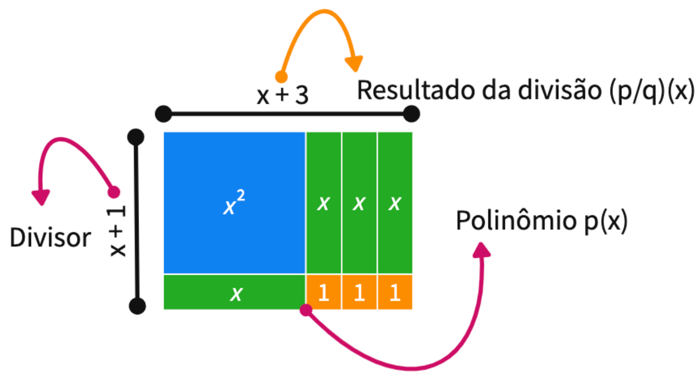
Você deve ter observado que não trabalhamos aqui com positivos e negativos. Isso ocorre porque estamos associando as operações com o conceito de área e é impossível essa representação com números negativos. Por isso, é importante que você compreenda que os cálculos de adição, subtração e multiplicação para além deste trabalho.

Outra restrição é a limitação de representação dos polinômios de grau menor do que três e isso também ocorre por causa da associação com o conceito de área.

3.4 Divisão

Na operação da divisão também acontece restrições para o uso dos ladrilhos do Mathigon. A proposta deste trabalho é uma introdução para alguns polinômios e isso ocorre por causa da associação com o conceito de área. Mas essa restrição não prejudica o trabalho uma vez que nosso objetivo aqui é o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do objeto matemático polinômios e operando a plataforma Mathigon. É muito importante que você se aprofunde no conteúdo para além deste material.

Sejam $p(x) = x^2 + 4x + 3$ e $q(x) = x + 1$, usando o Mathigon, a divisão $p(x) \div q(x)$ ocorre na tentativa de encaixar os ladrilhos com o objetivo de formar uma região retangular com um dos lados igual ao divisor, no caso do exemplo, $q(x) = x + 1$, conforme pode-se ver a seguir:

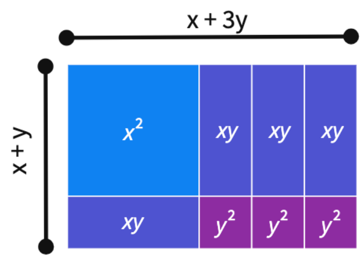


(p ÷ q) (x) = x+3

Perceba que dados dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, a divisão exata de $p(x)$ por $h(x)$ significa encontrar um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = h(x) \cdot q(x)$. Assim p é o resultado da área da região retangular de dimensões h e q.

É possível resolver também a divisão de polinômios de duas sentenças:

$$(x^2 + 4xy + 3y^2) \div (x + y)$$



Assim, $(x^2 + 4xy + 3y^2) \div (x + y) = x + 3y$.

E se a divisão não é exata?

Voltemos à divisão de números.

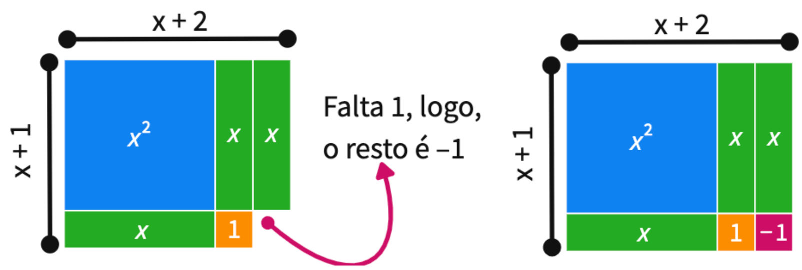
337	8
1	42

Assim, 337 ÷ 8 tem resultado igual a 42 e resto 1. Pela divisão Euclidiana:

$$D = d \cdot Q + r, \text{ com } d \neq 0 \text{ e } 0 \leq |r| < d \Rightarrow 337 = 8 \cdot 42 + 1$$

A divisão Euclidiana é válida também na divisão polinomial.

Sejam D(x) = $x^2 + 3x + 1$ e d(x) = $x + 1$. Vamos usar o Mathigon para calcular (D ÷ d) (x).

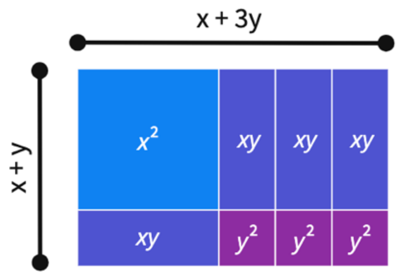


$(D \div d)(x) = x + 2$, e tem resto −1.

Perceba que $D(x) = d(x) \cdot (x + 2) - 1$, ou seja, $x^2 + 3x + 1 = (x + 1) \cdot (x + 2) - 1$.

Também, é possível operar a divisão de polinômios de duas variáveis p(x, y) ÷ q(x, y). Observe o exemplo:

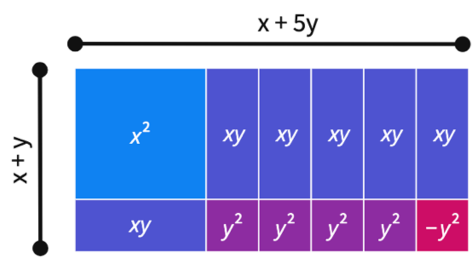
$$p(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 \quad \text{e} \quad q(x,y) = x + y$$



$$p(x,y) \div q(x,y) = x + 3y$$

O exemplo acima é uma divisão polinomial exata. Vejamos agora uma divisão não exata com polinômios de duas variáveis. Lembramos que no caso de “sobra” de área na formação da região retangular, deve-se completar a área com um ladrilho negativo e este representará o resto da divisão.

$$p(x,y) = x^2 + 6xy + 4y^2 \quad \text{e} \quad q(x,y) = x + y$$



$p(x, y) \div q(x, y) = x + 5y$ com resto igual a $-y^2$

$$x^2 + 6xy + 4y^2 = (x + y) \cdot (x + 5y) - y^2$$

Tarefa 6 – Usando os ladrilhos do Mathigon, calcule a divisão polinomial:

a. $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 3)$
b. $(2x^2 - 5x + 2) \div (2x - 1)$
c. $(x^2 - 3x + 2) \div (x + 3)$

Tarefa 7 – Usando o Mathigon, modele os ladrilhos e determine a de forma que o polinômio p$(x) = x^2 - ax + 2$ seja divisível por h$(x) = x - 2$.

Tarefa 8 – Resolva as operações usando o Mathigon, explicando a estratégia em cada uma delas.

a. $(x^2 + 5xy + 3y^2) + (-2xy + y^2)$
b. $(3x^2 + 5xy) - (x^2 + 2xy)$
c. $(2x + y) \cdot (x + 2y)$
d. $(3x^2 + 4xy + y^2) \div (3x + y)$

3. Valor numérico de um polinômio

Você deve ter percebido que a notação de uma função f(x) e de um polinômio p(x) são muito parecidas. Isso porque as funções complexas f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais, como as funções quadrática f(x) = $ax^2 + bx + c$ e afim f$(x) = ax + b$, são denominadas funções polinomiais. Assim, toda função definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

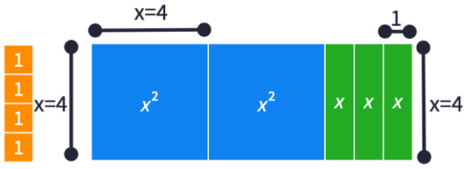
para todo $x \in \mathbb{C}$ é uma função polinomial de grau $n \in \mathbb{Z}_+$ e $a_n \neq 0$.

Ou seja, toda função polinomial f(x) está associada a um polinômio p(x) de mesma expressão. Dessa forma, o valor numérico de um polinômio p(x) para $x = a$ tem o. mesmo significado do valor numérico de uma função p(a).

Exemplo: Considere o polinômio p(x) = $2x^2 + 3x$. A representação em blocos é:

É importante estabelecermos a natureza de x como uma variável. Assim,

para $x = 4$, vamos representar o quadrado x^2 com lado igual a 4.



Então p(4) é a área de dois quadrados de lados 4 e três retângulos de lados 4x1.

p(4) = $2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 = 32 + 12 = 44$.

para $x = 2$, basta calcularmos p(2).

$$p(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 8 + 12 = 20$$

Tarefa 3 – Represente no Mathigon o polinômio $p(x) = x^2 + 3x + 2$, usando somente o ladrilho , para $x = 5$ e $x = 2$.

Lembre-se, a relação do polinômio com os ladrilhos do Mathigon, é limitada e não consegue abranger todo o conteúdo. De forma que não é possível representarmos p(–3) no Mathigon. No entanto, perceba que é possível calcularmos p(–3) usando a técnica da substituição de x por –3

$$p(x) = 2 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-3) = 18 + (-9) = 9$$

Fechamento da Proposta

Esta proposta de ensino e aprendizagem das operações com polinômios tem a intensão de trabalhar o pensamento algébrico das operações com polinômios por meio de uma construção geométrica. Esta estratégia já era aplicada desde a matemática da Grécia antiga.

É possível também trabalhar com polinômios de grau três. Para isso, basta usar os blocos de números e cubos da aba números do Mathigon. Mas esta é uma continuação deste trabalho.