



PPG EM  
EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA



# PRODUTO EDUCACIONAL

## Conhecendo a Geometria Fractal: conhecimentos específicos

Elaborado por:

Renata Lopes Alves

Eduardo Barrére

Juiz de Fora  
2023



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

O presente produto educacional foi desenvolvido pela discente Renata Lopes Alves, no âmbito do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFJF, tendo sido avaliado e aprovado, no dia 14/07/2023, pela Banca Examinadora formada por Eduardo Barrére, Liamara Scortegagna e Rozane da Silveira Alves.

O produto está relacionado com a pesquisa de mestrado intitulada Uso de vídeos no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Fractal, que por sua vez propiciou o desenvolvimento de 05 produtos educacionais principais. Apesar de independentes, se aproximam e corroboram em um único objetivo: colaborar com a prática de professores, oferecendo oportunidades pedagógicas para que a temática seja inserida no contexto de sala de aula da educação básica. Portanto, o público alvo deste produto envolve principalmente professores, pesquisadores e demais interessados na divulgação e ensino da geometria dos fractais. Neste documento tratamos em específico do produto intitulado "*Conhecendo a geometria fractal: conhecimentos específicos*".

A geometria fractal trata-se de uma temática relativamente recente – sendo sua primeira teorização datando 1977 com o livro "*The fractal geometry of nature*" de Benoit Mandelbrot. Contudo, não se refere a uma primeira aplicação dos fractais; a natureza vem produzindo estrutura fractais desde sua concepção. Dessa forma, é verificável a tendência crescente de publicações envolvendo propostas de inserção deste tópico no contexto de sala de aula. Uma evidência disso é a referência feita nas orientações dos documentos oficiais:

- Base Nacional Comum Curricular – BNCC;
- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's;
- Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Paraná; e
- Referencial Curricular do Estado do Paraná.

Apesar das orientações, observa-se que os conhecimentos geométricos trabalhados em sala de aula são geralmente restritos apenas à geometria euclidiana. Ocorre que os professores manifestam desconforto com a geometria fractal muito por conta de não terem conhecimento do assunto durante sua formação. Vem daí a motivação desta pesquisa: divulgar tópicos da geometria fractal, oportunizando seu conhecimento e produzindo material de apoio.

# Apresentação

Faz-se necessário destacar que se trata de um material com potencial para ser trabalhado em diversos contextos e modalidades educacionais (presencial, remota ou híbrida), para diferentes etapas de ensino, faixas etárias e com diferentes abordagens pedagógicas. O material pode ser utilizado como apoio - sendo indicado como uma complementação - ou ainda ser o início de discussão sobre a temática. Além disso, por se tratar de uma temática interdisciplinar, seu uso não se restringe somente a um único campo de conhecimento e, portanto pode ser aplicado em salas de aula de Matemática, Física, Biologia, Geografia, etc..

Este produto consiste em um conjunto de 5 Objetos de Aprendizagem, em específico, vídeos animados. Trata-se dos vídeos que compõem o segundo módulo de conteúdo do curso online e aberto "Conhecendo a Geometria Fractal". Este, apesar de ser um curso dedicado à formação continuada de professores, foi planejado de forma a ser igualmente destinado a alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

Por serem objetos de aprendizagem digitais, eles são materiais modulares. Isto é, sua utilização possibilita a abordagem por módulos temáticos. Neste documento, trataremos em específico do módulo "Conhecimentos Específicos", apresentando sua estrutura, características e possibilidades.

## Informações Gerais

O módulo de Conhecimentos Gerais é um conjunto de Objetos de Aprendizagem que trazem os principais fundamentos matemáticos da temática.

## Público-Alvo

Os vídeos foram pensados para a formação continuada de professores e estudantes de cursos de licenciatura. No entanto, o público em geral está autorizado a realizar o curso sem nenhuma restrição.

## Composição

O módulo é composto por 5 vídeos que serão descritos a seguir.

4

Fractais gerados por funções

Descrição

Existem algumas formas de se obter figuras fractais. Um desses modos é o que chamamos de relações de recorrência, que apresentamos nesse vídeo. Também discutimos e viajamos pelo famoso e belíssimo conjunto de Mandelbrot. Sua fama é principalmente por ter sido criada por Mandelbrot, ninguém menos do que o Pai da geometria fractal, Benoit Mandelbrot.



Unidade Temática

Fractais gerados por funções

Conteúdos

- Conjunto de Mandelbrot -Conjunto de Fatou e Julia.

Objetivos

- Apresentar alguns dos fractais gerados por funções mais famosos.

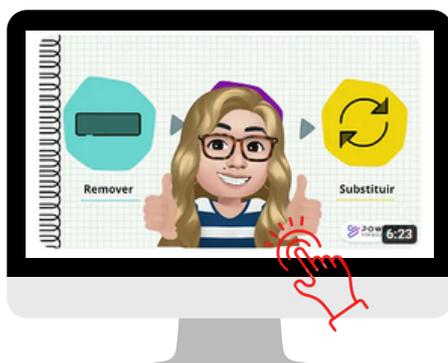
Duração: 07m 32s

5

Fractais na natureza

Descrição

O que o litoral, o sistema nervoso, os troncos de uma árvore e as galáxias possuem em comum? Todos esses exemplos são formados, em menor ou maior grau, por padrões intermináveis, conhecidos por padrões fractais. Esse vídeo mostra a universalidade fractal no mundo vivo, onde apresentamos uma série de exemplos de formas que rodeiam nosso cotidiano e que apresentam características fractais. E mais: veremos que talvez elas sejam construídas de forma não tão aleatória e casual como alguns podem pensar.



Unidade Temática

Fractais na natureza

Conteúdos

- Limitações inerentes da geometria euclidiãna em tratar de objetos reais do mundo físico;
- Exemplos de fractais observados na natureza

Objetivos

- Apresentar a geometria fractal como uma ferramenta potente para compreensão da natureza, bem como tratar dos objetos do mundo físico

Duração: 07m 49s

Produto

Descrição



Começamos esse vídeo discutindo um famoso desafio posto por Peano: Como podemos, de maneira ordenada, construir uma curva que preencha completamente um quadrado? Aliado a este desafio, discutimos também o paradoxo do litoral. E o que une os dois? Ambos estão mergulhados na noção de infinito. Os fractais, em certo grau, ilustram essa ideia, - como é a curva de Koch, por exemplo. Por fim, propomos uma interessante reflexão, envolvendo a medição de linhas costeiras.

Unidade Temática

A noção de infinito

Objetivos

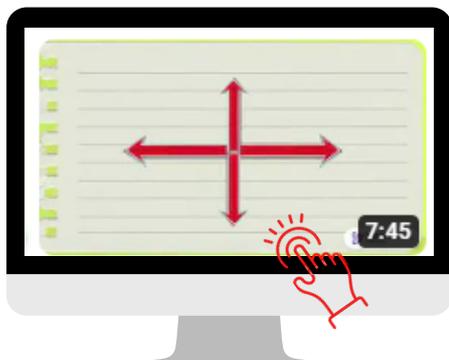
- Destacar o aspecto infinito que os fractais apresentam.
- Apresentar a relação entre o aumento da superfície de cobertura e o volume ocupado.

Conteúdos

- Como colocar uma linha infinita em uma caixa sem encher toda a caixa?
- Associação existente entre o aumento da superfície de cobertura e o volume ocupado bem como sua utilidade.

Duração: 08m 28s

Descrição



Benoit Mandelbrot ao questionar o tamanho da costa da Grã-Bretanha desconfiou de que se não podemos medir seu comprimento, haveria uma outra forma de medir essas estruturas. Foi então que introduziu a ideia da medição da rugosidade como uma medida capaz de diferenciar essas diferentes curvas. Mas, para isso, era necessário repensar um dos conceitos clássicos da matemática: o conceito de dimensão. Discutimos com detalhes uma das formas de se definir a dimensão dos fractais. Essa, é chamada dimensão de autossimilaridade ou, comumente, Dimensão de Hausdorff.

**Unidade Temática**

Dimensão Fractal

**Conteúdos**

- Conceito e interpretação de dimensão fractal.
- A dimensão de Hausdorff.
- Métodos de estimativa da dimensão fractal

**Objetivos**

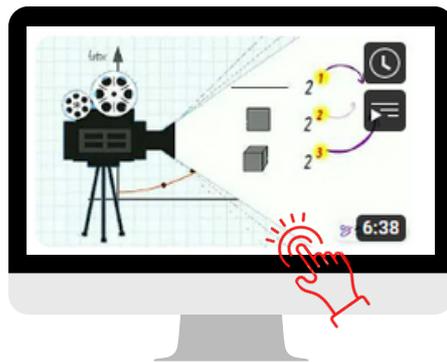
- Conceituar a dimensão fractal.
- Apresentar a interpretação da dimensão fractal.
- Apresentar os diferentes métodos de estimativa da dimensão fractal.
- Apresentar com detalhes um dos métodos mais utilizados para cálculo e estimativa da dimensão fractal

**Duração: 06m 41s**

**8**

**Dimensão fractal e o método da contagem de caixas.**

**Descrição**



No vídeo anterior, repensamos o conceito de dimensão e introduzimos a dimensão fractal, uma dimensão fracionária. Nesse vídeo continuamos a discutir métodos para obter o valor da dimensão. Especificamente, apresentamos um que é mais geral, sem exigir que o objeto seja autossemelhante: é o famoso método da contagem de caixas (do inglês, counting box). Veremos que temos em mãos uma ferramenta poderosa para compreender a natureza e seus fenômenos. Isso é: discutimos a interpretação desse valor, vendo que ela é indicada para descrever os fractais e até mesmo diferenciá-los.

**Unidade Temática**

Dimensão Fractal

**Conteúdos**

- Conceito e interpretação de dimensão fractal.
- Métodos de estimativa da dimensão fractal: counting box.

**Objetivos**

- Apresentar a interpretação da dimensão fractal.
- Apresentar com detalhes um dos métodos mais utilizados para cálculo e estimativa da dimensão fractal.

**Duração: 06m 38s**

Este curso é um dos produtos originados na pesquisa de Mestrado. Assim como feito neste produto, entendemos que o leitor pode eventualmente interessar-se somente por algum conteúdo específico de um dos demais módulos apresentados ou, ainda, sentir a necessidade de orientações mais específicas destes. Pensando nisso, outros produtos decorrem desta pesquisa, que podem ser utilizados separadamente dos demais Objetos de Aprendizagem e com público-alvo distinto ou não dos demais produtos. Apresentamos brevemente esses produtos a seguir bem como o link para acessá-los.

### **Curso de Formação Continuada de Professores: Conhecendo a geometria fractal**

Une os demais produtos educacionais, em conjunto com outros artefatos orientadores do curso, visando a apresentação da temática aos docentes, com foco no conteúdo e na dinâmica de apresentação desse conteúdo em sala de aula.



[https://drive.google.com/drive/folders/110YJZQBq6xxZWr6nD\\_0CBHp07CvZ30XjX?usp=drive link](https://drive.google.com/drive/folders/110YJZQBq6xxZWr6nD_0CBHp07CvZ30XjX?usp=drive_link)



### **Conhecendo a geometria fractal: conhecimentos gerais**

Conjunto de Objetos de Aprendizagem que trazem os principais fundamentos matemáticos da temática.



[https://drive.google.com/drive/folders/1P\\_UtJLL7epzeDZFYtG\\_9WV5kP\\_bk\\_erkO?usp=drive link](https://drive.google.com/drive/folders/1P_UtJLL7epzeDZFYtG_9WV5kP_bk_erkO?usp=drive_link)



### **Conhecendo a geometria fractal: aplicações**

Conjunto de Objetos de Aprendizagem com foco nas aplicações da temática.



[https://drive.google.com/drive/folders/10EECdR-ildBkDEoXA9jo3nm-HmfnhHLU?usp=drive link](https://drive.google.com/drive/folders/10EECdR-ildBkDEoXA9jo3nm-HmfnhHLU?usp=drive_link)



### **Conhecendo a geometria fractal: orientações pedagógicas**

Conjunto de Objetos de Aprendizagem para apoiar/orientar o(a) docente que pretende abordar a temática, independente do grau de profundidade.



[https://drive.google.com/drive/folders/1RhQWkr4-XFctUrjPaKPU6v95X84lRtJP?usp=drive link](https://drive.google.com/drive/folders/1RhQWkr4-XFctUrjPaKPU6v95X84lRtJP?usp=drive_link)



Em caso de dúvidas ou contribuições a cerca do presente Produto Educacional, favor entrar em contato com:

Eduardo Barrére: [eduardo.barrere@ice.ufjf.br](mailto:eduardo.barrere@ice.ufjf.br)  
Renata Lopes: [renatalopes.if@gmail.com](mailto:renatalopes.if@gmail.com)

Outras formas de contato:

Laboratório de Aplicações e Inovação em Computação (LApIC):

 Site: <https://www.ufjf.br/lapic/>

Programa de Pós-graduação em Educação Matemática:

 Email: [ppgedumat@ice.ufjf.br](mailto:ppgedumat@ice.ufjf.br)

 Site: <https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/>

 Instagram:  
<https://www.instagram.com/mestrado.educ.matematica/>

 Facebook: <https://www.facebook.com/ppgem.ufjf/>

 YouTube:  
[https://www.youtube.com/playlist?list=PLeQZ\\_B\\_Ykj2i-FRSRvVyEOL2b4arvUbQz](https://www.youtube.com/playlist?list=PLeQZ_B_Ykj2i-FRSRvVyEOL2b4arvUbQz)

Contato