UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Eli Marcus Fernando da Silva

Produto Educacional:O Uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental

Fevereiro/ 2024

João Pessoa - PB

Introdução

Este recurso educacional é resultado da dissertação "O uso de Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental" realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) sobre a orientação da Professora Doutora Miriam Da Silva Pereira, e consiste em uma sequência didática que recorre a técnicas de demonstrações matemáticas aplicada no Ensino Fundamental, buscando estimular a prática das demonstrações nas aulas de Matemática nesta etapa do ensino.

Iniciar o processo de demonstração matemática no Ensino Fundamental não é uma tarefa simples, pois é preciso levar consideração o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, porém, é interessante fazer as demonstrações sempre que possível, pois exercem um papel muito importante no aprendizado da matemática.

Espera-se que essa sequência didática possa auxiliar os professores na preparação e execução de suas aulas.

Material do Professor

0.1 Título

O uso das Demonstrações Matemáticas no Ensino Fundamental.

Público alvo

Estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental.

Conteúdo

Técnicas de demonstrações matemáticas.

Objetivo Geral

Disponibilizar recursos que ampliem a compreensão e aprofundem o conhecimento em matemática, enriquecendo a experiência educacional e promovendo o desenvolvimento intelectual dso estudantes.

Objetivos Específicos

O desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo;

Aprimoramento da argumentação matemática;

O estímulo à criticidade dos estudante.

Ponto de Partida

Qual a importância das demonstrações Matemáticas?

Procedimento Didático-Metodológico

O desenvolvimento da sequência didática será marcado por 5 encontros, cada encontro terá duração de 50 min, totalizando 4h10 min. Nos quatro primeiros encontros será apresentado uma parte teórica seguindo com uma atividade a ser desenvolvida pelos estudantes individualmente ou em grupo, no quinto encontro o professor fará observações e comentários dos encontros e das atividades realizadas durante a semana.

1 - Encontro

O professor deverá apresentar a definição de conjectura e teorema. Diferente de outras ciências, a Matemática não é uma ciência experimental, sua essência está em suas demonstrações, na argumentação e sua justificativa lógica. Em sua estrutura, uma afirmação para ao qual não existe prova é chamada de conjectura, este termo é usado quando se suspeita que a afirmação seja verdadeira. Caso uma conjectura seja demonstrada, ela passa a ser um teorema.

Exemplo 0.1 *A conjectura de Collatz é um famoso problema não resolvido na matemática. Ela afirma que, para qualquer número inteiro positivo n:*

1. *Se n for par, divida-o por* 2;
2. *Se n for ímpar, multiplique-o por* 3 *e some* 1;
3. *Repita o processo com o novo valor de n.*

A conjectura afirma que, independentemente do valor inicial de n, chegará ao número 1.

Exemplo 0.2 *A conjectura de goldbach afirma que todo número par maior que* 2 *pode ser representado pela soma de dois números primos. Por exemplo.*

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7 = 5 + 5$

$12 = 5 + 7$

$14 = 7 + 7$

$16 = 5 + 11$

$18 = 7 + 11$

$20 = 7 + 13$

Atividade 1 *Após apresentar a conjectura de Collatz o professor deverá propor aos estudantes que substituem números inteiros positivos na conjectura de Collatz.*

Com essa atividade os estudantes observarão que independentemente do número escolhido inicialmente chegará ao número 1. No entanto, não existe uma prova que a conjectura seja válida para todo número inteiro positivo, tendo assim diante deles uma conjectura.

2 - Encontro

O professor deverá apresentar técnicas de demonstrações. Neste encontro deve iniciar apresentando o método de demonstração direta. Uma das técnicas mais comuns, ela é usada para provar que uma proposição implica outra, seguindo uma sequência lógica de passos. Supomos que a hipótese seja válida e, usando o processo lógico-dedutivo, devemos deduzir diretamente a tese.

Exemplo 0.3 *A soma de dois números pares é sempre um número par.*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que a e b sejam pares. Dessa forma, $a + b = 2k + 2t = 2(k + t)$ com k, t números naturais. Como, $k + t$ é um número natural segue que $a + b$ é um número par. ∎

Exemplo 0.4 *Se n um número ímpar. Então, n^2 também é um número ímpar.*

Demonstração: Seja n um número natural ímpar, então existe um número natural k tal que $n = 2k + 1$. Consequentemente, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, o que implica que n^2 é um número ímpar. ∎

Atividade 2 *Mostre que a soma de dois números ímpares é sempre um número par.*

3 - Encontro

Neste encontro professor deverá apresentar o método de força bruta. Esse método, também é conhecido como prova por casos, indução perfeita ou prova por exaustão, e é um método de demonstração no qual são testadas todos os casos possíveis de uma hipótese.

Exemplo 0.5 *Mostre que lançando simultaneamente dois dados temos* 9 *possibilidades de obter um número primo em cada dado.*

Pelo Método de Força Bruta, mostramos por meio de uma tabela todas as possibilidades possíveis no laçamento de dois dados.

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}$$

As possibilidades são: $(2,2); (2,3); (2,5); (3,2); (3,3); (3,5); (5,2); (5,3)$ e $(5,5)$.

Portanto, é possível verificar, pelo método de força bruta, que existem nove possibilidades de ter um número primo em cada dado.

Atividade 3 *Mostre que quando lançando simultaneamente dois dados temos* 21 *possibilidades de obter uma somar menor ou igual a sete.*

4- Encontro

Neste encontro professor deverá apresentar método por contraexemplo. Relembramos que uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não temos uma demonstração que comprove a sua validade. Nem sempre é possível mostrar que a conjectura é verdadeira, pois muitas vezes estamos num espaço infinito de casos e por vez não possuímos ferramenta para verificar tal afirmação. Entretanto, através um contraexemplo, um exemplo que nega a afirmação, é possível mostrar que a afirmação não é verdadeira.

Vamos analisar a seguinte proposição: Todo número da forma $n^2 + n + 41$, para n natural, é um número primo.

Observamos na tabela a seguir que para os sete primeiros números naturais o resultado é um número primo.

Número	**Resultado**	**Número Primo**
1	43	sim
2	47	sim
3	53	sim
4	61	sim
5	71	sim
6	83	sim
7	97	sim

Baseados nos primeiros resultados, poderíamos pensar que o valor obtido seria um número primo para todo natural. Entretanto, através um contraexemplo, é possível mostrar que a afirmação não é verdadeira. De fato é isso que ocorre nessa proposição, a afirmação é falsa para n igual a 40, pois $40^2 + 40 + 41 = 1.681 = 41^2$ que é um número composto. Portanto, mediante um contraexemplo, podemos verificar que a proposição é falsa.

Atividade 4 *Verifique se para todo número da forma $n^2 + n + 17$, para n natural, é um número primo.*

5- Encontro

Observações e comentários dos encontros e das atividades realizadas durante a semana.