2023

Modelando a Função Trigonométrica Seno e Cosseno no Fenômeno de Maré

Maicon Michael Trindade de
Fábio José Costa Alves
Roberto Paulo Bibas Fialho

CRISTO; Maicon Michael Trindade de, ALVES; Fábio José Costa da; FIALHO, Roberto Paulo Bibas. A Matemática nas Ondas do Mar. Produto Educacional do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, (PPGEM/UEPA), 2023.

ISBN: 978-65-84998-74-2

Modelagem Matemática. Função Trigonométrica seno e cosseno. Modelagem Matemática no Ensino

Sumário

APRESENTAÇÃO

A ideia do livro digital surgiu a partir das aulas de modelagem matemática no curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, sobre orientações dos professores: Prof. Dr. Fábio José Costa Alves e Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho. No qual foi proposto para os alunos do curso, que escolhesses um tema da matemática básica para desenvolver a partir dela um problema que possa ser modelado matematicamente.

O tema escolhido para desenvolvermos foi a função trigonométrica seno e cosseno. Esse tema foi escolhido devido as suas varias aplicações no dia a dia como nos ciclos dos motores, nas ondas sonoras e nos fenômenos das mares, no qual vai ser o tema trabalhado nesse livro.

O objetivo do livro digital é mostrar para os leitores que a função trigonométrica seno e cosseno têm aplicações práticas no nosso cotidiano como nas ondas do mar, no qual podemos prever o comportamento das mares, sua amplitude e período a partir das características das funções seno e cosseno.

1. A MODELAGEM MATEMÁTICA

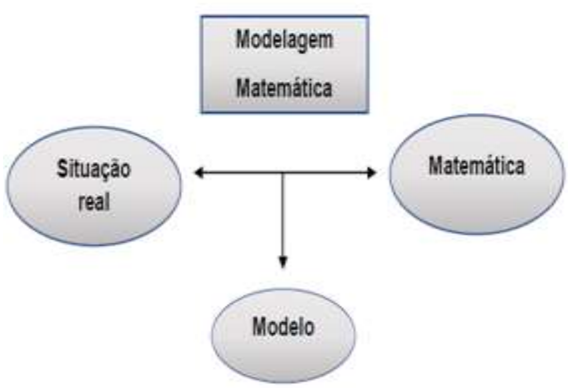
A modelagem matemática é uma arte que surgiu, provavelmente, desde tempos primitivos, quando os povos antigos necessitavam criar modelos matemáticos para resolver seus problemas, ou seja, a modelagem matemática é “a arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações – problemas de nosso meio” (BIEMBENGUT e HEIN, 2013, p.8).

Os autores ainda afirmam que modelar matematicamente um problema “requer uma formalização matemática detalhada” (BIEMBENGUT e HEIN, 2013, p.12). Desse modo, para criarmos um modelo matemático precisamos primeiramente representa-lo através de equações, funções ou linguagem da própria matemática, os problemas que queremos modelar.

Dessa forma, para criarmos um modelo matemático do nosso problema que no caso é modelar através das funções seno e cosseno os fenômenos das mares, devemos primeiramente abordar esses objetos matemáticos conceitualmente, ou seja, através de definições e propriedade do próprio objeto matemático, para que posteriormente, utilizarmos essas propriedades e definições no problema que iremos trabalhar.

Mas para que possamos chegar nesse processo de “matematização do problema” Biembengut e Hein (2013) desenvolveram um modelo para que se possa alcançar o processo de modelagem matemática, observe abaixo o modelo desenvolvido por eles.

Figura1: Esquema do processo da modelagem matemática.



Fonte: Biembengut e Hein (2013, p.13).

Analisando o modelo apresentado por eles, podemos verificar que os conjuntos representados pela situação real e matemática não há interseção entre eles e a modelagem matemática se mostra como uma ponte de comunicação entre os dois conjuntos e desta forma fazendo criar um modelo matemático.

Todavia, para que se possamos chegar nesse modelo matemático a autora Biembengut (2016, apud Silva, Madruga e Silva, 2018) afirma que é necessário que o modelador passem por três fases a citar:

I. Percepção e Apreensão: Consiste em fazer um reconhecimento da situação problema e adapta-se ao problema a ser modelado.
II. Compreensão e Explicitação: é a fase na qual se busca o entendimento e o planejamento de como utilizaremos as definições próprias da matemática para serem aplicados no objeto matemático do qual se quer criar uma modelagem.
III. Significação e Expressão: nessa etapa, busca-se a validação do modelo criado, ou seja, é verificação se o modelo criado é útil para resolver o problema e caso se mostre invalido é necessário que se volte para as etapas I e II.

Portanto, para que possamos trabalhar com a modelagem matemática temos que observar e analisar se a situação problema que escolhemos se encaixam no modelo criado por Biembengut e Hein (2013) e nas fases propostas por Biembengut (2016) e a partir disso estruturar a situação problema em um modelo matemático aceitável.

No capitulo a seguir irei abordar a função trigonométrica seno e cosseno no campo formal da própria matemática, ou seja, definido matematicamente suas propriedades.

2. Função Trigonométrica Seno e Cosseno

Nesse capitulo abordaremos a função trigonométrica seno e cosseno com uma pequena parte histórica mas orientando ao leitor buscar mais fontes históricas caso se interesse e também abordaremos as definições matemática e propriedades das funções trigonométrica seno e cosseno.

2.1 Um breve histórico

O astrônomo grego Hiparco de Niceia (1990 a.C – 120 a. C) é conhecido como o pai da trigonometria, pois foi responsável por construir a primeira tabela trigonométrica, fazendo uma relação de cada corda de um arco o seu ângulo central correspondente. Com essa descoberta, ele foi responsável pelo desenvolvimento da trigonometria a partir dos séculos, como afirmam Uebel e Castro (2015).

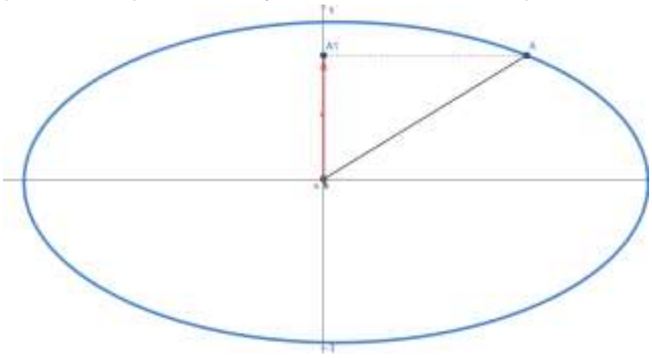
Esse brevê histórico da trigonometria mostra o quanto ela é importante para os seus humanos, pois através dela as pessoas puderam descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória.

2.2 Função trigonométrica seno

A definição matemática da função seno é dada por: Seja f uma função definida em $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a sua lei de formação é representada por $f(x) = sen\, x$ de modo que x é um ângulo em radiano.

Desta forma, tomando um plano cartesiano $x0y$, um circulo de raio unitário e um ponto A pertencente ao circulo temos a seguinte representação geométrica abaixo:

Figura2: Imagem da função seno no circulo trigonométrico.



Fonte: Autor, 2023.

Analisando a representação geométrica, podemos destacar que a imagem do ponto A aplicada à função $f(A) = sen\ A = A_1$.

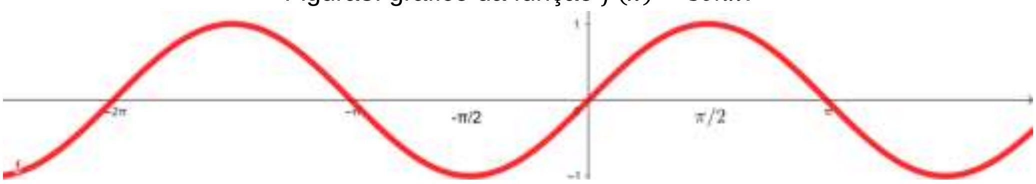
É importante que o leitor possa lembrar-se das seguintes propriedades da função trigonométrica seno:

I. Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, $sen\ x > 0$.
II. Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, $sen\ x < 0$.
III. Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, $sen\ x$ a função é definida como crescente.
IV. Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, $sen\ x$ a função é definida como decrescente.

Além dessas, é importante que se saiba que a imagem da função $f(x) = sen\ x$, encontra-se no intervalo $-1 \leq sen\ x \leq 1$, sua função é periódica e seu período (P) é igual a 2π.

O gráfico da função $f(x) = \ sen\ x$ é representada por uma "senoide" que nos indica como o ângulo x varia em função do $sen\ x$.

Figura3: gráfico da função $f(x) = senx$.



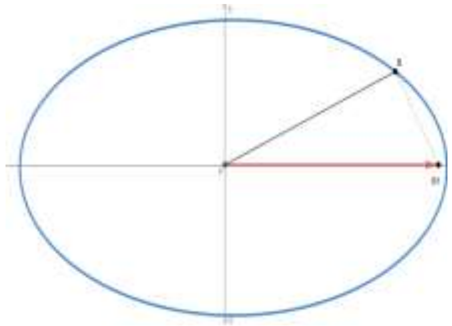
Fonte: Autor, 2023.

2.3 Função trigonométrica cosseno

A definição da função trigonométrica cosseno é dada por: Seja f uma função definida em $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a sua lei de formação é representada por $f(x) = cos\ x$ de modo que x é um ângulo em radiano.

Desta forma, tomando um plano cartesiano $x0y$, um circulo de raio unitário e um ponto B pertencente ao circulo temos a seguinte representação geométrica abaixo:

Figura4: Imagem da função cosseno no circulo trigonométrico.



Fonte: Autor, 2023.

É importante que se note no gráfico acima que a imagem do ponto B aplicada à função $f(B) = cos\ (B) = B_1$.

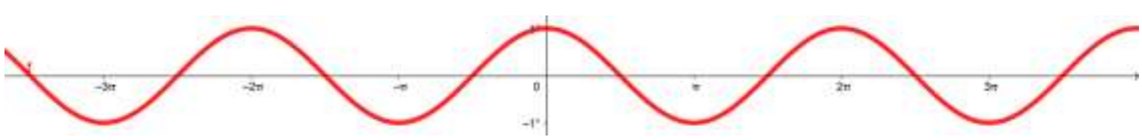
Além disso, é importante que o leitor tenha o conhecimento das seguintes propriedades da função trigonométrica cosseno.

I. Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, $cos\ x > 0$.
II. Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, $cos\ x < 0$.
III. Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, a função $\cos x$ é definida como decrescente.
IV. Se x percorre o terceiro ou quarto quadrante, a função $cos\ x$ é definida como crescente.

Além dessas, é importante que se saiba que a imagem da função $f(x) = cos\ x$, encontra-se no intervalo $-1 \leq cos\ x\ \leq 1$, sua função é periódica e seu período (P) é igual a 2π.

O gráfico da função cosseno, $f(x) = \cos x,$ é representado por uma "cossenoide" que nos indica a variação do ângulo x em função de $\cos x$. O gráfico abaixo representa essa relação.

Figura5: Representação da função trigonométrica cosseno.



Fonte: Autor, 2023.

No próximo tópico iremos abordar as funções trigonométricas seno e cosseno do ponto de vista da modelagem matemática, ou seja, iremos modelar matematicamente o período de maré alta e baixa que ocorrem na cidade de Belém-PA e criar um modelo matemático no qual será permitido prevê em quais horários haverá a maré alta ou baixa novamente.

3. MODELANDO MATEMATICAMENTE OS FENÔMENOS DAS MARÉS

Os fenômenos das mares, conhecidos como maré alta ou baixa, é influenciado pela força gravitacional do Sol e da Lua sobre o planeta Terra. Esse fenômeno da natureza acontece quatro vezes ao dia sendo duas mares altas e duas mares baixas, logo ele é de natureza periódica sendo uns dos fenômenos periódico modelado pelos seres humanos com o auxilio da função trigonométrica.

Para chegarmos a esse processo de modelagem matemática dos fenômenos das mares, devemos seguir o procedimento sugerido por Biembengut e Hein (2013), no qual consiste primeiramente fazer um reconhecimento da situação problema e adapta-se ao problema a ser modelado.

Deste modo, procurei no site da Marinha do Brasil na aba Tabuas das Marés e selecionei a tabua referente ao Porto de Belém do dia 01/06/2023, no qual obtemos os seguintes resultados:

Figura6: Comportamento da maré do dia 01/06/2023 em Belém-PA.

	HORA	ALT (m)
01 QUI	0356	0.7
	0904	3.1
	1638	0.5
	2139	3.0

Fonte: Marinha do Brasil, 2023.

Analisando o gráfico podemos verificar que a maré alta ou baixa ocorrem duas vezes por dia, a primeira maré baixa foi registrada ás 03h56min com altura de 0.7 metros, e a primeira maré alta as 09h04min com altura de 3.1

metros. Podemos verificar que o período da maré baixa para alta, nesse intervalo, foi de aproximadamente 05 horas e sua amplitude foi de aproximadamente a 2,0 metros. Desta forma a segunda maré baixa e alta será as 16h00min e 21h00min respectivamente.

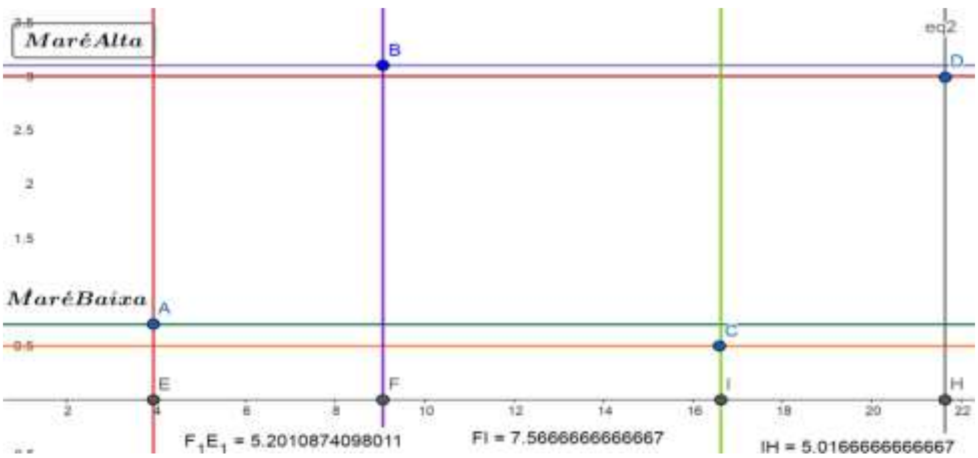
Mas podemos perceber que apenas fazendo a comparação entre os períodos máximos e mínimos e alturas máximas e mínimas não se chega a um resultado preciso, desde modo precisamos partir para a segunda etapa de modelagem.

A segunda etapa consiste em fazer a Compreensão e Explicitação, onde buscaremos o entendimento e o planejamento de como utilizar as definições próprias da matemática para serem aplicados na função trigonométrica seno ou cosseno.

Nessa etapa do problema, escolhermos trabalhar com a função trigonométrica seno deixando para o leitor no capitulo de atividades modelar uma situação envolvendo fenômenos das mares utilizando a função cosseno seguindo os mesmos procedimentos que iremos detalhar no decorrer desse capitulo.

Analisando mais atentamente a situação mostrada na figura 6 podemos ilustrar, por meio do gráfico abaixo um esquema representativo da situação da maré no dia em questão.

Figura7: Esquema representativo do fenômeno da maré no dia 01/06/2023.



Fonte: Autor, 2023.

Analisando o gráfico podemos verificar que a maré alta e baixa são dados pelos B, D, $A\ e\ C$ respectivamente sendo que o período entre a maré baixa e a alta vale aproximadamente 5h12min ou 05,20 horas e entre a maré alta e a baixa foi de 7h33min ou 07,56 horas e finalizando a analise a maré baixa ocorreu novamente após 5h1min ou 5,0166horas.

Para termos um período (p) de oscilação mais preciso precisamos calcular a média aritmética entre os três períodos em horas, desde modo temos: $p = \frac{5,20+07,56+5,0166}{3} = 5,90h$. A partir desse calculo temos o período de como as mares se comportou em média nesse dia.

De forma análoga, podemos determinar a média entre as alturas máximas e mínimas nesse período para termos uma ideia de como essa maré se comportou ao longo desse período. Deste modo temos que a média entre as mares baixa é dado por $\frac{0,7+0,5}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6\ m$ e a maré alta $\frac{3,1+3,0}{2} = \frac{6,1}{2} = 3,05m$.

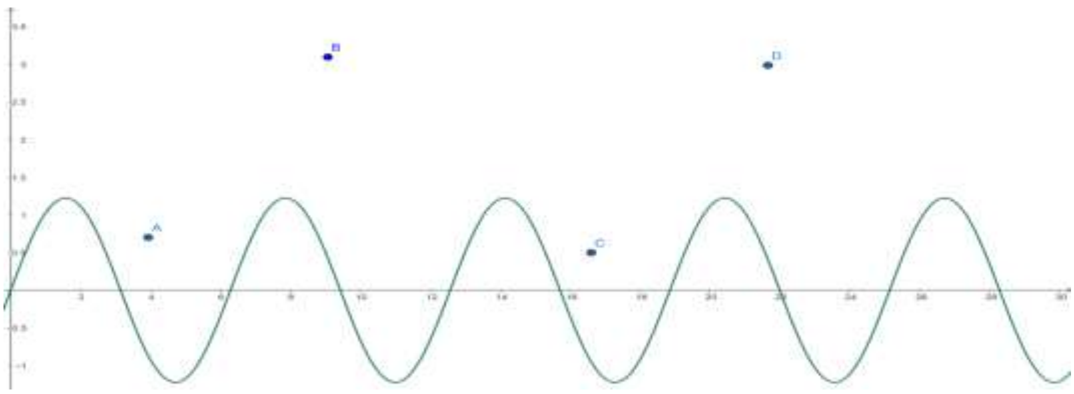
Podemos notar que a imagem (i) da função seno, será um valor que se encontrará entres os intervalos $i = [0,6;\ 3,05]$.

Após determinar a imagem podemos seguir para o próximo passo da modelagem, que no caso é determinar a amplitude da função trigonométrica seno que iremos montar, na trigonometria a amplitude (a) é calculada a partir da média da diferença entre as imagem.

$$a = \frac{3,05 - 0,6}{2} = \frac{2,45}{2} = 1,225$$

Após o calculo da amplitude o nosso modelo matemático será representado por $f(x) = 1,225\ senx$, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 8: representação gráfica da função $f(x) = 1,225senx$.



Fonte: Autor, 2023.

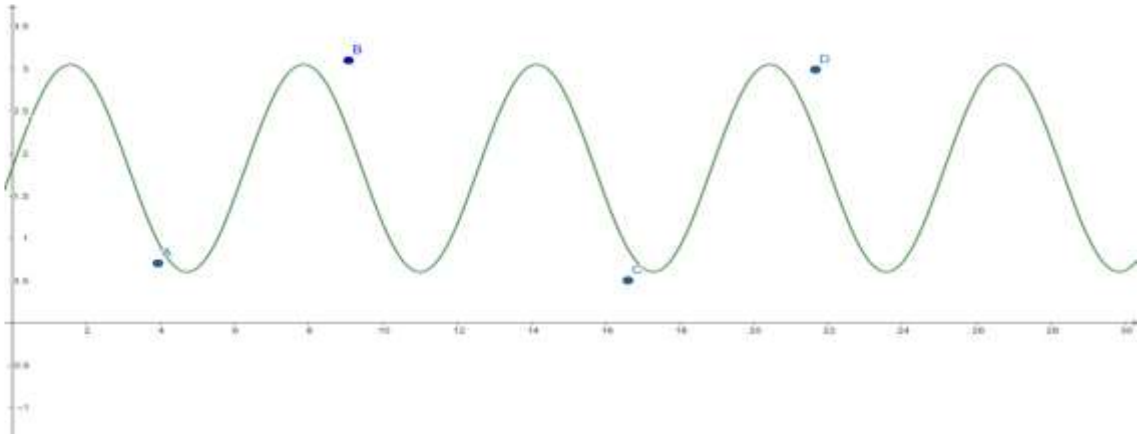
Podemos notar pelo gráfico que os pontos $A, B, C\ e\ D$ não pertencem a função $f(x) = 1,225\ senx$, desde modo a função não representa a situação real, então temos que prosseguir buscando outros parâmetros da função trigonométrica seno para se adequar a situação real apresenta.

Para isso vamos calcula o parâmetro (b) que simbolizará a translação vertical da função trigonométrica seno. Para determinarmos tau parâmetro temos que lembrar primeiramente que a imagem da função trigonométrica que passa pela origem do plano cartesiano xOy representada por $f(x) = sen\, x$ é $[-1, 1]$ e a imagem da função transladada é $[-1 + b, 1 + b]$.

Para o modelo que iremos propor temos que determinar b em $f(x) = b + 1{,}225.senx$ de modo que a imagem correspondem a $i = [0{,}6;\ 3{,}05]$. Para isso temos que calcular b que sastifaça a seguinte equação $[-1{,}225 + b;\ 1{,}225 + b] = [0{,}6; 3{,}05] \rightarrow -1{,}225 + b = 0{,}6\ e\ 1{,}225 + b = 3{,}05$ onde $b = 1{,}825$.

Desse modo a nossa função passa a ser representada por $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225senx$, no qual temos a representação abaixo.

Figura 9: representação da função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225senx$



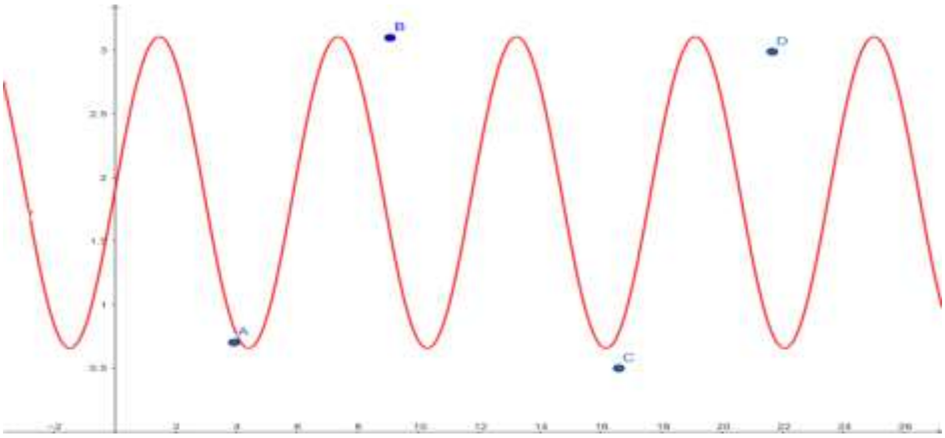
Fonte: Autor, 2023.

Analisando a figura, podemos perceber que a função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225senx$ ainda não contempla os pontos $A, B, C\ e\ D$, logo não representa a nossa situação real sendo preciso estabelecer o parâmetro c da função trigonométrica seno.

Para calcularmos a variável c, termo multiplicativo da variável x na função do tipo $f(x) = sencx$, no qual é responsável por "esticar" ou encolher a senoide representada pelo gráfico temos que lembrar que $p = \frac{2\pi}{c}$. Desse modo calculando c na equação $5{,}90 = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow 5{,}90c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{5{,}90} \Leftrightarrow c = 0{,}34\pi$.

Deste modo temos a função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x)$, na qual será representada pelo gráfico abaixo.

Figura 10: gráfico da função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x)$.



Fonte: Autor, 2023.

Podemos perceber o gráfico ainda não representa o modelo ideal da nossa modelagem sendo necessário determinar o parâmetro d de nossa função.

O parâmetro d, representa o deslocamento horizontal que a função seno percorre no eixo x. Deste modo para calcularmos tau parâmetro temos que estabelecer uma relação de igualdade entre a função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34x + d)$ e suas imagens $i = [0{,}6;\ 3{,}05]$. , conformo mostra os cálculos abaixo:

$$0{,}6 = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x + d)$$

$$0{,}6 - 1{,}825 = 1{,}225sen(0{,}34\pi x + d)$$

$$-1{,}225 = 1{,}225sen(0{,}34\pi x + d)$$

$$-1 = sen(0{,}34\pi x + d)$$

$$sen\frac{3\pi}{2} = sen[0{,}34\pi(3 + \frac{56}{60}) + d]$$

$$\frac{3\pi}{2} = 1{,}02\pi + 0{,}3173\pi + d$$

$$\frac{3\pi}{2} = 1{,}3373\pi + d$$

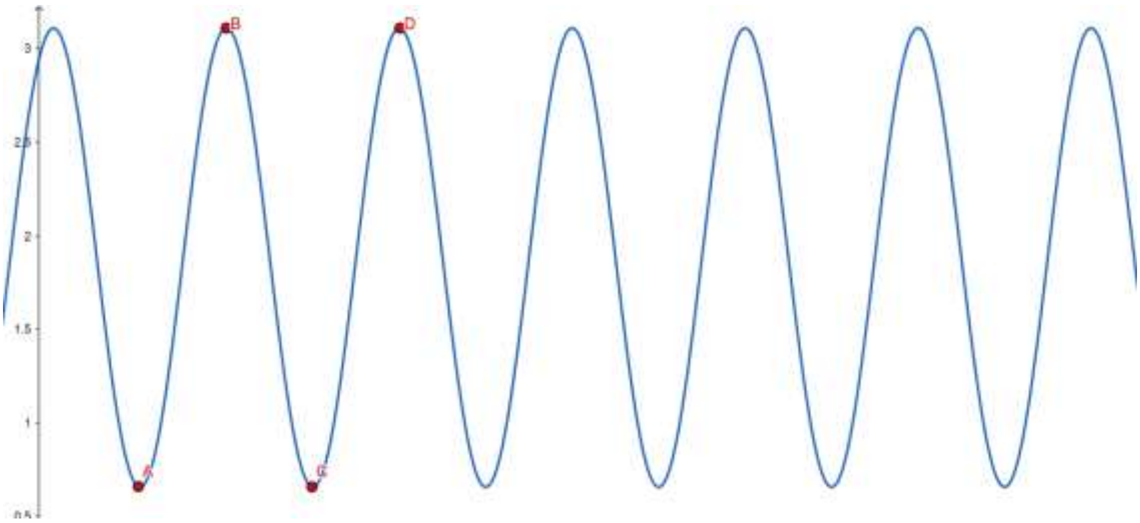
$$3\pi = 2{,}67466666\pi + d$$

$$3\pi - 2{,}67466666\pi = d$$

$$d = 0{,}3253333\pi$$

Na ultima etapa da nossa modelagem vamos verificar se o modelo criado $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x + 0{,}3253333\pi)$ é valido, para isso traçamos o gráfico abaixo:

Figura 11: gráfico da função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x + 0{,}3253333\pi)$



Fonte: Autor, 2023.

Pelo gráfico, percebemos que os pontos A, B, C e D pertencem a função $f(x) = 1{,}825 + 1{,}225sen(0{,}34\pi x + 0{,}3253333\pi$, para $0 \leq x \leq 24$, logo o modelo criado corresponde a situação real dada, sendo possível prevê o comportamento da maré ao longo do dia.

No próximo capitulo apresentaremos atividade para que se possa ser trabalhada ao longo das aulas de funções trigonométricas.

4. ATIVIDADES

Atividade 1 – considere o comportamentos das mares no dia 02/06/2023 no Porto de Belém-PA:

Horário	**Altura em metros**
04h43min	0,6
09h41min	3,2
17h36min	0,5
22h34min	3,1

A partir dela responda as seguintes perguntas:

a) Qual o modelo matemático da função seno representa o comportamento dessa maré?

b) Em qual horário a maré alcançou a amplitude de 2,0 metros?

c) As 12h, qual a altura da maré?

Atividade 2 – considere o comportamentos das mares no dia 20/06/2023 no Porto de Belém-PA

Horário	Altura em metros
00h47min	2,9
07h11min	0,8
12h32min	3,1
20h19min	0,6

a) Crie um modelo matemático utilizando a função trigonométrica cosseno para estabelecer o comportamento da maré na tabela.

b) As 14h:00 qual a altura da maré?

c) Em qual horário a maré terá 3 metros?

CONSIDERAÇOES FINAIS

O livro teve como proposta mostrar para os alunos ou professores que é possível modelar matematicamente uma situação real de fenômenos periódicos através da função seno ou cosseno, através do modelo proposto por Biembengut e Hein (2013) que consiste em fazer percepção, compreensão, significação e expressão do fenômeno estudado.

Essa atividade vai ao encontro do é pedido pelo Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no que diz respeito à formação intelectual do individuo vislumbrando os interesses da sociedade e ao encontro da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que orienta aos professores, que ao se trabalhar com fenômenos periódicos reais, possamos representa-los no plano cartesiano trazendo assim a matemática para a realidade do aluno.

Portanto é de estrema importância trazer fenômenos reais para a sala de aula e mostrar a matemática que existe por traz desse fenômenos, evitando talvez perguntas feitas como “onde eu vou usar isso na minha vida”?

Desta forma espero ter contribuído de alguma forma para a formação continuada de professores ou de alunos que se mostram curiosos sobre o tema e fico também disponível para receber criticas para o aperfeiçoamento desse material didático.

REFERÊNCIAS

BIEMBEGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed., São Paulo: Contexto, 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 01/06/2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, 3. São Paulo: atual, 2004.

Silva, S. C., Freitas Madruga, Z. E. de, & Santos Silva, F. dos. (2019). Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática. **Revista De Educação Matemática**, 16(21), 101–118. Recuperado de https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/234. Acesso em 12/07/2023.

Tabuas de mares , **Tabuas de mares de Belém-PA**. Disponível em: https://www.marinha.mil.br/chm/sites/www.marinha.mil.br.chm/files/dados_de_mare/07-porto_de_belem_tabua_2023_0.pdf. Acesso em 01/06/2023.

AUTORES

Maicon Michael Trindade de Cristo, é Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará, possui Especialização em Fundamentos de Matemática Elementar pela Universidade Estadual do Pará (UEPA), atualmente é aluno de mestrado do programa de Pós-Graduação no Ensino de Matemática, UEPA.

Fábio José da Costa Alves, possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e Professor Titular da Universidade da Amazônia. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: de convolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.

Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho, Possui graduação em Arquitetura e Urbanismo pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), graduação em Educação Artística do 1º Grau pela Universidade Federal do Pará (1993), graduação em Educação Artística Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Pará (1994) e mestrado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1998). É artista plástico e especialista em educação pela UNAMA (1994) e em design de móveis pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2006). Atualmente e professor da UEPA.