

$$C = 2\pi r$$



MODELAGEM MATEMÁTICA E O CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE BELÉM DO PARÁ

PAULO HUGO MARTINS PINTO

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES

ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO

PINTO, Paulo Hugo Martins; ALVES, Fábio José da Costa; FIALHO, Roberto Paulo Bibas. Modelagem Matemática e o Crescimento Populacional da cidade de Belém do Pará. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará,(PPGEM/UEPA), 2022.

ISBN: 978-65-84998-75-9

Modelagem Matemática. Ensino de Matemática. Crescimento Populacional.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	4
JUSTIFICATIVA	5
MODELAGEM MATEMÁTICA	6
MODELANDO O CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE BELÉM DO PARÁ	8
CONSIDERAÇÕES FINAIS	13
ATIVIDADES	14
REFERÊNCIAS	16
OS AUTORES	17

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) Professor(a),

é com grande entusiasmo que apresento este trabalho, cujo foco está na "Modelagem Matemática do Crescimento Populacional do Município de Belém do Pará". Este tema foi escolhido devido à sua importância crucial para o entendimento das mudanças demográficas em nossa cidade e suas implicações para o futuro. A modelagem matemática nos proporciona ferramentas valiosas para explorar e interpretar os fatores que moldam o crescimento populacional, tornando possível antecipar cenários futuros e tomar decisões assertivas. Ao longo desta pesquisa, buscaremos mergulhar nas complexidades do aumento populacional, considerando variáveis como natalidade, mortalidade e migração. Com isso, o conteúdo informado pode ser utilizado para o ensino de conteúdos como: Análise de gráficos e tabelas e variação percentual. Esses fatores, interligados de maneira intrínseca, influenciam diretamente a dinâmica demográfica de Belém do Pará. A aplicação de modelos matemáticos não apenas nos permite compreender esses padrões, mas também oferece uma visão estratégica para o planejamento urbano e o desenvolvimento sustentável. A jornada exploratória que empreenderemos nesta investigação matemática é fundamental para proporcionar uma compreensão abrangente dos conteúdos supracitados. Ao unir teoria matemática e realidade social, buscamos contribuir não apenas para o campo acadêmico, mas também para a tomada de decisões fundamentadas que moldarão o futuro de Belém do Pará. Esta produção é, portanto, uma ponte entre a abstração matemática e a realidade concreta, oferecendo uma perspectiva valiosa sobre um dos aspectos mais dinâmicos e impactantes do processo de ensino aprendizagem.

JUSTIFICATIVA

Com extrema satisfação, apresenta-se este trabalho de investigação cujo escopo se concentra na "Modelagem Matemática do Crescimento Populacional do Município de Belém do Pará". A escolha desse tema se deve à sua elevada relevância no contexto da compreensão das dinâmicas demográficas urbanas e suas implicações futuras. O emprego de técnicas avançadas de modelagem matemática emerge como uma ferramenta essencial para explorar e desvelar os inúmeros fatores que orquestram o crescimento populacional, conferindo assim a capacidade de antecipar cenários prospectivos e embasar decisões informadas.

Ao longo da pesquisa, intentamos mergulhar nas complexidades inerentes ao fenômeno do incremento populacional, levando em consideração variáveis intrínsecas, como natalidade, mortalidade e migração. Estes elementos, entrelaçados de maneira intrincada, exercem uma influência direta e substancial na dinâmica demográfica de Belém do Pará. A aplicação de modelos matemáticos não se resume à mera descrição destes padrões; ela proporciona, sobretudo, uma perspectiva estratégica para o desenvolvimento sustentável e o planejamento urbano.

A abordagem investigativa delineada nesta incursão matemática se revela de extrema importância para uma compreensão holística do fenômeno do crescimento populacional. Ao amalgamar princípios matemáticos com a complexidade da realidade social, busca-se contribuir não apenas para o espectro acadêmico, mas, de maneira preponderante, para a tomada de decisões fundamentadas que delineiam o futuro de Belém do Pará. Este trabalho, portanto, se apresenta como um elo imprescindível entre a abstração matemática e a tangibilidade concreta, oferecendo uma perspectiva única sobre um dos elementos mais dinâmicos e impactantes de nossa coletividade urbana.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática, de acordo com os preceitos estabelecidos por Bassanezi (2004), é uma abordagem sistemática que busca representar, entender e interpretar fenômenos do mundo real por meio de formulações matemáticas. Este enfoque tem como objetivo principal traduzir situações concretas em termos matemáticos, permitindo a análise e resolução de problemas práticos. Segundo Bassanezi (2004)

“A Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. (Bassanezi, 2004, p.24)

Bassanezi (2004) argumenta que há cinco razões substanciais para incorporar a Modelagem Matemática no currículo: motivação, potencial para alcançar aprendizado, aplicação da Matemática em diversos contextos e campos, além da reflexão e desenvolvimento para compreensão de aspectos socioculturais. O autor afirma que a pesquisa em modelagem matemática deve seguir as seguintes etapas:

1. Experimentação: Fase em que ocorre o processamento dos dados, podendo ser realizado por métodos experimentais ou não.
2. Abstração: Fase que conduz à criação de um modelo. Durante esse estágio, ocorre a definição das variáveis de controle que afetam o sistema, o levantamento de questionamentos, a formulação de hipóteses e a simplificação destas, uma vez que têm um impacto direto na complexidade do modelo a ser desenvolvido.
3. Resolução: etapa em que se descreve o problema com uma linguagem matemática adequada.
4. Validação: É a fase em que o modelo é submetido a testes, sendo confrontado com os dados reais do sistema. Nesse estágio, é possível realizar simulações computacionais por meio de softwares apropriados, avaliando a validade do modelo em conformidade com a complexidade do sistema. Essa avaliação indica se são necessárias melhorias no modelo ou se este se mostra adequado.
5. Modificação: Neste estágio, implementam-se as melhorias recomendadas anteriormente, tornando-se imperativo validar novamente o modelo.

Conforme mencionado por Garcia (2005), essa estrutura oferece uma maior clareza na compreensão do modelo matemático, tornando-o mais didático em sua perspectiva.

Burak (1992) já afirmava os estudos de Bassanezi (2004), ao dissertar que a Modelagem Matemática é um conjunto de métodos que visa criar uma representação matemática para explicar os fenômenos presentes na vida cotidiana, auxiliando na previsão de eventos e na tomada de decisões. Essa abordagem se fundamenta em duas premissas fundamentais:

- 1) o interesse do grupo de pessoas envolvidas;
- 2) a coleta de dados no ambiente que é de interesse para o grupo em questão.

A primeira premissa encontra aplicação no âmbito da Psicologia, onde muitas de nossas ações são impulsionadas por interesses específicos. As etapas propostas, os procedimentos e as diretrizes são fundamentados por esta premissa. A segunda premissa, que destaca a coleta de dados no ambiente de interesse do grupo, está associada ao método, especialmente àqueles que adotam abordagens como o corte antropológico, fenomenológico, etnográfico e todas as variantes da "observação participante".

MODELANDO O CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE BELÉM DO PARÁ

Iniciando a partir da ideia de que o crescimento populacional envolve a alteração da população em relação ao tempo, e levando em consideração que a relação entre a variação da população (P) e a variação do tempo (t) é diretamente proporcional à população atual, pode-se afirmar:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

Denominado como Modelo de Malthus contínuo, em que "k" representa a constante de proporcionalidade ou taxa de crescimento. Este modelo, em sua essência, é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem homogênea e pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P'(t) &= kP(t) \\ P'(t) - kP(t) &= 0 \end{aligned}$$

Para determinar o valor da constante "k", é necessário resolver a Equação Diferencial Ordinária (EDO) (1) por meio do método de variáveis separáveis:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados se tem:

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+C}$$

$$P(t) = e^{kt} \cdot e^C$$

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Substituindo $P(0) = P_i$ na equação acima, encontra-se:

$$C = P_i$$

Assim:

$$P(t) = P_i \cdot e^{kt}$$

Dividindo toda a equação por P_i , e aplicando a função exponencial:

$$\ln \left| \frac{P(t)}{P_i} \right| = \ln |e^{kt}|$$

$$\ln \left| \frac{P(t)}{P_i} \right| = k \cdot t$$

Por último, ao dividir ambos os lados pela variável temporal "t", obtemos a equação que descreve a taxa de crescimento populacional de um período para outro:

$$k = \frac{\ln \left| \frac{P(t)}{P_i} \right|}{t} \quad (2)$$

Os parâmetros e variáveis do sistema foram derivados a partir dos dados do Censo Demográfico de 2000 e 2010 do município de Belém do Pará. A população desses dois períodos foi empregada para calcular a taxa de crescimento, utilizando a equação (2), com P_i igual a 1.280.614 e $P(10)$ igual a 1.393.399.

$$k = \frac{\ln \left| \frac{1.393.399}{1.280.614} \right|}{10} \approx 0,00844064$$

A partir do valor obtido na constante fez-se necessário validar se a aproximação da constante gerada condiz com o valor apresentado por outro censo entre os anos de 2000 e 2010. No próximo tópico, validaremos o valor de "k" a fim de diminuir a margem de erro dessa constante, caso exista.

A fim de validar esse o modelo apresentado acima, utilizamos o ponto de partida como o ano 2000 e iremos estimar o valor da população do ano de 2007, a qual possuímos o resultado apenas para analisar se a margem de erro de nossa constante é compreensível.

$$P(t) = P_i \cdot e^{kt}$$

Substituindo os dados obtidos:

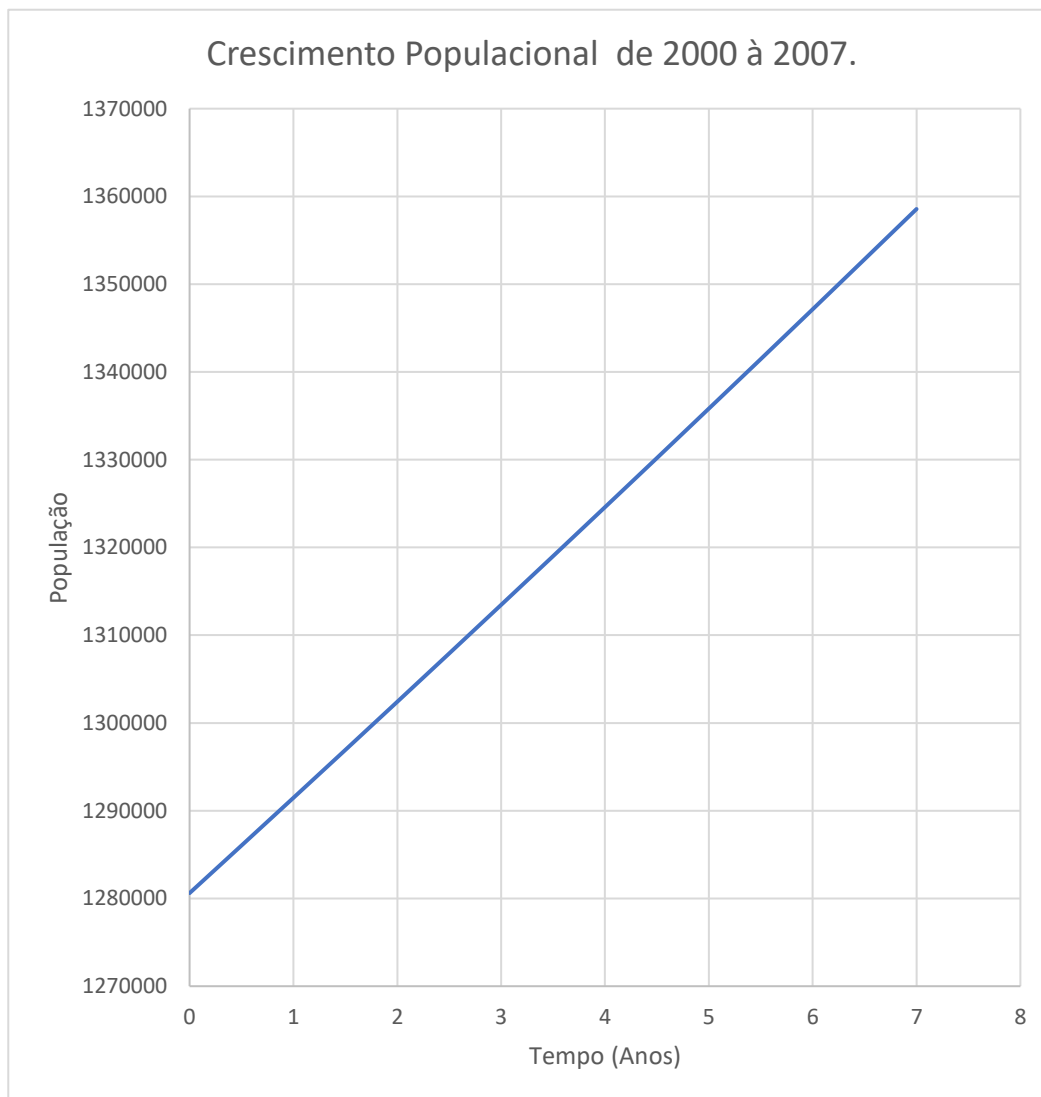
$$P(7) = 1280614 \cdot e^{0,00844064 \cdot 7}$$

Obtemos que:

$$P(7) \cong 1.358.560$$

Dessa forma, utilizamos o programa Google Planilhas para que, com dados obtidos, pudéssemos gerar um gráfico desse crescimento. Segundo o IBGE, no censo de 2007, a população estimada do município de Belém do Pará era de 1.408.847.

Gráfico 1: Crescimento Populacional do município de Belém do Pará de 2000 à 2007.



Fonte: Os autores (2023)

Com isso, concluímos que devido o número populacional ser muito grande a margem de erro se torna pequena, não havendo necessidade de alterar o valor da constante gerada anteriormente para uso da função.

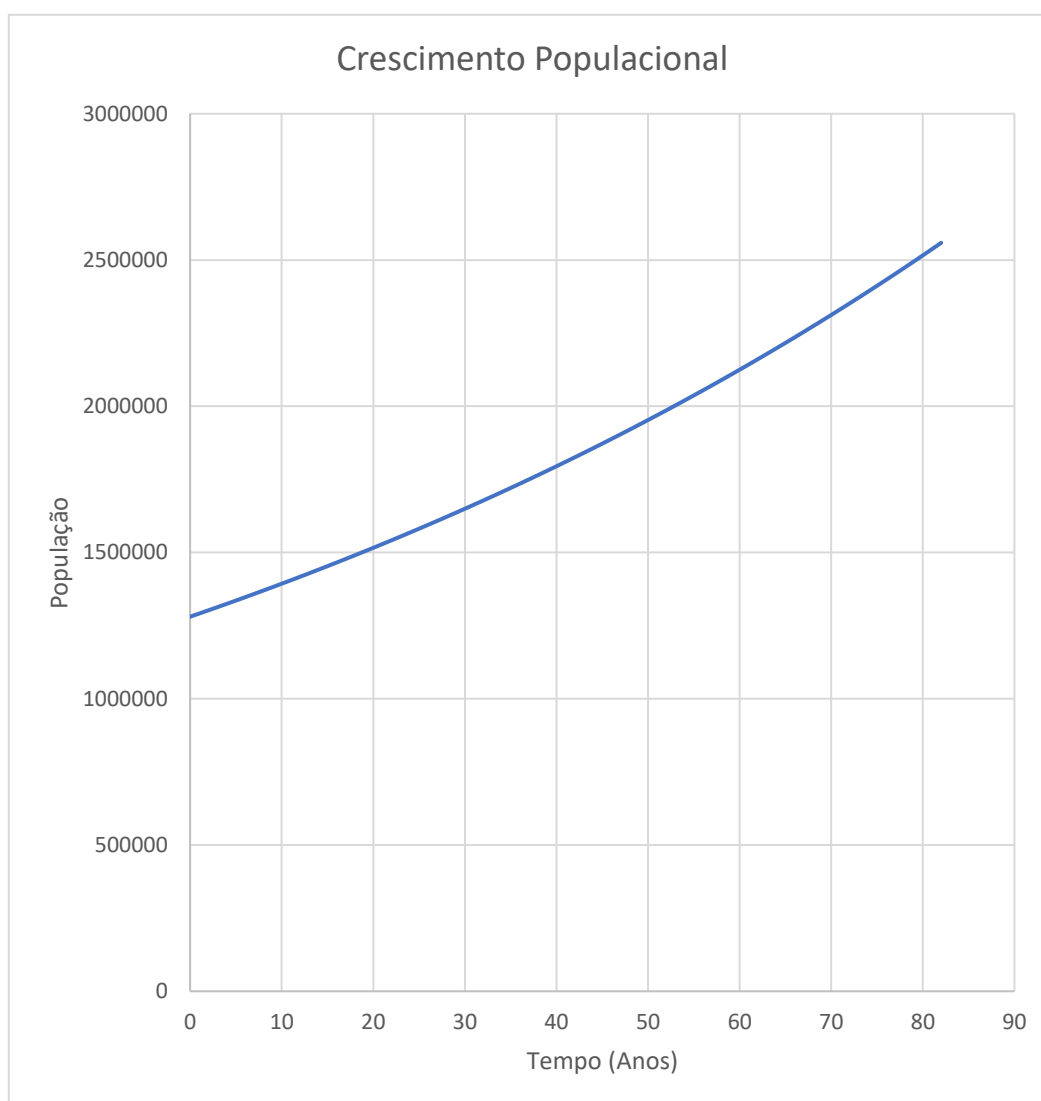
Tal necessidade, deve-se ao fato de:

Os modelos computacionais são “recortes” da realidade, ou seja, são implementações computacionais de modelos específicos, e, como tais, desprezam diversos aspectos do sistema real, a fim de focar a atenção em certos aspectos particulares da natureza, o que facilita a compreensão do fenômeno físico (HEIDEMANN, 2012, p. 972).

Com base nestes critérios, procurou-se resolver o seguinte desafio: "Dado que a extensão geográfica do município de Belém do Pará permaneça constante e que sua população mantenha o mesmo índice de crescimento desde o ano 2000, qual será o período necessário para que o município duplique a população residente em 2007?"

Ao empregar o modelo matemático para a população inicial de 1.280.614 habitantes (população em 2000) e estabelecendo a dimensão máxima do eixo y (população) como o dobro da população inicial, o gráfico representado abaixo foi obtido.

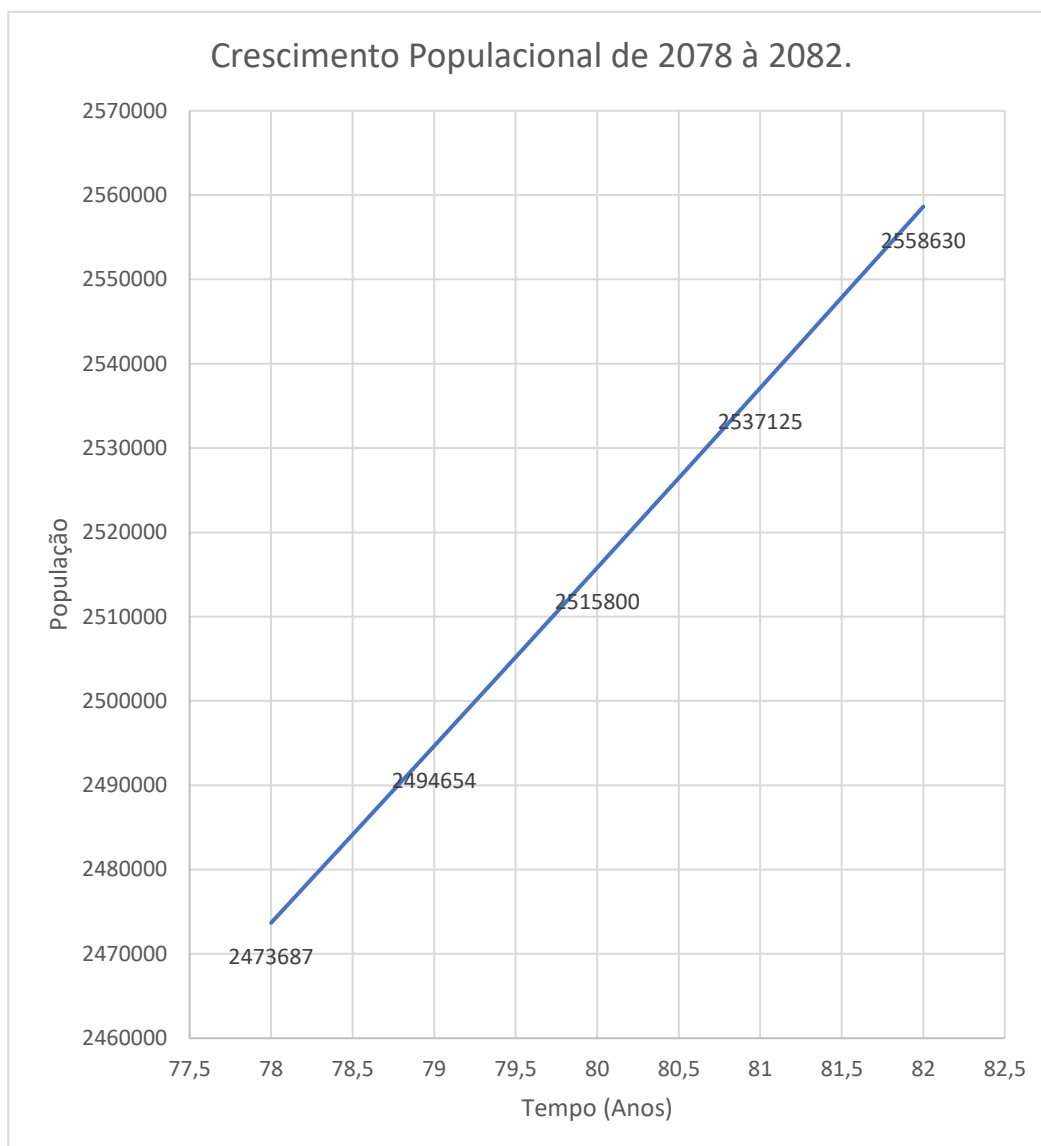
Gráfico 2: Crescimento Populacional do município de Belém do Pará projetado com o dobro da população inicial.



Fonte: Os autores (2023)

Ao examinar o gráfico, é viável apontar que a duplicação da população do município de Belém do Pará ocorrerá em cerca de 80 anos. No entanto, ao utilizar a funcionalidade de zoom no gráfico gerado pelo software Google Planilhas, observa-se que o período estimado para a duplicação da população do município é de aproximadamente 82 anos (Gráfico 3).

Gráfico 2: Crescimento Populacional do município de Belém do Pará projetado com zoom do aplicativo Google Planilhas.



Fonte: Os autores (2023)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da revisão bibliográfica e das simulações computacionais conduzidas, foi possível observar que o Modelo de Malthus utiliza a variação média do crescimento populacional em um determinado intervalo de tempo, considerando essa variação como constante. Constatou-se que o modelo é válido para realizar algumas previsões, no entanto, sua margem de erro permanece elevada devido às premissas adotadas. Essas premissas incluem a suposição de que a população de indivíduos reprodutores se mantém constante durante o crescimento, que as taxas de natalidade e mortalidade permanecem estáveis, e que não ocorrem migrações dentro do espaço geográfico analisado, o que nem sempre reflete a realidade.

No entanto, o desenvolvimento desta produção contribuiu para consolidar o conhecimento sobre as etapas necessárias para modelar matematicamente um problema real. Ficou claro que nenhum modelo matemático pode ser considerado como definitivo, pois há sempre a possibilidade de aprimoramento, considerando mais ou menos parâmetros, dependendo do foco do problema, como é o caso do modelo de crescimento populacional.

É importante ressaltar que a compreensão das etapas da modelagem matemática como método de pesquisa também contribuiu para uma melhor assimilação dessa ferramenta como uma metodologia de ensino. Além disso, ficou evidente que o uso de tecnologias, como softwares matemáticos, enriquece o processo de ensino e aprendizagem por meio da modelagem matemática, facilitando a compreensão dos modelos e sua manipulação através de simulações computacionais.

Considerando que a prática proporciona um melhor entendimento da teoria, podemos afirmar que o desenvolvimento deste trabalho proporcionou uma maior segurança e autoconfiança para planejar e implementar aulas utilizando a metodologia de Modelagem Matemática.

ATIVIDADES

As atividades a seguir estão relacionadas ao tópico de crescimento populacional para serem utilizadas na escola básica. Em nossa concepção, essas atividades podem sofrer alteração se aplicadas em diferentes níveis de ensino.

Atividade 1: Analisando Dados Populacionais

Objetivo: Discutir as possíveis tendências de crescimento de diferentes regiões do mundo.

- **Discussão da Atividades (30 minutos):** Peça aos alunos para coletar dados demográficos de diferentes regiões ou países ao longo do tempo. Eles podem utilizar fontes confiáveis, como estatísticas governamentais, para analisar as tendências de crescimento populacional, identificar fatores que influenciam essas tendências e discutir possíveis consequências.

Atividade 2: Modelagem Exponencial de Problemas de Crescimento Populacional

Objetivo: Criar modelos de simulação de crescimento populacional utilizando Função Exponencial.

- **Discussão da Atividade e Produção (50 minutos):** Desafie os alunos a criar modelos matemáticos simples de crescimento populacional utilizando a lei de formação $f(x) = b * a^x$. Assim como o Modelo de Malthus ou o Modelo Logístico os discentes podem usar dados reais para ajustar esses modelos e entender melhor como as diferentes variáveis afetam as previsões populacionais.

Atividade 3: Comparação de Modelos

Objetivo: Comparar diferentes modelos de crescimento populacional.

- **Discussão da Atividade: (40 minutos):** Peça aos alunos para comparar diferentes modelos de crescimento populacional, como o exponencial e o logístico. Eles podem discutir as limitações de cada modelo e quando cada um é mais apropriado para representar uma determinada situação demográfica.

Atividade 4: Debate

Objetivo: Discutir sobre o incremento de políticas públicas relacionadas ao crescimento populacional.

- **Discussão da Atividade (40 minutos):** Organize debates em sala de aula sobre políticas públicas relacionadas ao crescimento populacional. Os alunos

podem discutir o impacto de políticas de planejamento familiar, imigração e outros fatores que afetam diretamente a população.

Atividade 5: Projetos de Pesquisa

Objetivo: Utilizar conhecimentos matemáticos afim de analisar o crescimento populacional de um local.

- **Explicação da Atividade (40 minutos):** Peça aos alunos para realizar um projeto de pesquisa em que apliquem conceitos matemáticos para analisar o crescimento populacional de uma cidade, região ou país específico. Eles devem apresentar suas conclusões de maneira clara, incluindo gráficos e equações matemáticas. O período de entrega irá depender da disponibilidade do professor.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- BURAK, D. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.
- GARCIA, C. **Modelagem e Simulação**. Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005.
- Heidemann, L. A. **Ciclos de modelagem**: uma proposta para integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no ensino de física. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 29, n. especial 2, p. 965-1007, out. 2012

OS AUTORES



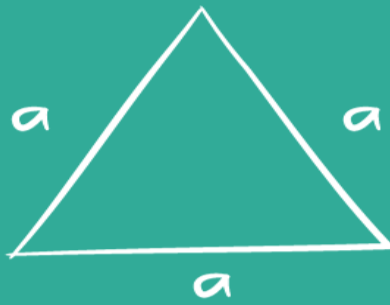
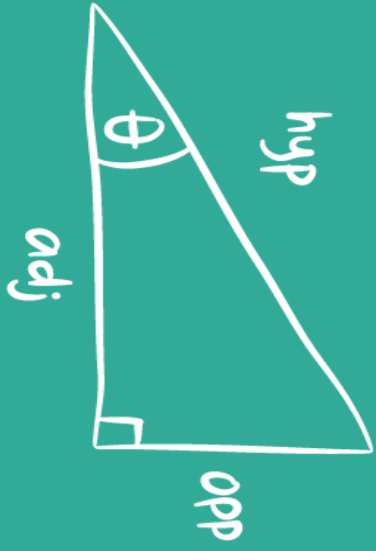
Paulo Hugo Martins Pinto possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2021), foi monitor de Matemática na Escola Verge (2020), monitor no Sistema de Ensino Physics (2019-2020) e Professor voluntário no Projeto de Extensão Cursinho Alternativo da UEPA (2019-2021). Atualmente é membro do Grupo de Estudos em Aritmética (GEA), coordenado pelo Prof. Dr. Rubens Vilhena Fonseca e Mestrando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Pará (PPGEM - UEPA). Possui experiência na área de Matemática e Educação Matemática com ênfase em Ensino de Aritmética e Resolução de Problemas.



Fábio José da Costa Alves possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará ? UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), Doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA. Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2019 à 2023. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: deconvolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.



Roberto Paulo Bibas Fialho possui graduação em Arquitetura e Urbanismo pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), graduação em Educação Artística do 1º Grau pela Universidade Federal do Pará (1993), graduação em Educação Artística Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Pará (1994) e mestrado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1998). É artista plástico e especialista em educação pela UNAMA (1994) e em design de móveis pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2006). Desenvolve atividades como professor adjunto na Universidade do Estado do Pará e professor titular da Faculdade de Estudos Avançados do Estado do Pará - FEAPA, atuando principalmente nos seguintes temas: metodologia científica, educação matemática, psicologia e composição visual, arquitetura e design gráfico. Desenvolveu tese doutoral intitulada "A MATEMÁTICA DO SENSÍVEL PELAS MÃOS DO ARTESÃO: Marcas da aprendizagem matemática e da cultura material dos ceramistas de Icoaraci" (2013), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), pertencente à Universidade Federal do Pará. Atuou como coordenador de TCC no Curso de Bacharelado em Secretariado Executivo Trilíngue da UEPA do ano 2013 a 2018, onde atualmente integra o colegiado deste curso. É também membro do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do CCSE/UEPA, ministrando a disciplina Metodologia da Pesquisa em Ensino de Matemática e atuando como colaborador na disciplina Modelagem Matemática.



$$C = 2\pi r$$

