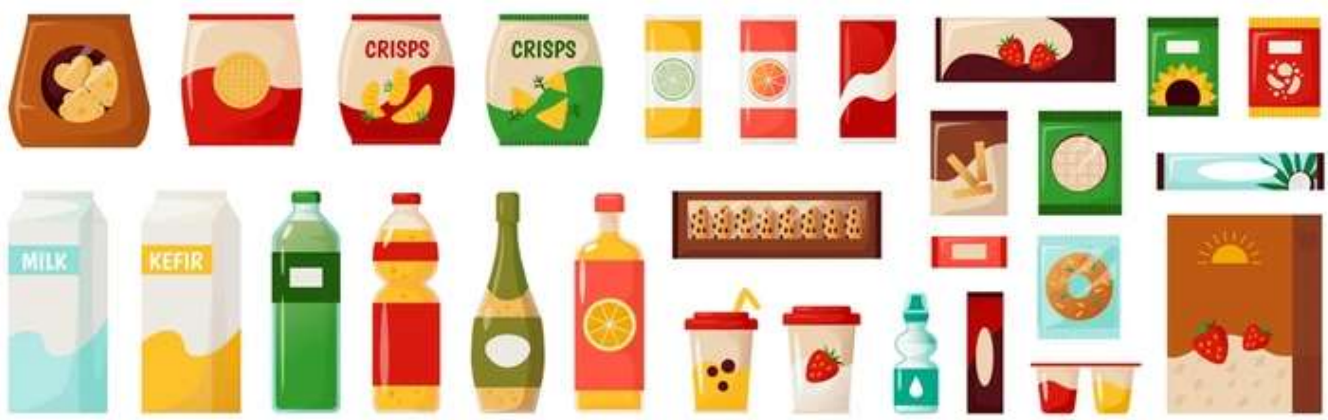
2024

Analisando as Embalagens de Alimentos a partir da Modelagem Matemática



Lucas Valois Leal de Oliveira
Fábio José da Costa Alves
Roberto Paulo Bibas Fialho
Cinthia Cunha Maradei Pereira

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ - UEPA

OLIVEIRA, Lucas Valois Leal de; ALVES, Fábio José da Costa; FIALHO, Roberto Paulo Bibas; PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei. **Analisando as Embalagens de Alimentos a partir da Modelagem Matemática**. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), 2024.

ISBN: 978-65-84998-79-7

Ensino de Matemática; Modelagem Matemática; Geometria Espacial; Embalagens de Alimentos.

APRESENTAÇÃO

Caro(a) professor(a),

O material em questão busca propor uma atividade de Modelagem Matemática, voltada para a educação básica, a fim de trabalhar noções de Geometria Espacial, como cálculo de área e volume de sólidos geométricos, a partir da análise de diferentes embalagens de alimentos.

A fim de familiarizar o leitor com essa metodologia de ensino, será apresentada uma breve introdução acerca da Modelagem Matemática, com diferentes autores e suas respectivas linhas de pesquisa sobre o assunto. Em seguida, tomaremos um referencial teórico e suas abordagens acerca da Modelagem Matemática, bem como a utilização desta como estratégia de ensino.

Após isso, é proposta uma atividade com problemas relacionados com a realidade dos alunos e que, como indicado pela metodologia trabalhada, será discutido em sala de aula, a fim de tornar mais significativo o conteúdo matemático que será trabalhado

Finalmente, apresenta-se uma seção com orientações para o(a) professor(a), na qual é sugerida o uso das etapas da Modelagem Matemática, e como utilizar tais estágios durante a resolução da atividade. Vale ainda ressaltar que essas orientações não precisam ser seguidas à risca, estando abertas a adaptações de acordo com os objetivos do docente, bem como da realidade que este encontrar em sala de aula.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A partir da criação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares do Brasil passaram a ter uma referência comum e obrigatória para a elaboração dos seus currículos e propostas pedagógicas (BRASIL, 2018) e, neste documento, foi estabelecido que os alunos devem adquirir a habilidade de "Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados" (BRASIL, 2018).

Para dominar tal habilidade é necessário que os professores responsáveis pelo ensino de Matemática utilizem estratégias metodológicas que possam contribuir com o desenvolvimento dessa técnica. Uma possível metodologia a ser utilizada é a Modelagem Matemática que, segundo Menezes (2023), desempenha um papel positivo no ensino de Geometria, uma vez que promove uma aprendizagem ativa, envolvente e contextualizada. Dessa forma, a Modelagem Matemática pode contribuir com a obtenção da habilidade requisitada no currículo nacional.

Como referência na área de Modelagem Matemática no Brasil, pode-se citar três autores: Aristides Camargos Barreto, que se destacou por ser o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira, nos anos finais da década de 1970, bem como representou o Brasil em congressos internacionais relacionados ao tema (BIEMBENGUT, 2009); Rodney Carlos Bassanezi, que foi um dos maiores disseminadores da modelagem em âmbito nacional, principalmente com cursos de formação continuada, desde a década de 1980 (BIEMBENGUT, 2009); e Maria Salett Biembengut que, além das diversas produções relacionadas com a Modelagem Matemática e o mapeamento dos trabalhos e cursos realizados no Brasil acerca dessa temática, também foi a fundadora do Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino (CREMM).

Para Bassanezi (2002) a "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos". Dessa forma, é possível fazer uso da Modelagem Matemática como metodologia de ensino para certos conteúdos, desde que o professor responsável tenha conhecimento acerca desse "processo dinâmico" e consiga inseri-lo em suas aulas de maneira adequada.

Segundo Biembengut e Hein (2005) a Modelagem Matemática é “a arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio”. Para tanto, faz necessário reconhecer a situação problema que é apresentada, compreender o tema tratado no problema para formular um modelo a ser utilizado para resolvê-lo e interpretar as soluções obtidas a partir do modelo, para verificar suas validades.

Além disso, Bean (2001) descreve a Modelagem Matemática como “um processo matemático que envolve formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras na criação de modelos matemáticos”. Com isso, percebe-se que a “modelagem exige habilidades de raciocínio importantes e distintas das mobilizadas nas resoluções de problemas típicos e, portanto, é recomendável que ela seja incorporada no ensino e na aprendizagem de matemática” (BEAN, 2001).

A partir do exposto, nos baseamos nas ideias de Bassanezi (2002) para propor uma atividade de modelagem matemática, na qual o objetivo será modelar o gasto de material para produzir diferentes embalagens de alimentos.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é um processo dinâmico e que pode ser utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. Além disso, ela é uma forma de abstração e generalização, a fim de prever tendências em determinados eventos. Por fim, o autor aponta que a Modelagem consiste, em sua essência, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual, e não exclusivamente em uma linguagem técnica e acadêmica.

Bassanezi (2002) ainda destaca que a Modelagem não deve ser vista e nem utilizada como uma alternativa para retratar toda e qualquer situação da realidade, uma vez que a inserção de simbolismos matemáticos, em determinadas situações, pode ser mais prejudicial do que esclarecedora para o que é tratado. O autor salienta que, tanto o conteúdo quanto a linguagem matemática que serão empregados durante a resolução de certa problemática, devem condizer com o tipo de problema e com o objetivo que se deseja alcançar durante o processo de resolução.

A partir disso, Bassanezi (2002) registra que, para realizar a Modelagem Matemática de uma situação ou problema real, faz-se necessário seguir algumas etapas: **Experimentação** (obtenção de dados acerca do problema), **Abstração** (processos de formulação dos Modelos Matemáticos); **Resolução** (obtenção do Modelo Matemático proposto); **Validação** (teste do Modelo Matemático obtido) e **Modificação** (reformular e melhorar o Modelo Matemático previamente elaborado).

A etapa de **Experimentação** diz respeito a uma atividade essencialmente laboratorial, na qual ocorre a obtenção dos dados relacionados com o problema proposto. Nessa etapa, é apontado que a participação de um matemático pode, em muitos casos, ser facilitadora para o cálculo dos parâmetros relacionados ao futuro Modelo Matemático, uma vez que a utilização de métodos estatísticos pode conferir maior grau de confiabilidade aos dados obtidos (BASSANEZI, 2002).

Durante o processo de **Abstração**, o autor estabelece quatro estágios para a formulação do Modelo Matemático: *Seleção das variáveis*; *Formulação dos problemas teóricos*; *Formulação das hipóteses* e *Simplificação*.

No estágio de *Seleção das variáveis* é feita a distinção das variáveis de estado que descrevem a evolução do fenômeno estudado e das variáveis de controle que atuam nesse fenômeno (BASSANEZI, 2002).

Para a *Formulação do problema teórico* faz-se necessário a criação de um enunciado claro, compreensível e operacional, que esteja de acordo com a linguagem própria da área que é trabalhada. Com isso, esse *problema* pode ser visto como uma questão científica, desde que explicite a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos no fenômeno em questão (BASSANEZI, 2002).

Ao tratar da *Formulação das hipóteses* o autor destaca que a analogia entre sistemas é fundamental para o desenvolvimento de modelos e aponta que “dois sistemas são formalmente análogos quando podem ser representados pelo mesmo Modelo Matemático, o que implica numa correspondência entre as propriedades dos elementos de ambos os sistemas”. Com isso, a montagem do modelo matemático, que ocorre nesta fase do processo de modelagem, depende substancialmente do grau de complexidade das hipóteses e da quantidade das variáveis inter-relacionadas (BASSANEZI, 2002).

Durante o desenvolvimento dessas hipóteses, Bassanezi (2002) ratifica que são estas que dirigem a investigação e que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas acerca de determinado fenômeno, portanto as hipóteses devem incorporar parte da teoria que podem ser testadas e, com isso, são potenciadoras do processo científico.

Por fim, na *Simplificação* é quando se analisa o problema matemático desenvolvido a partir do Modelo criado e que, em diversas ocasiões, percebe-se que este é de tal complexidade que seu estudo se torna inviável. Neste caso, deve-se retornar ao problema original, na tentativa de restringir as informações incorporadas ao Modelo de modo que, nem descaracterize totalmente o problema original, mas também resulte em um problema matemático acessível (BASSANEZI, 2002).

Concluídos os quatro estágios dessa etapa, parte-se para a **Resolução**, onde o Modelo Matemático finalmente é obtido, uma vez que finalmente é feita a passagem da linguagem natural das hipóteses para uma linguagem matemática coerente e tratável. Com isso, espera-se que os fenômenos estudados, a depender de quais sejam, possam ser interpretados, por exemplo, através de equações. Vale ressaltar que, em certos casos, o uso de métodos computacionais pode facilitar a resolução de Modelos muito complexos, viabilizando seu uso para a situação proposta (BASSANEZI, 2002).

Em seguida, é realizada a **Validação**, etapa em que os Modelos elaborados e as hipóteses desenvolvidas a partir deles serão testados, por meio do confronto com os dados empíricos, onde é feita a comparação das soluções e previsões obtidas no Modelo, com o obtido na realidade. Um Modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram, mas um bom Modelo será aquele capaz de prever novos fatos ou relações previamente desconhecidas. A aceitação do Modelo desenvolvido ainda depende bastante de fatores que condicionaram o modelador durante o seu processo de modelagem, como seus objetivos e recursos disponíveis, portanto é algo que deve ser analisado a partir de diversos aspectos (BASSANEZI, 2002).

Finalmente, parte-se para a etapa de Modificação, que consiste na reformulação e melhora do Modelo Matemático previamente elaborado. Esse processo deve ocorrer, como aponta Bassanezi (2002), por conta de que nenhum Modelo deve ser considerado definitivo, este sempre pode ser melhorado e ainda adaptado para diversos contextos. Dessa forma, evidencia-se que um bom Modelo Matemático é aquele que possibilita a formulação de novos modelos, visto que essa reformulação é uma das partes fundamentais do processo de Modelagem.

Vale ainda destacar que esse processo de desenvolvimento, teste e ajuste do Modelo Matemático pode contribuir com o desenvolvimento de técnicas e teorias matemáticas, que vão além do fenômeno estudado, o que evidencia a importância da Modelagem dentro do campo da Matemática como um todo (BASSANEZI, 2002).

A partir disso, será discutida a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino, evidenciando argumentos favoráveis à inserção dessa metodologia durante o processo de ensino e aprendizagem, bem como alguns obstáculos que podem ser encontrados durante essa prática, além das etapas para desenvolver a Modelagem Matemática em sala de aula.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSINO

Burak e Kluber (2013) tratam que a Modelagem Matemática, no âmbito da Educação Matemática pode ser utilizada para evidenciar que a Matemática, seu e ensino e aprendizagem, como apontado por Miguel (2004 *apud* Burak e Kluber 2013), são uma prática social, uma vez que, ao utilizar a essa metodologia, faz-se possível se envolver com uma comunidade de alunos, desenvolver um conjunto de ações que amplia o espaço da sala de aula, e ainda se orientar por princípios que envolvem o interesse e a visão antropológica, juntamente com a possibilidade de construir conhecimentos matemáticos e até interdisciplinares.

Somado a isso, Bassanezi (2002) destaca a importância da inclusão de aspectos ligados a chamada *Matemática Aplicada* durante o processo de ensino e aprendizagem, e não uma exclusividade ou preferência a dita *Matemática Pura*, como ocorria, por exemplo, com os matemáticos gregos que “consideravam o ‘cálculo’ uma ferramenta popular e se isolavam em comunidades secretas para discutirem a ‘verdadeira matemática’”. A evolução da Educação Matemática contribuiu para a inserção desses parâmetros ligados a aplicação da Matemática, a exemplo da Resolução de Problemas e da Modelagem e, com isso, Bassanezi (2002) discorre sobre alguns argumentos favoráveis a essa integração.

Ao trabalhar com metodologias ligadas às aplicações da matemática, tal qual a habilidade de resolver situações-problema e modelar matematicamente um fenômeno, é possível trabalhar com alguns aspectos em sala de aula: o *desenvolvimento de atitude* nos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas; o preparo dos alunos para se tornarem *cidadãos atuantes na sociedade*, capazes de formar juízo próprio e entender exemplos representativos de aplicações que envolvam conceitos matemáticos no cotidiano; a formação de um discente capaz de utilizar a matemática como ferramenta para *resolver problemas em diferentes situações*, mesmo os que envolvam outras áreas do conhecimento; desenvolve um senso no estudante de *entender e interpretar a própria matemática* em diversos níveis; facilitam ao aluno a *compreensão dos argumentos matemáticos*, bem como guardar conceitos e resultados presentes nessa área; e ainda, por estar presente no Programa de Etnomatemática proposto por D’Ambrósio (1990, 1993 *apud* Bassanezi 2002), essa metodologia é *capaz de se adequar as diversas realidades socioculturais* (BASSANEZI, 2002).

Além disso, o autor aponta que existem alguns obstáculos para a implementação da Modelagem Matemática em sala de aula de cursos regulares, e destaca três principais: a existência de um ‘programa’ que deve ser cumprido nesses cursos regulares e, como a modelagem pode ser um processo demorado, tem-se o receio de *não ser possível concluir todo o programa planeado*; o fato da *modelagem ser algo que os alunos não estão familiarizados*, uma vez que foge ao ensino tradicional no qual eles se acostumaram ao longo dos anos e, por conta disso, pode não ser aceita ou compreendida por alguns deles; e ainda, em muitos casos, *a falta de habilidade do professor em utilizar a modelagem*, seja por falta de conhecimento sobre sua utilização ou até por medo de vivenciar algo que foge do tradicional.

A partir do exposto, Bassanezi (2002) discorre que, mesmo com esses desafios, é possível inserir a Modelagem Matemática como uma estratégia para o ensino e aprendizagem de Matemática, e que está trará benefícios tanto aos discentes quanto aos docentes, se utilizada corretamente. No que tange o desenvolvimento da Modelagem Matemática em sala de aula Burak (1998, 2004 *apud* Burak e Kruber 2013) aponta cinco etapas a serem seguidas: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e análise crítica das soluções.

Para a **escolha do tema** o professor deve fomentar com os alunos discussões acerca do tema sugerido, que geralmente envolvem brincadeiras, esportes, atividades econômicas ou comerciais, prestação de serviços, entre outros interesses dos estudantes. Durante essa discussão, faz-se necessário que o docente tenha uma participação ativa, no sentido de apresentar aspectos relacionados ao tema, contrapontos, solicitar argumentos, opiniões e pontos de vista dos estudantes, a fim de torna-los engajados na discussão. Ao despertar esse interesse no tema, parte-se para a próxima etapa (BURAK e KRUBER, 2013).

O momento da **pesquisa exploratória** é aquele em que os alunos devem buscar conhecer mais sobre as diversas realidades envolvidas no tema que foi escolhido para estudo. Essa busca pode ser feita tanto por meio de livros e de forma *online*, quanto de forma presencial, com o professor acompanhando os estudantes até uma Companhia de Água e Saneamento, por exemplo, ou os alunos indo por conta própria até um supermercado ou comércio (locais esses que dependem, obviamente, do tema que foi selecionado para a pesquisa). Os autores ressaltam que nem sempre será possível realizar essa busca fora do ambiente escolar ou até mesmo fora da sala de aula, em virtude das normas e estrutura da instituição de ensino, por conta disso é importante que o professor seja capaz de se adequar tanto a realidade da escola quanto dos seus alunos.

Na etapa do **levantamento dos problemas** deve-se analisar os dados coletados durante a pesquisa exploratória e, a partir deles, elaborar problemas ou situações-problema que estejam inteiramente ligadas com esses dados, e que possam ser resolvidas com o auxílio deles. Burak e Kruber (2013) destacam ainda que essa problematização pode ser utilizada como um ponto de partida da Modelagem Matemática, em especial no Ensino Médio e ainda evidenciam que a criação dos problemas, atribuição de significado aos dados coletados, a elaboração de questões ou situações-problema devem ser todas de percepção, apreensão e assimilação da realidade construída pelos estudantes.

Ao partir para a **resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema** tem-se que os conteúdos matemáticos que serão trabalhados dependerão dos problemas desenvolvidos e, na Modelagem Matemática, esse é um momento de suma importância, uma vez que possibilita o estudo da Matemática de forma mais significativa para os alunos. Nessa etapa ainda é possível construir um Modelo Matemático relacionado com o assunto estudado, mesmo que a prioridade seja a construção do conhecimento matemático, mas essa pode ser “uma oportunidade de não apenas usar os conteúdos trabalhados ou construir novos conteúdos e conceitos, mas, ainda, de desenvolver e contemplar perspectivas da Matemática como Ciência, como formadora de pensamento lógico matemático, bem como de algumas de suas aplicações” (BURAK e KRUBER, 2013).

Por fim, na **análise crítica das soluções** é quando pode-se discutir tanto os aspectos matemáticos dos problemas solucionados, como também os fatores sociais, culturais, econômicos, políticos e históricos (entre outros) relacionados ao tema que foi trabalhado. Os autores apontam que, com a Modelagem Matemática, o professor tem o seu papel redefinido no processo de ensino e aprendizagem, pois ele passa a ser um mediador do conhecimento matemático, além de promover discussões e articular situações que ocorram durante o processo de modelagem, e ainda orientar os possíveis caminhos que podem ser seguidos pelos estudantes. Esses “novos” papéis acabam por descentralizar o professor do processo, mas sim destaca os alunos e o próprio caminhar até a construção do conhecimento.

Feita essa explanação acerca do uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, partiremos para a apresentação de uma atividade que envolva a modelagem matemática, relacionada com as diferentes embalagens de produtos que são utilizados diariamente pelas pessoas, para compreender como é feita a escolha dos materiais que elas são feitas, o preço de custo desses materiais, seu formato e até como pode ser feito o transporte dos produtos já embalados

4. ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Quando vamos ao supermercado, para realizar as compras do mês, existe algo que é comum a quase todo produto que compramos: a embalagem. Como a grande maioria dos produtos que são ofertados hoje em dia são industrializados, todos eles são armazenados em embalagens para que sejam transportados de forma adequada até o consumidor final. Entretanto, você já reparou que as embalagens apresentam algumas diferenças: alguns produtos possuem embalagens “quadradas” e outros embalagens “redondas”; alguns produtos são armazenados em embalagens de alumínio, outros de plástico e até mesmo embalagens de papel; e ainda existem situações que um mesmo produto, de uma mesma marca, pode apresentar dois tipos de embalagem, a depender da quantidade de produto armazenada.

De acordo com uma matéria publicada pelo Mural Científico em 2017, existe um trabalho científico por trás da escolha do formato e da composição das embalagens, que vai desde baratear custo final do produto e transporte, até em considerar qual material evita contaminações ao produto embalado. Os formatos mais comuns utilizados são os paralelepípedos (caixas) e os cilindros (latas).

Os paralelepípedos são interessantes para serem utilizados quando a embalagem for constituída do chamado material cartonado (uma composição que utiliza mais de 70% de papel-cartão, polímeros e uma fina folha de alumínio), uma vez que esse formato facilita o armazenamento de grande quantidade para transporte e o material cartonado não tem um custo elevado. Já as embalagens cilíndricas, que geralmente são feitas de alumínio ou vidro, fazem uso desse formato pelo fato de serem compostas por um material muito mais caro que o cartonado, então é necessário utilizar um formato que gaste menos material, mas que apresente a mesma capacidade interna.

Nos quadros a seguir, serão mostradas algumas características das embalagens de diversos produtos, como a sua composição, suas medidas aproximadas e sua capacidade interna.

Quadro 1: embalagens prismáticas de material cartonado

Embalagens com formato de paralelepípedos feitas de material cartonado				
Produto	**Capacidade**	**Comprimento**	**Largura**	**Altura**
Leite	1 Litro	9,2 cm	6,3 cm	17,5 cm
Achocolatado	200 ml	6,4 cm	4,2 cm	8,4 cm
Creme de leite	200 g	6,6 cm	4 cm	8,6 cm
Leite condensado	395 g	6,6 cm	4 cm	12,1 cm
Suco de laranja	1 Litro	9,16 cm	7,72 cm	21,56 cm

Fonte: acervo do autor (2023)

Quadro 2: embalagens cilíndricas de alumínio

Embalagens com formato de cilindro feitas de alumínio				
Produto	**Capacidade**	**Comprimento**	**Largura**	**Altura**
Refrigerante	350 ml	6,6 cm	6,6 cm	12,2 cm
Cerveja	330 ml	6,6 cm	6,6 cm	10,8 cm
Energético	473 ml	6 cm	6 cm	18,5 cm
Creme de leite	300 g	7,5 cm	7,5 cm	8,3 cm
Leite condensado	395 g	6,8 cm	6,8 cm	10 cm

Fonte: acervo do autor (2023)

Quadro 3: embalagens cilíndricas de vidro

Embalagens com formato de cilindro feitas de vidro				
Produto	**Capacidade**	**Comprimento**	**Largura**	**Altura**
Cerveja	600 ml	7,3 cm	7,3 cm	28,64 cm
Champanhe	750 ml	8,6 cm	8,6 cm	30 cm
Vinho	750 ml	7 cm	7 cm	31,5 cm
Extrato de tomate	190 g	6,5 cm	6,5 cm	8,5 cm
Café solúvel	130 g	8,05 cm	8,05 cm	15,25 cm

Fonte: acervo do autor (2023)

Vamos ainda considerar que as embalagens dos produtos listados, apresentem os seguintes custos para a produção: cada embalagem de material cartonado custa R$ 0,25, cada lata de alumínio custa R$ 0,15 e cada garrafa de vidro custa R$ 0,30.

Com base nos dados apresentados, discutiremos as seguintes questões: Qual o preço aproximado do m² de cada material utilizado nas embalagens? Utilizar uma lata de alumínio com formato esférico para embalar o refrigerante gastaria a mesma quantidade de material? Existem alimentos que não podem ser armazenados em determinados tipos de embalagem? Que tipo de impactos ambientais os materiais utilizados na confecção das embalagens podem causar ao planeta?

Para responder esses questionamentos, iremos modelar matematicamente a situação apresentada, e discutir os processos para sua resolução.

5. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Neste tópico será discutido algumas possíveis estratégias que podem ser utilizadas pelo docente em sala de aula durante o desenvolvimento da atividade proposta. Essas estratégias estão relacionadas com os estágios necessários para desenvolver a Modelagem Matemática apontadas por Burak (1998, 2004 *apud* Burak e Kruber 2013) e discutidas previamente. Com isso, as etapas aqui retratadas serão: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e análise crítica das soluções.

Na fase da **escolha do tema** percebe-se que este já foi estabelecido pela própria atividade, então pode não ser interessante direcionar a discussão em sala para outros assuntos. Entretanto, é primordial que o professor instigue os alunos a discutir sobre o tema tratado, com questionamentos do tipo “quais tipos de embalagens vocês encontram em casa?” ou ainda “já perceberam que algumas bebidas são embaladas em garrafas PET e outras nunca são? Por que será que isso acontece?”. Dessa forma, o interesse dos estudantes pelo tema pode aumentar, o que favorece o desenvolvimento da atividade.

Ao partir para a **pesquisa exploratória** é fundamental que o docente direcione os discentes a buscar informações que poderão ser úteis para resolver os problemas propostos. Nessa etapa ainda pode ser interessante o professor apresentar alguns conceitos matemáticos que serão úteis para a pesquisa, como as definições de paralelepípedo e cilindro, que estão presentes nos quadros; como realizar o cálculo das áreas de um sólido, que deverá ser utilizada para responder ao problema “Qual o preço aproximado do m² de cada material utilizado nas embalagens?”; e ainda como realizar a conversão de centímetros para metros, que também será necessária para resolver esse questionamento.

A etapa do **levantamento dos problemas** não pode ser deixada de lado, mesmo que as questões já estejam pré-definidas na atividade. Nesse momento é possível discutir com os alunos outros questionamentos que eles tenham acerca do assunto, e mostrar que não é preciso ficar “preso” apenas aos problemas apresentados na atividade, que numa situação do cotidiano podem surgir novos problemas e discussões à medida que se tenta resolver o que foi proposto inicialmente. Vale ainda ressaltar que, caso surja uma dúvida que pode ser utilizada como incentivo para temas futuros, é possível guardá-la para uma discussão posterior.

Para desenvolver a **resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema** faz-se necessário, como mencionado previamente, utilizar conhecimentos de Geometria Espacial, a exemplo das definições de paralelepípedo e cilindro, bem como as fórmulas para calcular suas respectivas áreas. A seguir apresentamos orientações para resolver o problema "*Qual o preço aproximado do m² de cada material utilizado nas embalagens?".*

Para calcular esse preço é necessário, primeiramente, saber a quantidade de material utilizada para construir cada embalagem e, para isso, deve-se calcular a área total de cada embalagem, utilizando as seguintes fórmulas:

$$\text{Á}\boldsymbol{rea\ do\ Paralelep}\text{í}\boldsymbol{pedo} = 2(comp * larg) + 2(comp * altura) + 2(larg * altura)]$$

$$\text{Á}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = \left(2 * \pi * \left(\frac{comp}{2}\right)^2\right) + \left(2 * \pi * \frac{larg}{2} * altura\right)$$

Esse é um bom momento para discutir essas fórmulas e suas utilidades, bem como esclarecer algumas observações, como por exemplo, o fato dos recipientes cilíndricos apresentarem sempre a mesma largura e mesmo comprimento, o que ocorre por eles possuírem uma base circular, logo tanto a largura quanto o comprimento funcionam como diâmetro e, portanto, faz necessário utilizar nas fórmulas apenas a metade desse valor, que seria o raio das bases do cilindro.

A partir disso, deve-se realizar o cálculo da área de cada embalagem. Nessa etapa, recomenda-se permitir o uso de calculadora por parte dos alunos. Os resultados das áreas das embalagens com formato de paralelepípedo estão apresentados no quadro abaixo.

Quadro 4: área das embalagens prismáticas de material cartonado

Área das embalagens com forma de paralelepípedo				
Produto	**Comprimento**	**Largura**	**Altura**	**Área**
Leite	9,2 cm	6,3 cm	17,5 cm	658,42 cm²
Achocolatado	6,4 cm	4,2 cm	8,4 cm	231,84 cm²
Creme de leite	6,6 cm	4 cm	8,6 cm	235,12 cm²
Leite condensado	6,6 cm	4 cm	12,1 cm	309,32 cm²
Suco de laranja	9,16 cm	7,72 cm	21,56 cm	869,296 cm²

Fonte: acervo do autor (2023)

Em seguida, deve-se realizar a conversão da unidade das áreas encontradas, para que elas possam ser expressas em metros quadrados, como solicitado na questão. Para isso, basta dividir os valores encontrados por 10.000:

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ embalgem\ de\ Leite} = \frac{658{,}42}{10000} = 0{,}065842\ m^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ embalgem\ de\ Achocolatado} = \frac{231{,}84}{10000} = 0{,}023184\ m^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ embalgem\ de\ Creme\ de\ leite} = \frac{235{,}12}{10000} = 0{,}023512\ m^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ embalgem\ de\ Leite\ condensado} = \frac{309{,}32}{10000} = 0{,}030932\ m^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ embalgem\ de\ Suco\ de\ laranja} = \frac{869{,}296}{10000} = 0{,}0869296\ m^2$$

Por fim, para calcular o preço do m² do material cartonado, é necessário dividir valor total gasto na embalagem, que para esse caso é de R$0,25, pelo valor da área total de cada embalagem:

$$\boldsymbol{Valor\ do\ m^2\ da\ embalgem\ de\ Leite} = \frac{0{,}25}{0{,}065842} = R\$\ 3{,}7969$$

$$\boldsymbol{Valor\ do\ m^2\ da\ embalgem\ de\ Achocolatado} = \frac{0{,}25}{0{,}023184} = R\$\ 10{,}7833$$

$$\boldsymbol{Valor\ do\ m^2\ da\ embalgem\ de\ Creme\ de\ leite} = \frac{0{,}25}{0{,}023512} = R\$\ 10{,}6328$$

$$\boldsymbol{Valor\ do\ m^2\ da\ embalgem\ de\ Leite\ condensado} = \frac{0{,}25}{0{,}030932} = R\$\ 8{,}0822$$

$$\boldsymbol{Valor\ do\ m^2\ da\ embalgem\ de\ Suco\ de\ laranja} = \frac{0{,}25}{0{,}0869296} = R\$\ 2{,}8759$$

Dessa forma, observa-se que diferentes embalagens, que são produzidas com o mesmo material, apresentam um custo por m² diferente, a depender do tamanho da embalagem. Para calcular o valor das outras embalagens, deve-se realizar um processo análogo: calcular a área da embalagem, dividir esse valor encontrado por 10.000 e, por fim, dividir o valor da embalagem pelo valor da área em metros quadrados.

A seguir, para discutir o problema *“Utilizar uma lata de alumínio com formato esférico para embalar o refrigerante gastaria a mesma quantidade de material?”* é preciso apresentar as fórmulas utilizadas para calcular o volume do cilindro e da esfera, bem como o cálculo da área da esfera:

$$\boldsymbol{Volume\ do\ Cilindro} = \pi * \left(\frac{comp}{2}\right)^2 * altura$$

$$\boldsymbol{Volume\ da\ Esfera} = \frac{4}{3} * \pi * \left(\frac{comp}{2}\right)^3$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} = 4 * \pi * \left(\frac{comp}{2}\right)^2$$

Deve-se, inicialmente, calcular o volume da lata de refrigerante, pois a esfera precisará ter o mesmo volume, para comportar a mesma quantidade de refrigerante da lata:

$$\boldsymbol{Volume\ do\ Cilindro} = \pi * \left(\frac{6{,}6}{2}\right)^2 * 12{,}2$$

$$\boldsymbol{Volume\ do\ Cilindro} = 3{,}14 * 3{,}3^2 * 12{,}2$$

$$\boldsymbol{Volume\ do\ Cilindro} = 3{,}14 * 10{,}89 * 12{,}2$$

$$\boldsymbol{Volume\ do\ Cilindro} = 417{,}17412\ cm^3$$

Portanto, a esfera deverá ter o volume de 417,17412 cm³, então utiliza-se esse valor para calcular o comprimento da esfera (lembrando que, por se tratar de uma esfera, seu comprimento, largura e altura são igual, então é possível calcular qualquer um deles):

$$\boldsymbol{Volume\ da\ Esfera} = \frac{4}{3} * \pi * \left(\frac{comp}{2}\right)^3$$

$$417{,}17412 = \frac{4}{3} * 3{,}14 * \left(\frac{comp}{2}\right)^3$$

$$417{,}17412 = \frac{12{,}56}{3} * \frac{comp^3}{8}$$

$$417{,}17412 = \frac{12{,}56 * comp^3}{24}$$

$$comp^3 = \frac{417{,}17412 * 24}{12{,}56}$$

$$comp^3 = 797{,}148$$

$$comp = 9{,}2721\ cm$$

Com isso, a esfera precisa ter um comprimento de 9,2721 cm para armazenar a mesma quantidade de refrigerante que a lata, então parte-se para calcular sua área, e assim saber a quantidade de material que seria utilizada na sua confecção:

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} = 4 * \pi * \left(\frac{9{,}2721}{2}\right)^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} = 4 * 3{,}14 * 4{,}63605^2$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} = 12{,}56 * 21{,}493$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} = 269{,}95208\ cm^2$$

Dessa forma, uma “latinha” esférica, para ser fabricada, utilizaria 269,95208 cm². Para finalmente saber se essa quantidade de material é menor ou maior que a necessária para latinha convencional, basta observar a área da embalagem de refrigerante que foi calculada na questão anterior:

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = \left(2 * \pi * \left(\frac{6{,}6}{2}\right)^2\right) + \left(2 * \pi * \frac{6{,}6}{2} * 12{,}2\right)$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = (2 * 3{,}14 * 3{,}3^2) + (2 * 3{,}14 * 3{,}3 * 12{,}2)$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = (12{,}56 * 10{,}89) + (6{,}28 * 40{,}26)$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = 136{,}7784 + 252{,}8328$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ Cilindro} = 389{,}6112\ cm^2$$

Por fim, conclui-se que a suposta latinha esférica, com a capacidade de armazenar o mesmo volume que uma latinha cilíndrica, poderia ser construída com muito menos material. Essa conclusão pode gerar ainda um novo questionamento: “Por que não são utilizadas embalagens esféricas?”.

Essas são algumas sugestões que podem nortear as resoluções das duas primeiras questões propostas. No que diz respeitos aos problemas “*Existem alimentos que não podem ser armazenados em determinados tipos de embalagem?”* e *“Que tipo de impactos ambientais os materiais utilizados na confecção das embalagens podem causar ao planeta?”*, esses são questionamentos que vão além de conteúdos matemáticos, pois já trabalham, por exemplo, a composição química das embalagens e como podem afetar os alimentos, além de discutir temas como meio ambiente e sustentabilidade. Portanto, são problemas que oferecem a possibilidade de trabalhar com a interdisciplinaridade, que é um dos caminhos possíveis ao se trabalhar a Modelagem Matemática.

Finalmente, inicia-se a **análise crítica das soluções**, momento no qual será discutido os aspectos matemáticos que foram trabalhados durante a resolução dos problemas e sua formalização que, neste caso, diz respeito as fórmulas de área e volume de sólidos, e ainda, como foram levantadas questões que vão além do campo da Matemática, é possível analisar fatores econômicos, ambientais e até de saúde nos diferentes tipos de embalagens utilizados pelas empresas. Para esse tipo de discussão seria interessante, se possível, contar com a presença de mais um professor, de uma disciplina como química ou biologia, para que ele possa contribuir com informações relacionadas a outra área do conhecimento, mas que ainda sim esteja relacionada com o tema proposto.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo propor uma atividade de Modelagem Matemática, na qual o intuito era modelar o gasto de material para produzir diferentes embalagens de alimentos, com o auxílio das noções de Geometria Espacial.

Diante do exposto, espera-se que os professores de matemática que tiveram acesso a esse material possam refletir sobre a utilização de novas metodologias de ensino de Matemática, que vão além do ensino tradicional comumente utilizado em sala de aula.

A metodologia destacada nesse ensaio foi a Modelagem Matemática, onde tratamos algumas de suas linhas de pensamento no Brasil, estabelecemos um referencial teórico principal para discutir as etapas da Modelagem, e apresentamos como seu uso em sala de aula é tratado pelos pesquisadores do assunto. Esses estágios da Modelagem são de suma importância, pois ao segui-los é possível desenvolver um maior interesse dos alunos ao trabalhar determinados temas, e assim oferecer maior significado aos conteúdos matemáticos que serão associados a essas problemáticas.

Com isso, espera-se que a atividade proposta possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em especial para as noções de Geometria Espacial trabalhadas nas situações problemas que envolveram os materiais utilizados para confeccionar embalagens de alimentos.

REFERÊNCIAS

A anatomia de embalagens cartonadas da Tetra Pak®. **Tetra Pak**. Disponível em: <https://www.tetrapak.com/pt-br/solutions/packaging/packaging-material/materials>. Acessado em: 20/12/2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256007243>. Acessado em: 07/12/2023.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação matemática em Revista-SBEM/RS**, pp. 49-57, 2001. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/27375/>. Acessado em: 07/12/2023.

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170697>. Acessado em: 07/12/2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acessado em: 07/12/2023.

BURAK, Dionísio; KLUBER, Tiago Emanuel. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. **Revista Margens Interdisciplinar**, v. 7, n. 8, p. 33-50, 2013.

MENEZES, Rhômulo Oliveira. Modelagem Matemática no Ensino de Geometria: uma situação-problema utilizando o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 12, n. 3, p. 123-132, 2023. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/62283>. Acessado em: 07/12/2023.

Por que a garrafa de bebida é redonda, a caixa de leite é quadrada? **Shenzhen Zhenghao Plastic & Mold**, 2017. Disponível em: <https://www.plasticbottlesupplier.com/pt/news/Why-beverage-bottles-are-usually-round-and-milk-box-are-square.html#:~:text=H%C3%A1%20muitas%20raz%C3%B5es%3A%20garrafas%20redondas,isso%20pode%20economizar%20muito%20dinheiro>. Acessado em: 20/12/2023.

Por que caixas de suco são quadradas e latas de refrigerante são cilíndricas? **Mural Científico**, 2017. Disponível em: <https://muralcientifico.com/2017/11/05/por-que-caixas-de-suco-sao-quadradas-e-latas-de-refrigerante-sao-cilindricas/>. Acessado em: 20/12/2023.

Preço das latas de alumínio. **Mundo Latas**, 2022. Disponível em: <https://mundolatas.com/pt-br/precos-das-latas-de-aluminio/>. Acessado em: 20/12/2023.

Quanto custa uma embalagem Tetra Pak? **Auditório Ibirapuera**, 2023. Disponível em: <https://www.auditorioibirapuera.com.br/quanto-custa-uma-embalagem-tetra-pak/>. Acessado em: 20/12/2023.

CURRÍCULO DOS AUTORES

Lucas Valois Leal de Oliveira

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará, campus de Ciências Sociais e Educação. Atualmente participante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará intitulado Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Fábio José da Costa Alves

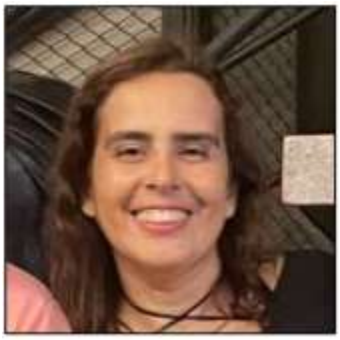
Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará, Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará, graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará. Possui Doutorado e Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Docente do Mestrado em Educação/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias. Experiência em desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática.

Roberto Paulo Bibas Fialho

Possui graduação em Arquitetura e Urbanismo pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), graduação em Educação Artística do 1 Grau pela Universidade Federal do Pará (1993), graduação em Educação Artística Licenciatura Plena pela Universidade Federal do Pará (1994) e mestrado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1998). É artista plástico e especialista em educação pela UNAMA (1994) e em design de móveis pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (2006). Desenvolve atividades como professor adjunto na Universidade do Estado do Pará e professor titular da Faculdade de Estudos Avançados do Estado do Pará - FEAPA, atuando principalmente nos seguintes temas:

metodologia científica, educação matemática, psicologia e composição visual, arquitetura e design gráfico. Desenvolveu tese doutoral intitulada "A MATEMÁTICA DO SENSÍVEL PELAS MÃOS DO ARTESÃO: Marcas da aprendizagem matemática e da cultura material dos ceramistas de Icoaraci" (2013), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), pertencente à Universidade Federal do Pará. Atuou como coordenador de TCC no Curso de Bacharelado em Secretariado Executivo Trilíngue da UEPA do ano 2013 a 2018, onde atualmente integra o colegiado deste curso. É também membro do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do CCSE/UEPA, ministrando a disciplina Metodologia da Pesquisa em Ensino de Matemática e atuando como colaborador na disciplina Modelagem Matemática.

Cinthia Cunha Maradei Pereira



Possui graduação em Licenciatura em Matemática e em Tecnologia em Processamento de Dados, especialização em Informática Médica, Mestrado em Ciências da Computação e Doutorado em Genética e Biologia Molecular (Bioinformática). Atualmente é Professora da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e vice-líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias. Participa do desenvolvimento de tecnologias aplicadas ao ensino de Matemática