2022

UFMT

MODELO DE BARRAS
Disparador de multiestratégias para resolução de problemas

Versão do Professor

STELA MARIS FERRARI STREIT
ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON PEREIRA BARBOSA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA - PPGECM

STELA MARIS FERRARI STREIT
ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON PEREIRA BARBOSA

MODELO DE BARRAS

Disparador de multiestratégias para resolução de problemas

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA – PPGECM

PPGECM

SINOP, MATO GROSSO

2022

Sumário

MODELO DE BARRAS

APRESENTAÇÃO

Caro(a) colega Professor(a),

O livro "**MODELO DE BARRAS disparador de multiestratégias para resolução de problemas"** é um material que foi desenvolvido na pesquisa de mestrado nomeada "Efeitos do modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos" no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática - PPGECM, sob a orientação do professor Dr. Edson Pereira Barbosa. Este material está disponível no site do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM).

O objetivo deste material é contribuir para a ampliação dos processos de ensino e de aprendizagem de resolução dos problemas matemáticos, com a possibilidade de ser inserido junto aos materiais didáticos do professor, a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental.

A intenção deste material, caro colega Professor, não é o de aprofundar conceitos matemáticos e defini-los como prontos e acabados, e sim apresentar o recurso Modelo de Barras como um recurso didático disparador de multiestratégias, que auxilia nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas, proporcionando gradualmente a construção do conhecimento de forma significativa, sendo possível desenvolver o cálculo mental, por meio da modelagem visual.

Para elaborar o livro **MODELO DE BARRAS, disparador de multiestratégias para resolução de problemas**, pesquisas foram realizadas a fim de verificar a existência de trabalhos com esta perspectiva.

Os relatos das pesquisas podem ser lidos na íntegra, na dissertação desta autora intitulada Efeitos do Modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

No processo de elaboração deste livro procuramos produzir um material prático e ilustrativo, para servir de apoio ao uso do recurso modelo de barras na resolução de problemas, a fim de auxiliar os professores que ensinam Matemática, no segundo ciclo do Ensino Fundamental, da Educação Básica.

A sistematização dos problemas abordados neste livro abrange aspectos que se inter-relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem. Logo, as diferentes estratégias pedagógicas apresentadas têm como objetivo servir ao professor, como ferramentas em sua tarefa de ensinar, visto que não são "receitas", mas sugestões de encaminhamentos, pois acreditamos que o ato de ensinar é particular a cada professor(a).

Quanto à estrutura, organizamos este livro em cinco partes, a saber: i) apresentação; ii) informação ao professor; iii) introdução, coleção de problemas para desenvolver atividades em sala de aula; iv) considerações finais e v) atividades complementares.

A coleção de problemas foi organizada conforme o tipo de problema, a saber: i) parte-todo; ii) comparação e; iii) antes-depois. Para solução de cada problema observamos as quatro etapas de Polya (2006) como uma forma eficaz de resolver problemas. São elas: i) a compreensão do problema; ii) o estabelecimento de um plano; iii) a execução do plano e: iv) a reflexão sobre a estratégia de resolução adotada. Nas soluções dos problemas consideramos o uso de materiais didáticos, como materiais concretos, em especial, o Material Dourado. Além disso, as diversas soluções de cada problema percorrem uma sugestão, abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA).

Neste produto educacional tratamos ainda das formas de representação dos números em sistemas de numeração decimal, das quatro operações fundamentais da Matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotadas para resolução de problemas aritméticos.

Destacamos que a resolução de problemas é uma competência que deve ser desenvolvida de forma significativa nos processos de ensino e de aprendizagem. Então, apresentamos o Modelo de Barras como um recurso auxiliar aos professores pela sua utilidade maior, de preparar os alunos a pensar matematicamente, à construção do conhecimento e a saber interpretar problemas de forma paulatina.

Esperamos que você, caro colega Professor(a), a partir desse texto, se inspire a resolver problemas compreendendo: i) como os dados são representados nas barras e como são realizadas as operações neste modelo; ii) conhecer e aplicar multiestratégias para a solução de certos problemas; e iii) estimar, analisar e propor soluções para minimizar erros ou mesmo, quando possível, eliminá-los.

Especificamente, em relação ao erro cometido em um problema matemático, este não deve ser visto de forma a condenar totalmente a resolução do exercício, mas, tão somente, a parte inerente concernente ao erro de uma forma subjetiva.

Profa. Ma. Stela Maris Ferrari Streit

INFORMAÇÕES AO PROFESSOR

Para encontrarmos respostas a nossa questão - Quais os efeitos do Modelo de Barras na resolução de problemas matemáticos apontados pelos professores no segundo ciclo do Ensino Fundamental? – elaboramos, em colaboração com os professores que ensinam Matemática, participantes da pesquisa, uma coleção de problemas que consideramos existentes nos livros didáticos de 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, para a prática ou modo de exercer a resolução de problemas, adotando como suporte os estudos de Polya (2006), dando origem ao produto educacional à disposição, de todos os interessados no Modelo de Barras.

O livro está organizado em 3 (três) blocos conforme os tipos de problemas matemáticos, compostos por 5 (cinco) problemas cada, onde são descritos passo a passo, de acordo com as etapas de Polya (2006).

Além disso, aborda situações-problemas, permitindo a aplicação do Modelo de Barras, juntamente a realização de exercícios, trabalhando fundamentalmente conteúdos procedimentais (uso dos algoritmos), conteúdos conceituais (compreensão dos conceitos), bem como atitudinais (diálogos entre alunos e professor).

Em cada um dos 5 (cinco) problemas de cada bloco, procuramos apresentar diferentes abordagens a fim de resolver e ensinar suas resoluções. Além do Modelo de Barras, pontuamos situações em que os problemas podem ser resolvidos utilizando o Material Dourado, Ábaco ou outro recurso pedagógico.

Professor, antecipando seu possível questionamento sobre como avaliar o aprendizado construído pelo estudante, após contato com o Modelo de Barras, elaboramos uma **Ficha Avaliativa** que se encontra no final deste livro, nela podemos registrar os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras em sua sala de aula, ficando a seu critério modificá-la.

INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática, de modo que os alunos aprendam, não é tarefa fácil!

Então, caro colega Professor(a), convido-te a ampliar seu repertório por meio desta singela obra, pensada e elaborada com esmero, como forma também de comunicarmos, mesmo informalmente.

Para que se compreenda melhor esse processo, faz-se necessário considerar a relevância em aprender Matemática por meio do Modelo de Barras para resolver problemas, consistindo um recurso pedagógico versátil e ao mesmo tempo prazeroso, acabando por desmistificar a monstruosidade detrás da Matemática, possibilitando o aprendizado matemático por um caminho simples sem complexidade.

Das competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o procedimento que toma destaque é a **resolução de problemas,** devido sua abordagem metodológica para o ensino da Matemática, uma vez que, no ambiente da sala de aula desenvolvem-se habilidades essenciais para o futuro dos estudantes.

Este material permite experimentos a partir do recurso Modelo de Barras com a prática de resolver problemas da Matemática Escolar, permitindo ao professor o planejamento e o desenvolvimento da aula de modo a fomentar nos seus alunos a curiosidade, imaginação, criatividade, argumentação e a participação nas aulas, fazendo-os sujeitos ativos e protagonistas nos processos de aprendizagem.

A escolha do Material Dourado, como principal apoio utilizado nas propostas de soluções dos problemas deste produto educacional, apresenta-se como recurso concreto e manipulativo para a compreensão do Sistema Numeração Decimal (SND), ressalvando sua adequação para a utilização, em conjunto, com o restante dos materiais pedagógicos.

A Matemática é um componente curricular considerado abstrato. Assim, o Material Dourado tem o potencial de possibilitar aos alunos, melhor compreensão da aritmética, operações, trocas e agrupamentos matemáticos.

Aprender Matemática demanda amadurecimento cognitivo e prática, por isso alguns componentes são essenciais para o desenvolvimento das habilidades (cálculo, manipulação algébrica, visualização espacial, análise de dados, medidas, uso das ferramentas matemáticas e a estimação) necessárias para a solução dos problemas matemáticos.

O recurso Modelo de Barras concentra no desenvolvimento de compreensão dos conceitos (numéricos, algébricos, geométricos, estatísticos, probabilísticos e analíticos) antes de ensinar os procedimentos (raciocínio, comunicação e às conexões, habilidades de pensamento, heurística, aplicações e à determinação de estratégias pedagógicas para a solução dos problemas), utilizando tanto uma abordagem visual e prática, combinação esta que enfatiza melhor entendimento dos números, fortalecendo a solução de problemas.

Assim, são trabalhadas as atitudes como o respeito às crenças, ao interesse, à apreciação, à confiança e à perseverança, de modo que seja possível também o monitoramento dos pensamentos e controle do aprendizado, isto é, à metacognição.

ABORDAGENS CONSIDERADAS

Neste tópico, apresentamos abordagens relativas a resolução de problemas, etapas de Polya para resolver problemas, Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e abordagem “concreta - pictórica – abstrata” (CPA).

Resolução de problemas

Um problema matemático é definido como tal não por sua forma, e sim por sua relação com o nível de conhecimento que o aluno pensa sobre ele, embora uma mesma proposta possa ser um problema para um aluno e não ser para outro.

O problema precisa desafiar os alunos de modo que a resposta não esteja automatizada, sendo necessário investigar possibilidades não aparentes para chegar às soluções. Para tanto, no tocante aos alunos, é preciso recursos suficientes para criar uma solução.

A resolução de problemas está inteiramente ligada à diferença entre apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses, sendo que o uso do recurso Modelo de Barras o aluno consegue fazer uma produção heurística, podendo ser inventor e, ao mesmo tempo, descobridor de respostas findadas de forma autônoma e criativa.

Assim, em um problema das partes de um todo, o aluno será induzido a perceber que se trata de operações com frações, sendo o Modelo de Barras responsável pela visualização dos dados do problema, estando desta forma apto a utilizar sua criatividade para a resolução.

Etapas de Polya para resolver problemas

Em particular, Polya (2006) ao se deparar com as especificidades dos alunos, estes apresentando uma proficiência consideravelmente insatisfatória, tomou como iniciativa criar etapas para resolver problema matemáticos.

De acordo com Polya (2006), seguir as etapas é extremamente importante, pois cada uma tem papel contínuo para a visualização e conexão da estrutura dos dados enunciados no problema. Tal procedimento levará o aluno a ter maiores chances de caminhar rumo ao acerto, estimulando-o a solucionar problemas mais desafiadores.

As 4 (quatro) etapas na resolução de um problema são as seguintes: i) compreensão do problema; ii) estabelecer um plano; iii) execução do plano e iv) retrospecto - reflexão sobre a estratégia de resolução adotada.

Para facilitar o entendimento de cada etapa, foi elaborado o seguinte quadro:

Quadro 1. As quatro etapas de Polya para a resolução de problemas.

Compreensão do Problema	Estabelecer um Plano	Execução do Plano	Retrospecto
Ler o problema com clareza, procurando compreender a situação-problema e desejar resolvê-la.	Buscar por uma estratégia que leve à solução do problema.	Colocar em prática seu plano justificando sua(s) estratégia(s).	Verificar erros em cada passo que foi utilizado como de cálculos e da escolha estratégica.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A importância de cada uma destas etapas mostra-se relevante. Assim, não basta, por exemplo, um aluno obter resultado matemático correto, mas sem conhecer sua interpretação racional.

Modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática

O Modelo de Barras é um recurso para representar graficamente os dados enunciados no problema vinculado à representação pictórica similar das atividades de manipulação de materiais pedagógicos.

A modelagem acontece por meio das barras, ajudando o aluno entender a relação entre os dados numéricos do problema e esquematização da representação visual, de modo que facilita a operacionalização do exercício, a fim de que ele possa resolvê-lo ao seu modo.

Por possuir estrutura lógica e conexa, o Modelo de Barras dirige ao desenvolvimento das habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2017) de forma gradativa, promovendo a construção do conhecimento e aprendizagem significativa.

O Modelo de Barras transige “aprender a aprender”, se estudado e adaptado em sua essência, pois ajuda o aluno na construção de seus pensamentos aritméticos e no desenrolar da transição para a álgebra, uma vez ser uma estratégia que ensina por meio de processo da apreensão perceptiva, visando à visualização, raciocínio e construção.

A abordagem CPA

No período escolar do segundo ciclo (4º, 5º e 6° anos) do Ensino Fundamental é proposto a consolidação do uso de soluções aritméticas e inicia passagem para a álgebra. No entanto, é comum em escolas brasileiras, nos depararmos com situações em que os alunos ainda precisam se apoiar em materiais manipuláveis (concretos) para resolver problemas ou realizar operações.

O desafio do professor ao ensinar matemática reside em como ensinar um aluno tecnológico a fim de prepará-lo para atuar de forma consciente e autônoma na sociedade.

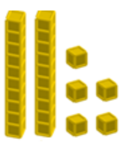
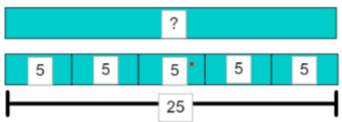
Atualmente, os motivos para ensinar matemática estão nas necessidades práticas de entender e utilizar com proveito as tecnologias modernas, atuar de forma plena no campo do trabalho e nas inúmeras situações do cotidiano, tornando um constante equilíbrio entre a Matemática Formativa e a Matemática Informativa; a primeira mutável, referente a estruturação do pensamento, raciocínio dedutivo e a segunda estável, utilizada em tarefas específicas, voltada para o lado laboral.

O objetivo da abordagem CPA é proporcionar ao aluno a capacidade de resolução de problemas matemáticos com agilidade, “explorando a sua própria forma de pensar, em vez do pensar mecânico, por receita ou memorização” (CABRAL, 2015, p. 2).

O Modelo de Barras integra uma abordagem CPA, pois este procedimento estabelece um estreitamento de lacunas entre o modo de pensar e o de resolver problemas da matemática escolar.

O quadro a seguir elucida melhor entendimento da abordagem CPA:

Quadro 2. Abordagem CPA

Concreto	Pictórico	Abstrato
 ou 		$5 \, x \, 5 = 25$
Materiais manipuláveis ou objetos como florzinhas, carrinhos, bolinhas, bonequinhos, tampinhas, bem como material pedagógico: Ábacos e Material Dourado.	Interpretação e Modelagem do problema por meio da representação com as barras.	Operações matemáticas

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

O uso das tecnologias no ambiente escolar é extremamente eficaz, pois desenvolvem “potencialidades e ao mesmo tempo exercitam o pensamento crítico e a cidadania” (DA SILVA; ANDRADE, 2014, p. 147) dos estudantes, sendo seu uso condizente à realidade destes, uma vez que esse tipo de ferramenta possui abordagem versátil e produtiva, promove no estudante estratégias variadas de resolução e diferentes formas de aprender matemática.

Assim, decidimos investigar o Modelo de Barras em recursos tecnológicos que apoiam o seu uso, destacando o “Thinking Blocks”, disponível em https://www.mathplayground.com/thinking_blocks_modeling_tool/index.html.

O aplicativo pode funcionar em sala de aula de muitas maneiras. Os alunos podem usar o *Thinking Blocks* a qualquer momento, de qualquer dispositivo, como computador, celular ou tablet.

De outra forma, o aplicativo proporciona aos alunos trabalhar em seu próprio ritmo, conhecendo melhor seu aprendizado. Usam experiências de aprendizado baseadas em descobertas. E essas experiências aprofundam, exercitam e enriquecem sua compreensão. Eles recorrem ao seu próprio conhecimento, encontram situações inesperadas, descobrem padrões de respostas, “depuram” erros, adaptam suas estratégias para resolver os problemas e generalizam novos princípios que são transferidos para as novas situações.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL (NÚMEROS E OPERAÇÕES)

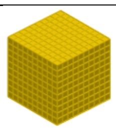
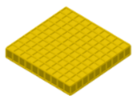
O sistema de numeração decimal recebe esse nome porque usamos a contagem de dez em dez e, também, por seguir o princípio do valor posicional do algarismo, isto é, cada algarismo tem um valor de acordo com a posição que ocupa na representação do número.

Material Dourado

Para propiciar o entendimento dos agrupamentos na base dez, do sistema de numeração decimal, diversas atividades sugerem o uso do Material Dourado, do ábaco e de representações com notas e moedas do Sistema Monetário Brasileiro. Seria interessante que tais atividades pudessem ser realizadas com os alunos manipulando esses materiais, de modo a vivenciarem as situações propostas.

O Material Dourado possibilita que o aluno explore a composição e decomposição de números naturais, bem como auxilia o trabalho com agrupamentos e trocas, necessário para que o aluno incorpore a noção que o nosso sistema de numeração é decimal, aditivo e multiplicativo.

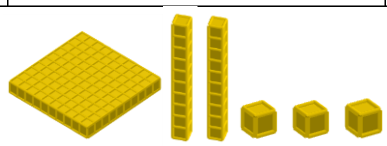
Quadro 3. Representação do Material Dourado.

Cubo	Placa	Barra	Cubinho
Mil unidades	**100 unidades**	**10 unidades**	**1 unidade**
			

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Observe a representação do número 123 pelo Material Dourado.

Quadro 4. Representação do número 123 no Material Dourado

<table>
<tr><th colspan="2">Placas</th><th colspan="2">Barras</th><th colspan="2">Cubinhos</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td colspan="2">D</td><td colspan="2">U</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Forma decomposta: 100 + 20 + 3</td><td colspan="3">Escrita por extenso: Cento e vinte e três</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Ordens e Classes

No sistema de numeração decimal, com apenas dez símbolos diferentes é possível escrever qualquer número que se queira. Esse sistema de numeração, além de ser decimal, também é posicional. O valor do algarismo muda dependendo da posição que ele ocupa no número.

Por exemplo, no número 4321, o algarismo 4 indica 4000, mas no número 3421 o algarismo 4 indica 400.

O ábaco de hastes é um recurso que pode ser utilizado para representar unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar. A partir dele fica mais fácil de visualizar as posições e ordens dos algarismos no Sistema de Numeração Decimal.

Cada pino do ábaco de hastes representa uma ordem do Sistema de Numeração Decimal. A quantidade de argolas coloridas em cada haste representa o valor da ordem. Três ordens formam uma classe.

Para visualizar melhor as classes e ordens, utilizamos o quadro de ordens. Observe o número 4321 no quadro de ordens.

Quadro 2. Classes e Ordens.

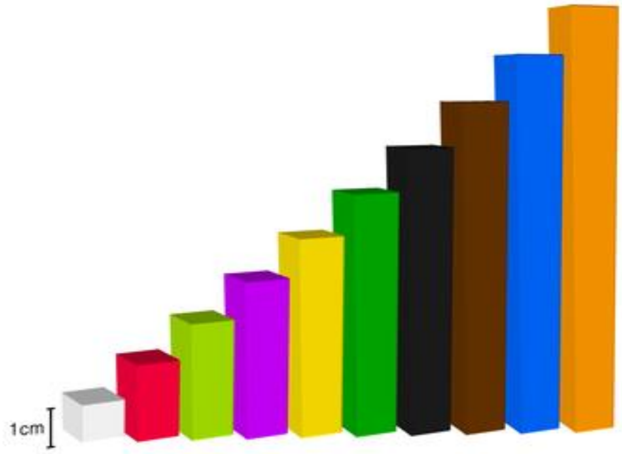
3ª classe dos Milhões			2ª classe dos Milhares			1ª classe Simples		
9ª ord.	8ª ord.	7ª ord.	6ª ord.	5ª ord.	4ª ord.	3ª ord.	2ª ord.	1ª ord.
CM	DM	UM	CM	DM	UM	Centenas	Dezenas	Unidades
					4	3	2	1

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os materiais pedagógicos, acompanhados de procedimentos, alicerçados em questionamentos, constituem as situações de aprendizagem. Desta forma, trouxemos outro exemplo de recurso pedagógico que possibilita ao aluno o uso da imaginação e a sua criatividade. A Escala de Cuisenaire, também promove o desenvolvimento da oralidade e de seus registros escritos, na construção dos conceitos de linguagem e da simbologia matemática, isto é, permite ler as ordens realizadas pelos alunos.

A Escala de Cuisenaire é formada por barras de 10 tamanhos diferentes, sendo que cada tamanho possui uma cor específica.

Figura 1. Escala Cuisenaire.



Fonte: http://proletramentomatematicapocosdecaldas.blogspot.com/p/material-cuisenaire-um-pouco-de.html.

Existe uma relação entre o comprimento da barra, a cor e o Número Natural, conforme mostra o quadro a seguir:

Quadro 3: Relação entre o comprimento da barra, cor e o número natural.

Comprimento	Cor	Número Natural
1 cm	branco ou cor de madeira	1
2 cm	vermelho	2
3 cm	verde-claro	3
4 cm	lilás	4
5 cm	amarelo	5
6 cm	verde-escuro	6
7 cm	preto	7
8 cm	marrom	8
9 cm	azul	9
10 cm	laranja	10

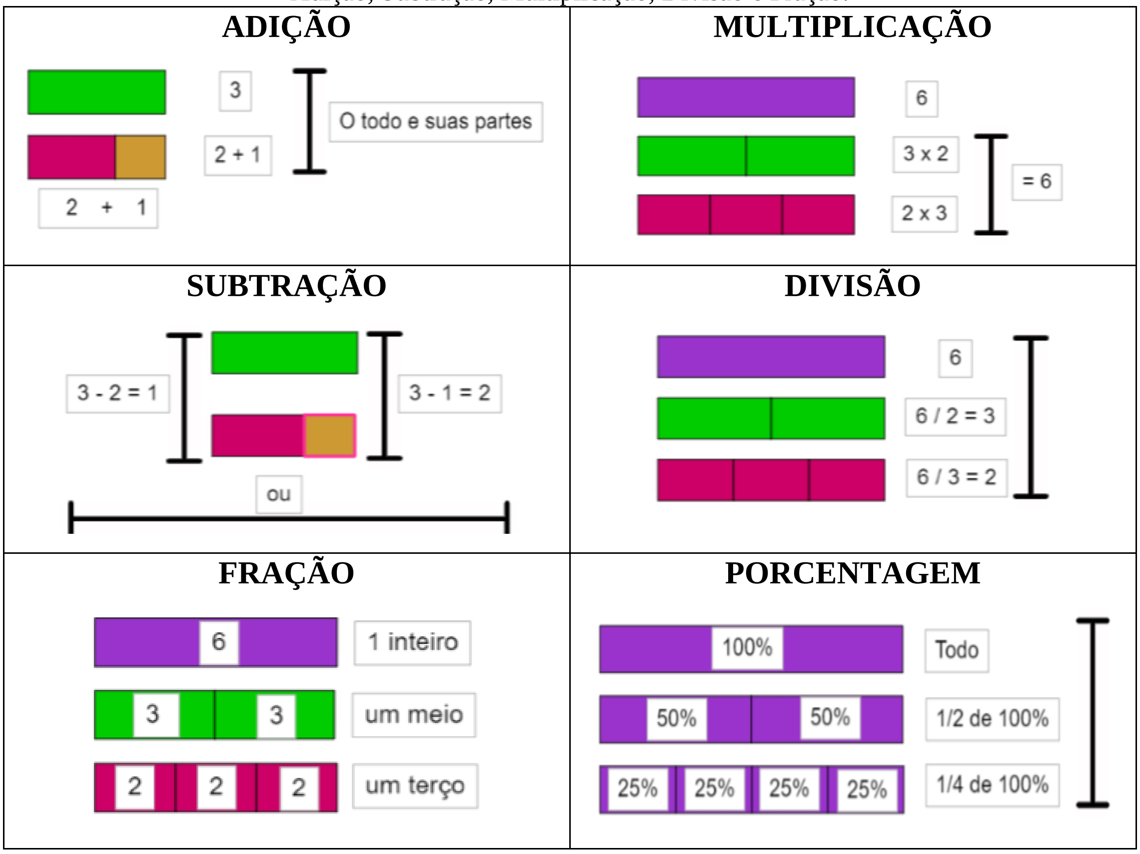
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Usado adequadamente, o material possibilita que o aluno compreenda a relação número-quantidade; a noção de mais um na sequência numérica e dos números até dez; os conceitos antes de, depois de, estar entre, maior que, menor que, antecessor de, sucessor de; as operações, em especial, da composição aditiva dos números até dez. Ela possibilita também que o aluno vivencie experiências de medida de comprimento e área, múltiplos e divisores e frações.

A seguir, foi elaborado um quadro usando a Escala de Cuisenaire e o modelo de barras para representar as operações matemáticas: Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Fração.

AS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS, FRAÇÃO E PORCENTAGEM

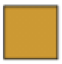
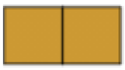
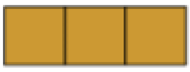
Quadro 4: Escala de Cuisenaire e o modelo de barras para representar as operações matemáticas: Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Fração.



Fonte: elaborada pela autora.

Expressões

Quadro 5: Expressões.

Expressões algébricas	Representação Pictórica	Escrita algébrica
Um número		1.n = n
O dobro de um número		2.n = 2n
O triplo de um número		3.n = 3n
A metade de um número		$\frac{1}{2}.n = \frac{n}{2}$
A quinta parte de um número		$\frac{1}{5}.n = \frac{n}{5}$

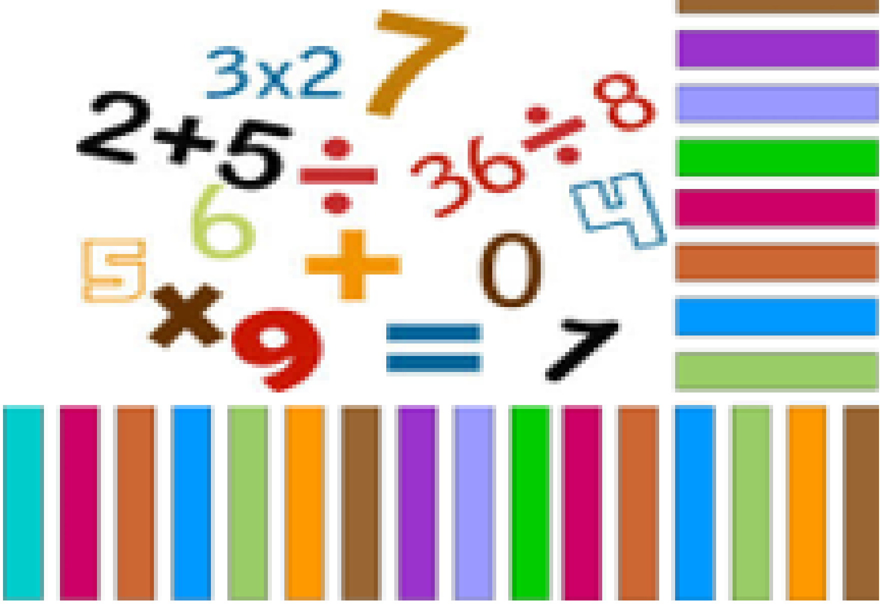
Fonte: elaborada pela autora.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: HABILIDADES DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

4º ano
(EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado.
(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5º ano
(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
6º ano
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 18 set. 2021.

COLEÇÃO DE PROBLEMAS



BLOCO I

Coleção de problemas tipo parte-todo

BLOCO II

Coleção de problemas tipo comparação

BLOCO III

Coleção de problemas tipo antes-depois

PROBLEMAS PARTE-TODO

BLOCO I

Caro(a) colega Professor(a),

Neste bloco com a apresentação de uma coleção de problemas tipo parte-todo a fim de desenvolver atividades em sala de aula referentes ao Modelo de Barras como recurso pedagógico na resolução de problemas matemáticos.

Além disso, uma breve visão sobre outras estratégias pedagógicas, uso de material concreto, material dourado, aritmética e iniciação a álgebra por exemplo, destacando, de modo geral, os conteúdos que serão abordados conforme problemas tipo parte-todo, procurando mostrar a importância dessa ferramenta para a resolução de diversos problemas matemáticos.

Trataremos ainda das formas de representação dos números em sistemas de numeração decimal, nas quatro operações fundamentais da matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotada para resolução de problemas aritméticos.

Uma das características importantes das relações numéricas é a das partes com um todo. “O problema das relações entre as partes e o todo leva a considerações não estritamente aritméticas, mas também algébricas” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 67).

A relação parte-todo indica certo número de partes iguais que se compõem um todo. A noção de todo é o centro para uma boa compreensão do conceito de fração e traz em si associada a ideia fundamental de representação. A vantagem de trabalhar inicialmente com a ideia de todo é que torna mais empírico e quando tomamos o todo já começamos certa abstração.

Problema 1.1 – Sala de aula de Carlos

Na sala de aula de Carlos, dois quintos dos alunos são meninos. Há 12 meninos na sala. Quantas meninas há na sala de aula? Quantos alunos há na sala de aula?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), nesta situação-problema buscamos interferir no ritmo dos alunos, assim trouxemos estratégias significativas, a fim de estimular o exercício

Lembre-se:

Exercícios mentais melhoram a capacidade de atenção, memória, linguagem e raciocínio.

Interpretação

Sujeito: meninos e meninas

Dados numéricos:

Representamos os dois quintos dos alunos, que são meninos, pela seguinte fração $\frac{2}{5}$

Há 12 meninos na sala

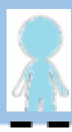
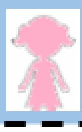
Incógnita: Quantas meninas há na sala?

Pergunta: Quantos alunos há na sala?

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Pensando em interferir no ritmo dos alunos, especialmente na motivação destes, trouxemos uma solução que dê ao aluno uma significativa aprendizagem, fazendo atividade mental, e não somente a manipulativa por meio do material concreto, bonequinhos.

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.

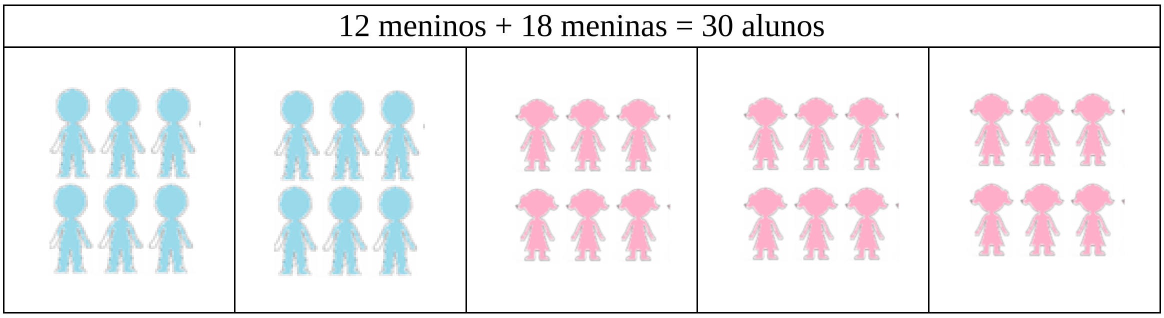
Veja a seguir.

Meninos	Meninas
	

Sabemos que na sala de aula de Carlos tem 12 meninos, representados por $\frac{2}{5}$ dos alunos.

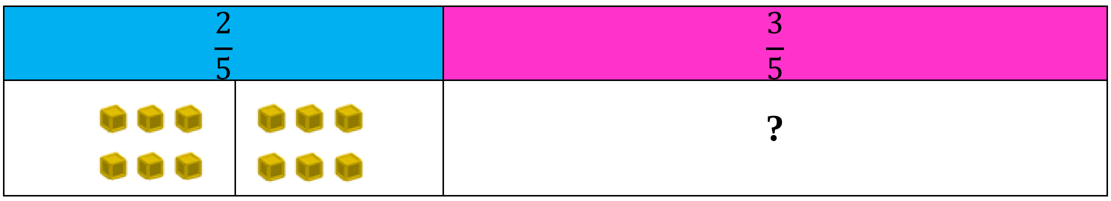
Sendo o restante meninas representadas por $\frac{3}{5}$ da sala de aula. Para encontrarmos o valor podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira, se metade de 12 é 6, logo as três partes restantes representam 18, ou seja, o total de meninas.

Portanto, o total de alunos que há na sala de aula é a soma dos meninos e das meninas, isto é, 12 somado a 18, é igual a 30 alunos.

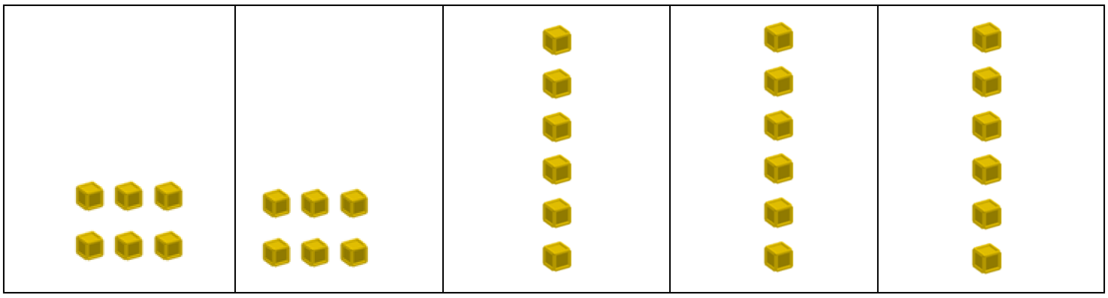


Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

Sabemos que na sala há 12 meninos, que são $\frac{2}{5}$ do total de alunos. Representando a sala em 5 partes, restam $\frac{3}{5}$ que correspondem às meninas.



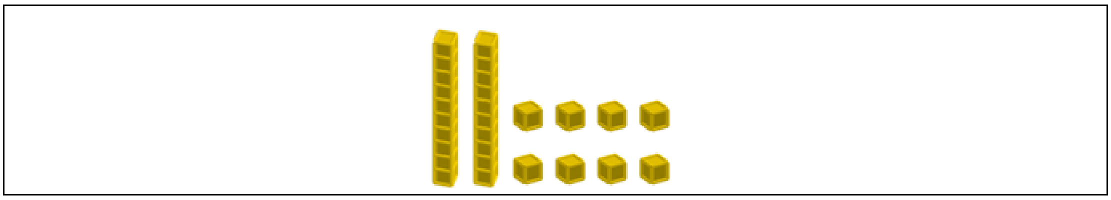
Se considerarmos que 2 partes equivalem a 12 (cubinhos), então cada parte equivale a 6 (cubinhos).



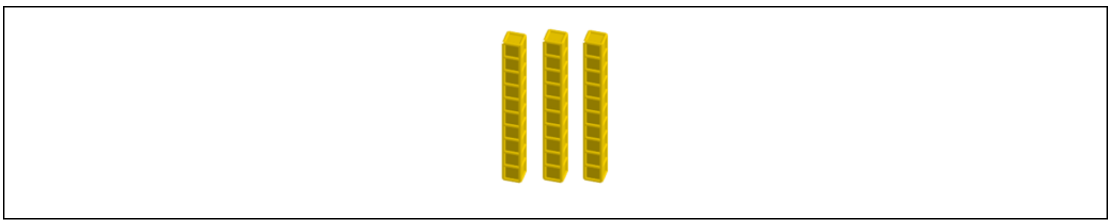
Logo, as 3 partes restantes equivalem a 18 (cubinhos), pois somamos 6 (cubinhos) + 6 (cubinhos) + 6 (cubinhos).

Assim, podemos representar a quantidade de meninos (12 cubinhos) e meninas (18 cubinhos) fazendo uma troca pelas barras, quando der uma dezena.

Como dissemos, agrupamos a quantidade de meninos (1 barra e 2 cubinhos) e de meninas (1 barra e 8 cubinhos), para obtemos o total de alunos na sala de Carlos.



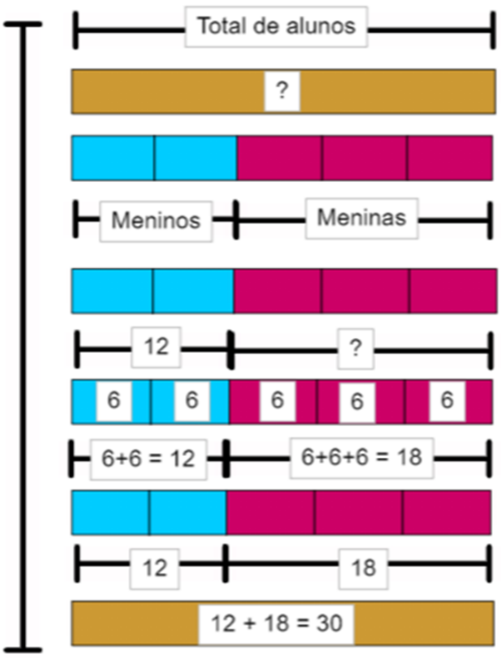
Desse modo, como há 10 cubinhos, podemos substituí-los por mais 1 barra, totalizando 3, veja a seguir:



Por fim, ao invés de termos uma representação com 30 (cubinhos), podemos minimizá-los por 3 peças, as barras, que representam as dezenas do material dourado.

Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Para modelarmos com as barras, primeiramente é preciso representar o todo, isto é, total de alunos da sala de aula de Carlos. Em seguida, dividimos o todo em cinco partes, pois são dois quintos os meninos e sabemos que o restante são as meninas. Ao representarmos a sala em 5 partes, temos que cada parte equivale a 6, uma vez que as duas partes equivalem a 12, ou seja, as partes destacadas de azul equivalem aos 12 meninos, como são três partes restantes temos 18 meninas, conforme modeladas as partes nas barras abaixo.



Estratégia 04 - Aritmética

Sabemos que na sala de aula de Carlos $\frac{2}{5}$ do total de alunos são meninos e que são 12. Representando a sala em 5 partes, temos 6 unidades para cada parte, uma vez que 12 dividido por 2 equivale a 6.

Logo podemos dizer que os $\frac{3}{5}$ restantes da sala correspondente ao total de meninas. Como cada parte é 6, temos 18 meninas, o qual pode ser resolvido de duas formas: $3\ x\ 6\ =\ 18\ ou\ 6+6+6\ =\ 18$.

$\frac{12}{2} = 6$	$6\,x\,3\ =\ 18$	$12\ +\ 18\ =\ 30$

Assim, somando a quantidade de meninos que são 12 e a quantidade de meninas que são 18, obtemos o total de 30 alunos, na sala de Carlos.

Estratégia 05 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido. Pois dependendo do aluno e dos professores isso poderá servir de motivação para evidenciar que o problema pode ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$12 + \frac{3}{5}x = x$$

$$12 + \frac{3}{5}x - x\ = 0$$

$$\cancel{5}.\,(12 + \frac{3}{\cancel{5}}x - x) = 0$$

$$60 + 3.x - 5.x\ = 0$$

$$+3.x - 5.x\ = -\,60$$

$$(-1)\,.\,2.x\ = -\,60\,.\,(-1)$$

$$x = \frac{60}{2}$$

$$x\ = 30$$

Por meio dessa equação algébrica encontramos o total de alunos da sala de aula. Agora, podemos resolver o problema diminuindo do total de alunos a quantidade de meninos e encontraremos a quantidade de meninas, veja:

Total de alunos = Meninos – Meninas

$$30 = 12 - Meninas$$

$$Meninas = 30 - 12$$

$$Meninas = 18$$

Portanto, na sala de aula de Carlos há 12 meninos e 18 meninas.

Sugestões para resposta:

1) Há 18 meninas na sala de Carlos e no total há 30 alunos.

2) Há 30 alunos na sala de Carlos, sendo 12 meninos e 18 meninas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 1.2 – Buquê de flores

Mônica fez um buquê com 24 flores, $\frac{1}{3}$ são rosas e o resto são tulipas. Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), neste problema é interessante apresentar aos estudantes que o **todo,** ou seja, o buquê foi dividido em três partes.

Lembre-se:

Poucos estudantes sabem que o ponto (**.**) representa o símbolo da multiplicação.

Interpretação:

Sujeitos: Rosas e Tulipas

Dados numéricos:

buquê com 24 flores

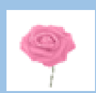
$\frac{1}{3}$ são rosas

resto são tulipas

Incógnita: Tulipas.

Pergunta: Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto florzinha, veja a seguir.

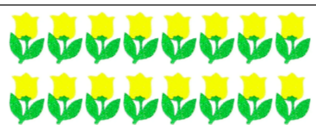
Buquê com 24 flores	
Rosas	Tulipas
	

Sabemos que no buquê $\frac{1}{3}$ são rosas, assim podemos decompor 24 em três parcelas iguais, veja a seguir.

24 flores		
$\frac{1}{3}$ são rosas	$\frac{2}{3}$ são tulipas	
8	8	8
8	16	

Sendo o restante tulipas representadas por $\frac{2}{3}$ do buquê. Para encontrarmos o valor podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira, 24 distribui para 3, logo cada parte equivale a 8. Assim, temos 8 rosas e 16 tulipas.

8 rosas

16 tulipas


Portanto, juntando a quantidade de rosas e a quantidade de tulipas obtêm se a quantidades de flores do buquê.

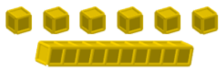
Buquê 8 rosas + 16 tulipas = 24 flores


Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

O total de flores do buquê são 24 flores, podemos representar as rosas e as tulipas em cubinhos.

24 unidades

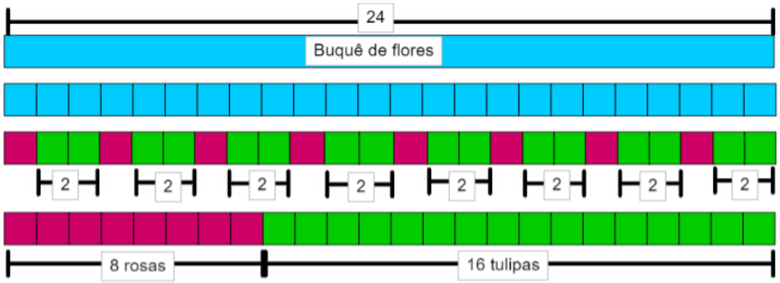

Sabemos que são $\frac{1}{3}$ das flores são rosas, de modo a distribuirmos as 24 unidades em três partes iguais.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
		
8	8	8
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
		
8	16	

Se considerarmos que cada parte equivale a 8 unidades, então $\frac{1}{3}$ corresponde a quantidade das rosas e $\frac{2}{3}$ a quantidade das tulipas. Portanto, 8 (cubinhos) correspondem às rosas e 16 (1 barra e 6 cubinhos) às tulipas.

Estratégia 03 – Utilizando agrupamento na barra

Esta estratégia se dá por meio do agrupamento em que o total de flores do buquê são 24 flores representadas em uma barra na horizontal.



Observe que a barra foi dividida em 24 partes, sendo que vermelha representa a quantidade de rosas e verde a quantidade de tulipas. Repare que para identificar ou conhecer as quantidades de rosas (1/3) e de tulipas (2/3) o procedimento foi a cada três um terço, foi pintado de vermelho (representando as rosas) e dois, correspondente a dois terços, de verde (representando as tulipas). Assim, ao agrupar temos cor vermelha e cor verde. Logo pela contagem teremos 8 rosas e 16 tulipas, totalizando o buquê.

Estratégia 04 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos que a barra inteira, cor verde, representa o buquê, isto é, as 24 flores. Na segunda barra, o $\frac{1}{3}$ representa as rosas, uma vez que a barra inteira foi dividida em três (3) partes iguais.

Diante disso, fica claro que o restante $\frac{2}{3}$ correspondem ao restante das flores, às tulipas. Veja:

Portanto, como o total de flores é 24 e o buquê foi dividido em três partes iguais, entendemos que $\frac{1}{3}$ representando as rosas equivale a oito (8), e o restante $\frac{2}{3}$ correspondente às tulipas equivale a 16.

Estratégia 05 - Aritmética

Considerando que o buquê tem 24 flores e $\frac{1}{3}$ destas são rosas, o problema poderá ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$Rosas = \frac{1}{3} \; de \; 24 \; flores$$

Para o sujeito rosas usamos como incógnita a letra R, para facilitar o entendimento da equação, observe:

$$R = \frac{1}{3} \times 24 = \frac{24}{3} = 8$$

Assim, encontramos a quantidade de 8 rosas. Agora, ficou fácil de encontrar a quantidade de tulipas do buquê de Mônica, precisamos diminuir 8, do total 24, veja:

$$24 - 8 = 16$$

Logo, temos que a quantidade de tulipas no buquê é de 16.

Estratégia 06– Iniciação à Álgebra

Considerando que o buquê tem 24 flores e $\frac{1}{3}$ destas são rosas, o problema poderá ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$Rosas = \frac{1}{3} \; de \; 24 \; flores$$

Para o sujeito rosas, usamos como incógnita a letra R e para Tulipas a letra T facilitando o entendimento da equação, observe:

$$Buquê = Rosas + Tulipas$$

$$24 = 8 + T$$

$$24 - 8 = 8 - 8 + T$$

$$16 = T$$

$$T = 16$$

Assim, encontramos a quantidade de rosas (8) e tulipas (16) utilizando incógnitas na equação. Como forma de tirar a prova real, somamos os dois valores encontrados de R e T totalizando a quantidade de flores do buquê, veja:

$$Buquê = Rosas + Tulipas$$
$$24 = 8 + 16$$
$$24 = 24$$

Sugestões para resposta:

1) O buquê de Mônica tem 8 rosas e 16 tulipas no total.
2) Tem 24 flores no buquê de Mônica, sendo 8 rosas e 16 tulipas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 1.3 – Escola de Sinop-MT

Numa escola de Sinop-MT, três quintos dos estudantes são meninas. Sabe-se que nesta escola existem 750 meninas. Quantos alunos tem a escola no total?

Interpretação

Sujeitos: Alunos e meninas

Dados numéricos:

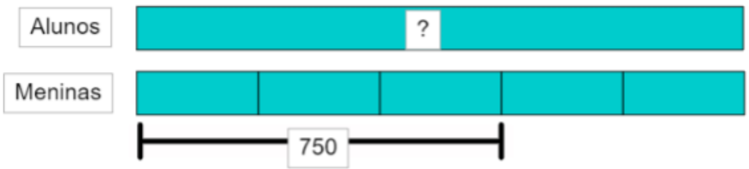
Três quintos dos estudantes são meninas.

750 meninas.

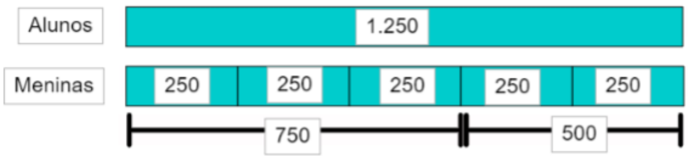
Incógnita: Quantos alunos tem a escola no total?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, verificamos que o todo são os alunos da escola e, três quintos correspondem a 750 meninas, veja:



Observe que a partir da representação das meninas o todo foi dividido em cinco partes iguais, assim como três partes correspondem a 750, então, cada uma das partes é equivalente a 250. Veja:



Portanto, para encontrarmos o total de alunos da escola, basta somarmos o total de meninas 750 mais as duas partes restantes 500, ou seja, a escola tem 1.250 alunos.

Estratégia 02 - Aritmética

Considerando que as meninas correspondem a três quintos do total de alunos, ou seja, são 750 meninas, é possível encontrar o total de alunos da escola multiplicando cinco vezes 250, veja:

$$5 \times 250 = \mathbf{1.250}\ \boldsymbol{alunos}$$

Assim, este problema pode ser resolvido por meio do raciocínio lógico, uma vez que, três quintos são 750. Então, cada parte corresponde a 250, logo, somamos 250 por cinco vezes, bem como podemos efetuar o produto, conforme abaixo:

Soma:

$$Alunos = 250 + 250 + \ 250 + 250 \ + 250 = \mathbf{1.250}$$

Produto:

$$Alunos \ = \ 5 \times 250 \ = \mathbf{1.250}$$

Portanto, aritmeticamente é possível resolver este problema somando as quantidades, como também, multiplicando-as.

Sugestões para resposta:

1) Há 1.250 alunos na escola ao todo.
2) A escola tem no total 1.250 alunos.

Habilidades - BNCC

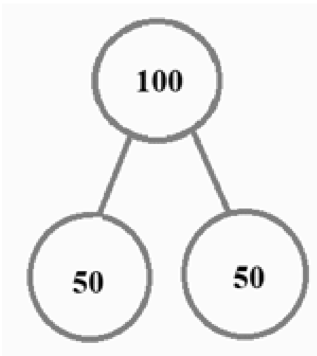
HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA09), (EF06MA03).**

Problema 1.4 – Pés de codorna e coelho

Na fazendinha de uma escola de Sinop-MT há aves e animais. Uma professora levou seus alunos para contarem a quantidade de galinhas e os coelhos. Eles contaram 16 cabeças e 42 pés ao todo. Quantas galinhas e coelhos têm na fazendinha da escola?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), este problema é convencional nos livros didáticos. Assim, pensamos em uma estratégia simples reconhecida como "**Number Bond**[1]" (Números conectados), como também podemos utilizar o recurso **Árvores de Possibilidades** que está relacionada com a "decomposição de um número em partes" trabalhado de forma lúdica, com uma exploração concretizada e simbólica de cada quantidade.



Importante:

Ao fazer a decomposição separamos em unidades as ordens que formam os números. Quando juntamos as unidades de um número dizemos que estamos fazendo a composição.

Lembre-se:

o uso de diagramas é estimulado e reconhecida a sua importância na resolução de problemas.

Interpretação

Sujeitos: Galinhas e coelhos.
Dados numéricos:
42 pés;
16 cabeças;

Incógnita: Quantas galinhas e coelhos têm na fazendinha da escola?

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução, a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto, bichinhos, que também podem ser recortes das imagens de galinhas e coelhos.

Aves e animais (16 cabeças e 42 pés)	
Codorna	Coelho
	

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/frango-galinha-branca-4091977/; http://avidaanimall.blogspot.com/2011/04/coelho.html

Considerando que são 16 cabeças e têm 42 pés, é preciso evidenciar que uma codorna tem dois pés e um coelho tem 4 pés. Assim, para encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos, podemos usar a estratégia de agrupamento para a resolução deste problema, pois por meio dela têm maior probabilidade de serem os acertos. Veja:

Aves e animais (16 cabeças e 42 pés)	
Galinhas	Coelhos
	
11	**5**

Portanto, ao propor a distribuição de cada cabeça observando na imagem a quantidade de pés de cada bichinho, ficará fácil de matematizar a quantidade exata de galinhas e de coelhos.

Desta forma, consideramos o agrupamento uma estratégia para resolver este problema.

Estratégia 02 – Suposição

Outra resolução que estimamos é por meio de heurísticas, assim, este problema pode ser resolvido considerando a quantidade de cabeças ou pés.

Suponhamos que as 16 cabeças são apenas galinhas. Deste modo, ao resolver o estudante descobrirá que pela quantidade de pés não terá como ser apenas da galinha, logo vai acrescentando parte ao coelho. Assim, para encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos, podemos usar a estratégia de suposição para a resolução deste problema.

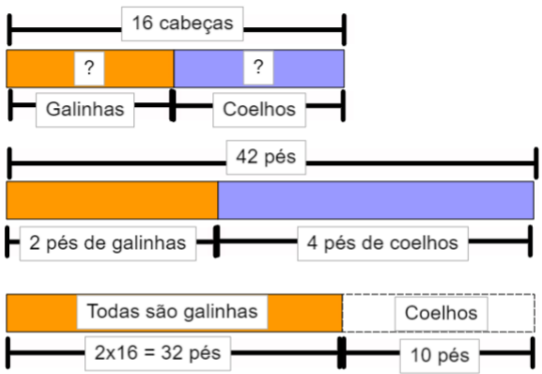
Quadro 6: Estratégia de suposição.

Galinhas	Quantidade de pés	Coelhos	Quantidade de pés	Total de pés
16	32	0	0	32
0	0	16	64	64
5	10	11	44	54
8	16	8	32	48
10	20	6	24	44
11	22	5	20	42

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos um total de cabeças em que a barra foi dividida em duas partes. Na cor laranja estão representadas as galinhas e na cor azul, os coelhos. O problema também apresenta o total de 42 pés.



Observando a última barra, supomos que as 16 cabeças são apenas galinhas. Supondo 16 pés, percebemos que essa não será a quantidade correta. Logo, a quantidade de pés não será das galinhas, e, para isso acontecer, faz-se o acréscimo nos pés dos coelhos.

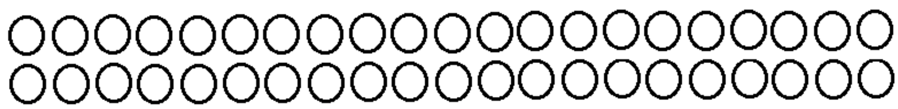
Veja como ficaria a próxima suposição se fossem 10 galinhas. Precisaria multiplicar a quantidade de cabeças pela quantidade de pés, ou seja, $10 \times 2 = 20$, se são 20 pés, faça a diferença com a quantidade do enunciado do problema, logo, $42-20 = 22$. Agora, precisa encontrar a quantidade de coelhos, primeiro faça a diferença das cabeças, $16 - 10 = 6$, observe que 6 seria a quantidade de coelhos, porém ao contabilizar os pés há divergência nas quantidades no enunciado do problema, pois $6\times 4 = 24$. A divergência seria de 2 pés a mais, nesta suposição, ou seja, o total de pés ultrapassaria o do problema, visto que $24+20 = 44$.

Vamos para a próxima tentativa, observe que ultrapassaram 2 pés nos coelhos, isso quer dizer que devemos aumentar o número de cabeças das galinhas, como são 2, aumenta 1 galinha, logo, $11 \times 2 = 22$, que é o total de galinhas, agora a quantidade de coelhos, $5\times 4 = 20$, assim confrontamos os dados como forma de conferir a estratégia de suposição, 22+20$=$ 42 pés e, $11 + 5 = 16$ cabeças.

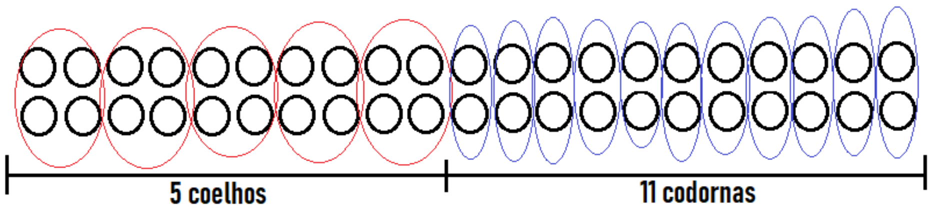
Portanto, o total de galinhas são 11 e o total de coelhos 5.

Estratégia 04 – Agrupamento

É possível resolver este problema utilizando a estratégia de agrupamento. Para isso, representaremos os 42 pés em formato de círculos. Veja:



Nesta estratégia, iniciamos primeiramente circulando, na cor azul, de 2 em 2 círculos representando a quantidade dos pés das galinhas, sendo que circulamos, na cor vermelha, de 4 em 4 a quantidade dos pés dos coelhos da seguinte maneira:



Caro colega Professor(a), neste problema é interessante apresentar aos estudantes material concreto peixinhos.

Lembre-se:

O material concreto desenvolve o raciocínio do aluno estimulando o pensamento lógico matemático, na construção de esquemas conceituais dando contornos e significados.

Portanto, essa estratégia possibilita encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos.

Sugestões para resposta:

1) Na fazendinha da escola tem 11 galinhas e 5 coelhos.
2) Há 11 galinhas e 5 coelhos na fazendinha da escola.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF04MA08), (EF05MA09), (EF06MA03).**

Problema 1.5 – Aquário

Em um grande aquário um quarto dos peixes são dourados. Há 4 pintados a mais do que dourados no aquário. Os 16 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

Interpretação

Sujeitos: Peixes dourados, peixes pintados, peixes tucunarés

Dados numéricos:

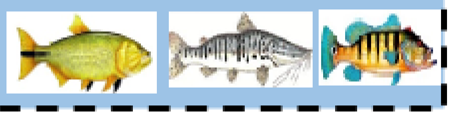
$\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados.

Há 4 pintados a mais do que dourados.

Os 16 peixes restantes são tucunarés.

Incógnita: Quantos peixes existem no aquário?

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto peixinhos, veja a seguir.

Aquário		
Dourados	Pintados	Tucunarés
		

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/676736281487116506/; https://br.pinterest.com/pin/208291551494097914/; https://br.pinterest.com/pin/696932111055320270/.

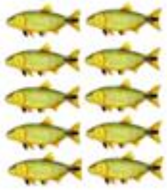
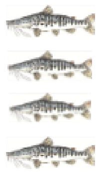
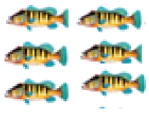
Sabemos que $\frac{1}{4}$ são dourados, assim dividimos o aquário em 4 partes iguais, veja:

Aquário			
$\frac{1}{4}$ são dourados			

Como há 4 pintados a mais que dourados e o restante são 16 peixes tucunarés, para encontrarmos a quantidades de peixes, podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira:

Aquário				
$\frac{1}{4}$				
		 		
dourados	dourados	4	Restante	Restante
$\frac{1}{4}$ são dourados	?	   	16	

A partir dos peixes tucunarés e os 4 pintados é possível encontrar a quantidade de peixes dourados, veja:

Aquário				
Dourados	Pintados		Tucunarés	
		4	6	Restante
				
10	10	4	16	
	14			

Portanto, a segunda parte mais quatro representam os peixes pintados, a terceira parte sobram 6 peixes que fazem parte dos tucunarés, assim como restaram 10 peixes na última parte, entendemos que cada parte corresponde a 10 peixes. Logo, são 10 peixes dourados e, como os pintados são a quantidade de dourados mais 4, obtemos 14 peixes pintados. Por fim, sabemos que há 16 tucunarés no aquário.

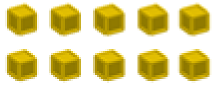
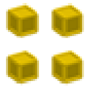
Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

No aquário $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, assim dividimos o aquário em 4 partes iguais, veja:

Aquário			
Dourados			

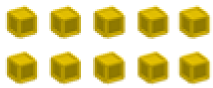
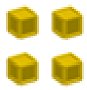
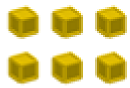
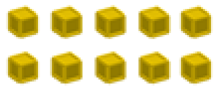
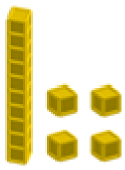
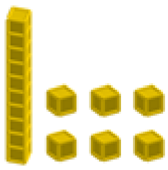
Como há 4 pintados a mais que dourados (representamos com 4 cubinhos) e o restante são 16 peixes tucunarés (representamos com 1 barra e 6 cubinhos). Para encontrarmos a quantidades de peixes distribuímos o material dourado da seguinte maneira:

Aquário				
Dourados	Pintados		Tucunarés	
		4		Restante

				
10	10	4	16	
	14			

Desta forma, é possível verificar que metade do aquário corresponde a 20, ou seja, 4 mais 16 é a quantidade de peixes da metade do aquário. A segunda parte mais quatro cubinhos representam os peixes pintados. A terceira parte sobram 6 cubinhos que fazem parte dos tucunarés, assim como restaram 10 cubinhos na última parte, entendemos que cada parte corresponde a 10 cubinhos. Logo, são 10 peixes dourados e, como os pintados são a quantidade de dourados mais 4, obtemos 14 peixes pintados. Por fim, sabemos que há 16 tucunarés no aquário.

Então, ainda é possível trocar a quantidade de cubinho por barra, pois a cada 10 cubinhos trocamos por uma barra. Veja:

Aquário				
Dourados	Pintados		Tucunarés	
		4		Restante
				
				
10	14		16	

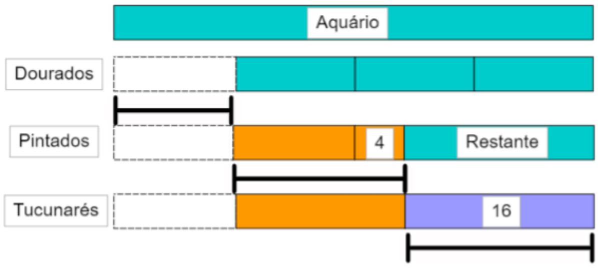
Por fim, concluímos que a primeira parte, 1 barra representa os peixes dourados, a segunda parte 1 barra mais 4 cubinhos representam os peixes pintados, e o restante 6 cubinhos, mais a última parte, representada por 1 barra, estão os peixes tucunarés.

Portanto, no aquário há 10 peixes dourados, 14 peixes pintados e 16 peixes tucunarés, logo o total são 40 peixes no aquário.

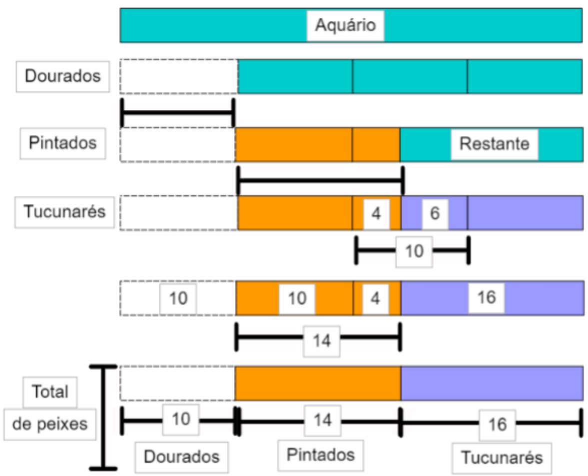
Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos um todo representado pela barra inteira de cor azul, ou seja, o aquário. Diante do problema, sabemos que $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, assim dividimos a barra inteira em 4 partes iguais e uma dessas partes representará os peixes dourados.

O problema traz também que os peixes pintados correspondem a quantidade de peixes dourados, mais 4. Assim, a parte destacada mais um pedaço referente ao mais 4. E, por último, apresenta que o restante são os tucunarés. Veja a representação com as barras:



É possível identificar nas barras a quantidade de peixes em cada parte, pois se são 16, os peixes restantes e foram tomados 4 peixes pintados, encontramos a quantidade de peixes correspondente a metade do aquário. Logo restam 6 peixes. Assim obtemos a quantidade de peixes em uma parte que são 10 e sendo os pintados a mesma quantidade de dourados, mais 4, encontramos 14 peixes pintados. Veja a seguir a representação com as barras:



Portanto, há no aquário 40 peixes no total, o restante corresponde aos 16 peixes tucunarés, a primeira parte são os 10 peixes dourados e há 14 peixes pintados.

Estratégia 04 - Iniciação à Álgebra

Considerando que $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, e a quantidade de peixes pintados é a mesma quantidade de dourados, mais 4, e o restante são 16 peixes tucunarés, podemos operar a partir da seguinte equação numérica:

$$P = \overbrace{\frac{1}{4}p}^{Dourados} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}p + 4\right)}^{Pintados} + \overbrace{16}^{Tucunarés} = \frac{2}{4}p + 20 = \frac{2}{4}p + 20 = \frac{1}{2} + 20 = 2.(20) =$$
40 peixes

Para resolvermos a equação, primeiramente, agrupamos os números mistos. Depois, como há frações com denominadores iguais, utilizamos a propriedade comutativa da adição e organizamos a equação para facilitar a resolução. Observe também que chegando na fração $\frac{2}{4}$ foi possível simplificar numerador com denominador, obtendo $\frac{1}{4}$. Assim temos um número fracionário e um inteiro, para resolvermos a fração própria, ou seja, numerador menos que denominador, podemos usar a técnica do mínimo múltiplo comum (M.M.C) ou multiplicar o denominador pelo número inteiro. Portanto, a quantidade de peixes existentes no aquário é 40.

Sugestões para resposta:

1) No aquário há 10 peixes dourados, 14 peixes pintados e 16 peixes tucunarés.
2) Ao todo são 40 peixes no aquário.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**


PROBLEMAS
DE
COMPARAÇÃO
>
<
=

Neste segundo bloco, apresentamos coleção de problemas, tipo comparação para desenvolver atividades em sala de aula, referentes ao Modelo de Barras como recurso pedagógico na resolução de problemas matemáticos.

Quando tratar de comparação, temos um problema que envolve operações de adição ou subtração. Logo, a barra maior é sempre desenhada, separada da outra, em uma é desenhada a barra do aditivo e por baixo dessa o subtrativo, sendo o resultado a comparação de uma com a outra, ou seja, a diferença.

Assim, é importante que nos modelos de comparação haja pelo menos duas barras, uma para cada sujeito envolvido.

Já vimos que, dependendo da abordagem dada ao problema, podemos ter modelos matemáticos diferentes. Por vezes, torna-se impossível obter um modelo matemático que traduza exatamente o problema real, enquanto, em outras, um tal modelo é demasiado complexo para ser tratado.

Nesses casos, para obter um modelo tratável, necessitamos impor certas restrições idealistas de simplificações do modelo. O modelo matemático obtido então é um modelo aproximado, que não traduz exatamente a realidade.

Devido às alterações e/ou simplificações, a solução de um modelo aproximado, ainda que exata, deve ser considerada factível de erros. Recomendamos, então, que sejam feitos experimentos a fim de verificar se as simplificações são compatíveis com os dados experimentais, ou seja, uma validação do modelo simplificado.

Problema 2.1 – Gibis

Patrícia e Juliana são leitoras e colecionam gibis da turma da Mônica. Patrícia tem 84 gibis. Juliana tem 76 gibis. Quantos gibis Juliana tem a menos que Patrícia?

Interpretação

Sujeitos: Patrícia e Juliana

Dados numéricos:

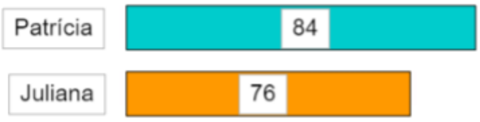
Patrícia tem 84 gibis.

Juliana tem 76 gibis.

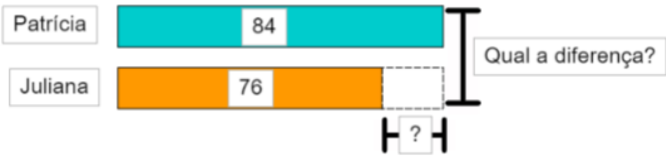
Incógnita: Quantos gibis Juliana tem a menos que Patrícia?

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Utilizando a estratégia do Modelo de Barras para representar os dados numéricos do problema, temos a seguinte representação, Patrícia com 84 gibis e Juliana com 76 gibis:



Observando a representação acima, percebemos uma diferença que está visivelmente na seguinte imagem:



Ou, também podemos comparar os sujeitos representando do menor para o maior, pois o espaço amostral torna-se compreensível ao modo de visualizar.

Considerando as barras, percebemos uma diferença entre os sujeitos, esta seria a quantia que Juliana tem a menos do que Patrícia, isto é, se diminuirmos 84 de 76 o resultado é 8, sendo assim, a diferença de gibis que Juliana tem a menos do que Patrícia é 8.

Estratégia 02 - Aritmética

Para resolvermos algebricamente este problema, primeiramente podemos elaborar uma operação de subtração, veja:

$$Gibis = Patrícia - Juliana = 84 - 76 = \mathbf{8}$$

Da mesma forma, podemos trabalhar o raciocínio lógico, pensar no menor número, ou seja, 76, gibis da juliana, e contar até chegar no 84, gibis da Patrícia, assim a quantidade de um número a outro será a diferença, veja:

76 77 78 79 80 81 82 83 84

Concluímos que Juliana tem 8 gibis a menos que Patrícia.

Exemplificando essa situação podemos discutir sobre a questão do troco de uma determinada compra, na "escola é ensinado a subtração do total pago (um número) menos total a pagar (um número), e que a maneira de se fazer subtrações é escrever um número embaixo do outro", porém não é bem assim, o interessante seria usar o procedimento de "completar":

> "se você pagou com uma nota de dez reais, e a despesa foi de quatro reais e sessenta e três, ela vai "completando" até chegar a dez: junta dois centavos e diz "quatro e sessenta e cinco", mais cinco centavos e diz "quatro e oitenta", mais vinte centavos e diz "cinco reais", mais cinco reais e diz "dez reais", e dá o troco dizendo "dez reais", o total alcançado, e não total do tronco" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 20-21).

Assim, este problema pode ser resolvido por meio do uso da operação "completar".

Sugestões para resposta:

1) Juliana tem 8 gibis a menos que Patrícia.
2) Patrícia tem 8 gibis a mais do que Juliana.

Habilidades - BNCC

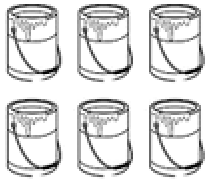
HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA07), (EF06MA03).**

Problema 2.2 – Latas de tinta

Rebeca e Jonas compraram latas de tinta para pintar suas casas. Rebeca comprou 6 latas e Jonas 5 vezes mais que Rebeca. Quantas latas de tinta eles compraram?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), recomendamos representar os dados do problema utilizando a estratégia material concreto: latinhas, como também o uso do material dourado.



Interpretação

Sujeitos: Rebeca e Jonas.

Dados numéricos:

Rebeca comprou 6 latas.

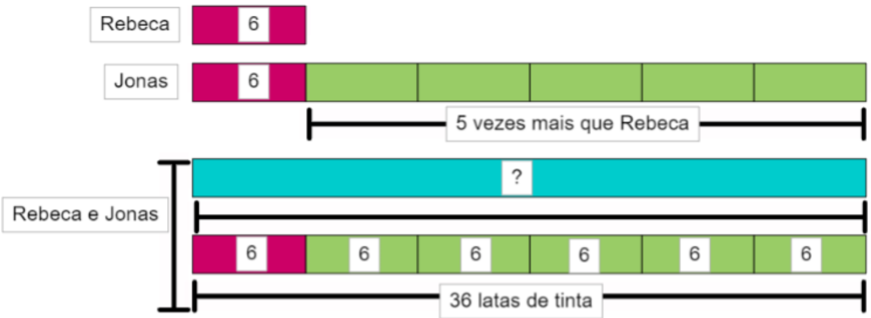
Jonas 5 vezes mais que Rebeca.

Incógnita: Quantas latas de tinta eles compraram?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Neste problema ao utilizarmos a representação por meio das barras, é possível visualizar que seis (6) é a quantidade de Rebeca, cor rosa, e as cinco (5) partes, cor verde, representam a quantidade que Jonas comprou.

Neste sentido, podemos verificar que cada parte equivale a seis (6), quantidade de latas de Rebeca, logo, adicionando cinco (5) partes teremos 30 latas, sendo esta a quantidade de Jonas. Confira a modelagem nas barras:



Portanto, ao juntarmos todas as partes, de Rebeca e de Jonas, temos um total de 36 latas de tinta.

Estratégia 02 - Aritmética

Considerando que a quantidade atribuída a Jonas foi cinco vezes mais que a de Rebeca, podemos fazer a seguinte operação:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \mathbf{30\ \mathit{latas}}$$

Como, também, é possível fazer uma operação por meio da multiplicação, ou seja, a quantidade de vezes multiplicada pela quantidade de latas de Rebeca, veja:

$$5\ x\ 6 = \mathbf{30\ \mathit{latas}}$$

Concluímos que Jonas comprou 30 latas de tinta e Rebeca comprou 6. Assim, eles compraram um total de 36 latas de tinta.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor neste problema também uma solução que use o valor desconhecido, uma incógnita. Para melhor compreensão, nomeamos *R* para Rebeca e *J* para Jonas, como são as iniciais dos seus nomes, esta é uma forma de familiarizar-se com a incógnita, conforme expressão abaixo:

Rebeca	Jonas
$R = 6$	$J = R + 5R$

Ao substituímos o valor de R na seguinte expressão $J = R + 5R$ encontraremos a quantidade de latas de tinta que Jonas comprou, veja:

$$J = R + 5R = 6 + 5.(6) = 6 + 30 = \mathbf{36\ \mathit{latas\ de\ tinta}}$$

Caro colega Professor(a), nesta situação tratando de uma multiplicação apresente ao estudante o símbolo ponto (.) ao invés de utilizar um x, pois a intenção é evitar confusões em expressões algébricas, uma vez que normalmente o x é usado para representar as variáveis.

Lembre-se:

O símbolo da multiplicação em expressões utilizamos o ponto (.)

Por exemplo:

$4.x = 20$

Sugestões para resposta:

1) Rebeca e Jonas compraram 36 latas de tinta.
2) Eles compraram 36 latas de tinta.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF06MA03).**

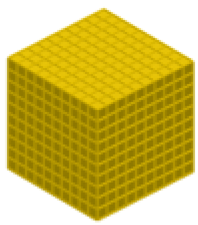
Problema 2.3 – Zoológico do parque de diversões Beto Carrero World

No parque de diversões Beto Carrero World tem um zoológico destinado a proteção, amparo e conservação de centenas de espécies de animais. Nessas condições, o zoológico tem um elefante que pesa 4.000 kg, uma girafa que pesa a quinta parte do elefante, e o hipopótamo pesa 1.000 kg a mais que girafa. Quanto pesa a girafa e o hipopótamo?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), este problema pode ser trabalhado inicialmente com as barras, porém se os estudantes não compreenderam e identificaram os sujeitos do problema, recomendamos utilizar a estratégia com o material dourado.

Caro colega Professor(a), nesta situação recomendamos que informe aos estudantes que está sendo trabalhado unidades de milhar, logo apresente o cubo como peça principal para representação.



Interpretação

Sujeitos: Elefante, girafa e o hipopótamo

Dados numéricos:

Elefante que pesa 4.000 kg.

Girafa que pesa a quinta parte do elefante.

Hipopótamo pesa 1.000 kg a mais que girafa.

Incógnita: Quanto pesa o hipopótamo e a girafa?

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Primeiramente, para modelar com as barras precisamos representar o peso do elefante em uma única barra, pois é o único dado numérico que temos com valor inteiro. Abaixo, dividimos o peso do elefante em cinco partes iguais, uma vez que o peso da girafa corresponde a sua quinta parte ou $\frac{1}{5}$, sendo representada pelo recorte para facilitar a visualização. E, na última barra, representamos o peso da girafa em uma barra e na mesma linha mais uma barra correspondente a 1000, conforme o problema. Veja:

Diante disso, o peso do elefante é 4.000kg e foi dividido em cinco partes iguais para encontrarmos o peso da girafa. Logo, cada parte equivale a 800. E, o peso do hipopótamo é o peso da girafa mais 1000, assim ele pesa 1800kg. Observe a comparação das barras para cada animal:

Portanto, o elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Estratégia 02 - Aritmética

Nesta estratégia, considerando que 4.000 é o peso do elefante e a girafa pesa $\frac{1}{5}$ de seu peso, podemos fazer a seguinte operação aritmética, para encontrarmos o peso da girafa:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 4.000 = 1.\frac{4000}{5} = 800$$

Seguindo essa estratégia, fica fácil de resolver o peso do hipopótamo, pois é só somar o peso da girafa com 1000:

$$800 + 1000 = \mathbf{1.800}$$

Concluímos que o peso do hipopótamo é 1.800kg.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma estratégia que use o valor desconhecido, isto é uma incógnita. Para facilitar a compreensão, sugerimos que seja atribuída a inicial de cada sujeito. Desta forma, elaboramos uma equação algébrica para cada animal, veja:

Elefante	Girafa	Hipopótamo
e	$g = \frac{e}{5}$	$h = g + 1000$
$\boldsymbol{e = 4.000}$	$g = \frac{e}{5}$ $g = \frac{4.000}{5}$ $\boldsymbol{g = 800}$	$h = g + 1000$ $h = 800 + 1000$ $\boldsymbol{h = 1.800}$

Considerando que ***e, g, h*** sejam as incógnitas referentes ao elefante, a girafa e ao hipopótamo respectivamente, interpretando o problema, sabemos que o valor de ***e*** corresponde a 4.000, em seguida, o valor de ***g*** é a quinta parte do elefante, assim representamos pela fração $\frac{e}{5}$, por fim, o valor de ***h*** é o peso da girafa mais 1000, logo, representamos os dados pela equação h = g + 1000.

Portanto, a resposta de cada equação é simultânea, a saber, dependem da primeira para encontrar o valor da próxima. Então, como temos o valor de **e**, primeira equação, substituímos na segunda encontrando ***g***, da mesma forma na última, substituímos o **g** para encontrarmos o ***h***.

Concluímos que o elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Sugestões para resposta:

1) O elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.
2) A girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Habilidades – BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 2.4 – Alunos do 4º Ano

Três quintos dos alunos no 4º ano "A" e três quartos dos alunos no 4º ano "B" são meninas. Ambas as turmas têm o mesmo número de meninas e o 4º ano "A" tem 8 meninos a mais do que a 4º ano "B". Quantos alunos têm no 4º ano "A"?

Interpretação

Sujeitos: 4º ano "A" e 4º ano "B".

Dados numéricos:

Temos, três quintos e três quartos que são representados pelas seguites frações:

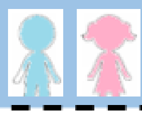
$\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano "A" são meninas

$\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano "B" são meninas

4º ano "A" tem 8 meninos a mais do que a 4º ano "B"

Incógnita: Quantos alunos têm no 4º ano "A"?

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

A partir da utilização de material concreto bonequinhos, adotados para esta estratégia, é possível chegar na seguinte solução.

Meninas	Meninos
	

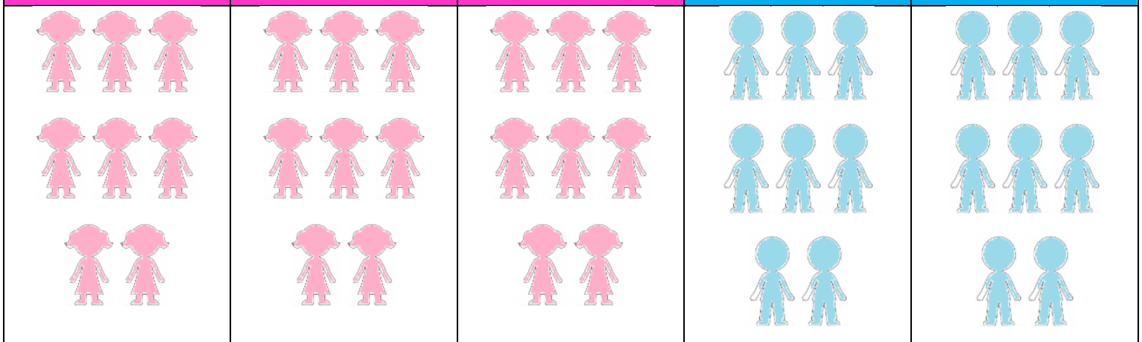
Sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano "A" são meninas.

$\frac{3}{5}$ meninas				

E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano “B” também são meninas.

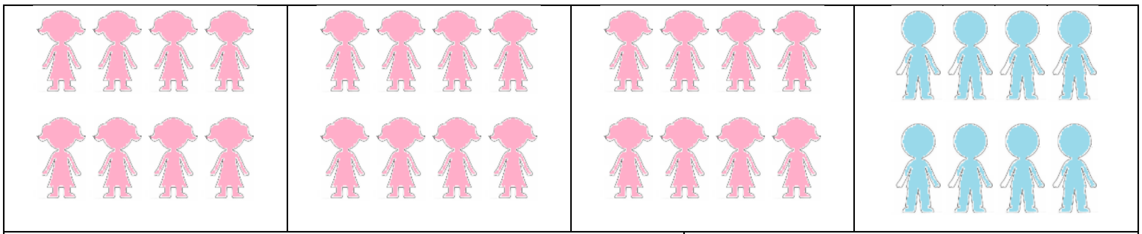
$\frac{3}{4}$ meninas			

No 4º ano “A” tem 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”. Desse modo, como as partes são iguais, deduzimos que este valor corresponde as demais. Assim, temos a seguinte representação para o 4º ano “A” com o material concreto.

4º ano “A”				
$\frac{3}{5}$ meninas				
8	8	8	8	8
				
8 + 8 + 8 = 24			8 + 8 = 16	
24 meninas + 16 meninos = 40 alunos				

E a representação para o 4º ano “B” com o material concreto.

4º ano “B”			
$\frac{3}{4}$ meninas			
8	8	8	8



8 + 8 + 8 = 24	8
24 meninas + 8 meninos = 32 alunos	

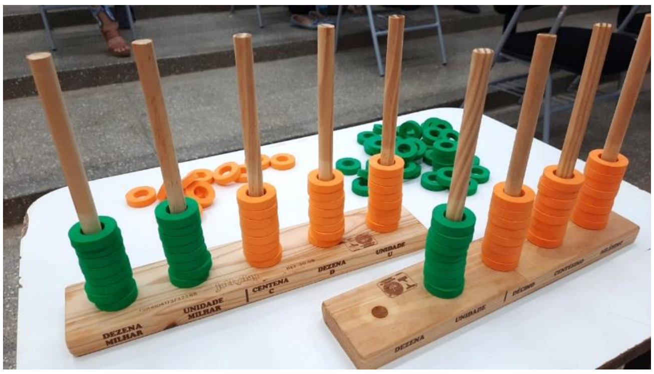
Portanto, o total de alunos que há em cada sala de aula é a soma dos meninos e das meninas, no 4º ano “A” temos 24 meninas e 16 meninos, totalizando 40 alunos. Já no 4º ano “B” temos 24 meninas e 8 meninos, totalizando 32 alunos.

Estratégia 02 – Utilizando Ábaco

A estratégia de resolução deste problema pode ser desenvolvida com a utilização do recurso pedagógico ábaco. Neste problema utilizaremos dois ábacos, um para representar a turma do 4º ano “A” e outro para a turma do 4º ano “B”.

Assim, com o auxílio do ábaco, sendo que este não foi utilizado pela sua função de classificar e ordenar, contudo usado como suporte representativo em que os pinos e o movimento das argolas podiam representar as quantidades do enunciado do problema.

Assim, representamos os dados numéricos do problema por meio das argolas, nos suportes, sendo a cor laranja representada pelo número de meninas, visto que ambas as turmas, o número de meninas é $\frac{3}{5}$ dos alunos, e a cor verde representada pelo número de meninos, conforme a imagem abaixo.



Reparem que há um ábaco com 5 pinos e o outro com 4 pinos, isso porque temos na turma do 4º ano “A” 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”. Desse modo, como as partes são iguais deduzimos que este valor corresponde as outras também.

Então, ao analisarmos as representações nos pinos de cada ábaco, percebemos que para o 4º ano “A” há 3 pinos com argolas laranjas e 2 pinos com argolas verdes, e para o 4º ano “B” há 3 pinos laranjas e um pino verde.

Desse modo, como cada pino tem 8 argolas, é possível chegar a quantidade de meninos e meninas de cada turma.

Portanto, é preciso somar as quantidades de argolas contidas em cada um dos pinos dos ábacos, logo, no ábaco de 5 pinos da turma do 4º ano A, tem 3 pinos laranjas e 2 verdes, sendo cada uma de valor 8, temos que há 24 meninas e 16 meninos. Já, no ábaco de 4 pinos da turma do 4º ano B, a soma das quantidades correspondentes dos 3 pinos laranjas e um verde equivalem a 24 meninas e 8 meninos.

Concluímos que o total de alunos do 4º ano A é 40 e o total de alunos do 4º ano B é 32.

Estratégia 03 – Utilizando Material Dourado

Sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano “A” são meninas, com o auxílio do material dourado a representação desses dados numéricos ficará da seguinte maneira.

$\frac{3}{5}$ são meninas no 4º ano “A”				
				8

E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano “B” também são meninas.

$\frac{3}{4}$ meninas			

Como cada parte é igual, e sabemos o valor de uma que é 8, é possível fazer uma representação utilizando material dourado, veja a seguir.

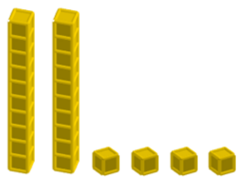
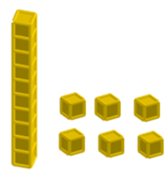
$\frac{3}{5}$ são meninas no 4º ano "A"				
				8
				

E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano "B" também são meninas.

$\frac{3}{4}$ meninas			
			

Para sabermos a quantidade de alunos de cada 4º ano e a representação com o material dourado, precisamos somar as quantidades dos meninos e das meninas. Dessa forma, para o 4 ano "A", somando os cubinhos da parte rosa que representam as meninas, temos 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), totalizando 24 (cubinhos). E, somando os cubinhos da parte azul, que representam os meninos temos 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), totalizando 16 (cubinhos).

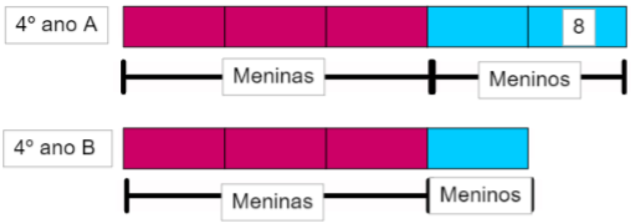
Portanto, o 4º ano tem 40 alunos, pois somamos 24 (cubinhos) mais 16 (cubinhos). Também podemos substituir 10 (cubinhos) por uma barra, então a representação poderá ser a seguinte:

$\frac{3}{5}$ são meninas no 4º ano "A"	
8 + 8 + 8 = 24	8 + 8 = 16
	

Estratégia 04 – Modelando com as Barras

Para modelar o problema a partir das barras, primeiramente, precisamos compreender que o todo tem cinco (5) partes, pois, sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano

“A” são meninas. Logo a representação desses dados numéricos ficará da seguinte maneira:



As três (3) partes rosas representam as meninas e as azuis os meninos. Reparem que na barra nomeada 4º ano “A” tem uma parte a mais equivalente a oito (8) porque esta sala tem meninos a mais do que a 4º ano B. Desse modo como as partes são iguais deduzimos que este valor corresponde às outras também.

Ao analisarmos as representações, verificamos que há três (3) partes rosas, duas (2) azuis para o 4º ano “A”, três (3) partes rosas e uma (1) azul para o 4º ano “B”.

Portanto, no 4º ano “A”, somando as quantidades correspondentes as três (3) partes rosas, duas (2) azuis, sendo cada uma de valor oito (8), há 24 meninas e 16 meninos. Já, no 4º ano “B”, a soma das quantidades correspondentes as três (3) partes rosas e uma (1) azul equivalem a 24 meninas e 8 meninos.

Concluímos que o total de alunos do 4º ano “A” é 40 e o total de alunos do 4º ano “B” é 32.

Estratégia 05 - Aritmética

Considerando que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano “A” são meninas, sabemos que há 5 partes iguais e, que o valor correspondente a essa parte é 8. Então, podemos resolver o problema pela soma dos produtos da multiplicação para obtermos o total de alunos, veja:

$$5 \; x \; 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$$

Da mesma forma, podemos fazer com os dados do 4º ano “B”, ou seja, $\frac{3}{4}$ corresponde a 4 partes iguais que equivalem a 8. Logo, temos como resultado da multiplicação a seguinte operação:

$$4 \; x \; 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32$$

Concluímos que o total de alunos do 4º ano "A" é 40 e o total de alunos do 4º ano "B" é 32.

Estratégia 06 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido, a incógnita. Pois, dependendo do aluno e dos professores isso poderá servir de motivação, para evidenciar que o problema pode ser resolvido de forma geral por uma equação. Sabemos que na sala do 4º ano "A" tem $\frac{3}{5}$ de meninas e o restante da sala corresponde aos meninos, sendo que uma parte dos meninos equivale a 8, como são duas partes temos o valor 16. E, no 4º ano "B" tem $\frac{3}{4}$ de meninas e o restante da sala corresponde aos meninos, que é representado em uma parte apenas, equivale ao valor 8. Assim, temos as seguintes equações algébricas:

4º ano "A"	4º ano "B"
$\frac{3}{5}x + 16 = x$ $5 . (\frac{3}{5}x + 16) = (x) . 5$ $3x + 80 = 5x$ $5x - 3x = 80$ $\frac{2}{2}x = \frac{80}{2}$ $\boldsymbol{x = 40}$	$\frac{3}{4}x + 8 = x$ $4 . (\frac{3}{4}x + 8) = (x) . 4$ x $3x + 32 = 4x$ $4x - 3x = 32$ $\boldsymbol{x = 32}$

Assim, a quantidade de alunos do 4º ano "A" é 40 e do 4º ano "B" é 32 alunos.

Sugestões para resposta:

1) Tem 24 meninas e 16 meninos no 4º ano "A", totalizando 40 alunos; e 24 meninas e 8 meninos no 4º ano "B", totalizando 32 alunos.
2) No 4º ano "A" tem 40 alunos e no 4º ano "B" tem 32 alunos.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 2.5 – Jogo de cartas

Todos os fins de semana a família Ferrari, primos e primas, se reúnem para jogar cartas, ganha o trio que fizer mais pontos. Na última jogada, foram fazer a somatória das cartas, constaram que Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana. Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza. Ao todo fizeram 261 pontos. Quantos pontos cada uma fez?

Interpretação

Sujeitos: Suzana, Mariana e Luíza.

Dados numéricos:

Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana.

Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza.

Total = 261 pontos.

Luíza =?

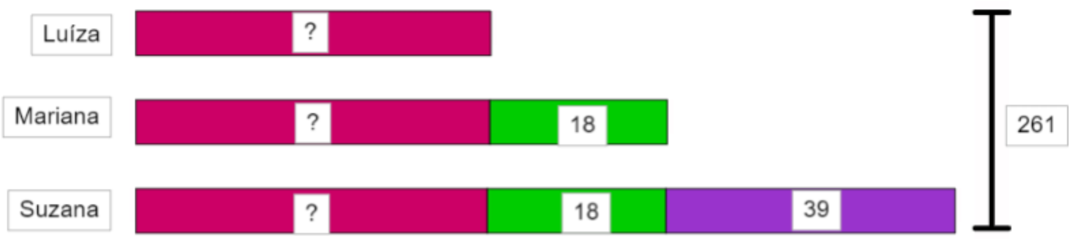
Incógnita: Quantos pontos cada uma fez?

> **Orientações**
>
> Se os estudantes tiverem dificuldades, peça que retomem às etapas de Pólya e avaliem sua construção.

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Para modelarmos este problema, precisamos iniciar com uma barra comparativa e que não tenha o valor definido, pois com ela facilitará a visualização nas demais. Então, como o problema não trouxe a pontuação de Luíza é por ela que iniciaremos, representada pela cor rosa.

Em seguida, temos que Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza, logo, representamos a barra de Luíza com mais uma barra a frente os 18 pontos, cor verde. E, por último, representamos Suzana com a barra de Luíza e Mariana mais uma nova barra de 39 pontos, cor roxa. Veja:



Observe que é possível encontrar os pontos de Luíza porque o total é 261 pontos. Então, diminuímos 18 mais 18 mais 39, ou seja, 75 pontos, e sobrarão 186 pontos que dividiremos por três (3), correspondente a 62 e distribuiremos à Luíza, Mariana e Suzana.

Portanto, descobrimos que Luíza fez 62 pontos, Mariana fez 62 mais 18, isto é, 80 pontos e Suzana fez 62 mais 18 mais 39, logo fez 119 pontos.

Estratégia 02 – Aritmética

Para resolver este problema de forma aritmetica, precisamos diminuir do total de pontos, 261, às pontuações que o problema nos traz.

Para isso, subtraímos dos 261 os pontos de Mariana, 18, e de Suzana, 57 (18 e 39), restando 186 pontos. Veja:

$$261 - 18 - 57 = \mathbf{186}$$

Em seguida, dividimos os pontos por 3 para encontrarmos o valor que é comum às três.

$$186 \div 3 = \mathbf{62}$$

Diante desse valor, encontramos a pontuação de Luíza, 62 pontos, de Mariana ao somarmos a pontuação de Luíza mais seus 18 que é igual a 80 pontos, e de Suzana com a pontuação de Luíza, 62 pontos, a de Mariana e mais seus 39 pontos com um total de 119 pontos.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido, a incógnita da seguinte maneira L = Luiza, L+18 = Mariana, L+18+L+18+39 = Suzana, assim juntando as representações, temos a seguinte equação:

$$\overbrace{L}^{Luíza} + \overbrace{L + 18}^{Mariana} + \overbrace{L + 18 + 39}^{Suzana} = 261$$

$$3L + 75 = 261$$

$$3L + 75 \; {\color{red}- 75} = 261 \; {\color{red}- 75}$$

$$3L = 186$$

$$\frac{3}{\color{red}3}L = \frac{186}{\color{red}3}$$

$$\boldsymbol{L = 62}$$

Agora, substituímos o valor da incógnita L a cada expressão para encontrarmos a pontuação correspondente de cada uma, veja:

Luiza	Mariana	Suzana
L	M = L+18	S = L+18+39
?	62+18 = 80	62+18+62+18+39 = 119

Portanto, a pontuação correspondente à Luíza foi 62 pontos, Mariana 80 pontos e Suzana 119 pontos.

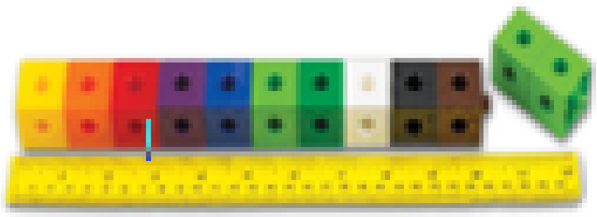
Sugestões para resposta:

1) Luíza fez 62, Mariana fez 80 e Suzana fez 119 pontos.
2) Do total de pontos do time, Luíza fez 62, Mariana fez 80 e Suzana fez 119 pontos.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA07), (EF05MA11), (EF06MA03).**

PROBLEMAS ANTES-DEPOIS



Muito bem!

Reservamos este último bloco para tratarmos de problemas, tipo antes-depois.

Se aplica quando a situação a que se refere o enunciado do problema implica em estado anterior e posterior, fornecendo alguns dados, em ambos os estados.

Assim, o modelo é aplicado quando o enunciado apresenta duas situações, separadas no tempo e com dados diferentes para cada uma delas. Este modelo, pouco diferente do modelo de comparação, diferencia-se deste pelo fato de anunciar dados de apenas um sujeito.

Neste bloco, daremos ênfase à representação dos números em porcentagem e das formas de representação dos números em Sistema de Numeração Decimal, nas quatro operações fundamentais da matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotada para resolução de problemas aritméticos.

Problema 3.1 – Tanque de combustível

Stela gastou três quintos do tanque de combustível e precisou colocar 36 litros, para completá-lo antes de enchê-lo. Quantos litros de combustível restavam no tanque?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), por se tratar de um problema mais complexo, recomendamos que inicie utilizando material dourado com os estudantes.

Lembre-se:

Informe aos estudantes que há uma relação entre as medidas de capacidade **litro** e **mililitro**. 1 litro equivale a 1000 mililitros.

Interpretação

Sujeito: Tanque de combustível.

Dados numéricos:

Gastou $\frac{3}{5}$ do tanque de combustível.

Colocar 36 litros.

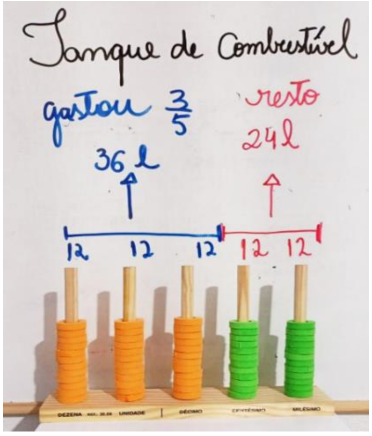
Incógnita: Quanto restava no tanque?

Estratégia 03 – Utilizando Ábaco

A estratégia de resolução deste problema pode ser desenvolvida com a utilização do recurso pedagógico ábaco. Neste problema utilizaremos o ábaco para representar o tanque de combustível.

Assim, o suporte do ábaco foi utilizado para representar o tanque de combustível, sendo que, cada pino representa a quinta parte do tanque de combustível. Em cada pino há 12 argolas, logo a parte laranja seriam os três quintos do tanque combustível que Stela gastou, ou seja, são 36 litros de combustível, já os dois quintos, parte verde, seriam os 24 litros restantes.

Lembrando que o ábaco foi utilizado não com a função de classificar e ordenar, contudo usado como suporte representativo em que os pinos e o movimento das argolas podiam representar as quantidades de litros, de cada parte do tanque de combustível.

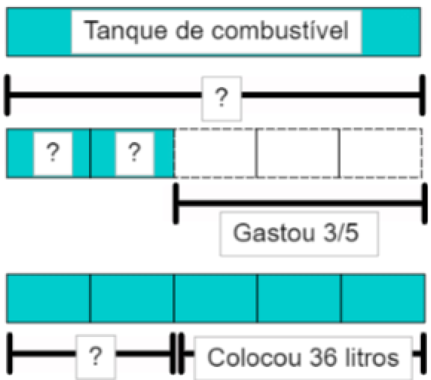


Assim, nessa estratégia, cada pino representa a quinta parte do tanque de combustível, como em cada pino há 12 argolas, logo a parte laranja seriam os três quintos do tanque combustível, que Stela gastou, ou seja, são 36 litros de combustível, já os dois quintos, parte verde, seriam os 24 litros restantes.

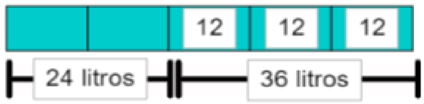
Portanto, a quantidade que restavam no tanque era 24 de litros de combustível.

Estratégia 02 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos o todo, tanque de combustível, lembrando que Stela gastou $\frac{3}{5}$ do combustível, representado pela barra branca, ou seja, a parte subtraída do todo. Levando em consideração que antes de encher o tanque ela precisou colocar 36 litros para completá-lo, conforme representado abaixo.



Assim, a modelagem com as barras permite definir que cada $\frac{1}{5}$ do tanque equivale a 12 litros, logo o que restou no tanque foram 24 litros.



Estratégia 03 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que:

$$\frac{3}{5} = 36\ litros$$
$$\frac{1}{5} = 12\ litros$$
$$\frac{2}{5} = 24\ litros$$
$$\mathbf{24\ litros}$$

Portanto, $\frac{2}{5}$ de combustível restante no tanque, corresponde a 24 litros.

Estratégia 04 – Iniciação à Álgebra

É possível representar algebricamente pela seguinte operação, veja:

$$\frac{3}{5} . x = 36$$
$$3x = 180$$
$$x = \frac{180}{3}$$
$$x = 60$$
$$\frac{2}{5} . 60 =$$
$$\frac{120}{5}$$
$$\boldsymbol{x = 24\ litros}$$

Portanto, a incógnita x equivale a 24 litros de combustível.

Sugestões para resposta:

a) Restavam 24 litros de combustível no tanque.
b) Antes de completar o tanque, restavam 24 litros de combustível.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA09).**

Problema 3.2 – Livro de Fábio

Do total das páginas de um livro Fábio leu um quinto no primeiro dia e metade do restante no segundo dia, num total de 360 páginas lidas nos dois dias. Nessas condições, qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?

Interpretação

Sujeito: Livro

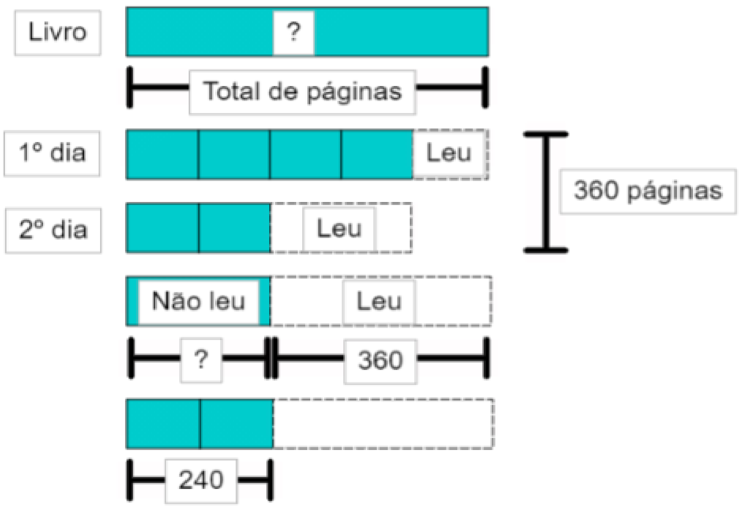
Dados numéricos:

Um quinto de páginas lidas no primeiro dia pode ser representado pela fração $\frac{1}{5}$.

A metade do restante de páginas lidas no segundo dia, que são dois quintos pode ser representado pela fração $\frac{2}{5}$.

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos o todo, o livro, cujo não sabemos o total de páginas, mas, temos a quantidade de páginas lidas em dois dias, assim a estrutura modelada do antes, livro inteiro, e do depois, livro com algumas páginas lidas, ficou da seguinte forma:



A modelagem com as barras permite visualizar que o livro foi dividido em cinco partes iguais e que três equivalem a 360 páginas. Dessa forma, é possível pela lógica compreender que cada parte vale 120, logo temos que restam 240 páginas para ler.

Estratégia 02 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que o total de páginas lidas por Fábio seja $\frac{1}{5}$ mais $\frac{2}{5}$, cuja soma resulta uma fração de $\frac{3}{5}$. Dessa forma, para encontrarmos o total de páginas do livro precisamos multiplicar os $\frac{3}{5}$ pelos 360, veja abaixo:

$$\frac{3}{5}\ de\ 360 = \frac{5.(360)}{3} = \frac{1.800}{3} = \boldsymbol{600\ páginas}$$

Agora, que encontramos o total de páginas do livro, 600 páginas, precisamos responder à pergunta do problema: *qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?*

Assim, diminuímos do total de páginas do livro a quantidade de páginas lidas, veja a seguir.

$$\text{Páginas não lidas} = \text{Páginas do livro} - \text{Páginas lidas}$$

$$\text{Páginas não lidas} = 600 - 360$$

$$\text{Páginas não lidas} = \boldsymbol{240\ páginas}$$

Portanto, ainda restam 240 páginas para Fábio ler do livro.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

Considerando que Fábio está lendo um livro e não sabemos qual a quantidade de páginas, precisamos encontrar esse total para diminuirmos a soma de um quinto, no primeiro dia, e dois quintos, no segundo dia, que representam o total de páginas lidas por Fábio. Assim, podemos representar algebricamente pela seguinte expressão, veja:

$$\overbrace{\frac{1}{5}}^{1°\ dia}x + \overbrace{\frac{2}{5}}^{2°\ dia}x = 360$$

$$\frac{x + 2x}{5} = 360$$

$$3x = 1800$$

$$\boldsymbol{x = 600}$$

Portanto, descobrimos o total de páginas do livro, 600 páginas, agora precisamos diminuir as páginas lidas por Fábio, 360 páginas, para encontrarmos quantas páginas faltam para serem lidas, conforme:

$$Faltam\ para\ ler = Total\ de\ páginas\ do\ livro - total\ de\ páginas\ lidas$$

$$600 - 360 =$$

$$\mathbf{240\ páginas}$$

Sugestões para resposta:

a) Fábio ainda tem 240 páginas para ler o livro.
b) Restam 240 páginas para Fábio ler todo o livro.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 3.3 – Fábrica de máscaras

Em uma fábrica de máscaras em Sinop-MT, tinha 750 unidades no estoque. Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras. Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira. Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras. Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?

Interpretação

Sujeitos: Estoque inicial e estoque final.

Dados numéricos:

750 unidades no estoque.

Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras.

Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira.

Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras.

Incógnita: Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Para a modelagem deste problema, primeiramente é preciso saber qual o estoque inicial e, a partir dele adicionando a quantidade que foram confeccionadas de máscaras. Veja:

Portanto, temos um estoque inicial de 750, onde foram confeccionadas em dois dias mais 1400 máscaras, como foram doadas 1500, o estoque reduziu para um total de 650 máscaras.

Estratégia 02 - Aritmética

Consideramos que a fábrica tinha 750 máscaras no estoque e foram confeccionadas 350 mais três vezes essa quantidade, chegamos à quantidade de 2.150 máscaras e foram doadas 1500 unidades.

Diante disso, para encontrar o estoque final equacionaremos os dados da seguinte maneira, observe que, para este problema utilizamos as incógnitas *Ef* que correspondem ao Estoque Final. Assim, temos:

$$Ef + 1.500 = 2.150$$
$$Ef + 1.500 - 1.500 = 2.150 - 1.500$$
$$\boldsymbol{Ef = 650\ \text{Máscaras}}$$

Portanto, a partir do total de máscaras confeccionadas, 2.150 há uma diferença de 1.500, reduzindo ao estoque final de 650 máscaras.

Sugestões para resposta:

1) Restaram 650 máscaras no estoque da fábrica.

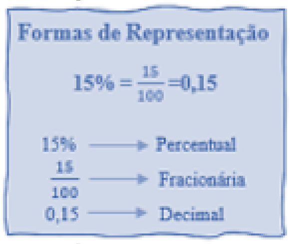
2) No estoque da fábrica restaram 650 máscaras.

Habilidades - BNCC	
HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA03).**

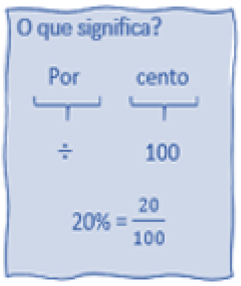
Problema 3.4 – Livro de Edson

Edson leu um livro de literatura em 4 semanas. Na primeira semana leu 25% das páginas, na segunda leu 30%, na terceira 40% e na quarta leu 17 páginas. Qual o total de páginas do livro?

Sugestão:



Na execução deste problema, sugerimos que aborde diferentes estratégias que possam ser utilizadas, como também apresente formas e representações diversas relacionadas a porcentagem, a saber, forma percentual, fracionária, decimal, cortando os zeros, representações geométricas, do conteúdo de porcentagem para desenvolver a autonomia do estudante ao resolver problemas, por exemplo.



Por exemplo:
$\frac{30}{100}$ caixas estavam com laranjas. Onde 100 representa o **total** de caixas e 30 a **parte** que estava com laranjas.

Caro colega Professor(a), lembre-se, nem todos os alunos possuem a mesma mente matemática, alguns compreendem melhor utilizando representações e desenhos, outras equações. Por isso, é importante que o problema seja abordado com diferentes estratégias para que o alcance da sua aula seja maior.

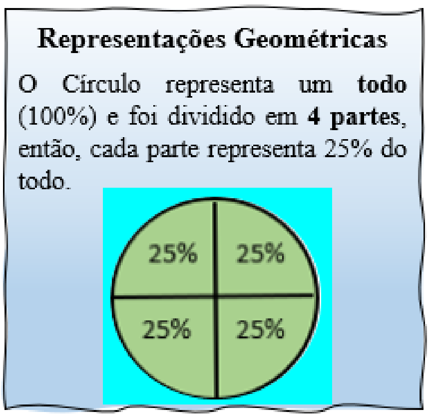
Como converter Porcentagem, Fração e Decimais:

O **INTEIRO** é sempre **100%**, então:

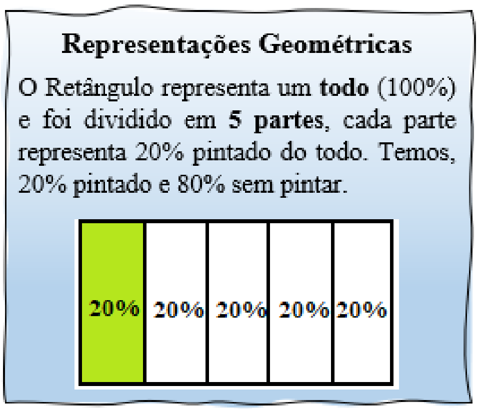
5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou 0,05

40% é o mesmo que $\frac{40}{100}$ ou 0,4

100% é o mesmo que $\frac{100}{100}$ ou 1,0



ou



Este problema foi elaborado para ser trabalhado no 5º e 6º ano, do Ensino Fundamental, com situações problema, envolvendo porcentagem. Para melhor visualização inserimos representações geométricas, veja:

Interpretação

Sujeito: livro de Literatura

Dados numéricos:

Leu um livro em 4 semanas.

1ª semana leu 25% das páginas.

2ª semana leu 30%.

3ª semana leu 40%.

4ª semana leu 17 páginas.

Quantas páginas tinha o livro?

Orientações

Este problema explora **Porcentagem**, e o símbolo que a representa é **%.**

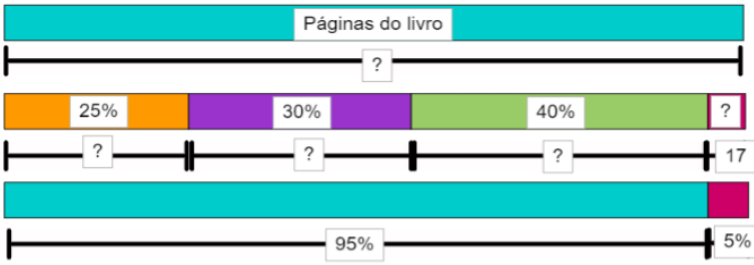
Definição

É uma representação de maneira prática do quanto de um **TODO** se está referenciando, em 100 unidades.

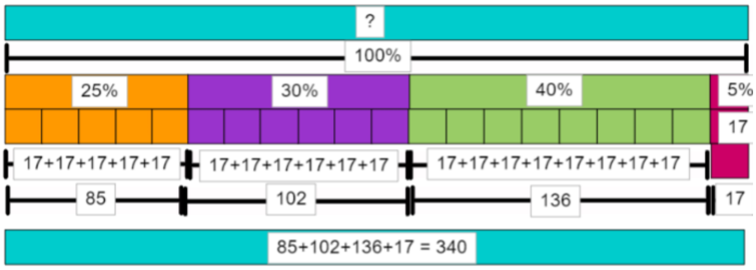
Estratégia 01 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos as páginas do livro na primeira barra, depois de forma gradativa distribuímos a porcentagem de cada semana, 25% da primeira semana, 30% da segunda semana, 40% da quarta semana e 17 páginas da quarta semana.

A partir da soma das porcentagens temos 95% e o restante, 5% consideramos que são as 17 páginas, representado conforme as barras abaixo, veja:



Assim, a modelagem com as barras permite definir que a cada 5% temos 17 páginas, isto é, na primeira semana temos 25%, então temos o 17 cinco vezes, o mesmo na segunda semana, 30%, o 17 seis vezes, e na última semana, 40%, o 17 oito vezes.



Portanto, ao somarmos o valor de cada porcentagem temos o total de páginas do livro, o equivalente a 340 páginas.

Estratégia 02 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que:

Livro			
1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
25%	30%	40%	5%
$\frac{25\%}{5\%}$ 5 x 17 **85**	$\frac{30\%}{5\%}$ 6 x 17 **102**	$\frac{40\%}{5\%}$ 8 x 17 **136**	17
85+102+136+17 = **340 páginas**			

Logo, temos o total de páginas de cada semana, agora, somamos todas e teremos o total de páginas do livro, portanto o livro tem 340 páginas.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível representar algebricamente pela seguinte operação, utilizamos a incógnita ‘p’ para representar as páginas, veja:

$$17 = \frac{5}{100}p$$

$$p = \frac{1700}{5}$$

$$\boldsymbol{p = 340\, páginas}$$

Portanto, a incógnita ‘p’ equivale a 340 páginas.

Sugestões para resposta:

a) O total de páginas do livro é 340.

b) O livro que Edson leu tem 340 páginas, no total.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA13).**

Problema 3.5 – Cartas de Antônio e Marcos

Antônio e Marcos são amigos desde a infância. Os amigos gostam de colecionar cartas. Antônio tinha metade das cartas de Marcos. Depois que Antônio deu 36 cartas a Marcos, o amigo ficou com 3 vezes mais cartas que ele. Quantas cartas eles têm agora?

Interpretação

Sujeitos: Antônio e Marcos.

Dados numéricos:

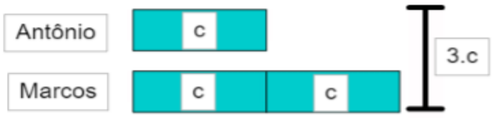
Não temos a quantidade de cartas de Antônio.

Não temos a quantidade de Cartas de Marcos.

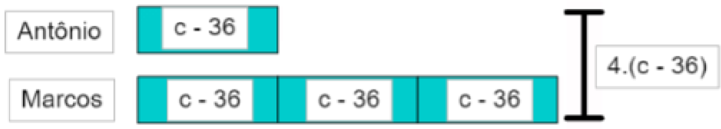
Incógnita: Quantas cartas eles têm agora?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

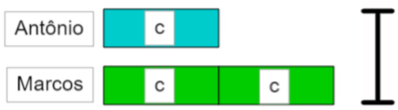
Neste problema, modelando a partir das barras, precisamos nos atentar que na primeira situação, temos que Antônio tem a metade de Marcos, representamos com a primeira barra. Assim, como não sabemos a quantidade de cartas colocamos a incógnita "c" que corresponde as cartas. Veja:

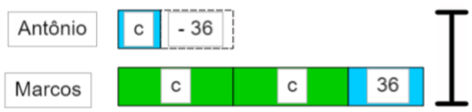


Para encontrarmos a quantidade de cartas dos amigos precisamos entender que Antônio deu 36 cartas, isto é, menos 36. Assim, cada parte corresponde a 'c' menos 36. Veja:



Esta modelação ajuda o aluno a compreender os dados referentes ao problema, por ter apenas um dado numérico. Contudo, podemos representar estes dados com outra modelação, observe:





Cartas de Marcos $= m$

$$m + 36 = 3.(\frac{m}{2} - 36)$$
$$m + 36 = \frac{3.m}{2} - 108$$
$$m + 36 = \frac{3.m - 216}{2}$$
$$2.m + 72 = 3.m - 216$$
$$2.m - 3.m + 72 - 72 = 3.m - 3.m - 216 - 72$$
$$(-1).-m = -288 . (-1)$$
$$\boldsymbol{m = 288\ cartas}$$

Cartas de Antônio = $\frac{m}{2}$

$$a = \frac{m}{2}$$
$$a = \frac{288}{2}$$

$$\boldsymbol{a = 144\ cartas}$$

Assim,

$$\text{Antônio} = c - 36$$
$$\text{Antônio} = 144 - 36$$
$$\textbf{Antônio} = \boldsymbol{108\ cartas}$$

$$Marcos = 3.(Antônio)$$
$$Marcos = 3.(108)$$
$$\boldsymbol{Marcos = 324\ cartas}$$

Logo, para sabermos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos têm juntos, fazemos a seguinte soma:

$$\text{Total de cartas} = \text{Marcos} + Antônio$$

$$\text{Total de cartas} = 108 + 324$$

$$\textbf{Total de cartas de Antônio e Marcos} = \boldsymbol{432\ cartas.}$$

Portanto, Antônio e Marcos tem juntos um total de 432 cartas.

Estratégia 02 - Iniciação à Álgebra

Para encontrarmos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos têm juntos será preciso, por uma incógnita às cartas, pois não sabemos a quantidade de nenhum dos sujeitos. Veja:

$$4.(c - 36) = 3.c$$
$$4.c - 144 = 3.c$$
$$4.c - 3.c = 144$$
$$\boldsymbol{c = 144\ cartas}$$

Como juntos eles têm 3.c, logo a quantidade de cartas é:

$$\text{Total de cartas de Antônio e Marcos} = 3.(144)$$

$$\textbf{Total de cartas de Antônio e Marcos} = \mathbf{432}\ \boldsymbol{cartas}$$

Estratégia 03 - Álgebra

Este problema pode ser resolvido por meio de estratégias algébricas, em que utilizamos incógnitas para encontrarmos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos. Para isso, foi desenvolvida uma equação algébrica para encontrarmos o total de cartas, conforme a representação algébrica abaixo, veja:

$$3.(c - 36) = 2.c + 36$$
$$3.\text{c} - 108 = 2.c + 36$$
$$3.\text{c} - 2.c - 108 + 108 = 2.c + 36 - 2.c + 108$$
$$c = 36 + 108$$
$$c = 144$$

Como Antônio tem 36 cartas a menos do que Marcos, substituímos, isto é, $c - 36$, então, o total de cartas menos os 36 corresponde:

$$\text{Antônio} = c - 36$$

$$\text{Antônio} = 144 - 36$$

$$\text{Antônio} = 108\ \text{cartas}$$

Já Marcos tem 36 cartas a mais do que Antônio, para saber o total de cartas é preciso substituir o valor de c na expressão $2.c + 36$, assim:

$$\text{Marcos} = 2.c + 36$$

$$\text{Marcos} = 2.(144) + 36$$

$$\text{Marcos} = 288 + 36$$

$$\text{Marcos} = 324\ cartas$$

Assim, para encontrarmos o total de cartas de Antônio e Marcos é preciso somar as quantidades que cada um tem, observe:

$$\text{Total de cartas} = \text{Marcos} + Antônio$$

$$\text{Total de cartas} = 108 + 324$$

$$\text{Total de cartas} = 432$$

Portanto, o total de cartas é o resultado da soma da quantidade das cartas de Antônio e da quantidade de cartas de Marcos, logo, o total é 432 cartas.

Sugestões para resposta:

1) Eles têm 432 cartas agora.
2) Antônio e Marcos têm 432 cartas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09).**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As experiências e as reflexões oriundas do presente trabalho nos mostram que seu conteúdo constitui como algo inovador, convidativo, prático, dinâmico e esclarecedor.

Mostra-se inovador, pois apresenta um recurso ainda insipiente no ensino e aprendizagem no segundo ciclo na cidade de Sinop (MT) e região, qual seja, o Modelo de Barras.

Caracteriza-se como convidativo para o professor que ensina matemática, apresentando subsídios para melhorar e aprimorar do repertório docente.

Prático, uma vez que o docente poderá aplicar o recurso Modelo de Barras em sala de aula.

Dinâmico, sendo que o recurso Modelo de Barras associa outras estratégias pedagógica, como a abordagem concreto – pictórico – abstrato.

Esclarecedor, enaltecendo explicações pertinentes aos tipos de problemas, parte-todo, comparação e antes-depois.

Acreditamos ser oportuno enfatizar que o recurso Modelo de Barras serve como disparador de estratégias pedagógicas, sistematizando o modo de ensinar e de aprender matemática.

A realização da pesquisa e a elaboração do presente livro intercambiam e mostram, como parte de um processo de formação docente, proporcionando à professora-mestranda, consciência de sua experiência profissional, das possibilidades e dificuldades de sua prática, um caminho profícuo de fortalecimento de seu desenvolvimento profissional, uma das metas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática - PPGECM.

Os recursos educativos têm se constituído como um acervo elaborado pelos próprios profissionais, e que possibilita, à Educação Básica, um apoio diante de seus múltiplos desafios. Sua divulgação, nos devidos moldes, para que seja disponibilizado aos professores, requer vínculos contínuos entre Universidade e Escola Básica, o que só enriquece os propósitos formativos das duas Instituições.

Com este estudo, esperamos contribuir com as reflexões que a área realiza quanto às especificidades do Mestrado Profissional, pelas metodologias que utiliza e pelos seus objetivos, necessariamente articulando pesquisa e elaboração de produto educacional. A experiência e estudo, os desdobramentos das orientações, se mostram como desafios na Universidade.

Sugerimos que este livro seja utilizado para realização de atividades dentro e fora da sala de aula. Esperamos, com sua ajuda, fazer deste objeto de estudo do aluno, levando-o ao interesse de participar ativamente das aulas.

Somando esforços, este material será o primeiro de muitos e, com certeza, poderá ser uma importante ferramenta para fortalecer sua prática em sala de aula. Assim, nós o convidamos para juntos, buscarmos o aperfeiçoamento de ações educacionais, com vistas à melhoria dos nossos indicadores, proporcionando uma educação justa e de qualidade.

A proposta deste trabalho é de movimentação e a sua participação, professor, neste movimento é importante para a continuidade da pesquisa, do ensino e das diferentes estratégias na resolução de problemas perpassando o concreto, o pictórico e o abstrato.

Saber ensinar implica em economizar tempo e alcançar boa parte do espectro da sala de aula; implica ao professor em atender e acompanhar individualmente o aluno; implica em não aceitar o conhecimento matemático como um produto acabado; enfim, implica em uma maior produtividade no ensino e na aprendizagem.

Desde já, agradecemos a atenção, carinho e contribuições!

BIBLIOGRAFIA

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

CABRAL, J. **O Método Kumon versus método de Singapura no ensino da Matemática**. Artigo de Doutorado em Matemática pela Universidade dos Açores, Portugal, 2015.

DA SILVA, Mirian Ramos; ANDRADE, Mirian Maria. As contribuições das Tecnologias de Informação e Comunicação para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica: um estudo a partir de trabalhos disponíveis no CREMM. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 9, p. 146-163, 2014.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas Em Aritmética E Álgebra** P/O Séc. XXI. Papirus Editora, 1997.

MATH PLAYGROUND. Site em Inglês. Disponível em https://www.mathplayground.com/thinking_blocks_modeling_tool/index.html. Último acesso 02 de mar. de 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, J. C. M. Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura. **Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em:** https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7680671. Acesso em: 09 jul. 2020.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1. Em um sítio há 1200 aves, metade das aves são galinhas, 1/3 são Perus e o restante são patos. Quantas aves existem entre galinhas e patos?

2. Dois quintos dos peixes em um grande aquário são peixes dourados. Há 6 pintados a mais do que peixes dourados no aquário. Os 12 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

3. Júlia plantou 1/4 de sua horta com cenouras, 1/5 com tomates e o restante com beterrabas. Que parte da horta foi plantada com beterrabas?

4. Andreia tinha alguns reais em sua carteira. Antes de ir ao supermercado, sua mãe lhe deu 184 reais. Chegando lá, Andreia percebeu que perdera 69 reais no caminho, ficando com 181 reais ao todo. Quantos reais Andreia tinha inicialmente em sua carteira?

5. Mariana gastou 3/4 de suas economias em um presente para sua mãe e lhe sobraram R$ 250,00. Quanto dinheiro Mariana havia economizado?

6. Na Pastelaria Sinop são feitos 385 pastéis por dia. Quantos pastéis serão produzidos em 7 dias?

7. No 6º ano há 18 alunos a menos do que no 5º ano. No 5º ano há 15 alunos a mais do que no 4º ano. No 4º ano há 48 alunos. Quantos alunos há no 6º ano?

8. Na casa de Marcelo estão trocando os azulejos da cozinha. Será preciso 3 caixas de azulejos brancos e 5 caixas de azulejos pretos. Cada caixa vem com 10 azulejos. Quantos azulejos pretos necessitam a mais que os brancos?

9. Nove torneiras abertas durante 40 horas consumiram 200 litros de água. Quantos litros de água doze torneiras consomem durante 6 horas?

10. Alice tem o dobro do dinheiro de Lucas. Os dois juntos têm R$ 300,00. Quanto dinheiro Lucas tem? Quanto dinheiro Alice tem?

11. Stela e Cláudia estão fazendo abdominais. Cláudia fez 17 abdominais a menos do que Stela. Sendo que Stela fez 69 abdominais. Quantas abdominais Cláudia fez?

12. Uma ovelha pesa 87 kg. Um leão pesa 96 kg a mais do que a ovelha. Uma zebra pesa 141 kg a mais do que o leão. Quanto pesa a zebra?

13. Uma papelaria tinha um estoque de 1700 mochilas e não conseguia vendê-las. Então, o dono resolveu abaixar o preço. Na manhã deste dia, vendeu 382 mochilas. A notícia se espalhou e à tarde ele vendeu 790. Quantas mochilas sobraram no estoque?

14. Em uma loja de tecidos tinha em janeiro de 2017 um estoque de 5300 metros de certo tecido a cada mês o estoque diminuiu exatamente 300 metros. Em que mês e ano o estoque era igual a 1400 metros? Em que mês e ano acabou todo estoque? Se cada metro é vendido

a R$25,00 determine o faturamento obtido cm a venda deste tecido no mês de julho de 2017.

15. Sara tinha R$ 54,00 e doou 2/3 do dinheiro que tinha para um mendigo. Quanto dinheiro Sara doou?

16. Mariana gastou 3/4 de suas economias em um presente para sua mãe e lhe sobraram R$ 250,00. Quanto dinheiro Mariana havia economizado?

17. Luíza tem um álbum com 1200 figurinhas. Se ela quiser dar 220 figurinhas à sua irmã e 350 à sua prima, quantas figurinhas restarão à Luíza?

18. A bengala do meu avô tem 130 centímetros de comprimento, como ele vai deixar para meu pai que é mais baixo precisará cortar 85 centímetros. Depois de cortar, qual será o comprimento da bengala?

19. Na festa de aniversário de João seu pai o presenteou com R$ 180,00 e mãe com R$ 140,00. Com esse dinheiro, ele comprou três tênis do mesmo valor, mas com cores diferentes. Qual o valor de cada um deles?

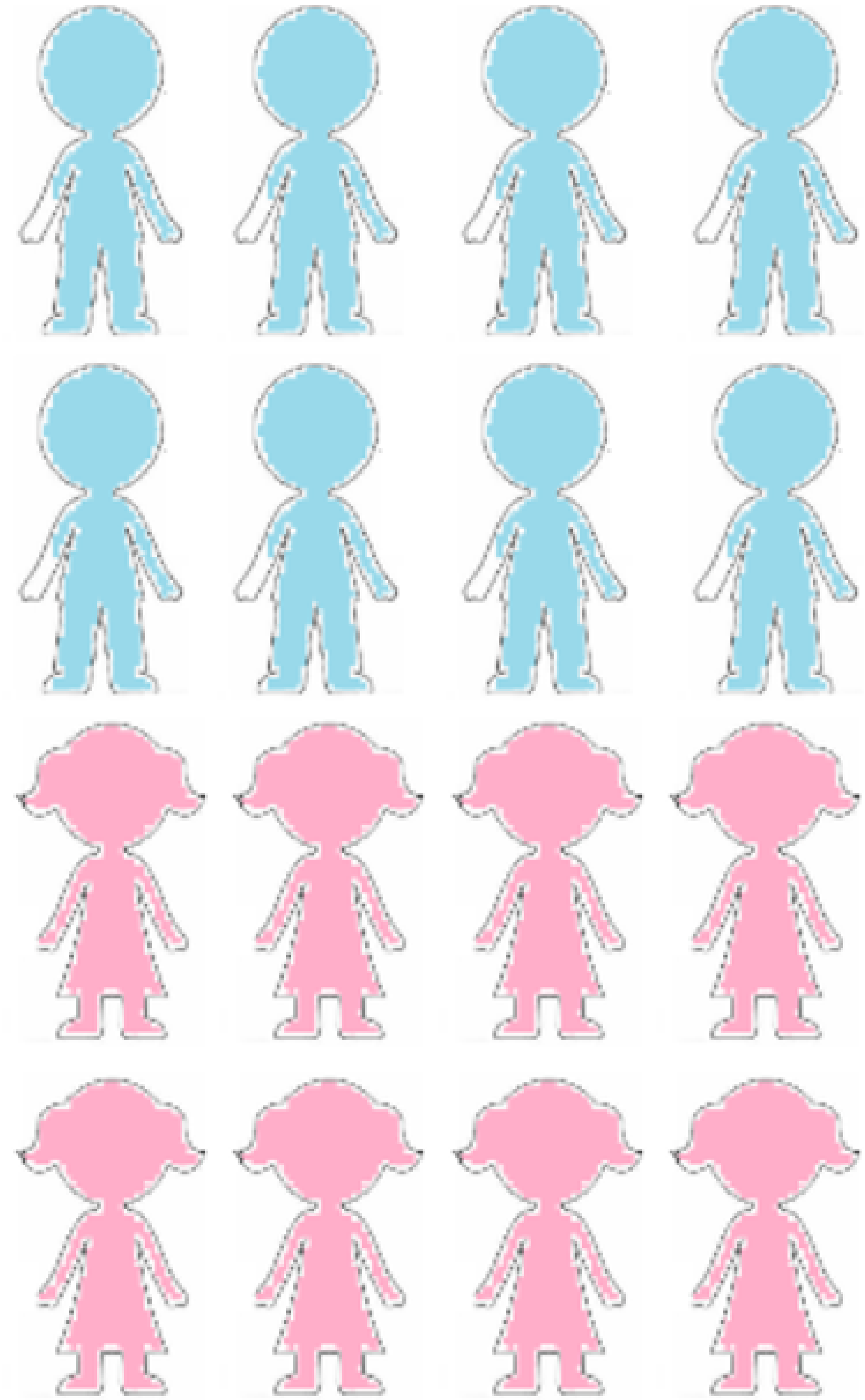
20. Do total das páginas de um livro Fábio leu 1/5 no primeiro dia e metade do restante no segundo dia, num total de 360 páginas lidas nos dois dias. Nessas condições, qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?

FICHA DE AVALIAÇÃO

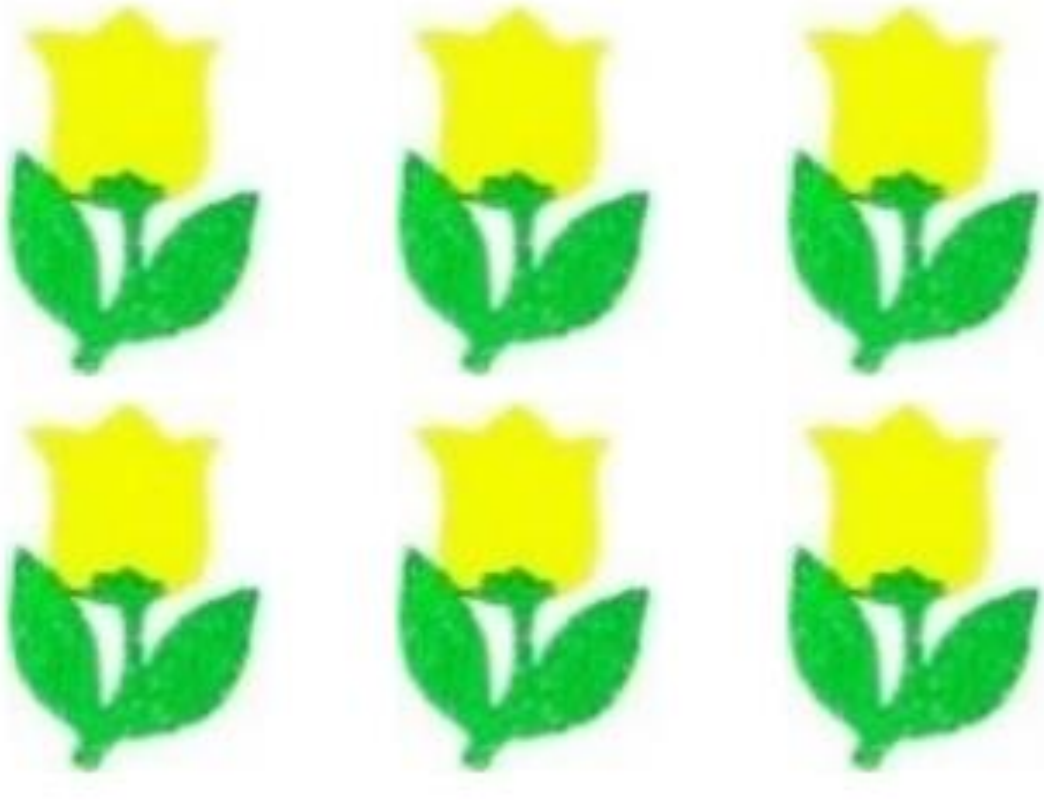
ETAPA	Habilidade	SIM	EM PARTE	NÃO	OBSERVAÇÃO
1ª Etapa[1]	Registrou os dados essenciais corretamente				
	Identificou o que precisa ser calculado				
2ª Etapa[2]	Representou corretamente um Modelo de Barras usando seus dados				
	Equacionou corretamente usando ou não Modelo de Barras, com seus dados				
3ª Etapa[3]	Resolveu sem erros a equação que considerou				
4ª Etapa[4]	Confirmou a resposta na equação				
	Interpretou a reposta dentro do enunciado do problema				

[1] Leitura e Compreensão dos dados
[2] Estratégia e Modelagem do problema
[3] Execução da estratégia
[4] Revisão

ENCARTES PARA RECORTAR - Bonequinhos



ENCARTES PARA RECORTAR – Rosas e Tulipas



ENCARTES PARA RECORTAR – Peixes












ENCARTES PARA RECORTAR - Codornas e Coelhos












SOBRE A AUTORA

Sou **Stela Maris Ferrari Streit.** Nasci em Portelândia – Goiás em 1990. Iniciei e conclui meus estudos da Educação Básica em escola pública. Desde pequena sou apaixonada pela Matemática. Tanto que acabei por fazer licenciatura e mestrado nesta área. Tenho experiência na área da matemática escolar na Educação Básica. Atuo como professora há 8 anos e no momento exerço docência em redes de ensino privado, escola e faculdade em Sinop – Mato Grosso. Minha linha de pesquisa é no ensino de Matemática, em especial, na formação de professores.

Stela Maris Ferrari Streit. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2303-6375. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7554220020859562. Licenciada (2015) em Pedagogia pelo Instituto Superior Albert Einstein – ISALBE. Mestranda do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da natureza e Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) campus universitário de Sinop. Professora do Colégio Marista Santo Antônio. Sinop, mato Grosso, Brasil, e-mail: stela_mfs@outlook.com.

SOBRE SEU ORIENTADOR

Este ao meu lado **DIREITO** é meu querido orientador, Professor **Dr. Edson Pereira Barbosa.** Um grande professor, seu carisma me motivou a encarar o desafio da pesquisa na Pós-Graduação. Obrigada sempre professor por ser um incentivador e por ter contribuído na minha vida profissional. Descrevo-o pouco aqui, porque as palavras de gratidão não cabem em uma página.

Edson Pereira Barbosa. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-5418-009X . Lattes: http://lattes.cnpq. br/3184651096945519 . Licenciado em Matemática (UNEMAT), Especialista em Matemática (UNICAMP), Mestre em Educação (UFMT) e Doutor em Educação Matemática (UNESP/ Rio Claro). Professor da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), do Instituto de Ciências Naturais Humanas e Sociais (ICNHS), no Curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) com pesquisas nas áreas de Educação Matemática e Formação de Professores. Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: edsonpbmt@gmail.com.