Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Carmen Simone dos Santos Lopes

ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO COM NÚMEROS NATURAIS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Parauapebas-PA
2023

Carmen Simone dos Santos Lopes

ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO COM NÚMEROS NATURAIS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará, como requisito obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.
Linha: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Parauapebas-PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Lopes, Carmen Simone dos

Ensino de resolução de problemas do campo conceitual multiplicativo com números naturais por atividades experimentais / Carmem Simone dos Santos Lopes, orientador Pedro Franco de Sá. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Matemática-Problemas, exercícios, etc.2.Atividades experimentais. I. Sá, Pedro Franco de (orient.). II. Título.

CDD23 ed. 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

Carmen Simone dos Santos Lopes

ENSINO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO COM NÚMEROS NATURAIS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada cumo requisito para obtenção do titulo de Mestre cm Ensino de Matemática pelo Programa de Pús-Gadiiação cm Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação. 21/12/2023

Banca examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
PEDRO FRANCO DE SA
Data: 15/01/2024 20:09:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br
_______________ Orientador

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação — Universidade Federal do Rio Grande doNorte / UFRN
Universidade do Estado do Pará - UEPA

gov.br Documento assinado digitalmente
MARIA DE LOURDES SILVA SANTOS
Data: 16/02/2024 11:27:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br
_______________. Examinador Interno

Profª Drª. Maria de Lourdes Silva Santos
Doutora em Educação — Pontificia Universidade Católica - PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará - UEPA

gov.br Documento assinado digitalmente
MARIA APARECIDA DA SILVA RUFINO
Data: 09/01/2024 23:52:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br
_______________. Examinador Externo

Profª Drª Maria Aparecida da Silva Rufino
Doutora em Ciências e Matemática — Universidad de Burgos - UBU
Universidade de Pernambuco / UPE

Parauapebas — PA

2023

DEDICATÓRIA

À minha família, especialmente aos meus pais, **Maria de Jesus dos Santos Lopes** e **Gregório de Oliveira Lopes**, a minha filha **Gabrielle Aparecida Lopes de Paulo** e aos irmãos **Marcos Venício dos Santos Lopes** e **Rosimeire Maria do Nascimento Silva**.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, culminando na conclusão desta dissertação de mestrado.

Primeiramente, desejo manifestar minha gratidão a Deus por orientar meus passos e proporcionar-me força e inspiração ao longo dessa jornada. À minha família, em especial aos meus pais, minha filha e meus irmãos, apresento minha eterna gratidão pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão durante os períodos desafiadores deste mestrado. Seu amor e encorajamento foram a força motriz por trás desta conquista.

À Universidade do Estado do Pará - UEPA e todo corpo de funcionários do PPGEM/UEPA, por disporem do seu tempo para um atendimento sempre solícito e eficiente.

Agradeço sinceramente aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM/UEPA). Suas orientações, expertise e entusiasmo pela área foram elementos enriquecedores em minha trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, Professor Dr. Pedro Franco de Sá, pela orientação sábia, paciência e apoio contínuo ao longo deste processo. Sua expertise e insights foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo, e sou imensamente grata pela oportunidade de aprender com sua sabedoria.

À minha comissão examinadora, composta pelos professores Professora Drª Maria de Lourdes Silva Santos e Professora Drª Maria Aparecida da Silva Rufino, agradeço a avaliação cuidadosa e pelos valiosos comentários que enriqueceram significativamente este trabalho. Suas sugestões foram essenciais para aprimorar a qualidade da pesquisa.

Gostaria de manifestar minha profunda gratidão à Prefeitura Municipal de Parauapebas, cujo apoio possibilitou a realização deste curso de mestrado. Quero expressar meu reconhecimento pela dedicação notável dessa instituição à educação e ao aprimoramento de habilidades, ciente de que seus investimentos nessa área geram impactos significativos a longo prazo.

Aos meus colegas de curso, agradeço pela colaboração, troca de ideias e pelo ambiente estimulante que proporcionaram ao longo dessa jornada acadêmica. As

discussões e debates foram cruciais para o desenvolvimento das ideias apresentadas nesta dissertação.

Por fim, quero dedicar este trabalho aos meus amigos e entes queridos que estiveram ao meu lado, oferecendo palavras de ânimo e celebrando cada pequena vitória ao longo dessa jornada acadêmica.

Cada um de vocês desempenhou um papel fundamental no meu crescimento acadêmico e pessoal, e sou grato por cada contribuição, por menor que seja.

Obrigado a todos que fizeram parte desta jornada.

RESUMO

LOPES, Carmen Simone dos Santos. **Ensino de Resolução de Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo com Números Naturais por Atividades Experimentais**. 2023. 333f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa, cujo objetivo foi analisar possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 6º ano do ensino fundamental na resolução de questões envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais. A questão de pesquisa do estudo foi, quais os possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes de uma turma do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas multiplicativos com números naturais? Seu aporte teórico foi a teoria dos campos conceituais, o campo conceitual multiplicativo e o ensino por atividades experimentais. O percurso escolhido para este trabalho considera os pressupostos da engenharia didática como metodologia de pesquisa, abordando todas as suas etapas: análises prévias, análises a priori, experimentação, análises a posteriori e validação. A experimentação e a coleta de informações, foram obtidas com os alunos de uma turma do 6º ano de uma escola municipal de Parauapebas (PA). A análise e validação dos resultados ocorreu por meio dos dados coletados mediante a verificação dos registros das conclusões dos alunos em cada atividade realizada, através da comparação dos resultados do pós-teste em relação ao pré-teste; análise dos erros ocorridos no pós-teste, pela aplicação do Teste Exato de Fisher, V de Cramer e do Teste de Hipóteses para amostras pareadas. Os principais resultados obtidos mostraram que a elaboração da sentença de modelação foi relevante para a escolha adequada da operação. Os resultados da comparação percentual mostraram um aumento significativo das notas nos pós-testes. Os resultados obtidos pelo Teste Exato de Fisher e o V de Cramer comprovaram que os fatores socioeducacionais não interferiram na escolha da operação, visto que a correlação medida pelo V Cramer nos testes multiplicativos mostrou que a correlação foi de fraca à moderada. O Teste de Hipóteses comprovou estatisticamente que o aumento das notas no pós-teste sucedeu em função da aplicação da sequência didática utilizada, concluindo que as metodologias usadas estão diretamente relacionadas ao resultado obtido no experimento, de forma que corroborou para a concepção do nosso produto educacional. Com base nos resultados do estudo foi elaborado um produto educacional, na forma de sequência didática, intitulado: O Ensino de Resolução de Problemas Multiplicativos com Números Naturais por meio de Atividades Experimentais, que foi validada experimentalmente e está disponível no formato de livro digital na Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA.

Palavras-chave: Ensino de matemática por Atividades Experimentais. Engenharia Didática. Problemas do campo conceitual multiplicativo. Problemas Aritméticos. Problemas algébricos.

ABSTRACT

LOPES, Carmen Simone dos Santos. Teaching Problem Solving in the Multiplicative Conceptual Field with Natural Numbers through Experimental Activities. 2023. 334f. Dissertation (Master's in Mathematics Teaching) – State University of Pará, Belém, 2023.

This work presents the results of a research, the objective of which was to analyze the possible effects of applying a didactic sequence based on the teaching of mathematics through experimental activities on the performance of students in the 6th year of elementary school in solving questions involving the multiplicative conceptual field. with natural numbers. The research question of the study was what type of effect can the application of a didactic sequence through experimental activities have on the performance of students in a 6th year elementary school class in solving multiplicative problems with natural numbers? Its theoretical contribution was the theory of conceptual fields, the multiplicative conceptual field and teaching through experimental activities. The path chosen for this work considers the assumptions of didactic engineering as a research methodology, addressing all its stages: prior analyses, a priori analyses, experimentation, a posteriori analyzes and validation. The experimentation and information collection were obtained with students from two 6th year classes at a municipal school in Parauapebas (PA). The analysis and validation of the results occurred through the data collected by checking the records of the students' conclusions in each activity carried out, through the comparison of the post-test results in relation to the pre-test; analysis of errors occurring in the post-test, by applying Fisher's Exact Test, Cramer's V and the Hypothesis Test for paired samples. The main results obtained showed that the elaboration of the modeling sentence was relevant for the appropriate choice of the operation. The results of the percentage comparison showed a significant increase in post-test scores. The results obtained by Fisher's Exact Test and Cramer's V proved that socio-educational factors did not interfere in the choice of operation, since the correlation measured by Cramer's V in the multiplicative tests showed that the correlation was weak to moderate. The Hypothesis Test statistically proved that the increase in grades in the post-test was due to the application of the didactic sequence used, concluding that the methodologies used are directly related to the result obtained in the experiment, in a way that corroborated the design of our educational product. Based on the results of the study, an educational product was created, in the form of a didactic sequence, entitled: Teaching Multiplicative Problem Solving with Natural Numbers through Experimental Activities, which was experimentally validated and is available in digital book format at the CCSE/UEPA Library, Belém – PA.

Keywords: Teaching mathematics through Experimental Activities. Didactic Engineering. Problems in the multiplicative conceptual field. Arithmetic Problems. Algebraic problems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A seleção deste tema, Ensino de Resolução de Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo com Números Naturais por Atividades Experimentais é justificada pelo fato de vários estudos evidenciarem como um obstáculo didático na aprendizagem do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, a ação deliberada do professor em persistir em apresentar a multiplicação exclusivamente como à adição de parcelas iguais, assim como, a divisão como múltiplas subtrações sucessivas.

De fato, isso pode obstaculizar a compreensão dos alunos sobre multiplicação e de seus significados. Portanto, naturalmente, no ato de conhecer, o indivíduo é resistente às inovações em favor do conhecimento previamente estabelecido. Conforme coloca Bachelard (1996), o pior obstáculo é o da experiência primeira. Além disso, no âmbito da matemática, o obstáculo da generalização prematura, tem uma relação direta com o baixo desempenho na resolução de problemas. Não sendo diferente com os problemas do campo multiplicativo.

Essa concepção ocorre, devido a maneira como esses conceitos são apresentados aos estudantes. É importante destacar que um obstáculo didático é uma barreira à aprendizagem que surge do próprio processo de ensino e da formação docente. Os obstáculos didáticos são aqueles que “parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo” (Brousseau, 1983, p. 176. *In*: Almouloud, 2007, p. 141), ocorrem a partir da escolha das estratégias de ensino do professor.

Para Brousseau, um obstáculo consistia em um conjunto de desafios associados a um conhecimento que foi ajustado de maneira específica, porém, para uma circunstância específica ou em condições particulares. Quando surge uma nova situação, acompanhada da necessidade de mudanças significativas e adaptações inovadoras, esse conhecimento se transforma em um obstáculo, pois o indivíduo opõe resistência às inovações em favor do conhecimento previamente estabelecido.

No presente momento, uma abordagem por meio da Resolução de Problemas é recomendada como ponto inicial para o ensino e aquisição de conhecimentos em matemática (Brasil, 1998, p. 16). Nesse contexto, é essencial que essa habilidade seja cultivada desde os primeiros anos da Educação Fundamental, para que ao final dessa etapa os alunos habilitados tenham a capacidade de empregar diversas estratégias na solução de desafios matemáticos.

De acordo com Santos (2017, p. 21), “resolver problemas matemáticos faz parte do cotidiano das pessoas e ter a habilidade de solucioná-los traz independência e autonomia”. Sendo assim, a aquisição dos conhecimentos numéricos, das suas operações e desafios relacionados a eles, emerge como um pilar essencial para o progresso das atividades do dia a dia dos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental enfatiza a capacidade dos alunos em empregar conceitos e procedimentos matemáticos para solucionar problemas contextualizados, visando criar um conhecimento matemático relevante para sua vida. Essa abordagem deriva da história da matemática, moldada pela necessidade humana de resolver desafios da realidade. Uma das habilidades que pode ser encontrada na BNCC do Ensino Fundamental a respeito da resolução de problemas é:

> (EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros (Brasil, 2018, p. 285).

Para os anos finais do ensino fundamental, a BNCC indica, na terceira habilidade da disciplina de matemática para o 6º ano do ensino fundamental, que o aluno necessita “resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora” (Brasil, 2017, p. 299). Para essa finalidade, é crucial perceber que processo de resolução de problemas excede o limite de uma simples aplicação de algoritmos.

Um outro documento que trata do mesmo assunto é a Matriz de Referência de Avaliação para a disciplina de Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental, na Prova Brasil, afirmando que ao tratar do tópico Números e Operações, define no Descritor 20 (D20) que através do ensino do campo multiplicativo nos anos iniciais, os alunos precisam ter a habilidade de “Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, disposição retangular e combinatória” (Brasil, 2015, p. 58).

Apesar da resolução de problemas ser parte do currículo desde o ensino fundamental I, muitos alunos continuam a enfrentar dificuldades no ensino fundamental II e muitas vezes, perduram, por um longo período, senão por toda a vida acadêmica. Dificuldade que é em especial, na resolução de problemas no qual exige o uso das operações de multiplicação e divisão. Essa é uma realidade que pudemos presenciar durante os muitos anos que temos de docência em escolas privadas, públicas municipais e estaduais, onde trabalhamos em diferentes series ou anos, incluindo o ensino fundamental, ensino médio e técnico.

Em meio a nossa prática pedagógica como docente, observamos grande dificuldade dos discentes em resolver situações-problemas que envolvem as operações de multiplicação e divisão com números naturais, com destaque na leitura e interpretação da questão, na elaboração da sentença matemática, a dificuldade em identificar a operação adequada para solucionar as situações-problemas do campo conceitual multiplicativo com números naturais, multiplicação com reserva, significado semântico da operação divisão de dois números naturais, divisão sem zero no quociente, divisão com zero no quociente. Bem como, temos buscado, no âmbito da sala de aula, usar metodologias de ensino que consigam minimizar o quadro de dificuldades de aprendizagens apresentadas pelos alunos. Assim, é recomendável fortalecer o alicerce acadêmico dos alunos, capacitando-os a adquirir a independência e o estímulo essencial para enfrentar e superar os obstáculos associados a esse tópico.

Com base no que foi mencionado, formulamos a seguinte questão norteadora: **Quais os possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes de uma turma do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas multiplicativos com números naturais?** Com esse propósito, definimos como objetivo geral do processo investigativo, analisar os possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 6º ano do ensino fundamental na resolução de questões envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais. E como objetivos específicos, buscamos identificar os erros cometidos pelos discentes do 6º ano na resolução de problemas multiplicativos com números naturais, assim como analisar as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos discentes do 6º ano na resolução de problemas multiplicativos com números naturais.

Para abordar essa indagação, utilizamos os fundamentos da Engenharia Didática (ED), com base nas perspectivas de Michèle Artigue (1995), Almouloud e Coutinho (2008) que tece algumas reflexões sobre pesquisas fundamentadas nos princípios da Engenharia Didática e Almouloud e Silva (2012) que apresentam estudos sobre a evolução e usos da noção de Engenharia didática expostos na École d´Été de Didactique des Mathématiques (Escola de Verão de Didática da Matemática), realizada em 2009 em Clermond-Ferrand, França.

A pesquisa ocorreu em duas turmas do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal, localizada em Parauapebas, no Estado do Pará. O lócus de nosso trabalho atende estudantes do 1º ano ao 9º ano do ensino fundamental. O objetivo da aplicação da sequência em duas turmas do 6º ano é ampliar o estudo e obter um número maior de dados. Com isso, a amostra do experimento será composta pelos resultados obtidos nas análises feitas nas duas turmas.

O percurso escolhido para este trabalho considera os pressupostos da engenharia didática como metodologia de pesquisa, visto que tal metodologia discorre de questões da prática docente e problemas intrínsecos a sala de aula. Artigué (1996 *apud* Saddo; Silva, 2012) desenvolve a engenharia didática em quatro fases: análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. Este trabalho será constituído por essas quatro fases.

A primeira seção denominada de análises prévias apresenta considerações acerca da fundamentação teórica, dos aspectos históricos, da teoria dos campos conceituais, do campo conceitual multiplicativo, dos aspectos teóricos e a da resolução de problemas. Nesta etapa, foi feito o levantamento e análise de resultados de 12 (doze) pesquisas divididas em duas categorias de estudos, teóricos e experimentais.

Na segunda seção, denominada concepção e análise a *priori,* apresentamos uma proposta de Sequência Didática (SD) composta por 15 (quinze) atividades, sendo: 1 (um) pré-teste e pós-teste; 7 (sete) atividades de redescoberta e 8 (oito) atividades de aprofundamento. Pautado na fase anterior, elaboramos uma sequência didática tomando cuidado com a linguagem adotada para que as atividades fossem de fato compreensíveis e executáveis pelos alunos, de modo a analisarem o problema; traduzirem para a linguagem matemática; identificarem a operação e a executarem o cálculo. A sequência didática utiliza o ensino por atividades e resolução de problemas que têm como autores de base: Barbosa (2021), Sá (2003, 2009 e 2018) Fossa e Sá (2005), Brasil (1997), Pinheiro (2008), Silva (2015), Santos (2017) e Miranda (2021).

A terceira seção, que corresponde a experimentação, trata-se da aplicação da fase anterior, concepção e análise a *priori*. Nesta seção descrevemos como acontecerá a abordagem da escola, dos alunos e responsáveis, bem como os instrumentos que serão utilizados: pré-teste e pós-teste; questionário socioeducacional; sequência didática com as atividades estruturadas; a ficha de registro das observações que devem ser feitas durante a experimentação, que incluem os comportamentos dos alunos, do pesquisador e as respostas dos grupos.

A quarta seção aborda a análise a *posteriori* e a validação dos dados obtidos na experimentação, que será feita com a sistematização e organização dos mesmos em quadros, tabelas e gráficos, por meio da comparação percentual dos resultados dos testes que serão aplicados. Nesta seção, buscaremos apresentar se houve ou não uma melhora significativa no desempenho dos alunos em relação aos resultados iniciais. Procuraremos apresentar os resultados obtidos através das questões socioeducativas, mostrando se houve alguma influência no resultado da análise dos dados.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática (ED) tem sido formulada como uma metodologia que se baseia na Teoria de Situações Didáticas (Brousseau, 1998), propondo aos estudantes um percurso mais interativo, dinâmico e participativo, almejando alcançar o conhecimento e sua reflexão. A outra parte dessa metodologia é conhecida como Engenharia Didática de Formação (EDF) é direcionada para a formação de professores, onde tem conquistado cada vez mais seu espaço na educação. Além disso, a Engenharia Didática de Formação é uma metodologia que tem como propósito a criação de mecanismos/instrumentos para auxiliar no processo formativo do docente, ocasionando uma formação significativa para que os docentes atuem em sala de aula.

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICA 1ª GERAÇÃO: ANÁLISE DAS RELAÇÕES EXISTENTE NO TRINÔMIO: PROFESSOR, ALUNO E SABER

Discorrer sobre Engenharia Didática é, primeiramente, mencionar a figura de Michèle Artigue, pesquisadora matemática francesa e uma das responsáveis em difundi-la. Assim, segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 65), “a noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa) no início dos anos 80”, sendo meritório destacar seu aparecimento em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau e, posteriormente, por Michèle Artigue em 1989 (Almouloud; Silva, 2012). Sintetizada por Michèle Artigue, quando publica um artigo (Artigue, 1990) na Recherches em Didactiques de Mathématiques[1] (Bittar, 2017).

Conforme Almouloud e Silva (2012 *apud* Artigue, 1988) a nomenclatura “Engenharia Didática” foi idealizada para o trabalho didático comparado ao trabalho de um engenheiro:

> [...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (Artigue, 1996, p. 193).

---

[1] Revista francesa de grande circulação entre pesquisadores da Educação Matemática. Uma versão em português desse artigo pode ser encontrada em Artigue (1996).

Desta forma, associa-se a dimensão teórica ao campo experimental da prática educativa, sendo uma metodologia essencial para as pesquisas em Educação Matemática.

Também para Pais (2011, p. 99), é “[...] uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto”. Segundo Pais (2011), Artigue considerava a Engenharia Didática um trabalho similar à de um engenheiro na realização de um projeto arquitetônico. Apesar de ambos os trabalhos parecerem muito próximos,

> [...] o educador depende de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele exerce o seu domínio profissional. Entretanto, quando se faz essa analogia entre a didática com o trabalho do engenheiro, torna-se conveniente destacar que o modelo teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional (Pais, 2011, p. 100).

O pensamento acima sugere considerar que, em se tratando de didática, conhecer a teoria não é suficiente. O modelo teórico, assim denominado pelo autor, não consegue atender e resolver os desafios inerentes à prática de ensino, o que requer necessariamente que as pesquisas em didática da matemática contemplem a experimentação como uma dimensão prática capaz de estudar o fenômeno escolar ou um método a ser aplicado.

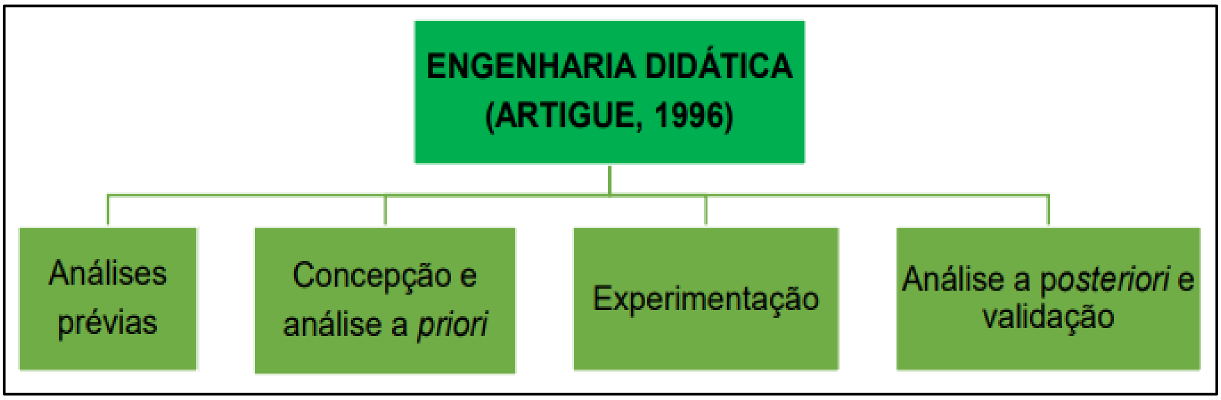
De acordo com Artigue (1996, *apud* Sá; Palma e Lopes, 2018, p. 10), a Engenharia Didática é uma metodologia caracterizada por “um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”, tal qual permite a validação interna a partir da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*. Ainda, para Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), “tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste”. Em colaboração, Artigue (1995, p. 37) reitera que “A metodologia da Engenharia Didática também é caracterizada, em comparação com outros tipos de pesquisas a partir da experimentação em sala de aula, pelo registro em que se localiza e pelas formas de validação à qual está associada”. É nesse princípio que julgamos pertinente sua presença neste estudo, atendendo os objetivos propostos.

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer) (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 66).

A Engenharia Didática possui etapas, as quais são importantes para o bom desenvolvimento da pesquisa. Para Pais (2011), são elas: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise *a priori*; 3) aplicação de uma sequência didática e 4) análise *a posteriori* e a avaliação. Essas quatro etapas distintas entre si, mas interligadas são descritas também por Almouloud e Coutinho (2008), porém com diferentes denominações, a saber: 1) análises prévias; 2) construção e análise *a priori*; 3) experimentação, análise *a posteriori* e validação. O autor, apesar de juntar as duas últimas etapas como uma terceira etapa, faz distinção no decorrer de sua explicação. Por sua vez, Almouloud e Silva (2012), propõem também as quatro etapas da seguinte maneira: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise a *priori* das situações didáticas; 3) experimentação e 4) análise a *posteriori* e validação.

Santos (2017) apresenta um diagrama formado com as quatro etapas que compõem a Engenharia Didática (Artigue, 1996).

Figura 1 – Diagrama das etapas da Engenharia Didática



Fonte: Santos, 2017, p. 22.

Conforme Leivas e Gobbi (2014, p. 184) “essa metodologia pode ser entendida tanto como uma metodologia de pesquisa específica, quanto como uma sequência de aulas ou atividades concebidas e organizadas de forma coerente”. Seguindo de maneira sistemática esta metodologia em seu planejamento e execução, deve-se nortear pelas etapas: i) Análises preliminares, ii) Concepção e análise *a priori* das situações didáticas, iii) Experimentação e iv) Análise *a posteriori* e validação. Apesar dessas diferenciações, cremos não serem as denominações motivos que interfiram na execução dessa metodologia.

Na primeira etapa da Engenharia Didática, as análises prévias, é o momento em que o pesquisador faz um estudo da organização matemática e didática do objeto matemático escolhido, definindo as questões de pesquisa, assim como sugerir hipóteses sobre o tema, com base nos fundamentos teóricos e metodológicos utilizados e detalhados nesta fase. A etapa, análises prévias, "constituem o momento da investigação em que o pesquisador busca o referencial teórico para fundamentar suas categorias e escolhas para elaboração da sequência didática a ser desenvolvida" (Sá; Alves, 2011, p. 149). Conforme Artigue (1996, p. 198), esta etapa abrange as análises: epistemológica dos conteúdos a serem estudados, do ensino costumeiro, bem como os seus efeitos, das concepções dos professores e/ou alunos, das complicações que limitam a sua evolução, do campo no qual será estabelecida a realização didática e dos objetivos da investigação.

Nesta pesquisa, tratamos dos aspectos históricos da resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais, da revisão de literatura sobre o tema, da opinião de discentes sobre o processo de ensino e de aprendizagem da resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão, e da análise de livros didáticos de matemática de acordo com este conteúdo.

A segunda etapa, concepção e análise *a priori*, "consiste na definição de um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno. Essas variáveis serão articuladas e analisadas no transcorrer da sequência didática" (Pais, 2008, p. 101). É nesta fase que os esforços estão concentrados na elaboração de uma sequência de atividades, que busca, sobretudo, responder às questões de pesquisa e poder validar as hipóteses levantadas na fase anterior. É desta fase que depende o sucesso das atividades construídas que serão utilizadas na experimentação, como ressaltado:

> [...] a análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as *conjecturas* que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um *debate científico* em sala de aula (Almouloud, 2007, p. 176, grifo do autor).

Segundo Sá e Alves (2011), esta etapa da pesquisa tem como objetivos principais a construção de uma sequência didática para o conteúdo abordado e a formulação das hipóteses com base nos resultados alcançados nas análises prévias.

> A construção da sequência didática tem como objetivo a produção e a seleção de todo material que será necessário ao desenvolvimento da sequência de atividades propostas para o trabalho pedagógico a ser realizado. A sequência didática não precisa ser limitada por uma tendência didática vigente ou preferência do investigador. No caso específico da Educação Matemática, uma sequência didática pode ser baseada somente numa das tendências da mesma ou na conjunção de várias tendências (Sá; Alves, 2011, p. 151).

Assim como os autores Almouloud; Coutinho (2008) destacam que na análise a *priori* busca-se:

> • Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
> • Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> • Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (Almouloud; Coutinho, 2008, p. 67).

É também nesta etapa que são definidas as variáveis da pesquisa que deverão ser consideradas:

> As variáveis macrodidáticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia; -e as variáveis microdidáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado (Artigue, 1988, p. 202).

Nesta etapa da pesquisa, mostramos como a resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão estão introduzidas no currículo de matemático do 6º ano do Ensino Fundamental, apresentamos determinadas tendências metodológicas para o ensino deste conteúdo, como: o ensino por atividades, as tecnologias de informação, os jogos educativos, e a resolução de problemas, assim como, os elementos formulados para a experimentação, como: os testes e a sequência composta de atividades abrangendo diversos níveis de dificuldades.

Na Experimentação, terceira etapa da Engenharia Didática é a parte em que o professor coloca em prática sua proposta didática, previamente elaborada a partir das etapas análises prévias e concepção e análise *a priori*. O professor-pesquisador nesse processo é o mediador, de acordo com os pressupostos da Engenharia Didática, fazendo relatos de como aconteceu a aplicação da sequência didática, registrando o maior número possível de informações e as observações das aulas, bem como realizando as análises das produções feita pelos alunos e sendo o aluno o principal responsável pela construção de seu conhecimento, onde é estimulado a construir ou solidificar novos aprendizados, os quais devem ser desenvolvidos, para que o mesmo tenha condições de realizar a tarefa proposta.

A terceira etapa denominada experimentação, é direcionada a aplicação da sequência didática.

> Este momento da pesquisa tem com *locus* a sala de aula e se inicia quando a primeira atividade é desenvolvida. Cada encontro ocorrido na sala de aula é denominado de "sessão", mesmo que seja uma atividade diagnóstica e termina quando o pesquisador realiza a última atividade com a turma. Nesta fase o pesquisador ou a equipe de pesquisa deve desenvolver as atividades planejas e, ao mesmo tempo, realizar o maior número de registros possíveis em quantidade e diversidade. Essa característica da experimentação faz com que haja dificuldade ou até mesmo inviabilidade do pesquisador exercer ao mesmo tempo os papéis de docente e observador da experimentação (Sá; Alves, 2011, p. 156-157).

A última etapa, análise *a posteriori* e validação, "se apoia no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos em sala de aula ou fora dela" (Artigue, 1996, p. 208). Segundo Pais (2008, p. 103) a validação dos resultados acontece pela comparação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e nas análises *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa.

> A etapa da análise *a posteriori* e validação é o momento em que os resultados/informações produzidos no relatório da experimentação serão confrontados com o previsto e descrito na etapa da análise a priori com a intenção de obter argumentos que justifiquem e expliquem o desenvolvimento do experimento, e apontem uma posição favorável ou desfavorável ao ocorrido (Sá; Alves, 2011, p. 158).

Nesta etapa da pesquisa é realizado o tratamento estatístico dos dados atingidos na etapa de experimentação**,** por meio do confronto percentual dos resultados dos testes, análise dos tipos de erros ocorridos e do teste de hipótese, com o intuito de validar a pesquisa e analisar se as metodologias de ensino que foram adotas durante a experimentação ocasionou resultados no desempenho dos alunos na resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais e se o resultado ocasionado sofreu interferência de fatores socioeconômicos.

Neste texto apresentamos, por meio dos estudos, exemplos de trabalhos que adotaram a Engenharia Didática como metodologia em suas pesquisas. Destacamos os trabalhos de: Silva (2015), com o título Ensino de problemas envolvendo as quatro operações por meio de atividades; Altóe (2017) com a pesquisa intitulada Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas; Santos (2017) com o título O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais; Matni (2018) com o trabalho onde o título é A resolução de questões não-rotineiras e as atitudes em relação à Matemática; Reges (2020) com o trabalho intitulado Formação de professores que ensinam matemática: experiência fundamentada na teoria das situações didáticas explorando o campo conceitual multiplicativo e por fim, Miranda (2021) onde o título escolhido foi O ensino por atividades de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular., aspectos metodológicos da Engenharia Didática.

A seguir destacamos o objetivo, o *locus* e a análise dos resultados dos trabalhos que adotaram a Engenharia Didática como metodologia em suas pesquisas, as quais selecionamos por meio de estudos.

Silva (2015) utilizou a Engenharia Didática no seu trabalho que teve como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de questões envolvendo as quatro operações com números naturais, que trabalhou inicialmente a elaboração da sentença natural correspondente ao enunciado da questão e em seguida a determinação da operação sobre a habilidade de escolher corretamente a operação e o desempenho na resolução de questões envolvendo as quatro operações com números naturais.

A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública municipal de Abaetetuba/PA com 23 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, adotou-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. A análise dos resultados se deu pela comparação percentual entre os resultados do pré-teste com o pós-teste, análise dos tipos de erros ocorridos nos pré-testes e pós-testes, bem como pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese.

A pesquisa de Altoé (2017) teve como temática a “Formulação de Problemas em Matemática” e trazendo como objetivo investigar contribuições de atividades pautadas na formulação de problemas para o ensino de conceitos de multiplicação e divisão nos anos iniciais do ensino fundamental. A pesquisa foi desenvolvida com 28 alunos do 5º ano de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio do município de Vargem Alta – ES. Julgou-se necessário iniciar uma abordagem teórica pautando principalmente nos estudos de Onuchic e Allevato, Morais e Onuchic, Vila e Callejo, Pozo e Van de Walle.

Em relação à Formulação de Problemas, fundamentou principalmente com Boavida et al, Chica, D’amore e Silver. Estudos direcionados à multiplicação e divisão respaldaram-se em Vergnaud e Pires. Esta pesquisa, de natureza qualitativa, foi desenhada na perspectiva da Engenharia Didática, cujas discussões foram sustentadas em Pais, Almouloud e Coutinho e Almouloud e Silva. A análise dos dados ocorreu no confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori*, na quarta fase do nosso aporte metodológico.

Santos (2017) com seu trabalho buscou avaliar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, têm sobre a participação nas aulas de matemática e no desempenho de resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais. Para se alcançar tal finalidade optou-se pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, a qual se desenvolveu em quatro etapas. Inicialmente foram feitas as análises prévias, primeira etapa da pesquisa, composta pelos aspectos históricos da resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais; uma revisão de estudos sobre o tema; a consulta a discentes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo; e da análise de livros didáticos de matemática no que se refere à abordagem desses tipos de problemas.

A segunda etapa da pesquisa, concepção e análise *a priori*, apresenta a descrição de algumas tendências metodológicas para o ensino de matemática, os testes e uma sequência didática para o ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais. A terceira etapa da pesquisa, experimentação, foi realizada em uma escola pública municipal de Muaná/PA com 35 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. A última etapa da pesquisa, análise *a posteriori* e validação, foi destinada a análise dos resultados obtidos durante a experimentação. A validação dos resultados foi realizada pela confrontação entre os dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori*.

O trabalho desenvolvido por Matni (2018) teve o objetivo de avaliar as atitudes em relação à Matemática de alunos do ensino fundamental quando esses são submetidos às sessões sistemáticas de resolução de problemas matemáticos não-rotineiros. Para isto, foram utilizados os pressupostos da Engenharia Didática. Nas análises prévias foram apresentadas algumas considerações sobre a evolução do termo atitude a partir dos seus aspectos históricos na Psicologia, uma revisão de estudos sobre atitudes; a importância da Matemática recreativa e a resolução de problemas não-rotineiros associada à Matemática recreativa e uma consulta à 90 docentes da rede pública de ensino de Belém do Pará, por meio de um questionário.

Na concepção e análise a priori, são apresentadas quinze sessões de aulas com questões de Matemática recreativa divididas por categorias, previamente definidas, utilizando a metodologia resolução de problemas não-rotineiros, como processo. A experimentação teve como lócus uma escola pública estadual no município de Belém do Pará, com alunos de uma turma do 6º do Ensino Fundamental. A análise a posteriori e validação foi feita pelo confronto entre as análises a priori e as análises a posteriori, em que também foram utilizados dados estatísticos e a realização do cálculo do Alpha de Cronbach para as conclusões.

A pesquisa de Reges (2020) teve como objetivo geral investigar contribuições da Teoria das Situações Didáticas para a formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao tratar do campo multiplicativo. Com esse propósito, foi utilizado os pressupostos teóricos de Vergnaud (1996; 2000; 2009) no que concerne à Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e ao campo conceitual multiplicativo e de Brousseau (1996; 2001; 2008), em sua Teoria das Situações Didáticas (TSD). É uma pesquisa de natureza qualitativa de abordagem fenomenológica, considerando que o fenômeno investigado é sempre contextualizado, depois do qual, ficam a percepção do pesquisador expressa pela linguagem, de acordo com Bicudo (2007, 2012).

A metodologia de pesquisa foi a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) que se constitui de quatro etapas: análises prévias; concepção e análise a priori;

experimentação; e, análise a posteriori e validação. A empiria consistiu em processo formativo com foco no campo multiplicativo e em situações didáticas para quatro professoras que ensinam Matemática nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental em escolas públicas municipais.

Miranda (2021) desenvolveu um trabalho que teve como objetivo avaliar os efeitos que uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem na resolução de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, buscando resposta para a seguinte questão cientifica: Quais efeitos que uma sequência didática por atividades provoca sobre a aprendizagem na resolução de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular?

A experimentação foi realizada em uma escola pública municipal do município de Ananindeua na região metropolitana de Belém no Estado do Pará, com 36 estudantes de uma turma de 6º ano do ensino fundamental. A Engenharia Didática (pressupostos) foi a metodologia adotada pela pesquisa, abordando todas as suas etapas: análises prévias, análises a priori, experimentação e validação, sendo o Ensino por Atividades a metodologia de ensino utilizada pesquisa, A análise dos dados coletados ocorreu por meio da verificação do registro das conclusões dos estudantes em cada atividade realizada, pela comparação dos resultados do pós-teste em relação ao pré-teste, análise dos erros ocorridos no pós-teste, pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese.

Os autores mostram que a Engenharia Didática traz consigo o método de análise de dados, mas isto não isenta quaisquer outros que se fizerem necessários. Sendo assim, cabe ao pesquisador analisar a necessidade de outros métodos de análises de dados, caso essa metodologia não seja, por si só, suficiente. Com base nesses e em outros trabalhos analisados, seguimos com o desenvolvimento da nossa dissertação utilizando a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa.

2.2 ENGENHARIA DIDÁTICA 2ª GERAÇÃO OU ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO

As reflexões e discussões sobre algumas limitações acerca do papel do professor e sua formação, deram origem a uma nova parte da Engenharia, direcionada para a formação do professor que ensina matemática, sendo conhecida como Engenharia Didática de Formação (EDF).

Mesmo sendo, a qualificação do profissional da educação uma exigência da LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96, a formação continuada dos professores que ensinam matemática tem sido um tema constante nas discussões com diversas tendências educacionais. Por mais que as políticas públicas fortaleçam e incentivem esse processo de formação, ainda assim, temos a formação inicial desses profissionais da educação, que é um processo fundamental, o qual assegura, grandes possibilidades na melhoria e na execução de um ensino de qualidade.

Artigue (2015, p. 492) destaca que “[...] este problema ainda não está resolvido, porém, o aumento de conhecimentos acerca das representações dos professores e suas práticas e, [...] a sua evolução pode nos levar a compreender melhor as dificuldades do desafio”. Com isso, os mecanismos/instrumentos de formação sob a tendência da Engenharia Didática (ED), incentivam de maneira significativa a capacitação dos professores que ensinam matemática.

Segundo Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) no que diz respeito a Engenharia Didática de Formação (EDF):

> É um campo de práticas que consiste em construir dispositivos de formação correspondentes às necessidades identificadas, para um público dado, no quadro do seu meio de trabalho. A formação escolar possui, como tendência, a descontextualização das aprendizagens. A engenharia da formação deve, precisamente, insistir no contrário, sobre o contexto social, no qual devem ser efetuadas a aprendizagem dos adultos em formação. [...] A engenharia de formação se concretiza, principalmente, a partir de duas práticas: análise das necessidades e dos dispositivos de formação. Pois, tais adultos são, de modo inicial, pessoas que trabalham e, quando decidem realizar uma formação, a mesma é habitualmente conveniente ao trabalho, e não a partir de recortes disciplinares que, geralmente não possuem sentido para os mesmos (Pastré, Mayen; Vergnaud, 2006, p.146-147).

Para os autores o cenário de práticas deve estar presente tanto na formação inicial, como também na formação continuada dos professores. Sendo assim, a Engenharia Didática de Formação (EDF) concede situações didáticas contextualizadas, favorecendo para uma formação mais significativa. Destaca-se que, “os dispositivos de formação, estruturados via a ED, possuem um papel tanto definidor como estruturante para um perfil ou visando uma competência profissional”. (ALVES, 2018, p. 50). Estes mecanismos/instrumentos pedagógicos sob tendência da

Engenharia Didática (ED), tem um papel fundamental para o desenvolvimento de competências e de melhoraria na qualidade da formação do profissional.

Os pesquisadores Almouloud e Silva (2012) apresentam os dois tipos de engenharias didáticas:

> Uma engenharia didática de segunda geração tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores. O que, consequentemente, necessita de vários níveis de construção. Podem-se distinguir dois tipos de engenharias didáticas em função da pergunta inicial da investigação, sendo a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). Na IDR procura-se fazer emergir fenômenos didáticos e estudá-los, com a intenção de um avanço nos resultados da investigação, por meio de experimentações montadas em função da questão de pesquisa, sem preocupação imediata de uma eventual divulgação mais ampla das situações utilizadas. Por outro, lado na IDD, o objetivo é a produção de recursos para professores ou para a formação de professores (Almouloud; Silva, 2012, p. 28 *apud* Perrin-Glorian, 2009).

Seguindo o raciocínio dos pesquisadores, podemos observar que a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD) se fundamenta na Engenharia Didática de 1ª geração, está diretamente associada com formulação de mecanismos/instrumentos pedagógicos que auxiliem no ensino e aprendizagem dos docentes e que possam ser aplicadas em sala de aula. Assim como, a Engenharia Didática para a Investigação (IDR) está mais relacionada com o surgimento de fenômenos didáticos com o propósito de estudá-los, buscando resultados por meio de experimentações direcionadas pelas questões de pesquisas.

A engenharia didática de 1ª geração consiste em determinar ferramentas de ensino sociável, que agrupa algumas das características da pesquisa ação, visto que são formulados na mesma, ocorrências de sala de aula nas quais devem ser descritas e com os resultados de sua aplicação analisados. Uma vez que, na engenharia didática de 2ª geração, é proposta a elaboração de recursos que possam ser utilizados na sua aula pelo professor, bem como para a formação continuada ou ainda na formação inicial de professores, auxiliando no ensino e na aprendizagem da matemática. No quadro 1, Almoloud e Silva (2012, p. 46) representam os objetivos e os aspectos centrais das Engenharias de 1ª e 2ª geração.

Quadro 1 – Engenharias de 1ª e 2ª gerações, objetivos e aspectos centrais continua

Geração	**Objetivo(s)**	**Aspectos centrais**

Engenharia Didática 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino	Metodologia de pesquisa e produto
Engenharia Didática 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: adaptado de Almoloud e Silva (2012, p. 46)

As Engenharias Didáticas de primeira e segunda geração são respectivamente chamadas de Engenharia Didática de Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD). No quadro 2, Almoloud e Silva (2012, p. 46) descrevem algumas características delas.

Quadro 2 **-** Comparando IDR e IDD

Engenharia didática de 1ª e 2ª	
• Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; • Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; • Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	• Produzir recurso(s) para professores ou para a formação de professores; • Liberdade de ação para o professor; • A investigação contínua a ser essencial, mas, as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; • Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: adaptado de Almoloud e Silva (2012, p. 46)

Mostrou-se com a análise e a reflexão acerca das ressignificações que a Engenharia Didática de Formação (EDF) poderá proporcionar no que diz respeito ao desenvolvimento da formação do professor. Tornando perceptível tanto para o processo de aprendizagem dos alunos, quanto para a construção de mecanismos, que as tendências francesas contribuem para uma qualificação dos processos formativos. Viabilizando as meditações a respeito da formação continuada dos professores que ensinam matemática, bem como qualificar esse processo fazendo uso das etapas da Engenharia Didática de Formação (EDF).

Sá e Kasahara (2023), apresentam um estudo com uma visão abrangente de diversas propostas de Engenharia Didática (ED) na área de Educação Matemática, analisando as características e discussões promovidas por pesquisadores. A pesquisa aborda as ED de 1ª e 2ª geração, destacando suas motivações, objetivos e opiniões divergentes. Além disso, é oferecida uma explanação sobre a ED com enfoque Ontossemiótico, enfatizando o uso dos critérios de idoneidade didática, especialmente nas fases de Avaliação e Análise retrospectiva.

Ao longo do estudo, emerge uma discussão significativa sobre as diferentes abordagens da ED e suas implicações na prática educacional. Nota-se a ausência de consenso entre os pesquisadores em relação às ED, mas ressalta-se a importância das diversas vertentes para reflexão sobre as adaptações necessárias na criação de um design educacional único e compartilhado.

Particular atenção é dedicada à ED e sua relação com a reprodutibilidade. O estudo destaca a necessidade de os pesquisadores atentarem para a exposição de condições experimentais que garantam a reprodutibilidade dos resultados. Essa discussão ressalta a importância da transparência e consistência metodológica nas pesquisas relacionadas à Engenharia Didática.

Em conclusão, o estudo destaca a complexidade do cenário das propostas de ED na Educação Matemática. Apesar da falta de consenso, reconhece-se a relevância das diferentes abordagens para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes. Além disso, enfatiza-se a necessidade de os pesquisadores considerarem a reprodutibilidade como um aspecto crucial em suas investigações, contribuindo assim para o avanço consistente do campo.

Sá, Santos e Miranda (2023), propõem uma análise da presença da Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa nos trabalhos apresentados no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM) no período de 2014 a 2021. A motivação para esta investigação reside na questão problema: "Quais pesquisas, no referido evento, utilizam a Engenharia Didática como metodologia?"

O estudo envolveu uma pesquisa bibliográfica nos anais do EBRAPEM de 2014 a 2021, expandindo a pesquisa realizada por Lopes, Palma e Sá (2018), que analisou trabalhos de 2014 a 2016. Os resultados obtidos indicam a presença constante da ED nas edições do evento, revelando, contudo, uma queda percentual de trabalhos que empregam a Engenharia Didática como metodologia a partir de 2017.

A conclusão destaca a relevância da ED como uma metodologia importante e eficiente para investigar o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Apesar da diminuição observada a partir de 2017, a presença constante nos anos anteriores ressalta a contribuição significativa da ED para o desenvolvimento de novas abordagens de ensino. O estudo sugere que a Engenharia Didática continua a ser uma ferramenta valiosa na pesquisa educacional, oferecendo insights valiosos para aprimorar o ensino da matemática e desenvolver estratégias inovadoras.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção temos como objetivo apresentar uma breve explanação sobre a os aspectos históricos do Campo Conceitual Multiplicativo, para entendermos o surgimento, bem como a necessidade e a importância deste conteúdo para os dias atuais. Apresentar também, um panorama de estudos que tiveram foco o ensino e a aprendizagem do Campo Conceitual Multiplicativo.

3.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Apresentada pelo pesquisador francês Gerard Vergnaud, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) “visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas” (Vergnaud, 1996, p. 155), em outras palavras, almeja compreender os meios pelos quais se dá a formação dos conhecimentos, assim como os significados designados a estes pelos sujeitos (Pais, 2008). Em relação a origem, a TCC não se desenvolveu com o propósito didático, ainda assim fornece aportes teóricos que contribuem para análise de situações que envolvem a estruturação de conhecimentos. Nesse ponto de vista, o sentido designado a um conceito torna-se significativo por intervenções de situações que abrangem filiações e rupturas de conhecimentos. Desse modo, o autor diferencia duas classes de situações:

> 1 - Classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2 - Classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de

> exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso (Vergnaud, 1996, p. 156).

Nesse contexto, de acordo com Vergnaud (1990, 1993, 1996), é fundamental compreender o comportamento do aluno diante a situações que lhe requeira organizar esquemas para solucionar determinado problema. Os esquemas são organizações invariantes que determinam a atitude do sujeito em uma certa situação. Para uma determinada classe de situação a qual o sujeito se depara, com as ações a serem realizadas pelo mesmo, dependerão da natureza desta e de organizações esquemáticas que este possui ou que anteriormente foram internalizadas por esse conforme suas experiências (Vergnaud, 1996). Um esquema envolve, também, preceitos de antecipação, que são os objetivos a serem alcançados conforme a ação realizada e os invariantes operatórios:

> cujas categorias principais são teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, constituem a base conceitual implícita que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes (Vergnaud, 1996, p. 201).

Refere-se a conhecimentos colocados em ação pelo sujeito e que dão base aos esquemas. Segundo o autor um esquema é eficaz, contudo, nem sempre é efetivo. Para uma estabelecida classe de situações, um esquema poderá se revelar inadequado, o que terá necessidade, por parte do sujeito, numa tomada de decisão, que poderá se configurar pela mudança desse esquema ou pela alteração do modelo esquemático inicial.

No que se refere às operações fundamentais, a TCC apresenta um espectro que abrangem um extenso conjunto de situações, por consequência, pode ser aplicada em diversificadas áreas do conhecimento, a teoria organiza estas em duas categorias de relações: aditivas e multiplicativas. A primeira, chamada Campo Conceitual Aditivo, a qual envolve o conjunto ou uma combinação de situações que envolvem os raciocínios de adição e subtração, o autor detalha seis categorias de situações que abrangem essa relação.

> Primeira categoria: duas medidas se compõem para resultar em uma terceira. Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. Terceira categoria: uma relação liga duas medidas. Quarta categoria: duas transformações se compõem para resultar em uma transformação. Quinta categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo. Sexta

> categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo (Vergnaud, 2009, p. 200).

A outra categoria, denominada Campo Conceitual Multiplicativo (estruturas multiplicativas), que envolve situações que constituem um conjunto de ideias de multiplicação e divisão. A mesma se divide em duas classes de situações: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que busca fornecer um referencial mais produtivo do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas. Embora Vergnaud esteja especialmente interessado nos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983b, p. 128), a teoria dos campos conceituais não é restrita desses campos, nem da Matemática.

Vergnaud parte da proposição que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período, através de experiência, maturidade e aprendizagem (Vergnaud, 1982, p. 40).

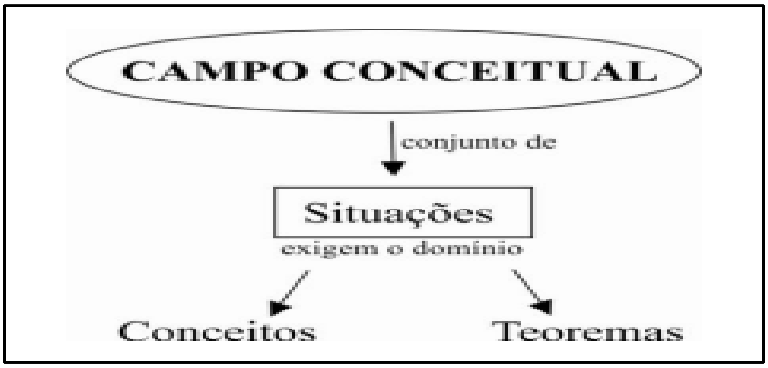
A teoria dos campos conceituais é composta de conceitos-chave que são, o próprio conceito de campo conceitual, bem como, os conceitos de esquema (a grande herança piagetiana de Vergnaud), situação, invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação), e a sua concepção de conceito.

3.1.1 Campos conceituais

Campo conceitual é também definido por Vergnaud como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados (Vergnaud, 1983b, p. 127).

Vergnaud (1988, p. 141; 1990, p. 146), define campo conceitual em outros trabalhos como sendo, em primeiro, um conjunto de situações cujo comando precisa, do controle de muitos conceitos de distintas naturezas. Muitos tipos de conceitos matemáticos estão compreendidos nas situações que abrangem o campo conceitual das estruturas multiplicativas e no pensamento necessário para dominar tais situações.

Figura 2 – Representação gráfica do conceito de Campo Conceitual



Fonte: adaptado de Jenske (2011).

Para Vergnaud o campo conceitual trata-se de uma unidade de estudo com o propósito de atribuir sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real e, da maneira que foi exposto, a teoria dos campos conceituais presume que a conceitualização é a estrutura do desenvolvimento cognitivo.

3.1.2 Conceitos

Vergnaud define conceito como um tripleto de conjuntos (1983a, p. 393; 1988, p. 141; 1990, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6), C = (S, I, R) onde:

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas. (Vergnaud, 1993, p. 1).

O primeiro conjunto – **de situações** – é o referente do conceito, o segundo – **de invariantes operatórios** – é o significado do conceito, enquanto o terceiro – **de representações simbólicas** – é o significante. Isso implica que para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é preciso considerar esses três conjuntos ao mesmo tempo. Em geral, não existe correspondência biunívoca entre significantes e significados, nem mesmo entre invariantes e situações; é improvável reduzir o significado nem aos significantes nem às situações (Vergnaud, 1990, p. 146).

3.1.3 Situações

Vergnaud não emprega o conceito de situação, como o de situação didática, mas sim, como o de tarefa, uma vez que, qualquer situação complexa é possível ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades particulares. A dificuldade de uma tarefa não é a soma, muito menos o produto das diferentes subtarefas envolvidas, no entanto é evidente que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho geral. (Vergnaud, 1990, p. 146; 1993, p. 9).

A respeito das situações, Vergnaud afirma que, são as situações que dão sentido ao conceito; as situações é que são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito (Barais; Vergnaud, 1990, p. 78); sobre conceito é dito que, um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações (Vergnaud, 1994, p. 46). Entretanto o sentido não está nas situações na sua essência, da mesma maneira que não está nas palavras nem nos símbolos (Vergnaud, 1990, p. 158).

3.1.4 Esquemas

Vergnaud chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações (1990, p. 136; 1993, p. 2; 1994. p. 53; 1996c, p. 201; 1998, p. 168). Segundo ele, é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Piaget introduziu o conceito de esquema para ter controle dos meios de organização das habilidades sensório-motoras, como também, das habilidades intelectuais. Um esquema cria ações e deve conter regras, contudo não é um estereótipo, visto que a sequência de ações depende dos parâmetros da situação (Vergnaud, 1994, p. 53). Um esquema é um universal que é eficaz para toda um conjunto de situações e pode conceber diversas sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Não é o comportamento que é invariante, no entanto a organização do comportamento (Vergnaud, 1998, p. 172).

3.1.5 Invariantes operatórios

Os conhecimentos contidos nos esquemas são designados pelas expressões "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação". Pode ser determinada ainda, pela expressão mais abrangente "invariantes operatórios" (Vergnaud, 1993, p. 4). Esquema é a organização da conduta para uma determinada classe de situações; teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operacionais, desse modo, são componentes fundamentais dos esquemas (Vergnaud,1998, p. 167) e determinam as diferenças entre eles.

Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante (Vergnaud,1996c, p. 202; 1998, p. 167). Existe uma relação entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, visto que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que fornecem aos conceitos seus conteúdos. Porém seria um erro confundi-los (Vergnaud, 1998, p. 174).

Dando continuidade às análises prévias, será apresentado na próxima subseção alguns entendimentos, no que se refere ao Campo Conceitual multiplicativo.

3.2 O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

O Campo Conceitual Multiplicativo, também conhecido como estruturas multiplicativas é definido por Vergnaud (1993) como:

> - Um conjunto de situações que requerem o uso de multiplicação, divisão ou uma combinação de ambas as operações;
> - Um conjunto de esquemas necessários para lidar com essas situações;
> - Um conjunto de conceitos e teoremas que torna possível analisar a operação que se pensou realizar: função linear e função não-linear, frações, radiciação, números racionais, análise dimensional, espaço vetorial; (Esses três conceitos podem ser explícitos, mas muitas vezes são implícitos apenas em esquemas);
> - Um conjunto de formulações e simbolizações (Vergnaud, 1993, p. 57).

O campo conceitual multiplicativo representa o conjunto das situações em que estão envolvidas uma multiplicação, uma divisão ou a combinação das duas operações. Esse campo conceitual também é formado de outros conceitos como proporção, razão, fração, função, dentre outros.

Para poder entender o campo conceitual multiplicativo os alunos necessitam ser desafiados por meio de diversas situações, contendo diferentes níveis de dificuldade (Vergnaud, 2014). Esta tarefa é complexa, precisa de tempo e incentivo, para possibilitar aprendizagens. Com isso, é necessário que os professores ofereçam atividades com baixo nível de dificuldades, as quais os alunos sejam capazes de resolver e outras mais complexas, visto que, é por meio das dificuldades, das dúvidas que se inicia a ruptura para acontecer a aprendizagem.

Santos (2015) desenvolveu um estudo sobre o Campo Conceitual Multiplicativo (CCM), onde afirma que uma das barreiras identificadas no processo de aprendizagem desse Campo pelos alunos participantes, trata-se dos currículos, que até esse momento não designava que o estudo da multiplicação e da divisão iniciasse a partir do primeiro ano do Ensino Fundamental, e sendo assim, os professores acatavam o propondo pelo currículo e não ensinavam situações pertencentes ao Campo Conceitual Multiplicativo. Santos (2015), logo após a finalização do seu estudo, o qual sugeria que o ensino com as estruturas multiplicativas iniciasse desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, da mesma maneira que, a visão a respeito do currículo fosse revisada pelos professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com Santos (2015):

> Esse é um forte indício de que a professora 2P1 ressignificou a sua concepção de currículo. Parece-nos que aquela concepção ligada à linearidade e hierarquização das operações matemáticas (talvez herança da sua formação inicial e muitas vezes, reforçada pela própria cultura escolar) foi ampliada para outra que considera um desenvolvimento curricular bem próximo daquele defendido por Pires (Santos, 2015, p. 271).

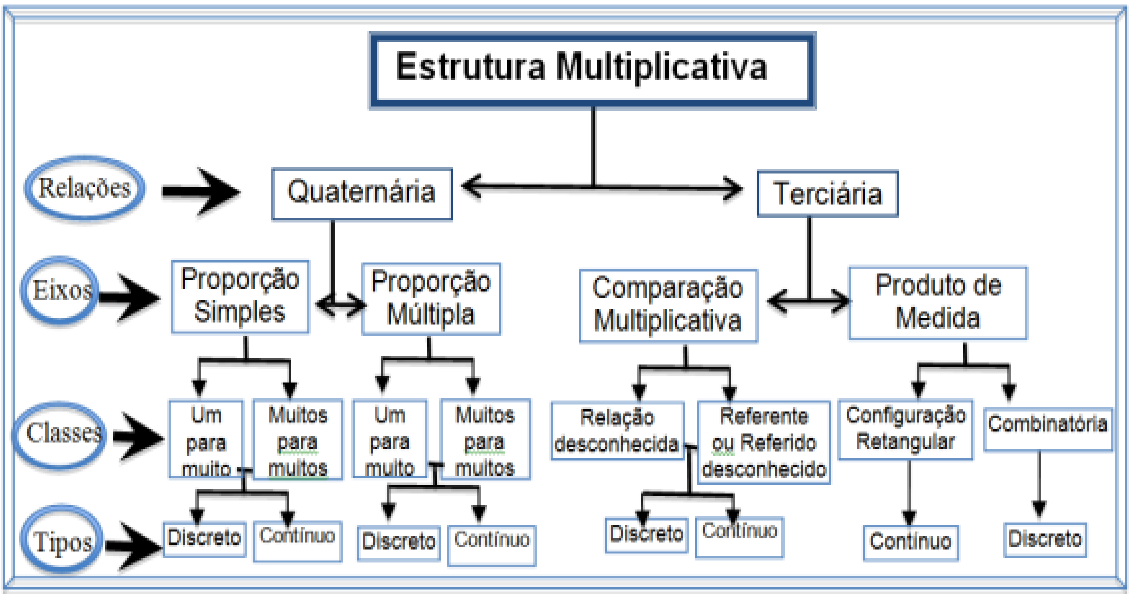
A concepção associada à linearidade e hierarquização das operações matemáticas continua presente nas salas de aula. Até o momento muitos professores consideram improvável propor um problema da estrutura multiplicativa, antes de ter trabalhado bastante com a estrutura aditiva, de modo que os conteúdos estivessem organizados em linha e não em rede.

Vergnaud (2009) classifica os problemas de tipo multiplicativos em duas grandes categorias de relações:

> • Isomorfismo de medidas – "A primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas medidas de certo tipo e as duas outras medidas, de outro tipo" (Vergnaud, 2009, p. 239);
>
> • Produto de medidas – "Essa forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional" (Vergnaud, 2009, p. 253).

De acordo com Magina, Santos e Merlini (2011) o objetivo fundamental do campo conceitual multiplicativo, segundo as ideias teóricas de Vergnaud (1990, 1991, 1994) está dividido em duas relações, sendo a primeira as relações quaternárias que são formadas por dois eixos: proporção simples e proporção múltiplas. A segunda, são as relações ternárias que também são formadas por dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medida. O esquema a seguir apresenta as divisões e subdivisões de cada eixo.

Figura 3 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM)



Fonte: Magina, Merlini e Santos, 2014, p. 5.

Com base nesta visão, Santos (2015) destaca a importância do entendimento das relações no ensino de Matemática. Para ele, todas as situações promovem ao aluno uma tarefa específica, podendo ser uma manipulação operativa, um debate coletivo ou um problema que requer a determinação de uma ou várias relações. Porém, Santos (2015) indica que, para proporcionar situações variadas, com diferentes complexidades, que auxiliem os estudantes na compreensão do Campo

Conceitual Multiplicativo, os professores precisam ter uma ampla compreensão em relação a estrutura multiplicativa.

Para compreender o Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) é fundamental debater sobre os eixos e classes que constituem o esquema apresentado na figura 3 por Magina, Merlini e Santos (2014), bem como detalhá-los da seguinte forma:

Relações Quaternárias

As relações quaternárias são aquelas que relacionam quatro quantidades em dois pares, isto é, duas de um tipo e duas de outro tipo. Vergnaud (2009, p. 72), afirma que "as relações quaternárias colocam frequentemente em jogo dois conjuntos de referência e não apenas um" - são as grandezas - "e a correspondência entre eles". Vale salientar que os exemplos e as figuras com as representações, provém de trabalhos anteriores, seguidos de suas identificações (Autor, ano, página)

Eixo 1 – Proporção Simples: é uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo quatro quantidades, em que cada grandeza contém duas medidas. como, por exemplo: pessoas e objetos; carro e rodas. Esse eixo é subdivido em duas classes de situações: a correspondência <u>um para muitos</u> e a de <u>muitos para muitos</u>, que podem ser do tipo discreto ou contínuo.

<u>Correspondência um para muitos:</u>

Exemplo1: Exemplo: Mateus tem 30 figurinhas e colocou em pacotes, com 5 figurinhas cada um. Ele vai dar 1 pacote para cada um de seus amigos. Quantos amigos de Mateus ganharão figurinhas?

Figura 4 **–** Correspondência um para muitos

Figurinhas	Pacotes
30	?
5	1

Fonte: Mello, 2020, p. 59

Correspondência muitos para muitos:

Exemplo 2: Num determinado supermercado havia uma promoção: na compra de 5 caixas de café ganhe 2 canecas (conforme o esquema a seguir). Se eu quiser ganhar meia dúzia de canecas, quantas caixas devo levar?

Figura 5 – Correspondência muitos para muitos

caixas	canecas
5	2
?	6

Fonte: Mello, 2020, p. 59

EIXO 2 – PROPORÇÃO MÚLTIPLA: Pertence a esta classe a relação quaternária envolvendo mais de duas grandezas relacionadas duas a duas que se ramificam em duas classes a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos que pode ser exemplificada da seguinte maneira.

Correspondência um para muitos:

Exemplo 1: Numa receita de bolo, para cada colher de sopa de fermento devemos colocar 2 ovos e para cada ovo, devemos colocar 2 xícaras de açúcar. Se queremos fazer esta receita usando 3 colheres de sopa de fermento, quantos ovos e quantas xícaras de açúcar precisaremos usar?

Figura 6 – Correspondência um para muitos

fermento	ovos	açúcar
1	(1 x 2) = 2	(2 x 2) = 4
(x 3)	(x3)	(x 3)
3	(3 x2) = 6	(6 x 2)= 12
	6	12

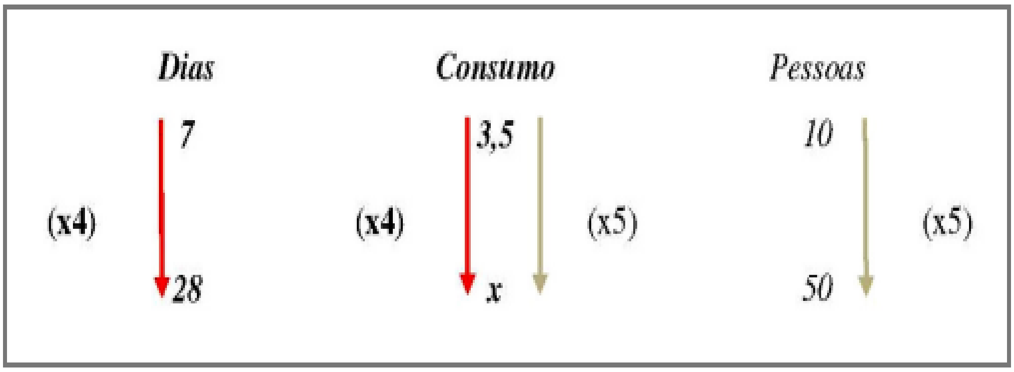
Fonte: Mello, 2020, p. 61

<u>Correspondência muitos para muitos:</u>

Exemplo 2: Um grupo com 50 pessoas vai passar 28 dias em férias no campo. Elas precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Elas sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 3,5kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar? (Santos, 2012, p. 13).

Para a resolução do exemplo 2, visualizando pelo lado didático, os dados precisam ser tratados separadamente, ou seja, as quantidades "dias e consumo" e "pessoas e consumo", considerando que não há proporcionalidade entre as quantidades "dias" e "pessoas". Sendo assim, não podemos desprezar a informação que a quantidade total do consumo de açúcar não é dada em função das quantidades "dias" e "pessoas".

Figura 7 – Correspondência muitos para muitos



Fonte: Santos, 2012, p. 114

Relações Ternárias

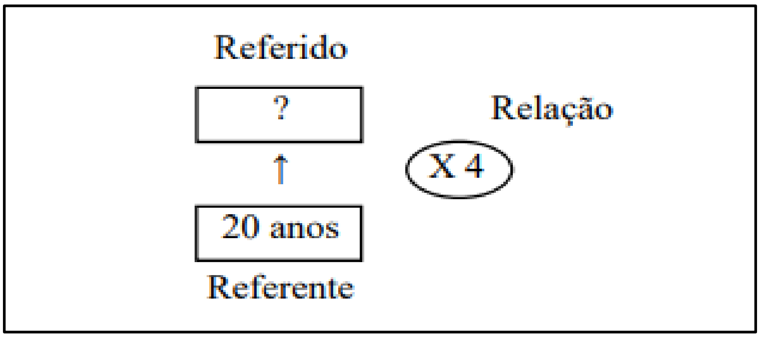
As relações ternárias se caracterizam por relacionar dois elementos de uma mesma natureza para formar um terceiro, isto é, o problema anuncia dois elementos e pergunta um terceiro.

EIXO 3 – COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA: Esta classe engloba as situações que envolvem a comparação entre duas grandezas de mesma natureza:

<u>Referido desconhecido:</u>

Exemplo 1: Meu filho tem 20 anos e sua vó tem 4 vezes a sua idade. Quantos anos têm sua vó?

Figura 8 – Referido desconhecido



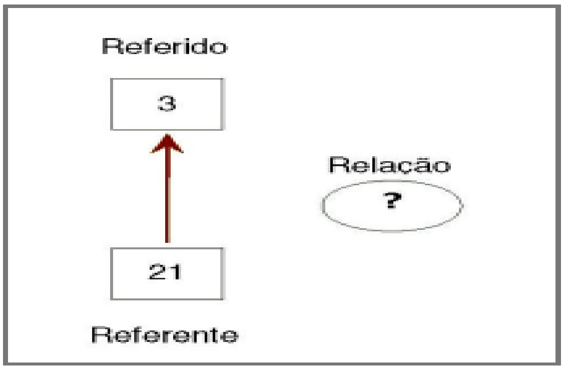
Fonte: Mello, 2020, p. 62

Alguns problemas como estes, poderão trazer o referido ou referente desconhecidos, conforme o exemplo 1. Como também, poderá trazer o referido e o referente para que o estudante descubra qual é a relação existente. (exemplo 2)

Relação desconhecida:

Exemplo 2: Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?

Figura 9 – Relação desconhecida



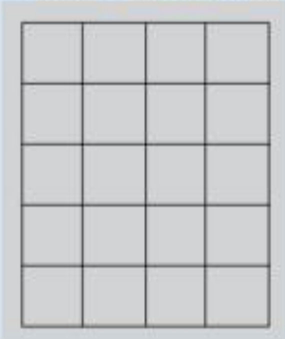
Fonte: Santos, 2012, p. 116

EIXO 4 – PRODUTO DE MEDIDAS: eixo constituído por duas subclasses: (a) situações envolvendo a ideia de configuração retangular em quantidades contínuas e discretas e (b) situações envolvendo a ideia de combinatória.

Configuração retangular (discreto/contínuo): pertencem à categoria produto de medidas e se referem à organização de elementos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais) ou envolvem uma análise dimensional (como a de área).

Exemplo1: Num auditório, as cadeiras estão dispostas em 12 fileiras de 15 cadeiras cada. Quantas cadeiras há ao todo?

Figura 10 – Exemplo de problema multiplicativo em disposição retangular

Problema	Ilustração	Análise dimensional
Num auditório, as cadeiras estão dispostas em 12 fileiras de 15 cadeiras cada. Quantas cadeiras há ao todo?		

Fonte: Miranda, 2021, p. 64.

Combinatória: é composta por ideia se assemelha ao esquema da tabela cartesiana, logo é a noção de produto cartesiano que justifica a estrutura matemática referente a essas situações.

Exemplo 1: Seja R o conjunto de três rapazes e M o conjunto formado por quatro moças. Assim: R{a,b,c} e M {d,e,f,g}. A tabela de dupla entrada (tabela cartesiana)retrata essa situação:

Figura 11 – Representação do produto cartesiano

R \ M	d	e	f	g
a	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(a,g)
b	(b,d)	(b,e)	(b,f)	(b,g)
c	(c,d)	(c,e)	(c,f)	(c,g)

Fonte: Santos, 2012, p. 121

Com a tabela, podemos identificar que um casal é composto por associação de um elemento do primeiro conjunto (R) com um elemento do segundo conjunto (M) e como também que o número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças (3 rapazes x 4 moças = 12 casais). Na análise numérica temos a = 3 x 4 e na análise das dimensões temos: casais = rapazes x moças. (SANTOS, 2012, p. 122)

Com o mesmo contexto, podemos elaborar uma situação, onde a operação requerida para sua resolução seja a divisão.

Exemplo: Numa festa foram formados 12 casais (rapazes e moças) para participarem de um número de dança. Quantos rapazes dançarinos estavam na festa, sabendo-se que as moças dançarinas eram 4?

Analisando essa situação teríamos: para os números (12 = 4 x a) e para as dimensões (casais = moças x rapazes). Esquema correspondente:

Figura 12 – Operação requerida: divisão

12 casais (moças x rapazes) = 4 moças **x** a rapazes, assim:

$$a \text{ rapazes} = \frac{12\ (\cancel{\text{moças}} \text{ x rapazes})}{4\ \cancel{\text{moças}}} \Longrightarrow 3 \text{ rapazes}$$

Fonte: Santos, 2012, p. 122

Neste capítulo, apresentamos as categorias de base doCampo Conceitual Multiplicativo. No qual, discutimos as relações, os eixos e as classes. Para o mesmo, utilizamos algumas situações em pequena quantidades.

3.3 CONSULTA A DOCENTES

Visando compreender a dinâmica do ensino e aprendizagem da Resolução de Problemas multiplicativos com números naturais, conduzimos uma pesquisa durante os meses de abril e maio de 2022. Nosso objetivo foi examinar aspectos como perfil dos docentes (sexo, idade, formação e experiência), além de diagnosticar dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos dos 6º e 7º anos, apontadas por professores em relação a resolução de situações problemas multiplicativos com números naturais.

A pesquisa aconteceu sobre as percepções de uma amostra de 65 professores que trabalham no ensino fundamental dos municípios de Abaetetuba, Acará, Ananindeua, Barcarena, Belém, Breu Branco, Breves, Itupiranga, Marabá, Marituba, Moju, Parauapebas, Salvaterra, Santarém Novo, Tailândia, todos localizados no Estado do Pará, utilizando como ferramenta de coleta de dados um formulário virtual via Google Forms. Como metodologia foi adota a pesquisa de campo, com a abordagem qualitativa.

Os resultados da consulta sobre as dificuldades de resolver os problemas multiplicativos segundo os docentes consultados foram publicados no SCEM (2022), onde apresentamos a seguir o quadro compostos coma dificuldade dos alunos na aprendizagem de conteúdos que envolvem a Resolução de Problemas Multiplicativos com Números Naturais na opinião dos docentes.

3.3.1 As dificuldades dos Alunos na aprendizagem de conteúdos que envolvem a Resolução de Problemas Multiplicativos com Números Naturais na opinião dos docentes

Nessa parte analisamos as respostas dadas pelos docentes a respeito de seus diagnósticos sobre o nível das dificuldades apresentadas pelos alunos quanto ao aprendizado de conteúdos que envolvem a resolução de problemas multiplicativos com números naturais, com base nas experiências profissionais. O quadro 3 apresenta o grau de dificuldade para a aprendizagem de alguns itens relacionados à resolução de problemas multiplicativos com números naturais, na percepção dos docentes.

QUADRO DESCRITIVO DE CONTEÚDOS ASSOCIADOS AO OBJETO MATEMÁTICO: PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS COM NÚMEROS NATURAIS

Quadro 3 – Grau de dificuldades dos alunos na visão dos docentes (Continua)

	CONTEÚDO/ HABILIDADE (C)	FÁCIL	DIFÍCIL
C1	Significado semântico da operação multiplicação de dois números naturais	60%	20%
C2	Propriedade comutativa da multiplicação de dois números naturais	69%	14%
C3	Propriedade associativa da multiplicação de números naturais	61%	25%
C4	Propriedade do elemento neutro da multiplicação de números naturais	66%	12%
C5	Princípio multiplicativo da igualdade	74%	14%
C6	Cálculo de multiplicação sem reserva	60%	23%
C7	Cálculo de multiplicação com reserva	41%	46%
C8	Significado semântico da operação divisão de dois números naturais	43%	44%
C9	Princípio da divisão da igualdade	34%	52%
C10	Cálculo de divisão sem zero no quociente.	29%	55%

C11	Cálculo de divisão com zero no quociente.	28%	49%
C12	**Escolher corretamente a operação em questões do tipo:** Nicolas estava aprendendo matemática na escola e seu pai, sabendo disso, pediu que ele falasse qual foi o total das compras que eles fizeram hoje na feira. Eles compraram 15 cerejas a R$ 0,55 cada, 13 peras a R$ 0,68 cada e 27 morangos a R$ 0,83 cada. Qual a resposta que Nicolas deveria dizer a seu pai?	31%	52%
C13	Joseane pediu que seu filho, Mário, fosse ao supermercado comprar queijo e presunto que estavam faltando na sua casa. A mãe de Mário deu R$ 15,75 e pediu que ele voltasse com o troco. A compra foi feita e o garoto voltou com R$ 3,25 de troco. Quanto custou no total o queijo e o presunto?	35%	43%
C14	Dona Maria comprou mochilas para presentear seus netos. A compra custou R$ 240,00 no total. Sabendo que as mochilas custavam valores iguais a R$ 80,00. Quantas mochilas dona Maria comprou?	40%	40%
C15	Numa papelaria há 15 caixas com 24 lápis de cor cada uma. Qual o total de lápis de cor?	51%	31%
C16	Uma sala de aula tem 18 carteiras de dois lugares distribuídas igualmente em três filas. Quantas carteiras há em cada fila?	34%	52%
C17	Um funcionário de uma loja precisa colocar 336 latas de refrigerantes em caixas de papelão. Se em cada caixa cabem 16 latas, quantas caixas serão necessárias para armazenar todas as latas de refrigerante?	31%	49%
C18	**Resolver problemas do tipo:** João está em um hotel e pretende ir visitar o centro histórico da cidade. Partindo do hotel existem 3 linhas de metrô que levam ao shopping e 4 ônibus que se deslocam do shopping para o centro histórico. De quantas maneiras João pode sair do hotel e chegar até o centro histórico passando pelo shopping?	26%	54%
C19	**Resolver problemas do tipo:** Mateus deseja poder se vestir 48 vezes diferentes, usando uma calça, uma camisa, um par de meias e um par de sapatos. Ele já possui quatro calças, três camisas, dois pares de sapatos e deseja comprar os pares de meias para permitir se vestir a quantidade de vezes desejada. Quantos pares de meias distintos deve comprar para conseguir se vestir como deseja?	21%	44%

Fonte: pesquisa de campo via Google Forms 2022

Considerando os resultados apresentados no quadro 1, constatamos que entre os dezenove conteúdos/habilidades que foram apontados no questionário, são diversos os graus de dificuldades dos alunos na visão dos docentes. Bem como em alguns conteúdos/habilidades os docentes responderam que não costumam ensinar/desenvolver a habilidade, como nos casos: C1 com 6%; C6, C7 com 5% em cada; C8 com 3% e com 2% em cada, temos C3, C4, C9, C10, C11, C3 e C19, esses foram os itens citados nas respostas.

Em relação ao grau de dificuldade atribuído, mais da metade dos conteúdos/habilidades (C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C14 e C15) foram considerados de grau fácil, alcançando o percentual de 43,89% em média, enquanto a outra parte dos conteúdos/habilidades (C7, C8, C9, C10, C11, C12, C13, C14, C16, C17, C18 e C19) foram considerados pelos docentes com grau elevado de dificuldade (difícil), com média de 37,84%. Os valores apresentados, corroboram com os dados da pesquisa de Miranda (2021), a qual mostrou uma média de 45,3% dos discentes consideram de grau fácil, enquanto 38,4% em média classificaram como difícil os demais conteúdos/ habilidades apresentadas.

Com base nos resultados evidenciados, verifica-se que a aprendizagem da matemática está em processo de evolução, mas continuam predominando as dificuldades na resolução dos problemas multiplicativos com números naturais, sejam eles com a operação de multiplicação ou divisão, classificados como aritméticos ou algébricos.

O objetivo desta pesquisa foi compreender como os educadores abordam a resolução de problemas como metodologia e como a implementam em sala de aula. Também observei a identificação dos professores sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos do 6º e 7º anos ao lidar com problemas multiplicativos envolvendo naturais. A pesquisa buscou responder à seguinte pergunta: quais são as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos nesses anos escolares na resolução de problemas multiplicativos com números naturais, conforme relatado pelos professores?

Optamos por uma pesquisa de campo qualitativo, utilizando um formulário virtual via Google Forms para coletar dados. Após análises, identificamos que as dificuldades dos alunos em problemas multiplicativos, seja de multiplicação ou divisão, aumentam com a complexidade. Há falta de entendimento na leitura, interpretação de situações, multiplicação com reserva, princípio da divisão e escolha da operação correta.

A partir dos achados, é viável desenvolver estratégias didáticas e métodos focalizados para superar as dificuldades identificadas, explorando as habilidades e limitações dos alunos. Para abordar as complexidades na leitura e interpretação, uma abordagem específica na interpretação de problemas pode ser adotada. Em conclusão, o sucesso depende da reflexão contínua dos professores sobre sua prática e papel como mediadores, buscando constantemente o aprimoramento profissional para proporcionar uma educação de qualidade aos alunos.

Por meio da pesquisa foi desenvolvido um artigo intitulado "O Ensino de Problemas Multiplicativos segundo a opinião de professores”, juntamente como o Professor Doutor Pedro Franco de Sá e a Professora Doutora Maria de Lourdes Silva

Santos, o qual foi apresentado e publicado nos Anais do Seminário de Cognição e Educação Matemática (SCEM)2 no ano de 2022.

3.4 ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Tendo em vista nosso interesse em aprofundar conhecimentos sobre problemas multiplicativos realizamos uma revisão de estudo sobre o ensino de problemas desta natureza. Nosso objetivo foi apresentar um panorama de pesquisas existentes relacionadas ao objeto de estudo, de modo a verificar temáticas, objetivos, metodologias, resultados e conclusões, alcançados por pesquisadores que nos antecederam em diferentes anos e contextos. Para tanto, analisamos 13 trabalhos que foram subdivididos em duas categorias de estudos, que serão descritos posteriormente.

Para realização desta revisão de estudos adotamos uma metodologia que obedeceu a cinco etapas: busca, seleção, categorização, análise e apresentação dos resultados obtidos pelas pesquisas encontradas referentes ao ensino de problemas multiplicativos.

Para busca e seleção das pesquisas, procuramos trabalhos envolvendo nosso tema no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Plataforma Sucupira, também ligada a CAPES.

A categorização da revisão constituiu-se sobre 19 (dezenove) trabalhos relacionados ao ensino de resolução de problemas multiplicativos, sendo dissertações, artigos, revistas e tese. Utilizando como referência Santos (2017), esses trabalhos foram classificados de acordo com suas respectivas características, em quatro grupos de estudos: Estudos Teóricos, Estudos Diagnósticos, Estudos Experimentais e Estudos Documentais. O autor define cada grupo como:

> Os estudos teóricos são aqueles que propuseram conceitos e/ou ideias sobre resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais. Os estudos diagnósticos são aqueles que analisaram e identificaram as dificuldades dos alunos na aprendizagem e/ou dos professores no ensino desses tipos de problemas. Os estudos experimentais são aqueles que

[2] Anais do Seminário de Cognição e Educação Matemática (SCEM), ano 2022, p. 281-299, disponível em: https://ccse.uepa.br/ppged/?page_id=1951.

> propuseram e realizaram atividades de ensino em sala de aula, voltadas à resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais. Os estudos documentais são aqueles que analisaram textos de referência sobre o ensino de matemática, documentos oficiais, ou material usado como subsídio didático para o ensino-aprendizagem de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais (Santos, 2017, p. 30).

A classificação das pesquisas em quatro grupos, facilita o entendimento quanto ao cenário de pesquisas existentes acerca do ensino de problemas multiplicativos. Com isso, elaboramos um quadro com a seleção das pesquisas que compõem a revisão de estudo, onde os trabalhos foram agrupados em estudos teóricos, estudos diagnósticos, estudos experimentais e estudos documentais. Favorecendo uma melhor visão do cenário do ensino de problemas multiplicativos.

Quadro 4 – Estudos sobre Problemas Multiplicativos continua

TIPOS DE ESTUDOS	AUTOR(ES) / ANO	TÍTULO DO TRABALHO / NATUREZA
ESTUDOS TEÓRICOS	ALTÓE (2017)	Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. (Dissertação)
	FERRAZ (2016)	Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). (Dissertação)
	NASCIMENTO (2017)	Problemas multiplicativos no 4º ano do ensino fundamental: ensino e estratégias de resolução. (Dissertação)
	SÁ (2003)	Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear. (Livro)
ESTUDOS DIAGNÓSTICOS	MAGINA, SANTOS, MERLINI (2014)	O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. (Artigo)
	CASTRO, BARRETO E NASCIMENTO (2017)	O campo conceitual multiplicativo: análise das atividades matemáticas ofertadas no 5º ano do ensino fundamental. (Dissertação)
	MARTINS (2016)	Resolução de situações-problema da categoria isomorfismo de medidas, por alunos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental: reflexão e análise. (Artigo)
	LOPES, FELIX, SÁ (2022)	A Escolha da Operação em Questões Multiplicativas Aritméticas e em Questões Multiplicativas Algébricas que Envolvem Números Naturais e Números Decimais. (Artigo)
ESTUDOS EXPERIMENTAIS	MATNI (2014)	O ensino de problemas com as 4 operações por meio de atividades. (TCC)
	SILVA (2015)	Ensino de problemas envolvendo as quatro operações por meio de atividades. (Dissertação)
	SANTOS (2017)	O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais. (Dissertação)

	NUNES E FERREIRA (2017)	Representações de Estudantes do 4º Ano do Ensino Fundamental Frente a Problemas do Campo Multiplicativo: uma análise de resoluções. (Artigo)
	SÁ E SILVA (2017)	Está questão é de vezes ou de dividir? (Artigo)
	CAMPOS (2019)	Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º. Ano do Ensino Fundamental. (Tese)
	BARBOSA (2021)	O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por atividades experimentais. (Dissertação)
	MIRANDA (2021)	O ensino por atividades de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular. (Dissertação)
Estudos DOCUMENTAIS	ARAÚJO E SANTOS (2016)	Análise do conceito de divisão em um livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental, na ótica da teoria dos campos conceituais. (Artigo)
	NASCIMENTO E MORELATTI (2013)	A Abordagem de Problemas no Material do PIC. (Artigo)
	BARBOSA (2014)	Campo aditivo e multiplicativo: o que é avaliado na prova brasil do 5º ano. (Artigo)

Fonte: pesquisa bibliográfica (2023)

3.4.1 Estudos Teóricos

Neste item apresentamos os resultados das pesquisas referentes aos estudos teóricos sobre o ensino de resolução de problemas envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais, destacando principalmente os objetivos das pesquisas, os sujeitos, o lócus, os instrumentos de coletas e análise de dados, as conclusões e, se houver, apontamentos para estudos futuros.

Iniciamos pelo trabalho de Altoé (2017), que realizou uma pesquisa com base na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud sobre resolução de problemas no campo multiplicativo e teve como objetivo: investigar contribuições de atividades com base na formulação de problemas para o ensino de conceitos de multiplicação e divisão nos anos iniciais do ensino fundamental. A pesquisa foi realizada com 28 alunos do 5º ano de uma Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio do município de Vargem Grande /ES.

Na investigação o autor utilizou como método de pesquisa a Engenharia Didática que utilizou quatro fases. Na primeira fase, denominada análises preliminares, foi realizada a coleta de dados mediante a observação das aulas de matemática da professora regente e foram apresentados estudos referentes à Formulação de Problemas e a conceitos sobre as operações de Multiplicação e

Divisão. Na segunda fase, concepção e análise a priori, estabeleceu o delineamento das variáveis macrodidáticas e microdidáticas, e a partir delas foram elaboradas em conjunto com a professora regente cinco atividades. Na terceira fase houve aplicação de uma sequência de atividades, de acordo com a sequência didática elaborada na segunda fase. A quarta fase, análise a posteriori e avaliação, ocorreu a confrontação dos dados da análise a priori com os da análise a posteriori.

O escritor chegou à conclusão de que a aplicação da estratégia de Formulação de problemas foi positivamente recebida pelos alunos e pela professora responsável, e pode ter um impacto benéfico no ensino da matemática. Resolver problemas criados pelos próprios estudantes demonstrou ser mais cativante e estimulante do que abordar problemas apresentados pelo professor. Isso não apenas oferece aos alunos a oportunidade de aprender a partir de contextos novos, mas também incentiva a reflexão sobre os conceitos abordados.

Ferraz (2016) realizou um estudo para investigar a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo por alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG), buscando entender como tarefas construídas a partir da Teoria dos Campos Conceituais influenciam a aprendizagem de conceitos relacionados ao campo multiplicativo em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental.

Os propósitos da pesquisa foram: reconhecer o entendimento dos estudantes em relação às várias noções do campo multiplicativo; e examinar como o conhecimento sobre o campo multiplicativo é aplicado durante a realização das tarefas. A abordagem metodológica escolhida foi qualitativa, pois, embora os resultados dos testes tenham sido avaliados, a pesquisadora enfatizou mais o progresso individual de cada aluno ao longo do processo, evitando comparações pré e pós-teste, bem como entre os participantes.

A investigação foi conduzida em uma classe do 6º ano do Ensino Fundamental de uma instituição pública em Ouro Preto (MG), situada nas proximidades do centro urbano. A seleção da escola foi baseada no fato de ser o ambiente onde a pesquisadora atuava como professora desde 2012. Essa decisão também refletiu o desejo pessoal da educadora de aprimorar suas próprias abordagens pedagógicas e enriquecer a experiência de aprendizagem dos alunos.

Os resultados deixam claro que todos os alunos aplicaram conhecimentos, porém de maneira variada. Enquanto alguns progrediram consideravelmente na compreensão e resolução de problemas relacionados à multiplicação, outros, que superaram dificuldades no campo da adição, começaram a entender a multiplicação. Além disso, o estudo também revelou que outras formas de aprendizado (como interação com colegas e professores, habilidades de escuta e construção de argumentos) ocorreram e desempenharam um papel crucial no processo.

A avaliação dos resultados foi conduzida através da exposição e avaliação das realizações dos alunos, agrupadas por categoria de problemas, ressaltando, sempre que viável, os teoremas em ação sugeridos pelas resoluções e explicações. Uma das alunas seguiu uma trajetória especialmente singular, então optou-se por examiná-la separadamente. A análise foi concluída com uma breve discussão do processo experimentado pela turma como um todo.

A autora chegou à conclusão de que, apesar da Teoria dos Campos Conceituais exercer influência no ensino das operações fundamentais (campo aditivo e campo multiplicativo), como preconizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e ser apresentada de certa forma em alguns livros didáticos, é essencial que o professor busque ativamente conhecimento, aprofundando-se nas concepções subjacentes a essa teoria e aplicando concretamente as propostas de Vergnaud para a aprendizagem matemática.

Sá (2003) conduziu uma pesquisa acerca de situações problemas que envolvem as quatro operações básicas com números naturais e suas diversas interpretações. De acordo com esse autor, as operações podem ser abordadas a partir de duas perspectivas: semântica e simbólica. O aspecto semântico aborda a questão sobre qual pergunta cada operação responde. Já o aspecto simbólico está relacionado ao resultado da manipulação dos símbolos utilizados nas operações, que pode ser obtido apenas consultando a tabuada da operação, sem necessidade de interpretação. Adicionalmente, Sá (2003) distingue entre problemas de uma operação e problemas que envolvem uma operação. Problemas de uma operação referem-se àqueles que utilizam a operação conforme seu significado semântico. Por outro lado, problemas que envolvem uma operação são aqueles em que a operação utilizada no algoritmo de resolução não é diretamente determinada pelo seu sentido semântico.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Tinha duas moedas e ganhei três moedas de meu pai. Com quantas moedas fiquei?

Este é um problema da operação de adição, pois basta a análise semântica do enunciado para sabermos que a operação a ser realizada com os dados do problema é a adição.

Exemplo: Tenho duas camisas e três calças. De quantas maneiras distintas posso vestir-me usando uma camisa e uma calça?

Esse é um desafio que emprega a operação de multiplicação em sua abordagem operacional, já que somente através do entendimento do princípio fundamental da contagem é possível concluir pela multiplicação do total de camisas pelo total de calças para alcançar a solução do problema.

Após analisar os problemas envolvendo as quatro operações com números naturais, Sá (2003) percebeu que os problemas envolvendo uma operação somente estão divididos em dois grupos:

1º - Problemas Aritméticos: são os problemas em que a pergunta/incógnita está isolada num dos membros da igualdade após sua modelação (tradução dos dados para linguagem simbólica). Nestes problemas, normalmente, a igualdade é utilizada para indicar o resultado da operação realizada, ou seja, a igualdade é usada para representar transformações ou resultados.

2º - Problemas Algébricos: são problemas em que a pergunta/incógnita não está isolada num dos membros da igualdade após sua modelação. Nestes problemas, a igualdade é utilizada para indicar a relação de equilíbrio exigida entre os dados.

Conforme Sá (2003) os problemas aritméticos são mais fáceis de se resolver do que os algébricos, visto que "na resolução dos problemas do 1º tipo as propriedades aditivas e multiplicativas da igualdade não são usadas, enquanto, que nos problemas do 2º tipo essas propriedades são utilizadas" (Sá, 2003, p. 82).

Nascimento (2017) conduziu uma pesquisa que focou no ensino e nas estratégias para resolver problemas do campo multiplicativo. O objetivo era identificar conexões entre as abordagens espontâneas das crianças do 4º ano do ensino fundamental na resolução de problemas multiplicativos e os métodos de ensino empregados pelos professores diante dessas estratégias.

O estudo foi realizado por meio de uma abordagem qualitativa de estudo de caso, onde foram observadas duas turmas de 4º ano com professoras diferentes e em turnos opostos. A pesquisa se concentrou em uma das turmas, com 21 alunos, escolhida por conveniência. Os dados foram coletados por meio da observação das aulas das duas professoras, seguida pela aplicação de um teste de resolução de problemas multiplicativos individualmente com cada aluno.

A análise dos resultados foi conduzida ao corrigir os problemas, seguida de uma avaliação qualitativa das estratégias empregadas pelos alunos. Posteriormente, houve um retorno à sala de aula para observação, onde os mesmos tipos de problemas foram tratados pela professora da turma. Isso permitiu verificar os métodos de ensino utilizados por ela quando abordava cada categoria de problemas.

Sobre as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução de problemas multiplicativos, a pesquisadora propõe as seguintes categorias semânticas: multiplicativos de proporcionalidade (MP), comparação (MCP), organização Retangular (MOR), proporcionalidade por partição (MPdp), proporcionalidade por medição (MPdm) e análise combinatória simples (MAC).

Um alto número de questões ficou sem resposta ou apresentou erros de raciocínio ao serem reexaminadas, especialmente em questões relacionadas à proporcionalidade por partição (MPdp), medição (MPdm) e análise combinatória (MAC). Isso ressaltou a persistente dificuldade de ensinar a multiplicação. Observou-se que as professoras frequentemente recorrem ao procedimento de adicionar parcelas iguais para introduzir o conceito multiplicativo, não esclarecendo adequadamente que a multiplicação é uma relação constante entre variáveis. É essencial compreender os conceitos subjacentes e os contextos nos quais a multiplicação é aplicada.

A falta de utilização dos erros dos alunos como base para novas abordagens de ensino foi claramente identificada, apontando para a escassez de intervenções apropriadas por parte dos professores em relação aos erros e estratégias dos alunos na resolução de problemas. Nascimento conclui que tanto professores quanto alunos enfrentam desafios consideráveis nas estruturas multiplicativas, com muitos alunos não compreendendo o processo de multiplicação, mas simplesmente seguindo palavras-chave. Isso sugere a necessidade de investigações para aprimorar os métodos de ensino nesse contexto.

3.4.2 Estudos Diagnósticos

Neste grupo de estudos apresentamos trabalhos que identificaram dificuldades dos discentes na aprendizagem e/ou dos docentes no ensino de resolução de problemas envolvendo o campo conceitual multiplicativo.

Iniciaremos com a avaliação do estudo realizado por Castro, Barreto e Nascimento (2017), que investigaram o campo conceitual multiplicativo ao examinar as atividades matemáticas apresentadas a estudantes de duas turmas do 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública em São Luís/MA durante os primeiros seis meses letivos de 2015. A análise das atividades foi embasada na teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. O foco deste estudo recai sobre as situações-problema do tipo isomorfismo de medidas.

Os resultados da investigação revelaram que o ensino da multiplicação e da divisão foi conduzido de maneira sequencial, divergindo da abordagem conceitual multiplicativa, que preconiza o tratamento conjunto dessas operações. As atividades matemáticas foram categorizadas em dois grupos de referência: inadequadas e adequadas. No total, foram examinadas 347 atividades relacionadas à multiplicação e divisão.

A análise dos dados revela que, das atividades examinadas, 201 (57,93%) envolveram a aplicação de algoritmos convencionais de multiplicação e divisão, sendo consideradas inadequadas para promover a compreensão conceitual. Esses resultados indicam uma ênfase excessiva no ensino do cálculo numérico em detrimento do cálculo relacional. Foram identificadas 146 (42,07%) atividades multiplicativas adequadas à conceitualização, das quais 64 se enquadraram em situações de relação ternária e 82 em situações de relações quaternárias, especificamente na categoria de isomorfismo de medidas.

A quantidade de situações-problema relacionadas ao isomorfismo de medidas presentes nas atividades matemáticas revela uma predominância de situações de multiplicação em comparação com a divisão partitiva e a divisão quotitiva. Além disso, os professores não incluíram nenhuma atividade matemática que envolvesse situações multiplicativas do tipo quarta proporcional.

Merlini, Santos e Magina (2014) conduziram uma avaliação do desempenho de alunos do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental em relação a duas situações pertencentes ao campo conceitual multiplicativo. A partir dessa avaliação, eles identificaram os níveis de raciocínio utilizados pelos estudantes. A metodologia empregada baseou-se nos princípios da pesquisa descritiva e envolveu a aplicação de um teste a 349 alunos de uma escola pública estadual em São Paulo. No entanto, o foco deste estudo recaiu somente sobre o desempenho e as estratégias utilizadas por 175 alunos (86 do 3º ano e 89 do 5º ano) em relação a duas questões de multiplicação no contexto de proporção simples, que abordavam as correspondências "um para muitos" e "muitos para muitos". O próximo quadro apresenta as duas questões que foram analisadas.

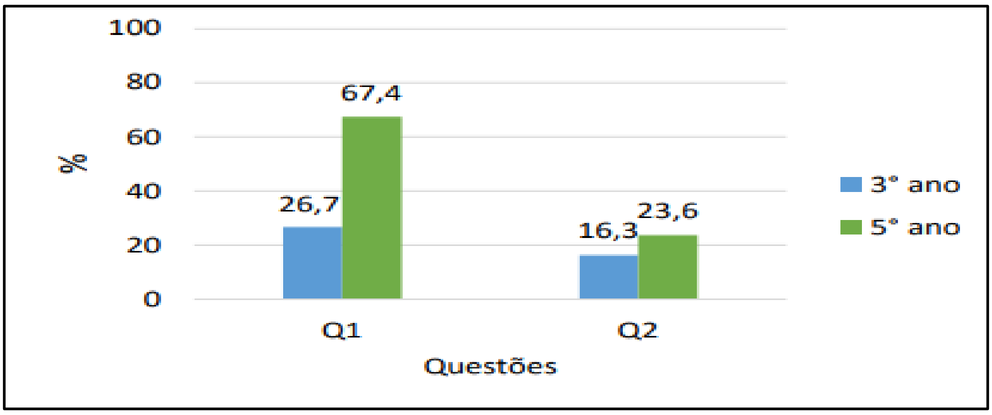
Quadro 5 – Situações analisadas do campo conceitual multiplicativo

Questão 1 (Q1) Situação: Um para muitos	Maria utiliza 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Se ela fizer 3 receitas de brigadeiro, quantas colheres de chocolate ela usará?
Questão 2 (Q2) Situação: Muitos para muito	Dona Benta usa 12 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela vai precisar para fazer 5 bolos

Fonte: adaptado de Merlini, Magina e Santos (2014, p. 524)

O gráfico a seguir apresenta o desempenho dos estudantes por ano e por questão.

Figura 13 – Desempenho dos estudantes de 3º e 5º anos nas duas questões



Fonte: Merlini, Magina e Santos (2014, p.525)

Os alunos das duas séries apresentaram melhor desempenho na Questão 1 (Q1) do que na Questão 2 (Q2). O teste T-Students para amostras emparelhadas confirmou a diferença significativa de desempenho entre as questões. Em relação aos anos escolares, o teste T-Students para amostras independentes revelou um desempenho superior do 5º ano na Q1, mas não indicou diferença significativa na Q2, embora o 5º ano tenha tido um leve desempenho superior ao 3º ano.

As autoras justificaram as discrepâncias de desempenho dos alunos com base em dois fatores. O primeiro se relaciona ao aspecto conceitual, indicando que as questões (Q1 e Q2) possuíam estruturas diferentes, permitindo a aplicação mais fácil da estratégia de adição repetida na Q1, enquanto essa abordagem não era viável na

Q2. O segundo aspecto é cognitivo, pois as questões apresentavam diferentes níveis de complexidade: na Q1, a relação fixa estava explícita, enquanto na Q2, estava implícita, requerendo a coordenação de duas operações - divisão para encontrar a relação fixa e multiplicação para obter o resultado.

Quanto às estratégias empregadas pelos alunos na resolução das questões, foram identificados quatro níveis baseados em representações "numéricas" ou "pictóricas": 1- Incompreensível; 2- Pensamento aditivo (2A - Contagem e 2B - Operação de adição); 3- Transição (do pensamento aditivo para o multiplicativo); e, 4- Pensamento multiplicativo. Estratégias de nível 1 foram mais frequentes entre alunos do 3º ano do que do 5º ano (37,1% vs. 10,8%). Essas estratégias foram especialmente notáveis em Q2 para ambos os anos escolares. As representações pictóricas prevaleceram no 3º ano, enquanto as numéricas foram mais comuns no 5º ano.

A estratégia do nível 2A foi pouco empregada por ambos os anos (menos de 3%). O nível 2B foi mais utilizado pelos alunos do 3º ano (30,4%), mas surpreendentemente 22% das estratégias usadas pelos alunos do 5º ano também se enquadraram nesse nível, principalmente para a resolução da Q1. A questão Q1 era um exemplo típico das estruturas multiplicativas, o que chamou atenção por não ter sido dominada pelos alunos do 5º ano.

A estratégia de nível 3 foi mais comum entre os alunos do 3º ano (27,8%) do que do 5º ano (13%). As autoras destacaram que 75,9% das estratégias do 3º ano levaram a respostas corretas, sugerindo que esses alunos já possuem prontidão cognitiva para resolver problemas multiplicativos, especialmente os que envolvem a relação de um para muitos. No entanto, no 5º ano, houve surpresa negativa, pois essa estratégia foi menos usada do que a 2B. As autoras indicaram que o ensino parecia limitado a conectar a estrutura multiplicativa à aditiva, sem explorar as diferenças entre ambas.

Quanto ao nível 4, a maioria dos alunos obteve êxito ao empregar o pensamento multiplicativo. Na Q2, alguns coordenaram as estruturas multiplicativa e aditiva para a solução. Entre as estratégias que resultaram em erro na Q2, destacaram-se: a multiplicação de 12 ovos por 3 bolos, indicando a dificuldade de entender a relação implícita "muitos para muitos"; ou, multiplicaram as quantidades de bolos (3 bolos vezes 5 bolos).

Martins (2016) analisou o rendimento dos alunos, descreveu e categorizou as estratégias utilizadas por eles na resolução de problemas de isomorfismo de medidas.

A pesquisa envolveu crianças do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de São Paulo, que já possuíam familiaridade com as quatro operações e seus algoritmos. Foi aplicado um teste composto por cinco questões com situações-problema de estruturas multiplicativas abordando as categorias "um para muitos" e "muitos para muitos".

Os resultados do estudo indicaram que os alunos tiveram um desempenho melhor nas situações-problema com a correspondência "um para muitos" em comparação com a correspondência "muitos para muitos". Isso se deveu a vários fatores, como a proximidade desses problemas com as experiências dos alunos, a clareza das relações de proporcionalidade e o maior enfoque dado a essas situações na escola. Diferentes estratégias, envolvendo tanto o raciocínio aditivo quanto o multiplicativo, foram utilizadas na resolução das questões.

A conclusão da autora é que os alunos enfrentam dificuldades ao lidar com situações-problema da correspondência "muitos para muitos" e que é necessário repensar a forma como os conceitos de multiplicação e divisão são apresentados e ensinados durante os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Lopes, Felix e Sá (2022) compartilham em um artigo os resultados de uma pesquisa que explorou a seguinte indagação: "Os alunos que selecionam as operações de forma correta em problemas envolvendo números naturais demonstram a mesma habilidade em problemas com números decimais no contexto multiplicativo?" Diante dessa pergunta, o objetivo principal do estudo foi examinar como varia o índice de acertos na escolha da operação em problemas multiplicativos com números decimais quando a seleção da operação é feita corretamente em problemas multiplicativos com números naturais.

A coleta de dados foi realizada através da administração de um exame a 109 alunos provenientes de cinco classes pertencentes a três instituições de ensino público localizadas em Confresa, estado de Mato Grosso, Brasil. O teste incluía problemas multiplicativos que abrangiam tanto números naturais quanto números decimais, apresentando estruturas semelhantes e divididos em categorias aritméticas e algébricas.

Os resultados extraídos dos testes, que abrangeram tanto problemas multiplicativos aritméticos quanto problemas multiplicativos algébricos com números naturais e decimais, revelaram altas taxas de precisão na seleção da operação em problemas multiplicativos com números decimais, quando a escolha correta da operação foi alcançada em problemas multiplicativos envolvendo números naturais. Além disso, observou-se que os alunos tiveram um desempenho superior na resolução de questões multiplicativas do tipo aritmético em comparação com questões do tipo algébrico.

3.4.3 Estudos Experimentais

Neste item apresentamos os resultados das pesquisas referentes aos estudos teóricos sobre o ensino de resolução de problemas envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais, destacando principalmente os objetivos das pesquisas, os sujeitos, o lócus, os instrumentos de coletas e análise de dados, as conclusões e, se houver, apontamentos para estudos futuros.

Vamos começar com o estudo de Santos (2017), que conduziu uma investigação sobre a solução de problemas no âmbito dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, fazendo uso da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2009) como base teórica. O estudo envolveu 35 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola municipal em Muaná, Pará. O objetivo foi analisar os efeitos de uma sequência didática não convencional na participação em aulas de matemática e no desempenho em resolver problemas que abrangem as quatro operações fundamentais com números naturais.

O autor adotou a Engenharia Didática como método de pesquisa, dividindo-a em quatro fases. Na primeira, foram realizadas análises prévias, abrangendo aspectos históricos da resolução de problemas com as operações aritméticas fundamentais, revisões de estudos relacionados ao tema, consultas a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental sobre o ensino-aprendizado do objeto matemático e análise de livros didáticos abordando problemas matemáticos. Na segunda fase, ocorreu a concepção e análise a priori, englobando descrições de tendências metodológicas para o ensino de matemática, testes e desenvolvimento de uma sequência didática. A terceira fase envolveu a experimentação, na qual a sequência didática elaborada na fase anterior foi aplicada. Por fim, a última fase compreendeu a análise *posteriori* e validação, na qual os dados coletados durante a fase de experimentação foram analisados e avaliados.

A avaliação do trabalho realizado na turma de 6º ano envolveu a aplicação de testes tanto aditivos quanto multiplicativos, compostos por pré-testes e pós-testes. O teste aditivo continha 15 questões, e os resultados do pós-teste demonstraram uma melhora no desempenho dos alunos na resolução de problemas aditivos. O teste multiplicativo aplicado pelo autor também continha 15 questões e indicou uma evolução no aprendizado dos estudantes.

Os resultados apresentados por Santos (2017) indicaram que os alunos obtiveram uma melhoria maior no desempenho das questões aritméticas em comparação às algébricas. Houve um aumento percentual de acertos nas questões algébricas, bem como uma redução nos erros, e nenhum problema ficou sem resposta. Além disso, os alunos que formularam as sentenças de modelagem do problema tiveram um bom desempenho na sua resolução. O autor concluiu que a aplicação das metodologias durante a experimentação, incluindo a sequência didática utilizada, teve efeitos positivos na melhoria da resolução de problemas com as operações fundamentais e na participação dos alunos nas aulas de matemática.

Matni (2014) conduziu um estudo experimental com a finalidade de avaliar os impactos de uma sequência didática no ensino da resolução de problemas relacionados às quatro operações. O estudo envolveu 32 alunos do 6º ano de uma escola pública em Belém/PA. Os participantes realizaram um pré-teste abrangendo problemas aditivos e multiplicativos. Durante a intervenção, foram utilizados jogos para praticar a tradução de dados de problemas para a linguagem matemática. Posteriormente, os alunos completaram dois pós-testes: um de problemas aditivos, com as mesmas questões do pré-teste, e outro de problemas multiplicativos, também com as mesmas questões do pré-teste.

Os resultados indicaram uma redução no número de erros e questões em branco nos problemas aditivos. No entanto, no contexto dos problemas multiplicativos, as mudanças foram relativamente menores, com um leve aumento no número de acertos e uma diminuição nos erros e questões em branco.

A autora observou que no pós-teste, o desempenho em problemas aritméticos foi superior aos problemas algébricos, com os melhores resultados nas questões aditivas. No entanto, o desempenho no campo multiplicativo ficou abaixo do esperado, atribuído a dificuldades de interpretação e falta de domínio da tabuada. Ela sugeriu que uma sequência didática com atividades focadas no domínio da tabuada e nos procedimentos de cálculo poderia melhorar o desempenho dos alunos. Além disso, destacou que problemas que usam uma operação são desafiadores, mas poderiam ser mais facilmente abordados se não fossem ensinados isoladamente dos problemas de uma operação.

Miranda (2021) conduziu uma pesquisa investigando os impactos de uma sequência didática baseada em atividades na aprendizagem da resolução de problemas multiplicativos com foco na ideia de disposição retangular. O estudo foi realizado em uma turma do 6º ano, composta por 36 alunos, em uma escola pública municipal de Ananindeua/PA. A fundamentação teórica se baseou no Ensino por Atividades e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. A metodologia empregada foi a Engenharia Didática, que se desdobrou em quatro fases: análises prévias, análise a priori, experimentação e validação.

A pesquisa teve como objetivo analisar os efeitos que uma sequência didática por atividades tem sobre a aprendizagem na resolução de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa conduzida por Miranda (2021) evidenciou que a formulação de uma sentença que represente o problema de maneira natural é crucial para a escolha correta da operação na resolução dos problemas. Além disso, os resultados demonstraram um significativo aumento nas notas obtidas no pós-teste em relação ao pré-teste.

Ferreira e Nunes (2017) conduziram um estudo qualitativo envolvendo dez alunos do 4º ano do ensino fundamental, focando nas representações empregadas na resolução de problemas multiplicativos. A pesquisa valorizou os conhecimentos dos participantes e se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais (TCC). A metodologia utilizada incluiu duas abordagens: uma revisão bibliográfica e uma intervenção em sala de aula.

A revisão bibliográfica foi categorizada em duas seções: desenvolvimento de conceitos e campo conceitual multiplicativo; e, abordagens para a resolução de problemas relacionados às operações de multiplicação e divisão. O Campo Conceitual Multiplicativo (estruturas multiplicativas) foi subdividido em duas categorias de situações: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

A intervenção em sala de aula ocorreu em uma escola pública de ensino fundamental e médio, localizada em Belém-PA, ao longo de dois dias no ano de 2016. Com base nos fundamentos teóricos, os pesquisadores elaboraram atividades para os alunos, utilizando como base os princípios da Teoria dos Campos Conceituais. O objetivo era investigar as representações que os estudantes do 4º ano tinham em relação às operações de multiplicação e divisão, especialmente diante de problemas multiplicativos.

A análise dos resultados conduziu os autores à conclusão de que as representações predominantes nas resoluções dos estudantes foram de natureza aritmética e simbólico-numérica. Nas representações aritméticas, houve a manifestação de composições aditivas e agrupamentos de elementos de valor idêntico para testar hipóteses de divisibilidade. As representações simbólico-numéricas também refletiram ideias aditivas. Segundo os autores, tais resultados sugerem que os estudantes possuem um domínio prévio do pensamento aditivo, conforme evidenciado pelo conhecimento internalizado anteriormente.

O estudo conduzido por Sá e Silva (2017) teve como propósito analisar os impactos da formulação das sentenças naturais nos enunciados de questões multiplicativas, abordando a seleção da operação e o desempenho na resolução. A pesquisa envolveu 23 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em Abaetetuba/PA. O processo de investigação consistiu nas etapas de revisão literária, aplicação de questionário socioeconômico, pré-teste, desenvolvimento de uma sequência didática, aplicação dessa sequência, pós-teste e análise dos resultados. Os testes incluíram 12 questões multiplicativas, abrangendo contextos aritméticos e algébricos.

A sequência didática elaborada compreendia sete atividades, divididas entre tarefas de aprendizado e consolidação. A metodologia de ensino adotada durante a implementação da sequência foi o ensino por atividades. O foco principal das atividades de aprendizado era orientar os alunos na descoberta de um padrão geral para resolver problemas multiplicativos. Para atingir esse objetivo, os estudantes deveriam seguir passos específicos ao abordar as questões, incluindo a interpretação do enunciado, a formulação da expressão matemática correspondente, a seleção adequada da operação necessária para a solução e a realização dos cálculos pertinentes. A fase de experimentação abrangeu um período de 10 sessões, distribuídas em sete sessões de 4 horas e três sessões de 2 horas.

A análise comparativa entre os resultados pré e pós-testes indicou um aumento significativo nas respostas corretas após a intervenção; houve uma redução nos erros em todas as questões; ao analisar individualmente, foi notável um aumento expressivo na taxa de acertos por aluno, junto com uma diminuição dos erros e omissões; a investigação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson revelou uma influência mínima dos fatores socioeconômicos nos resultados obtidos. Os autores concluíram que a construção da sentença matemática natural desempenhou um papel em reduzir a complexidade na seleção da operação, e a metodologia de ensino adotada pode ser uma abordagem eficaz para enfrentar as dificuldades associadas à resolução de problemas multiplicativos.

Barbosa (2021) conduziu uma pesquisa investigando os impactos de uma sequência didática inovadora no ensino de resolução de problemas do Campo Conceitual Multiplicativo, especificamente relacionada ao Princípio Fundamental da Contagem. O estudo foi realizado com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola estadual no Distrito de Icoaraci, Belém/PA. O objetivo foi avaliar os efeitos de uma abordagem baseada em atividades experimentais no desempenho dos estudantes na resolução de problemas.

A pesquisadora Barbosa (2021) fundamentou seu estudo na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e no Ensino por Atividades Experimentais. Utilizando o método de pesquisa da Engenharia Didática, a pesquisa foi dividida em quatro etapas: análises prévias abordando a base teórica e estudos relacionados ao Campo Conceitual Multiplicativo, Combinatória e Princípio Fundamental da Contagem; concepção e análise a priori detalhando a teoria de Ensino por Atividades, instrumentos de coleta de dados e sequência didática; experimentação relatando a coleta de dados; análise a posteriori e validação expondo resultados dos testes e comparações percentuais.

A autora conduziu a avaliação da sequência didática por meio da administração de um teste antes e depois da intervenção, focado em problemas multiplicativos baseados no Princípio Fundamental da Contagem, composto por 10 questões. Os resultados foram obtidos ao comparar as pontuações do pré-teste com as do pós-teste.

Após a aplicação do pós-teste, a pesquisa de Barbosa (2021) revelou que as questões aritméticas de duas etapas tiveram um desempenho excelente, à exceção da questão 5, enquanto as questões algébricas experimentaram um aumento significativo nas taxas de acerto. A autora destacou que as comparações percentuais entre os resultados do pré-teste e pós-teste indicaram um notável aumento nos acertos e uma redução nos erros, evidenciando o impacto positivo da sequência didática na resolução de problemas baseados no Princípio Fundamental da Contagem.

Silva (2015) realizou uma pesquisa que examinou os impactos de uma sequência didática no ensino de problemas relacionados às quatro operações com números naturais. Essa sequência começou com o foco na formulação da sentença natural que correspondia ao enunciado da questão, seguida pela identificação da operação adequada. O estudo avaliou como essa abordagem afetava a capacidade de selecionar a operação correta e o desempenho na resolução de problemas que envolvem as quatro operações com números naturais.

O estudo de Silva (2015) empregou os princípios da Engenharia Didática, estruturados em quatro etapas sequenciais: a primeira fase envolveu a revisão de pesquisas prévias sobre o ensino de problemas com as quatro operações. Na segunda fase, foi desenvolvida uma sequência didática. A terceira fase compreendeu duas etapas distintas: a primeira tratou de problemas aditivos, começando com um pré-teste, seguido da aplicação da sequência didática através do Ensino por Atividade e finalizando com um pós-teste aditivo. A segunda etapa abordou problemas multiplicativos, iniciando com um pré-teste multiplicativo, aplicação de atividades multiplicativas e finalizando com um pós-teste multiplicativo. A quarta fase envolveu a análise dos resultados obtidos na experimentação. A pesquisa foi conduzida em uma escola pública municipal de Abaetetuba/PA, envolvendo vinte e três alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

A análise dos dados foi conduzida através de quatro procedimentos: a comparação percentual dos índices de erros, acertos e omissões, levando em consideração as pontuações obtidas nos dois testes; identificação dos tipos de erros mais recorrentes nos dois testes; a análise estatística empregou o teste de hipótese para dados emparelhados; além disso, o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson foi aplicado para examinar possíveis impactos dos fatores socioeconômicos, coletados no início do experimento, nos resultados obtidos.

Os resultados da análise comparativa revelaram um aumento significativo nas pontuações do pós-teste, evidenciando uma melhoria no desempenho dos alunos. O teste de hipótese confirmou estatisticamente que as notas do pós-teste apresentaram uma melhoria significativa em relação ao pré-teste. Além disso, a análise das correlações demonstrou que os fatores socioeconômicos não influenciaram diretamente nos resultados, indicando que a metodologia adotada foi determinante para o sucesso do experimento. A autora destacou que muitos erros não surgiram por falta de conhecimento do algoritmo, mas sim devido à distração dos alunos durante os cálculos, levando-os a não perceber seus equívocos e a concluir erroneamente as resoluções.

A investigadora reconhece algumas restrições em sua pesquisa, como a ausência do uso da calculadora durante a experimentação, especialmente na fase multiplicativa. Além disso, os conceitos abordados ficaram restritos a problemas aritméticos e algébricos, e a ordem em que esses tipos de questões foram apresentados nas atividades, sem explorar outras categorias e conceitos do campo conceitual.

No estudo de Campos (2019), é delineada uma Sequência Didática baseada nos princípios metodológicos da Engenharia Didática, que compreende atividades voltadas para a resolução de problemas envolvendo números naturais. Os estágios instrucionais foram desenhados para explorar as condições e limitações que afetam a implementação desta Sequência no contexto do 6º ano do Ensino Fundamental, com o propósito de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O estudo de Campos (2019) teve como objetivo principal investigar as contribuições, condições e limitações da implementação de uma Sequência Didática voltada ao ensino de operações com números naturais no 6º ano do Ensino Fundamental. A sequência envolveu atividades de resolução de problemas com o intuito de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os objetivos específicos incluíram analisar as condições e restrições para o desenvolvimento do pensamento algébrico, explorar as estratégias dos alunos ao resolver problemas de números naturais que revelam aspectos do pensamento algébrico, e analisar as produções escritas e orais dos alunos em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações para a aprendizagem matemática.

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, buscando compreender, descrever e analisar as ações dos alunos e o raciocínio que empregam ao enfrentar problemas que possam estimular o pensamento algébrico. A análise foi embasada na Teoria Antropológica do Didático, com referências em diversos estudiosos como Chevallard, Bosch, Kaput, Kieran, Squalli, Radford, Almeida, Oliveira e Câmara, Duval, entre outros. A pesquisa foi realizada em uma escola pública estadual no interior da Bahia, envolvendo 111 alunos que participaram de três fases de experimentação.

Segundo Campos (2019), os resultados apontam que o raciocínio algébrico é evidenciado ao manipular elementos desconhecidos de maneira analítica, como se fossem familiares, e ao estabelecer conexões entre os dados de um problema, utilizando objetos não explicitados a partir dos presentes na questão, conferindo-lhes significado. Os problemas aritméticos revelaram ser propícios para o desenvolvimento do pensamento algébrico, englobando aspectos de raciocínio sequencial, equacional, de equilíbrio e funcional, sendo este último mais complexo de perceber.

Segundo a autora, o uso de estratégias algébricas com letras e símbolos foi limitado devido à ausência de formalidade na introdução à álgebra. No entanto, o pensamento algébrico não está restrito a esses elementos. A maneira como as atividades são apresentadas aos alunos, explorando diferentes formas de representação, como linguagem natural, icônica e numérica, influencia o desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso valida a sequência proposta, considerando bases teóricas e legais, e favorece a promoção do conhecimento na área da álgebra.

3.4.4 Estudos Documentais

Aqui apresentamos os trabalhos que tinham como base a análise de documentos oficiais da educação nacional, em relação à resolução de problemas envolvendo os campos conceituais multiplicativo.

Araújo e Santos (2016) conduziram uma análise da abordagem do conceito de divisão presente em um livro didático de matemática destinado ao 6º ano do Ensino Fundamental, amplamente utilizado nas escolas públicas da cidade de Nazaré da Mata/PE. A pesquisa foi embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, especialmente focando no campo conceitual multiplicativo. Utilizando uma abordagem qualitativa, o estudo examinou a apresentação do conceito de divisão, os tipos de problemas relacionados a essa noção e sua frequência no livro didático "Matemática Bianchini", escrito por Edwaldo Bianchini, na 7ª edição de 2012, publicado pela editora Moderna

A análise revelou que o livro didático em foco aborda o conceito de divisão em cinco capítulos. Do total de 537 exercícios, 42 desafios/jogos e 165 problemas presentes na obra, 23% tratam da divisão por partição e quotas. A divisão por partição representa 67,5% e a divisão por quotas, 32,5%. O livro também explora a divisão nas ideias de distribuição equitativa e medida. Entretanto, a quantidade de problemas relacionados ao conceito é desproporcional, favorecendo a partição sobre as quotas. Há uma ênfase maior nos algoritmos de divisão e suas propriedades, sem distinção clara entre partição e quotição, tanto em exercícios quanto em problemas.

Os pesquisadores concluíram que o livro didático analisado apresenta deficiências na promoção do entendimento do conceito de divisão, deixando lacunas na construção de uma aprendizagem eficaz nessa área. Eles destacaram a importância de abordar a divisão por meio de situações que permitam aos alunos compreenderem os significados dessa operação, melhorando sua compreensão sobre seu funcionamento e procedimentos. Especial ênfase foi dada ao livro escolar como ferramenta central no processo de ensino e aprendizagem da matemática, enfatizando a necessidade de melhorias no livro adotado em sala de aula.

Barbosa (2014) examinou os tipos de conhecimentos avaliados e as abordagens usadas para avaliar as habilidades ligadas aos campos conceituais aditivo e multiplicativo na Prova Brasil do 5º ano. A metodologia empregada na pesquisa compreendeu uma revisão bibliográfica abordando o tema e uma análise documental com o objetivo de identificar informações implícitas nos documentos oficiais da educação nacional e elucidar seus significados.

Foram examinados os descritores D19 e D20 pertencentes à área de Números e Operações da Matriz de Referência de Avaliação de matemática do 5º ano do Ensino Fundamental da Prova Brasil. O descritor D19 abrange as seguintes habilidades e competências: "Resolver situações-problema com números naturais, abordando diversos significados da adição ou subtração, tais como agrupamento, modificação de um estado inicial (positivo ou negativo), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa)" (Brasil, 2011, p. 54).

De acordo com Barbosa (2014), o descritor D19 propõe que os alunos resolvam situações-problema que envolvam números naturais e exijam a aplicação de adição ou subtração para determinar a resposta em contextos com múltiplas transformações (tanto positivas quanto negativas). Ao examinar esse descritor à luz das diretrizes presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o autor identificou que os itens elaborados com base nesse descritor abordam as quatro primeiras relações do campo conceitual aditivo (composição, transformação, comparação e composição de duas transformações). Por outro lado, ele constatou que as duas relações finais (transformação de uma relação e composição de relações) são consideradas demasiadamente complexas para estudantes do 5º ano.

O descritor D20 do campo multiplicativo no contexto do ensino brasileiro, conforme definido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), aborda a habilidade de "Resolver problemas utilizando naturais, que envolvem números diferentes compreendidos da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, conceito de proporcionalidade, arranjo retangular e análise combinatória" (BRASIL, 2011, p. 58).

De acordo com Barbosa (2014), a Prova Brasil avalia a proficiência dos alunos nestas áreas do campo multiplicativo nos anos iniciais, considerando as seguintes situações: multiplicação comparativa, proporcionalidade, configuração retangular e análise combinatória.

Após a análise dos elementos de avaliação, o autor concluiu que os alunos precisam ter adquirido e solidificado um conjunto complexo de conceitos e habilidades para solucionar os diversos itens que podem ser propostos pelos descritores. Além disso, esses descritores implicam um trabalho com as operações que garantem que os alunos sejam capazes de ler o problema, entender a sua descrição, identificar uma operação relevante e empregar uma estratégia para a resolução. As habilidades e aptidões relacionadas aos campos aditivo e multiplicativo, tal como delineadas na Matriz de Referência da Prova Brasil, estão em concordância com os documentos curriculares nacionais.

O escritor destacou a significância de abordar com os estudantes distintas maneiras de raciocinar em adição e multiplicação em cenários variados, já que isso possibilita a expansão de ideias relevantes aos domínios conceituais, concentrando suas habilidades para solucionar, de forma progressiva, patamares mais complexos de questões.

Nascimento e Morelatti (2013) conduziram um estudo com o propósito de examinar a abordagem metodológica presente no conteúdo do Programa Intensivo no Ciclo (PIC), referente aos desafios que abrangem as quatro operações básicas. O PIC é uma iniciativa de reforço educacional integrada no Estado de São Paulo, que visa aprimorar as habilidades associadas à leitura, escrita e Matemática, direcionada aos estudantes do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. A pesquisa, de natureza qualitativa, compreende várias fases, incluindo a análise documental do material didático do PIC direcionado às disciplinas de Matemática nos níveis do 4º e 5º anos.

As pesquisadoras notaram que determinadas tarefas presentes no material tinham o potencial de auxiliar os estudantes a formularem enunciados para problemas e selecionar a operação cuidadosamente para resolvê-los. Além disso, no material do 4º ano, havia exercícios que abordavam a comparação de abordagens e estratégias para resolver problemas. A abordagem metodológica do material também se baseava na teoria dos campos conceituais de Vergnaud, com foco nos campos conceituais. No entanto, no 4º ano, a ênfase recaía no campo das adições, enquanto no 5º ano, essa ênfase era direcionada ao campo das multiplicações.

O material também apresenta uma particularidade relacionada à atenção dada somente a dois tipos de pensamento no campo aditivo: problemas de composição e de transformação. Menos ênfase é dada a problemas de comparação e problemas mistos. Questões aplicadas ao pensamento comparativo foram abordadas de forma limitada, enquanto problemas relacionados à concepção de configuração retangular só surgem no último volume do material.

Portanto, como autores concluem que, embora o material seja fundamentado na teoria dos campos conceituais e explore diversas situações relacionadas a conceitos de operações matemáticas, propondo mudanças no ensino e aprendizado da matemática, cometeu falhas ao não tratar de maneira equilibrada e abrangente os diferentes significados e abordagens da multiplicação e divisão em todos os volumes.

3.5 ASPECTOS TEÓRICOS

Por algum tempo, os alunos têm sido privados da verdadeira experiência do pensamento autônomo devido à prática de professores que fornecem antecipadamente todos os problemas, mantendo-se como a única fonte de respostas. Isso resulta em alunos passivos, sem enfrentar desafios e sem apresentar a empolgante dinâmica do processo de pensamento matemático, que envolve descobertas valiosas e soluções complexas.

O professor frequentemente solicita que os alunos resolvam exercícios ou problemas, muitas vezes seguindo o conteúdo do livro didático. Na Educação Matemática, um problema simples pode estimular o raciocínio, despertar a curiosidade e incentivar os alunos a desenvolverem suas habilidades a partir desse desafio.

Em 1962, George Polya abordou uma definição ampla de problema no livro "Mathematical Discovery", distinguindo entre o problema e seu processo de resolução.

Problema é quando alguém busca conscientemente uma ação adequada para alcançar um objetivo claro, mas não imediatamente acessível.

Os problemas matemáticos despertam a curiosidade e o interesse do aluno, estimulando seu envolvimento com a matemática. Através da criatividade, o aluno desenvolve o pensamento e amplia seu conhecimento nessa disciplina.

Dante (1999) afirma que a maioria dos problemas dados aos alunos não é desafiadora. É importante apresentar problemas desafiadores e motivadores que despertem a curiosidade e incentivem os alunos a pensarem e buscar soluções.

Dante (1988), segundo Cavalcanti, Branco e Santos (2011, p. 5):

> Problema é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. A resolução de problema exige certa dose de iniciativa, e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias. O problema é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o segredo da evolução matemática. Um problema tem seu grau de importância de acordo com a quantidade de ideias novas que ele traz a Matemática.

Nesse contexto, Onuchic e Allevato (2011, p. 81), define problema como algo sem solução conhecida, despertando interesse em buscá-la. A percepção do problema varia entre indivíduos. É crucial oferecer abordagens variadas na Resolução de Problemas, considerando-a como ponto de partida para construir conhecimento matemático, iniciando o processo de ensino.

Vila e Callejo (2006), define como:

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (Vila; Callejo, 2006, p. 27).

Os autores também defendem a importância de incorporar um contexto no problema para estimular os alunos a se envolverem na resolução, destacando que "... ininterruptamente e desde cedo na vida dos alunos, os problemas devem originar-se, desenvolver-se e ser revisados em contextos da vida cotidiana" (Vila; Callejo, 2006, p. 133). O professor deve selecionar cuidadosamente situações problemas que possibilitem a prática e desenvolvimento de conceitos matemáticos específicos, despertando o interesse dos alunos. Isso requer conhecimento do grupo de alunos para garantir que a situação escolhida seja genuinamente desafiadora e significativa para eles.

Para Sá (2021), fica evidente que:

> a palavra problema é devidamente associada a uma situação que uma pessoa ou um grupo de pessoas se sentem incomodados e buscam encontrar uma maneia de superar a situação estabelecida e não conhecem como alcançar o resultado desejado. Desse modo, uma dada questão poderá ser um problema para uma pessoa ou grupo de pessoas e não ser um problema para as pessoas que não se sentem incomodados com a situação ou não desejem encontrar uma solução para a mesma (Sá, 2021, p. 13).

Segundo Lamonato e Passos (2011, p. 66), ‘‘o(s) problema(s) é(são) convite(s) à exploração e à discussão e apresenta(m) convergência com a exploração-investigação matemática''. Portanto, para implementar esse método no ensino-aprendizagem, é crucial que o educador busque compreender o que ‘‘vem a ser um problema, suas classificações e os meios para que os alunos construam atitudes de investigação diante do mesmo'' (Souza *et.al.*, 2013, p. 2).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. [...] o que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe (Brasil, 1998, p.33).

O Parâmetro Curricular Nacional - PCN (Brasil, 1997) enfatiza que a Resolução de Problemas é uma abordagem essencial para o ensino de matemática em sala de aula.

Na segunda competência geral da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o termo "resolver problema" está focalizado na ideia de capacitar o aluno para lidar com a resolução de problemas em várias situações e contextos nas ciências. Além disso, a inclusão da Resolução de Problemas nas competências específicas de matemática é orientada para a abordagem de aprender matemática visando à resolução de problemas, em vez de resolver problemas como meio de aprender matemática.

> [...] assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (Brasil, 2017, p. 263).

No entanto, há uma indicação da utilização da abordagem com a Resolução de Problemas como uma ferramenta para o processo de aprendizado de conceitos matemáticos.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (Brasil, 2017, p. 264).

De acordo com Pozo e Echeverría (1998), o problema está associado a questões abertas que exigem uma abordagem ativa e dinâmica por parte do aluno.

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes (Pozo; Echeverría, 1998, p. 09).

Na perspectiva de Mayer, o problema é concebido:

> como um processamento cognitivo direcionado para a transformação de uma determinada situação na busca de um objetivo quando nenhum método óbvio de solução está disponível para solucioná-lo. Só há um problema quando existe uma situação na qual o sujeito não dispõe de procedimentos automáticos que permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata e sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. A resolução de problemas tem um aspecto intencional, ou seja, é dirigida a objetivos; ela envolve mais processos cognitivos que automáticos (Mayer, 1992 *apud* Souza *et.al*., 2013, p.4).

Há ainda docentes que confundem a abordagem de exercícios e a abordagem de problemas, embora essas sejam práticas diferentes: na resolução de exercícios, os alunos empregam e aplicam métodos que os conduzem diretamente à solução, ao contrário do processo de resolução de problemas. Nesse sentido, a mesma situação pode ser considerada um exercício por alguns alunos e um problema por outros, dependendo de seus conhecimentos prévios.

Dante (2003), cita como objetivos na resolução de problemas:

> Fazer com que o aluno pense produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; preparar o aluno para enfrentar situações novas; dar oportunidades aos alunos de se envolverem com suas aplicações; tornar as aulas de matemáticas mais interessantes e desafiadoras; equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de

> situações em que se procura um ou mais elementos desconhecidos (Dante, 2003, p. 15 a 16)

A resolução de um problema requer empenho e originalidade, aliados ao entendimento de estratégias “um bom problema deve ser desafiador, mas possível de ser resolvido, real, interessante e que propicie várias estratégias de solução” (Dante, 1988, p. 86).

Dante (2003) enumera diversos tipos de problemas frequentemente presentes em materiais didáticos, que podem ser vistos no contexto de ensino-aprendizagem utilizando a metodologia proposta por Polya, juntamente com seus propósitos e/ou descrições. São eles:

> 1. Exercícios de reconhecimentos: seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, uma definição etc.;
> 2. Exercícios de algoritmos: Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;
> 3. Problemas-padrão: Seu objetivo é recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatros operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existentes entre essas operações e seu emprego nas situações do dia a dia. De uma maneira geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno e nem o desafiam;
> 4. Problemas-processo ou heurísticos: Seu objetivo é fazer o aluno pensar, elaborar um plano, tentar uma estratégia de acordo com sua intuição, testar essa estratégia é verificar se chegou à solução correta. Para isso ele usa uma grande variedade de processos de pensamentos. Esse tipo de problemas aguça a curiosidade do aluno e permitem que ele 6 desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador;
> 5. Problemas de aplicação: São aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. Por meio de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos e levantamentos de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a da Matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse;
> 6. Problemas de quebra-cabeça: São aqueles que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou de facilidade em perceber algum truque, que é chamada de solução (Dante, 2003, p.16 a 21)

Portanto, é essencial ter a capacidade de reconhecer as diversas categorias de problemas, a fim de evitar a redundância de situações que, em vez de enriquecer o aprendizado dos conceitos matemáticos, resultam em tarefas monótonas e exaustivas.

Segundo Lopes (1994, p. 34), tais categorizações oferecem pouca assistência aos educadores na compreensão e exploração das atividades de resolução de problemas, e limitam os propósitos didáticos e educacionais que a educação matemática busca alcançar.

O autor acrescenta ainda que:

> Os professores ao planejarem seu trabalho, selecionando atividades de resolução de problemas, devem estabelecer claramente os objetivos que pretendem atingir. Para se desenvolver uma boa atividade, o que menos importa é saber se um problema é de aplicação ou de quebra-cabeça. O principal é analisar o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes e na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática. O melhor critério para organizar um repertório é selecionar, ou mesmo formular, problemas que possibilitem aos alunos pensarem sobre o seu próprio pensamento, que os coloquem diante de variadas situações (Lopes, 1994, p. 40).

“Quando a prática nos proporcionar a solução direta e eficaz para a solução de um problema, escolar ou pessoal, acabaremos aplicando essa solução rotineiramente, e a tarefa servirá, simplesmente, para exercitar habilidades já adquiridas” (Pozo; Echeverría, 1998, p. 1 7).

Com base nas visões sobre resolução de problemas mencionados anteriormente, compreendemos que um desafio e uma motivação para alcançar um objetivo são elementos essenciais para que uma situação se transforme em um problema.

O livro de Polya, intitulado "A arte de resolver problemas", é uma obra pioneira que oferece diretrizes fundamentais para a resolução de problemas, representando, conforme o próprio autor destaca, um guia passo a passo para abordar e solucionar problemas. Para Pólya (1995, p. 18-19), “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”.

Para resolver problemas, Polya (1978) estabelece as seguintes etapas:

1. **Compreensão do Problema:** busca compreender o problema a fim de encontrar sua incógnita. É nesta fase que há o reconhecimento dos dados conhecidos, bem como a determinação do objetivo a ser alcançado.
2. **Construção de um Plano de Resolução:** elabora-se, de posse da compreensão dos problemas, os cálculos e caminhos a percorrer no intuito de obter a incógnita. Importante a concepção deste plano para sua futura execução.
3. **Execução do Plano de Resolução:** coloca-se em prática o plano elaborado, examinando todos os detalhes decorrentes de sua execução. Caso haja contratempos, volta-se à fase anterior para elaboração de um novo plano.

4. **Conferência e Verificação dos Resultados:** em consonância com o raciocínio inicial, verifica-se o resultado fazendo uma revisão crítica da execução de todo o plano traçado.

Fica claro que a resolução de problemas vai além da mera aplicação de algoritmos, experimentando a utilização de várias habilidades, levando os alunos a pensarem criticamente sobre suas abordagens e aplicar os conceitos aprendidos em sala de aula.

3.6 AS TENDÊNCIAS DE ENSINO DA MATEMÁTICA

As diretrizes ligadas à educação matemática, particularmente em relação ao ensino e aprendizagem, desempenham um papel fundamental na identificação das concepções que formam e atravessam o processo de instrução-aprendizagem dos indivíduos em relação a si mesmos, aos outros e ao conhecimento. O surgimento de abordagens alternativas para a prática pedagógica em matemática representa o movimento da educação matemática, também conhecido como as correntes da educação matemática.

Nessa ótica, é relevante enfatizar as Tendências da Educação Matemática que receberam maior atenção em termos de debates e elaboração de conteúdo teórico e prático. Entre essas tendências estão a Educação Matemática, a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, a História da Matemática, a Integração de Novas Tecnologias.

> Em síntese, podemos dizer que o período que compreende a década de 1970 e o início dos anos de 1980 representou a fase do surgimento da EM enquanto campo profissional de especialistas em didática e metodologia do ensino da matemática. Entretanto, apesar da existência temporária de um programa especial de pós-graduação em ciências e matemática e de vários outros ligados às faculdades de educação, a produção científica, nesse campo, apresentou-se dispersa e sem continuidade (Fiorentini; Lorenzato, 2007, p. 25).

A partir desse movimento, emergiram as primeiras tendências e, ao compreender o valor teórico de cada abordagem, é possível impulsionar a formulação de uma metodologia que desempenha um papel essencial na aprimoração da qualidade do ensino de matemática nas nossas instituições educacionais, notadamente nas escolas públicas. Com a introdução dessas diretrizes, os alunos são incentivados a se engajar em pesquisas e explorações, assumindo o papel de protagonistas na construção do seu próprio conhecimento. Os desafios matemáticos são abordados seguindo critérios, possibilitando a identificação de cada contexto, a compreensão dos dados, a formulação de hipóteses de resolução, a análise e a discussão dos resultados obtidos.

3.6.1 Educação matemática e suas tendências

Para entender a Educação Matemática, é necessário ter algum conhecimento sobre sua evolução histórica. Segundo Fiorentini (1995), ele propõe uma classificação no método de ensino da Matemática ao longo dos anos. Identificando, portanto, seis correntes pedagógicas distintas: a abordagem formalista clássica, a perspectiva empírico-ativista, a abordagem formalista moderna, a visão tecnicista e suas variações, a abordagem construtivista e a corrente sócioetnoculturalista.

O autor argumenta que a abordagem formalista clássica era notavelmente baseada em livros e manuais, com um foco central no papel do professor. Nesse contexto, a aprendizagem dos alunos era passiva e se concentrava principalmente na memorização. Acreditava-se que o conhecimento já existia e não era algo construído ativamente pelo ser humano, refletindo assim uma visão semelhante à concepção platônica. Nesse cenário, a responsabilidade do professor era dominar o conteúdo a ser ensinado e transmitido aos alunos de forma direta e completa, enquanto aos alunos restava o papel de "imitar" e "reproduzir" esse conhecimento.

Conforme as ideias desenvolvidas por Fiorentini (1995), uma reação de negação ou contraposição à abordagem escolar clássica deu origem à perspectiva empírico-ativista. Nesse contexto, houve uma transformação do papel do professor, que passou de uma figura central no processo de ensino para se tornar um orientador da aprendizagem. No entanto, Fiorentini também sustenta a crença de que o conhecimento não surge apenas por meio da descoberta, mas enfatiza a importância da ação, manipulação e experimentação como elementos essenciais para o processo de aprendizagem. Sob essa visão, o aluno assimila conhecimento por meio do engajamento ativo, seguindo uma abordagem de "aprender fazendo".

Entre as décadas de 1960 e 1970, o cenário educacional brasileiro testemunhou a influência marcante de um movimento chamado Matemática Moderna no processo de ensino da disciplina. Esse movimento representa uma abordagem pedagógica que aproximou o ensino da matemática da perspectiva atualmente adotada por estudiosos e pesquisadores da área. A proposta educacional desse período tinha como base a atendimento do conhecimento matemático e colocava uma ênfase significativa na Teoria dos Conjuntos, bem como nas Estruturas Algébricas e nas Relações e Funções.

No entanto, é notável que a abordagem do ensino parecia ser direcionada não apenas para a formação de cidadãos proficientes em matemática, mas, em vez disso, parecia visar predominantemente à criação de especialistas na disciplina.

De acordo com as observações de Fiorentini (1995), a abordagem tecnicista e suas diversas manifestações tiveram como objetivo primordial a incorporação do indivíduo à sociedade, dotando-o das habilidades e utilidades necessárias para a convivência social. Uma característica marcante dessa abordagem foi a adoção de um método de ensino altamente seguro, em que os alunos eram guiados por meio de uma série de exercícios do tipo "resolver os problemas a seguir, seguindo o modelo" ou "faça a operação proposta".

A formação do conhecimento em matemática ocorre por meio da interação ativa entre o indivíduo e o ambiente circundante, resultando no processo de construção do saber. Essa premissa constitui o fundamento central da abordagem construtivista, que enfatiza a importância de desenvolver a habilidade de "aprender a aprender".

A perspectiva sócioetnoculturalista se fundamenta na incorporação de questões oriundas da realidade e vinculadas a diferentes grupos culturais, as quais são posteriormente abordadas como temas de estudo em sala de aula.

Essas foram as diretrizes educacionais elaboradas por Fiorentini ao longo da evolução do sistema educacional no Brasil.

No âmbito do ensino de matemática, ao longo dos anos, diversas correntes de pensamento têm emergido, acrescentando-se de enriquecimento ao cenário educacional. Além das abordagens pedagógicas já expostas, que se aplicam ao panorama educativo em geral, é relevante explorar a evolução das tendências no campo específico da educação matemática. Atualmente, destacam-se como inovações no ensino de matemática: a abordagem etnomatemática, a modelagem matemática, a resolução de problemas, a contextualização histórica no ensino da matemática, a promoção da literacia matemática através da leitura e escrita, o fomento à perspectiva crítica na educação matemática e integração das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

3.6.2 Resolução de problemas

A presença de desafios no processo de ensino da Matemática, combinada com a falta de motivação por parte de alguns estudantes para abraçar essa disciplina, suscita a necessidade de uma análise profunda das abordagens pedagógicas empregadas pelos educadores em sala de aula. De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (Brasil, 1998), a prática da Resolução de Problemas viabiliza aos alunos a oportunidade de mobilizar seus conhecimentos e aprimorar sua habilidade em administrar as informações que se encontram ao seu alcance.

Os primeiros estudos referem-se à aplicação da Resolução de Problemas no contexto do ensino de Matemática por meio das contribuições de Polya, cuja obra "A Arte de Resolver Problemas" (1995), inicialmente publicada na 1ª edição em 1945, apoiou um modelo de quatro etapas para a abordagem de problemas: a primeira etapa envolve a compreensão do problema; a segunda, a criação de um plano ou estratégia; a terceira, a execução do plano; e, por último, a análise retrospectiva ou verificação da resolução em relação ao problema original.

A resolução de problemas emerge como outra corrente significativa na Educação Matemática, sendo amplamente adotada pelos educadores brasileiros e, para alguns estudiosos, considerada a única abordagem legítima para a prática da Matemática. Conforme observado por Müller (2000), "a resolução de problemas se configura como um foco de interesse tanto para pesquisadores quanto para educadores da Matemática. Compreender os obstáculos que a maioria dos alunos enfrenta ao lidar com essa atividade essencial implica abraçar desafios consideráveis".

Perante um cenário curricular e metodológico que enfatizava a repetição e memorização de conteúdos e exercícios no ensino da matemática, uma abordagem inovadora para a aprendizagem dessa disciplina surgiu, orientada pela perspectiva de compreensão e domínio das habilidades práticas. Isso levou ao surgimento da abordagem de aprendizagem centrada na resolução de problemas, que ganhou destaque no campo de pesquisa matemática.

O método de ensino matemático baseado na resolução de problemas implica uma abordagem educacional que se desenvolve a partir da abordagem de um problema real, evoluindo para a análise abstrata, onde os problemas são traduzidos em representações simbólicas.

No decorrer dessas deliberações, emergiu a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a disciplina de matemática. Esse guia curricular enfatizou a resolução de problemas como um pilar central nos processos de ensino e aprendizagem, fundamentado na ação reflexiva que conduz à construção do conhecimento.

Conforme delineado no documento, a Resolução de Problemas engaja a aplicação de conhecimentos e cultiva a habilidade de administrar informações, proporcionando uma plataforma para a expansão dos conceitos e procedimentos matemáticos (Brasil, 1998).

Em um estudo divulgado em 2012, Romanatto aborda diferentes interpretações apresentadas por diversos autores na busca por esclarecer essa questão.

> Thompson (1989) afirma que um problema inclui quebra-cabeças, labirintos e atividades envolvendo ilusões com imagens e considera que problemas devem possibilitar uma variedade de abordagens para a sua solução, não devem depender só de elementos conhecidos, mas conduzir à busca e descoberta de novas ideias e, em geral, envolvem desafios, diversões e também frustrações. Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004) apontam que um problema é algo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Em termos filosóficos, Saviani (2000) afirma que problema é uma questão cuja resposta desconhecemos e necessitamos conhecer (Romanatto, 2012, p. 3).

Com base nas conclusões de Romanatto (2012), um problema é essencialmente uma circunstância que requer a realização de um conjunto de ações para alcançar um desfecho. Esse resultado não se manifesta imediatamente, mas requer um processo de construção.

A abordagem de Resolução de Problemas na Matemática tem ganhado destaque devido à sua natureza, que envolve a representação e organização do conhecimento matemático, presente historicamente em diversos grupos culturais e áreas geográficas. Essa observação proporciona uma visão sobre os estímulos que impulsionaram as pessoas a desenvolver uma variedade de técnicas de cálculo, com o propósito de resolver desafios surgidos no cotidiano.

Ao considerar a relevância de abordar a matemática através da Resolução de Problemas, é pertinente mencionar as palavras de Onuchic (1999), que ressaltou:

> Podermos começar um tópico matemático com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas. [...] O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (Onuchic, 1999, p. 207).

Dentro dessa perspectiva, Onuchic (1999) destaca que o ensino de estratégias para solucionar problemas aprimora significativamente o desempenho dos alunos. Essa abordagem promove um aprendizado mais eficaz, envolvendo os estudantes de maneira ativa e construtiva em todo o processo educativo, ao mesmo tempo que oferece vastas oportunidades para enfrentar uma ampla gama de desafios propostos.

A abordagem que será proposta nesta dissertação se assemelha à perspectiva de Resolução de Problemas delineada por Onuchic (1999), especialmente ao perceber a resolução de problemas não como uma atividade secundária ao conteúdo da disciplina de matemática, nem como uma mera aplicação do aprendizado, mas, conforme defendido pela autora, como um direcionamento central para a aprendizagem. Contudo, é impossível explorar a resolução de problemas nesta pesquisa específica sem considerar as reflexões sobre a resolução de problemas como um contexto e como uma abordagem artística, tal como proposta por Pólya.

A respeito da Resolução de Problemas na ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular podemos identificar diversos movimentos preocupados com a melhoria do ensino e na tentativa de reformas curriculares. O ensino de Matemática, e das demais disciplinas da Educação Básica no Brasil, é regido pela legislação educacional e orientações curriculares apresentadas pelo Ministério da Educação.

Quanto ao currículo escolar no Brasil, acerca dos termos documentais, podemos citar, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 20 de dezembro de 2017, entre outros, temos também as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). Nesse texto o destaque será para os PCN’s, a BNCC, e para a forma que tais documentos regem a disciplina matemática, principalmente a resolução de problemas multiplicativos envolvendo os números naturais, assim como, quais habilidades e competências são solicitadas dos alunos.

De acordo com os PCN’s (1997), o aspecto de Resolução de Problemas presente no mesmo, condiz pontualmente com a quarta concepção, melhor dizendo, a metodológica. Conforme, Onuchic (1999) e Smole; Diniz (2001; 2016), agregaram como quarta concepção: a Resolução de Problemas como "metodologia" do ensino da Matemática, a qual pode ser vista por meio de indicações de caráter exclusivamente metodológica. Sendo caracterizada como um conjunto de orientações e estratégias para o ensino e a aprendizagem, da mesma maneira que: usar o problema ou desafio como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos; trabalhar com problemas abertos; usar a problematização, ou a formulação de problemas.

Os PCN's (1998), no Brasil, são diretrizes elaboradas pelo governo federal, onde a principal finalidade é orientar os docentes por meio da normatização de alguns aspectos elementares relativos a cada disciplina. Os mesmos abrangem a rede pública, assim como a rede privada de ensino, de acordo com o nível de escolaridade dos alunos. Possuem o propósito de assegurar aos estudantes o direito de desfrutar dos conhecimentos necessários para o exercício da cidadania. Os PCN's auxiliam os professores, coordenadores e diretores, sem ônus, como norteadores sendo que podem adaptá-los às especificidades locais (Brasil, 1998).

Em referência à Resolução de Problemas, os PCN's (Brasil, 1998) apresentam duas concepções para o trabalho com ele, sendo a primeira voltada à resolução de problemas matemáticos e a outra apontada como ponto de inicial para as atividades matemáticas, melhor dizendo, como metodologia. Sendo que, como metodologia, o documento mostra a disposição deque o "conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (Brasil, 1998, p. 39).

A Resolução de Problemas proporciona aos alunos troca de conhecimentos e evolução da capacidade de administrar as informações que estão a sua disposição. Como também "os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da matemática e do mundo em geral, e desenvolver sua autoconfiança" (Brasil, 1998, p. 40).

A referência sobre a Resolução de Problemas aparece de forma explícita nos PCN+ Ensino Médio, conforme apresentado a seguir:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto

> real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado (Brasil, 2000, p. 129).

A matemática busca alcançar pedagogicamente, por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a concepção de que todos são capazes de aprender Matemática. Desse modo, a Matemática na BNCC sugere o desenvolvimento de competências e habilidades, as quais concedem ao aluno identificar a importância dessa área para a sua vida pessoal e social, assim como ampliar a maneira de pensar matematicamente para muito mais do que cálculos numéricos.

A BNCC é um documento de caráter normativo que estabelece:

> [...] o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento (Brasil, 2018, p. 8).

A BNCC está organizada de forma a esclarecer as competências que os alunos necessitam desenvolver no decorrer de toda a Educação Básica, bem como em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes, melhor dizendo, o citado documento declara que aprender é um direito de todos os estudantes.

> A BNCC é um documento plural, contemporâneo, e estabelece com clareza o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito. Com ela, redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas. Essa referência é o ponto ao qual se quer chegar em cada etapa da Educação Básica, enquanto os currículos traçam o caminho até lá" (Brasil, 2018, p. 23).

A BNCC (2018) apresenta uma conexão entre aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade, com o propósito de permitir que o estudante, entre outros aspectos, desenvolva "a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações" (Brasil, 2018, p. 263).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a perspectiva é que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, como também, utilizando estratégias diversas na compreensão dos processos envolvidos, com o objetivo de desenvolver o pensamento numérico, o qual requer o entendimento de meios de quantificar características de objetos, de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No estudo dos campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações (Brasil, 2018, p 268).

A presentamos a competência específica proposta pela BNCC (2018), a ser desenvolvida nos anos finais do Fundamental no ensino dos conteúdos matemáticos, envolvendo a resolução de problemas:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (Brasil, 2018, p. 267).

A introdução da Resolução de Problemas, nas competências específicas de matemática estão direcionadas à perspectiva de aprender matemática para resolver problemas e não resolver problemas para aprender matemática:

> [...] assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (Brasil, 2017, p. 263).

Em continuidade, apresentamos uma referência da abordagem com a Resolução de Problemas como recurso para a aprendizagem de conteúdos matemáticos:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 264).

A resolução de problemas pode ser constante pela atividade de aprofundamento, isto é, quando o docente concede a possibilidade de os alunos elaborarem problemas. Sendo assim, pode ser colocado em prática a proposta da BNCC para os estudantes, de investigar novas situações ou alterar dados nos problemas para verificar o que acontece, produzindo assim novos questionamentos, reflexões relevantes que são capazes de fortalecer a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos assimilados no Ensino Fundamental.

> No caso da resolução e formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 535).

Nas análises apresentadas, fica evidente que os documentos oficiais discutem a resolução de problemas como possibilidade do ensino e no ensino de matemática, recomendando a sua utilização na sala de aula pelo professor. A metodologia é vista inclusive como uma espécie de elemento para atingir os princípios norteadores das diretrizes legais e das propostas curriculares.

3.6.3 Leitura e Escrita na Matemática

Abordar a Matemática por meio da escrita pode parecer peculiar, especialmente para alunos e professores que estão habituados ao paradigma de que a saudade pela Matemática dispensa a habilidade de escrever. Entretanto, em uma sociedade que se proclama baseada no conhecimento, premissas desse tipo não deveriam mais persistir, considerando-se a busca pela formação holística e mais ampla do indivíduo.

Portanto, engajar-se na prática de expressar ideias matemáticas por escrito conduz a um processo reflexivo acerca da compreensão pessoal em relação ao conteúdo exatamente. Isso proporciona um meio de interconectar a aprendizagem matemática com a capacidade de reflexão individual.

Segundo Machado (1990), estabelece-se uma conexão entre a língua materna, ou seja, a Língua Portuguesa, e a matemática, que acompanha funções paralelamente como elementos fundamentais no currículo educacional. É importante enfatizar também a "necessidade de compreender essa interligação e considerá-la como base para superar os desafios no ensino da matemática" (Machado, 1990, p.

126). Portanto, o autor em questão sustenta a visão de que ambas as disciplinas originaram para a construção de um conhecimento de alta qualidade.

Essa forma de leitura se distingue das típicas introduções de capítulos em livros, porém, se trata de um tipo de leitura que abrange o conjunto de conhecimentos que os alunos já possuem, incentivando a interpretação e o entendimento do mundo e da realidade que os cerca. Dessa maneira, é esclarecido por Smole (1997):

> A incorporação da literatura no ensino de matemática traz uma significativa transformação em relação ao modelo tradicional, pois nesse tipo de abordagem, os estudantes não adquirem primeiro os conceitos matemáticos para posteriormente aplicá-los à narrativa, mas, sim, exploram simultaneamente tanto a matemática quanto a história (Smole, 1997, p. 12).

Conforme Smole (1997), também enfatiza as contribuições resultantes da interação entre a leitura e a matemática no desenvolvimento das crianças:

> a) relacionar as ideias matemáticas à realidade, de forma a deixar clara e explícita sua participação, presença e utilização nos vários campos da atuação humana, valorizando assim o uso social e cultural da matemática;
> b) relacionar as ideias matemáticas com as demais disciplinas ou temas de outras disciplinas;
> c) reconhecer a relação entre diferentes tópicos da matemática relacionando várias representações de conceitos ou procedimentos umas com as outras;
> d) explorar problemas e descrever resultados usando modelos ou representações gráficas, numéricas, físicas e verbais (Smole, 1997, p.13).

Frente aos progressos científicos e tecnológicos contemporâneos, os educadores têm a responsabilidade de aprender abordagens de ensino inovadoras. Isso implica adquirir e aplicar novas estratégias pedagógicas, permitindo que os alunos se conectem com o conteúdo de maneira mais pessoal, gerado em uma aprendizagem relevante tanto para sua vida escolar quanto cotidiana.

A incapacidade de ler com proficiência e interpretar atua como uma barreira para os alunos alcançarem o sucesso na matemática, privando-os da oportunidade de atribuir um significado genuíno ao seu aprendizado. Conforme destacado por Andrade (2005, p.159): “[…] aquilo que não conhecemos, não vivemos, não experimentamos, o que não é objeto do nosso pensar e do nosso sentir não nos pertence”.

A matemática possui uma conexão intrínseca com todas as atividades do cotidiano, sendo que até mesmo algo tão simples como a compra de um pão exige que a criança possuía um entendimento matemático básico para programação de comandos. Isso é destacado por Machado (1991, p. 96), em suas reivindicações, “[…] a capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender, extrapolar, projetar”, isto é, matemática.

3.7 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

A matemática fornece ferramentas eficazes que cooperam para a compreensão e resolução de várias situações vivenciadas no dia a dia. Pesquisar sobre o ensino de matemática é direcionar-se para uma das áreas do conhecimento que abrange temas muito relevantes para a atuação crítica e reflexiva do cidadão em formação. Porém, dependendo da forma como ela é trabalhada na escola, tais temas podem impulsionar à construção de perspectivas para a formação da cidadania ou criar uma barreira de difícil reversão entre eles, os distanciando. Partindo desse raciocínio, observa-se pela literatura que o ensino de matemática tem sido ao longo dos tempos alvo de diversas propostas de transformações metodológicas, com a finalidade de alcançar um ensino com promessas desafiadoras, para que os alunos possam aprender conceitos matemáticos por meio de reflexões, investigações e experimentações.

As atividades experimentais têm a sua importância reconhecida na aprendizagem dos conceitos em geral, considerada pelos professores como uma metodologia de ensino. Sendo assim, o ensino por atividades experimentais evidencia a relevância desse trabalho, bem como, pode direcionar os alunos à relação da teoria com a prática, auxiliando na resolução de situações-problema, permitindo a estruturação de conhecimentos relacionando-as com o cotidiano.

Para o desenvolvimento desse trabalho, foi feita uma pesquisa em busca de estudos relacionados com o tema, o ensino por atividades experimentais. Nos deparamos com um campo vasto com informações, incluindo livros, dissertações, artigos, revistas, entre outros, dos quais destacamos, Sá (2019) com o tema: Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades. Sá (2020) com o tema: As atividades experimentais no ensino de matemática. Fossa (2020) com o tema: Algumas considerações teóricas sobre o ensino de matemática por atividades. Barbosa (2021) com o tema: O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por atividades experimentais. Miranda (2021) com o tema: O ensino por atividades de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular. Sá, Mafra e Fossa (2022) com o tema: O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática. O artigo de Sá e Oliveira (2023), com o tema: O ensino de problemas multiplicativos envolvendo isomorfismo de medidas por meio de atividades experimentais. Sá, Mafra e Silva (2023) com o tema: Interface entre o ensino por atividades experimentais e tendências na educação matemática. Cada trabalho apresenta a importância, os objetivos, as recomendações, os cuidados e os resultados alcançados com a utilização de atividades no ensino da matemática.

Como sabemos, a matemática é uma disciplina considerada complexa, portanto grande parte dos alunos, não desenvolvem habilidades para visualizar a relação das situações do seu dia a dia com os conteúdos estudados na disciplina. Essa dificuldade interfere na introdução dos conceitos teóricos em sala de aula, pois sem a percepção dos conceitos matemáticos no mundo real o aluno não consegue construir um entendimento mais concreto dos conceitos, dificultando ainda mais o processo de ensino-aprendizagem.

Fundamentado nessa perspectiva, apresentamos três atividades experimentais envolvendo a multiplicação e a divisão com números naturais, desenvolvidas com a finalidade de ser aplicada para as turmas do sexto ano do ensino fundamental. Dessa forma, o objetivo desse trabalho foi elaborar atividades experimentais para o ensino da multiplicação e da divisão envolvendo os números naturais. Considerando que, para que uma proposta seja executável, capaz de estimular o desenvolvimento das áreas cognitivas do aluno, é necessário que o professor faça as adaptações necessárias desta proposta à realidade do aluno. Para Miranda (2021, p. 22), “ao ensinar matemática utilizando o Ensino por Atividade, propiciamos ao estudante a oportunidade do mesmo se tornar o protagonista da sua aprendizagem, pois por meio da mediação do professor, o discente será direcionado a descobrir e sistematizar de forma autônoma os conhecimentos que devem ser aprendidos.”

O Ensino de matemática por atividades apresenta uma proposta dinâmica, participativa e construtiva onde o aluno é direcionado a descobertas cognitivas mediante uma sequência de atividades organizadas conforme a particularidade de cada conteúdo que será abordado. Com isso o aluno torna-se cidadão independente, ativo na formação do próprio conhecimento. Segundo Santos (2017, p. 21) “resolver problemas matemáticos faz parte do cotidiano das pessoas e ter a habilidade de solucioná-los traz independência e autonomia”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam que:

> [...] a matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, p. 56).

Sendo assim o professor deve fornecer ao aluno situações matemáticas na sala de aula que proporcione a vivência com a cidadania.

Para Sá (2009, p. 14), o Ensino por Atividades "é uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios" (Sá, 2009, p. 14). Nesse sentido, a proposta desse trabalho que consistiu na realização de um experimento didático sobre resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais por meio de três atividades, está em concordância com Sá (2009).

O Ensino por Atividade busca trabalhar os conteúdos matemáticos, estimulando o aluno a descobrir as leis gerais, sem que o professor intervenha inicialmente. Desse modo, o docente passa a ser apenas um mediador no processo de ensino-aprendizagem. Sá (2009) propõe que:

> [...] a prática metodológica do ensino de Matemática por atividade dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios. Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los para depois discuti-lo em classe com o professor e colegas (Sá, 2009, p. 14-15).

Para fazer o uso da metodologia Ensino por Atividades o professor de matemática deve seguir algumas recomendações essenciais para a construção das atividades, como:

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> - Toda atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar uma postura de membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente

> apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos (Sá, 2009, p. 18).

O ensino por atividades torna-se mais eficiente quando executado em contextos sociais que permitem uma oportunidade de debates assertivos, objetivando a formulação do conceito matemático. Dessa forma, o professor dever sugerir um espaço de descobertas, investigativos, no qual ele terá o papel de estimular o aluno a ser mais ativo, bem como se tornar independente em tomar decisões.

Para Sá, Mafra e Fossa (2022):

> O Ensino por Atividades Experimentais também pode ser desenvolvido numa perspectiva de atividades com base experimental. Nessa abordagem, um experimento é organizado pelo professor e executado pelo aprendiz, com a devida supervisão e orientação do professor. Em seguida, o estudante é incentivado a desenvolver e/ou aplicar conceitos matemáticos para interpretar o experimento e justificar seus resultados. Claramente relacionada com a técnica da modelagem, essa abordagem é especialmente útil na aproximação da matemática a outras disciplinas escolares (Sá, Mafra, Fossa, 2022, p. 4).

A classificação das Atividades Experimentais em relação ao objetivo almejado, segundo Sá (2019) gera duas possibilidades: as Atividades Experimentais de conceituação e as Atividades Experimentais de redescoberta. Ainda de acordo com Sá (2019) para organizar uma aula de matemática por meio de Atividade Experimental sendo ela com o objetivo de conceituação ou de redescoberta deve conter momentos de: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

Na **organização** a turma deve ser dividida em equipes contendo entre 2 e 4 estudantes, para o autor o modo individual não indicado, por não atiçar a troca de ideias. Para Sá (2019) a organização das equipes deve acontecer, preferencialmente, de forma espontânea.

A **apresentação** da atividade deve é realizada pelo professor para os estudantes, seguida da distribuição do material da atividade acompanhado do roteiro, o qual pode ser escrito ou impresso. Sá (2019) propõe que para economizar tempo as atividades com procedimento longo sejam disponibilizadas na forma impressa, e que qualquer tipo de material de apoio seja entregue para as equipes em forma de um kit.

A **execução** equivale a etapa da experimentação, é quando o estudante manuseia os materiais, realiza medição e/ou cálculo, compara e/ou observa. Os estudantes devem receber orientações claras e precisas diante da solicitação ou percepção das dificuldades e/ou dos obstáculos, de execução que surgirem durante o período do procedimento. Os estudantes devem ser orientados a seguir as instruções, assim como evitar o desvio de atenção da turma. Sá (2019) evidência que:

> Quando um questionamento ou dúvida evidenciar que sua origem é fruto de uma falha das orientações contidas no procedimento ou da confecção do material a ser utilizado o professor deve imediatamente socializar com a turma o fato e apresentar uma orientação que contorne o ocorrido e permita o prosseguimento da atividade, se possível. Esse tipo de situação pode evitado com um planejamento cuidadoso da atividade (Sá, 2019, p.2).

O professor ao identificar possíveis falhas na estruturação do procedimento, assim como na confecção do material de apoio, deve fazer as devidas correções imediatamente, com toda a turma.

De acordo com Sá (2019), o **registro** deve acontecer por meio de todas as possíveis observações, sendo esperado que as equipe particularmente façam o registro de todas as informações possíveis, adquiridas durante a execução dos procedimentos no espaço destinado no roteiro. Esse espaço é de grande importância para os registros das informações, observações obtidas no período da exceção.

Na **análise** espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre essas informações. Este é o momento mais importante da atividade, pois através do confronto dos registros feitos pelos alunos, identifica-se as características do objeto matemático que pretende conceituar ou definir. Sá (2019) recomenda que, caso alguma das equipes mostrar dificuldade para identificar uma relação válida, o professor deve auxiliar utilizando da formulação de questões estimulando-os para a percepção de uma relação almejada pelo professor. No entanto, se alguma equipe não perceber o desejado, o professor deve deixar a explicação para o momento da institucionalização.

A **institucionalização** é a etapa que a turma elabora a conclusão final, a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise, um enunciado que esteja ligada a uma conclusão obtida através da realização da atividade. Sá (2019) sugere que o professor solicite que cada equipe registre suas conclusões no quadro, logo após os registros de todas as equipes, a turma vai indicar a conclusão mais adequada e nesse momento, o professor faz intervenções junto com a turma para que esta conclusão faça sentido e possa ser compreendido por um estudante que leia, mesmo sem ter participado da atividade.

Diante disso, se o professor seguir criteriosamente esses momentos, respeitando o objetivo, bem como a importância que cada um deles apresentam para a realização do ensino de matemática por Atividade Experimental, a aula corresponderá a uma experimentação tanto para o professor (mediador) como para o aluno (pesquisador).

A respeito das atividades experimentais, Sá (2020) explica que:

> “Essa estratégia metodológica tem como característica ser a aula desenvolvida por meio da realização de tarefas experimentais, elaboradas e acompanhadas pelo docente, com o objetivo de levar o estudante ao encontro com um conhecimento matemático específico após a execução de tarefas, registro de resultados, análise e reflexões sobre os resultados obtidos culminando com a sistematização do conteúdo” (Sá, 2020, p. 155).

Nesse sentido, o professor será de início um observador das ações realizadas pelos alunos, mediando somente quando for realmente necessário.

Mediante o exposto sobre o ensino de matemática por Atividade Experimental, não podemos deixar de ressaltar alguns cuidados que de acordo com Sá, Mafra e Fossa (2022), o professor deve ter quando for colocar em prática essa estratégia metodológica. O Ensino de matemática por Atividade Experimental:

> 1) Não deve ocorrer de forma improvisada;
> 2) Não dispensa a participação ativa do docente durante a sua realização;
> 3)Não deve ser utilizado após se ministrar exposição sobre o conteúdo;
> 4) Não deve ser utilizado para verificar a validade de um resultado já estudado;
> 5) Não dispensa do docente o conhecimento do assunto a ser trabalhado;
> 6)Não deve ser utilizado como reforço de assunto explorado (Sá, Mafra, Fossa, 2022, p. 16).

A utilização do ensino por Atividade Experimental possibilita um trabalho ativo, de descobertas dos conhecimentos, de estruturação dos saberes, buscando levar estas mudanças para o ensino tradicional que ainda reina nas salas de aula.

Sobre o Ensino por atividades encontramos em Brasil (2018) um trecho descrito como “COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL”, aspectos que são extensivamente trabalhados no ensino por atividades experimentais.

> 2.Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto

> à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes
> 5.Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p.269).

É importante ressaltar é a forma que o Ensino por atividades trata os tópicos matemáticos, utilizando a técnica da redescoberta que trabalha com as propriedades da igualdade, entre outros conhecimentos. Brasil (2018) propõe na unidade temática de álgebra, como objeto de conhecimento que se trabalhe "*as propriedades da igualdade e noção de equivalência*" (Brasil, 2018, p.294).

Brasil (2018) também apresenta duas habilidades que devem ser desenvolvidas quanto a igualdade nas séries iniciais no Ensino Fundamental:

> (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
> (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido (Brasil, 2018, p.295).

A primeira habilidade é referente a elaboração do conceito de igualdade, o qual deve ser formulado por meio das diversas operações fundamentais. Isto é essencial ao ensino por atividades. Em relação a segunda habilidade, ela evidencia a importância da escrita da sentença matemática, da mesma maneira uma igualdade com uma operação que um dos termos é desconhecido, dependendo do lado da igualdade pode representar uma questão aritmética ou algébrica.

Barbosa (2021) se refere sobre o ensino por atividades, definindo que:

> O ensino por atividade é uma das metodologias de ensino que pode ajudar a romper este ciclo de baixo rendimento na disciplina de matemática, para isso é necessário que o aluno possa se sentir seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, para testar hipóteses, para generalizar, para analisar regularidades, o ensino por atividades ajuda o aluno a ter segurança para questionar, para perguntar, além de ajudar a desenvolver atitudes essenciais ao ensino e o aprendizado em matemática (Barbosa, 2021, P. 78).

Diante das informações apresentadas nesta subseção, podemos afirmar que o Ensino por Atividades é uma importante metodologia de ensino de matemática, que assim como a Resolução de Problemas como metodologia, a qual trataremos na próxima subseção, produzem resultados na aprendizagem dos estudantes durante o processo de ensino da resolução de problemas multiplicativos, uma vez que procuramos mecanismos para desenvolver a autonomia do estudante durante o aprendizado.

Sá e Oliveira (2023), apresentam um estudo que investiga os benefícios de uma sequência didática utilizando as metodologias de Ensino por Atividades Experimentais e Resolução de Problemas no ensino de problemas multiplicativos com isomorfismo de medidas em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Realizado em uma escola municipal em Tucuruí/PA, o objetivo geral foi analisar os efeitos dessa abordagem na aprendizagem. Os resultados revelaram um aumento significativo nos acertos no pós-teste, indicando a eficácia da abordagem. A análise do Teste Exato de Fisher destacou a influência moderada dos fatores socioeducativos nos resultados obtidos.

Sá, Mafra e Silva (2023), desenvolveram um ensaio teórico explorando a presença de uma possível componente experimental nas tendências e abordagens em educação matemática, sugerindo que o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais (EMAE) pode estar intrinsecamente vinculado a uma diversidade de atividades presentes nessas tendências. Fundamentado nos pressupostos da Teoria da Atividade (TA) e em uma análise das tendências educacionais, o estudo propõe uma hipótese inicial sobre a incorporação consciente ou inconsciente do EMAE em diversas práticas. Concluiu-se com uma discussão inicial sobre a caracterização do EMAE nas abordagens e a necessidade de estudos mais aprofundados para confirmar as inferências apresentadas.

3.8 CONTEXTO HISTÓRICO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Quando discutimos a formação e estabelecimento da Resolução de Problemas (RP) como uma oportunidade viável para o ensino e a aprendizagem da matemática, é essencial explorarmos o panorama global que levou à disseminação dessa abordagem como uma teoria e ferramenta metodológica.

A abordagem da Resolução de Problemas (RP), enquanto conceito teórico, surgiu durante meados do século XX como uma alternativa contrastante aos métodos repetitivos enraizados na teoria conexionista. Essa última se concentra nos resultados obtidos por meio da prática reiterativa de exercícios. Nas práticas realizadas a essa teoria, é comum o educador apresentar à criança a resposta desejada, sem necessariamente considerar o estágio de pensamento em que ela se encontra.

Após o surgimento do conexionismo, nos Estados Unidos surgiram teorias que enfocaram os processos de aprendizagem em vez dos meros resultados. A teoria psicológica que surgiu em reação a isso foi a teoria significativa de Brownell (1944). Foi nesse contexto que a Resolução de Problemas (RP) também se desenvolveu como uma teoria, com as contribuições científicas do matemático e pesquisador George Polya, especialmente por meio de seu livro amplamente reconhecido, "A Arte de Resolver Problemas" (Polya, 1945). Polya enfatizou, em vários de seus trabalhos, a importância de aprimorar as habilidades de Resolução de Problemas (RP) nos alunos e enfatizou que os educadores devem se tornar proficientes em solucionar problemas para capacitar seus alunos a fazerem o mesmo.

Segundo Morais e Onuchic (2014), um marco significativo na história da Resolução de Problemas em Educação Matemática ocorreu em 1975, quando a Universidade da Geórgia, nos EUA, sediou o primeiro seminário de pesquisa sobre o assunto. Esse evento reuniu diversos investigadores altamente engajados com a Resolução de Problemas (RP), promovendo colaborações inéditas entre os especialistas no campo da Educação Matemática que, até então, eram inexistentes.

No âmbito internacional, em tempos mais recentes, é relevante mencionar as contribuições teóricas de Van de Walle (2009, p. 57), que reforçam a Resolução de Problemas (RP) como uma abordagem metodológica de ensino. Ele enfatiza que “a maioria, senão todos, dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas”.

No contexto brasileiro, uma parcela considerável das análises teóricas sobre a Resolução de Problemas (RP) faz referência às valiosas contribuições advindas das pesquisas conduzidas por educadoras como Lourdes de La Rosa Onuchic, Norma Suely Gomes Allevato, Andressa Maria Justulin, Marcelo Proença, e diversos outros.

A utilização da Resolução de Problemas como metodologia é comum no ensino da Matemática, onde um problema é utilizado como ponto de partida para apresentar um conceito específico. Ao longo dos anos, várias abordagens foram desenvolvidas seguindo essa metodologia. Hoje em dia, essa abordagem está estreitamente relacionada às orientações educacionais, com destaque para o aprimoramento das habilidades matemáticas dos alunos no nível fundamental.

Com base neste contexto, Onuchic (1999, p. 210-211) afirma que "na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas".

Corroborando com esta perspectiva, Smole e Diniz (2001, p.89) ressaltam que "[...] a Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos [...] corresponde a ampliar a conceituação de Resolução de Problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas."

Há uma ampla gama de escritores e teorias abordando esse tópico, abrangendo desde os princípios fundamentais até o conceito mais elementar, como o da definição de problema. Vamos explorar algumas definições e perspectivas de diversos autores sobre a Resolução de Problemas no contexto da Matemática.

Segundo Mendonça (1999, p.16-17, *apud* Sá 2003), a expressão "resolução de problemas" pode ser compreendida sob três perspectivas: como um objetivo, um procedimento e um ponto de partida. Essas configurações podem ser esquematizadas da seguinte maneira:

► Na perspectiva de objetivo, a resolução de problemas visa a ensinar matemática através da abordagem de problemas, refletindo a visão tradicional da escola que se concentra na sequência de assunto, exemplo e exercício.

► Na abordagem como processo, a resolução de problemas se concentra no desempenho do aluno e no percurso que ele escolhe durante a resolução, enfatizando a transformação dos alunos em solucionadores de problemas e encorajando a análise das estratégias por eles empregados.

► Enquanto ponto de partida, os problemas são utilizados para iniciar o processo de construção de conhecimento específico, que será formalizado posteriormente pelo professor. Essa abordagem reflete a perspectiva de Ensino por Atividades.

Em suma, as diferentes abordagens da resolução de problemas englobam seu papel como objetivo do ensino matemático, como um processo que valoriza o percurso do aluno e como um ponto inicial para a construção do conhecimento.

Conforme as ideias de Van de Walle (2001) "Um *problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta*" (Pinheiro,2008, p. 51).

Segundo Sá (2003), uma dada situação pode ser categorizada como um problema ou simplesmente como um exercício, e essa diferenciação depende do indivíduo que irá lidar com ela. Se a pessoa já está familiarizada com a abordagem para a solução, a situação se torna um exercício; entretanto, se o indivíduo não possui um método prévio e a resolução exige raciocínio, então a situação se configura como um problema.

Sá e Fossa (2005) destacam que há diversas categorizações para classificar os diferentes tipos de problemas. Entre essas categorias, mencionam os problemas contextualizados, problemas de natureza verbal e problemas verbais com ênfase em aspectos aritméticos. De acordo com Polya (*apud* Sá e Fossa, 2005), os problemas podem ser divididos em duas categorias amplas:

Os problemas rotineiros são aqueles que exigem a aplicação de regras conhecidas, enquanto os não rotineiros são aqueles que incentivaram um pensamento criativo para serem solucionados. Na perspectiva de classificação de Polya, os problemas que envolvem as operações básicas são considerados rotineiros e têm um impacto limitado no desenvolvimento intelectual, sendo assim, não justificam uma ênfase significativa.

De acordo com o contexto, para Sá e Fossa (2005) "o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas rotineiros é tão importante quanto o desenvolvimento da habilidade de resolver os problemas não rotineiros". De acordo com esses investigadores, um problema é considerado rotineiro somente quando o processo de resolução é compreendido e internalizado. Isso está sujeito à perspectiva do solucionador do problema. Além disso, eles enfatizam que a escolha das palavras e da linguagem nos problemas pode resultar em desafios na modelagem.

Segundo Sá (2021), qualquer situação pode ser encarada como um problema ou exercício, dependendo do indivíduo envolvido. Se o sujeito compreende um método conhecido para resolvê-lo, mesmo que seja complexo, torna-se apenas um exercício; no entanto, se não sabe como solucioná-lo, transforma-se em um problema. O autor destaca que, para uma situação se tornar um exercício para alguém, é crucial que uma pessoa tenha familiaridade com pelo menos uma estratégia de resolução e seja incentivada a empregar o procedimento regularmente. Dessa forma, “na primeira vez que uma pessoa enfrenta uma situação e consegue uma solução, ela será um problema, depois de dominar o caminho que leva à solução dela será apenas um exercício” (SÁ, 2021, p.13).

Sá (2021) destaca a importância de categorizar as atividades propostas pelo professor em sala de aula, seja por meio do livro didático ou por meio de listas, como questões. Isso ocorre porque, no contexto da sala de aula, o mesmo exercício pode ser considerado uma questão para alguns alunos e um problema para outros. A distinção está relacionada ao conhecimento do caminho de solução; se este for conhecido, a atividade é vista como um exercício, mas se o método de resolução por desconhecido, é definido como um problema.

No trabalho de Sá (2003), é possível encontrar algumas orientações referentes à abordagem da resolução de problemas.

> 1. Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
> 2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
> 3. Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
> 4. Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
> 5. Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
> 6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
> 7. Análise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
> 8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
> 9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
> 10.Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
> 11.Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado (Sá, 2003, p.75).

É importante ressaltar que um problema matemático envolve uma situação que requer a execução de uma série de ações ou operações para alcançar um resultado. Nesse sentido, a solução não é imediatamente aparente, mas pode ser construída ao longo do processo. Portanto, os conceitos, princípios e métodos matemáticos devem ser apresentados por meio da apresentação de problemas, isto é, de situações nas quais os alunos precisam desenvolver estratégias para sua resolução (Brasil, 1998).

A utilização da resolução de problemas é uma abordagem essencial para o ensino de matemática, sendo tema de discussão ao longo do tempo. O que pode ser um desafio para um aluno pode não ser para outro, devido às diferenças no desenvolvimento intelectual e conhecimento de cada indivíduo. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos. Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido (Brasil, 1997, p. 33).

Portanto, é crucial que os alunos adquiram competências que lhes possibilitem testar os resultados, ou seja, avaliar diferentes abordagens, a fim de alcançar a solução.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conforme estabelecida pelo Ministério da Educação, incorpora uma abordagem da Resolução de Problemas como um elemento fundamental no ensino de matemática, tratada de “forma privilegiada da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental” (Brasil, 2017, p. 262).

Explorar a resolução de problemas com uma compreensão profunda e uma abordagem significativa dos conceitos matemáticos oferece um ambiente propício para cultivar o pensamento algébrico. Sob essa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), incorpora como parte essencial da área temática de Álgebra, a resolução de “problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo” (Brasil, 2017, p. 300) como objeto do conhecimento.

Dessa forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a importância de os estudantes desenvolverem a capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar de maneira matemática, com o intuito de promover a construção de hipóteses, a formulação de questões e solução de situações -problema em uma diversidade de contextos. Assim, a intenção é que os alunos, para além da resolução de problemas, também sejam capazes de criar desafios matemáticos (Brasil, 2018).

Portanto, reconhecendo a importância e a necessidade de diversificar as abordagens e os recursos no ensino da Matemática, e destacando a Resolução de Problemas como método pedagógico, é essencial reconhecer os fatores que influenciam o processo de resolução. Isso inclui a compreensão da linguagem, uma variedade de tipos de problemas e o reconhecimento de que a dificuldade varia entre eles. Além disso, é crucial oferecer aos alunos uma diversidade de problemas para que possam dominar diferentes procedimentos de resolução. Diante do exposto, adotamos neste estudo a classificação proposta por Sá (2003), apesar de existirem várias maneiras de categorizar os problemas.

3.8.1 Classificação dos problemas

Atualmente, um dos mais discutidos e relevantes no âmbito da Educação Matemática é a abordagem da resolução de problemas. Segundo Sá (2003), a importância dos problemas que envolvem as quatro operações matemáticas é notável no processo de desenvolvimento dos alunos, uma vez que esses problemas apresentam uma variedade de níveis de complexidade. Nesse sentido, Sá (2003) propõe uma classificação dos problemas da seguinte forma:

- Problemas que **são da operação** e problemas que **usam a operação**.
- Problemas **algébricos** e problemas **aritméticos**.

Para compreender a metodologia proposta por Sá (2003), é crucial familiarizar-se com as duas classificações diferenciadas de maneira segmentada. Em primeiro lugar, é fundamental explorar o conceito de problemas envolvendo uma única operação matemática.

No estudo realizado por Gomes e Sá (2000), é evidenciado que os problemas que abrangem o Princípio Multiplicativo da Contagem (PMC), também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), juntamente com quebra-cabeças envolvendo operações matemáticas, passaram a ser incorporados nos materiais didáticos após o ápice da era da Matemática Moderna no contexto brasileiro. Esse cenário nos levou a indagar o seguinte: **Todo problema que envolve uma operação na sua resolução é um problema da operação?**

Uma resposta afirmativa a essa questão conduz a outra pergunta: os problemas relacionados ao cálculo de área são considerados problemas de multiplicação? Por outro lado, uma resposta negativa nos leva a indagar sobre a natureza dos problemas envolvendo operações matemáticas.

Uma questão fundamental pode ser a dificuldade de definir claramente cada uma das operações fundamentais. Lopes e Sá (2023, p. 2), afirmam que "a seleção da operação é um tema frequentemente explorado em pesquisas acadêmicas sobre a resolução de problemas matemáticos, embora raramente seja abordado como o foco central de estudo. Geralmente, a escolha da operação é examinada de maneira acessória ou de modo complementar essas pesquisas". A abordagem das operações pode ser vista sob duas perspectivas: semântica e simbólica. A abordagem semântica determina a pergunta que cada operação responde, enquanto a abordagem simbólica lida com o resultado derivado da manipulação dos símbolos relacionados à operação. Isso pode ser realizado apenas por meio da consulta da tabuada da operação, sem necessidade de interpretação adicional (Sá, 2003, p. 64).

Portanto, ao lidar com a resolução do problema: ***Qual é o troco que me sobra se pago R$18,00 com uma nota de R$50,00?*** Sá (2003, p. 65) afirma que, no processo inicial, a abordagem se inicia com o aspecto semântico das operações, identificando qual operação é apropriada, no caso, a subtração. Em sequência, entra em cena o aspecto simbólico para calcular o resultado da operação 50 - 18. Esse aspecto simbólico oferece uma gama de técnicas, desde métodos tradicionais com cálculos manuais até recursos tecnológicos como computadores, algoritmos, cálculo mental e calculadoras. A escolha do método a ser empregado é influenciada por psicologia pessoal ou disponibilidade de recursos. Por outro lado, o aspecto semântico requer interpretação da situação e familiaridade com as operações para garantir uma utilização eficaz.

Para abordar a questão, Sá (2003, p. 65) apresenta a diferença entre **problema de uma operação** e **problema que usa uma operação** na sua solução, por meio de dois exemplos:

- *"Paguei uma geladeira em cinco prestações iguais de R$58,00. Quanto custou a geladeira?"* Trata-se de um problema no qual a escolha da operação é fundamentada apenas na análise semântica do enunciado.

No entanto, no segundo problema a seleção da operação não está exclusivamente vinculada à análise semântica do enunciado, mas também ao entendimento, intuitivo ou formal, do Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

- *“De uma cidade A até uma cidade B, há 3 caminhos distintos e da cidade B até a cidade C há 4 caminhos. De quantas maneiras distintas é possível ir de A até C, passando por B?”*

Do ponto de vista do autor, o primeiro desafio é um problema que envolve a operação de multiplicação, enquanto o segundo é um problema que requer o uso da multiplicação para ser solucionado.

> DEFINIÇÃO 1: Um problema é de uma das operações fundamentais da aritmética quando este pode ser resolvido apenas utilizando uma destas operações, sendo esta determinada diretamente a partir do seu enunciado e do significado semântico da operação.
>
> Assim, os problemas com uma das quatro operações fundamentais dos números naturais podem ser divididos em dois grandes grupos, a saber:
>
> 1º grupo: os problemas de uma operação - são aqueles problemas que utilizam a operação a partir do seu sentido semântico;
>
> 2º grupo: os problemas que usam uma operação - são aqueles problemas que no algoritmo de resolução a operação utilizada não é determinada diretamente por seu sentido semântico (Sá, 2003, p.69).

Sá (2003) ilustra que um exemplo de problema que emprega a operação de multiplicação em sua resolução está relacionado ao princípio fundamental da contagem. Em uma situação em que é preciso combinar uma quantidade de camisas com uma quantidade de calças, a solução do problema pode ser dada ao multiplicar o número de camisas pelo número de calças. De acordo com o autor, o indivíduo não está empregando a interpretação semântica da operação de multiplicação, mas sim reconhecendo a relação entre os dados e associando-a ao conhecimento de multiplicações. Sá (2003) argumenta que os problemas categorizados como "problemas que usam uma operação" são mais desafiadores para as crianças em comparação com aqueles que são diretamente "problemas da operação".

Sá (2003, p. 72), fundamenta sua argumentação no fato de que, no início da educação escolar, o ensino das quatro operações foca na compreensão semântica e no significado de cada operação. Os problemas apresentados aos alunos possuem enunciados que facilitam a identificação do significado semântico da operação, caracterizando-os como problemas da operação. Por outro lado, os problemas que não permitem uma interpretação imediata do sentido resistiram à aplicação da operação, tornando-os mais complicados devido ao maior grau de dificuldade.

Podemos constatar que, entre os problemas que aplicam uma operação, há uma distinção entre um grupo que não requer resultados de outras áreas matemáticas e outro grupo que requer tais resultados, especialmente envolvendo o princípio fundamental da contagem. Portanto, é possível subdividir os problemas que empregam uma operação em duas categorias, sendo assim classificados:

> DEFINIÇÃO 2: Os problemas que usam uma operação são ditos **independentes**, quando para determinar a operação a ser utilizada na sua resolução não dependem de resultados de outras áreas da Matemática.
>
> DEFINIÇÃO 3: Os problemas que usam uma operação são ditos **dependentes**, quando para determinar a operação a ser utilizada na sua resolução dependem de resultados de outras áreas da Matemática. (Sá, 2003, p.73)

É crucial que os alunos se familiarizem com essas questões, a fim de superar os desafios à medida que forem surgindo. Lamentavelmente, a omissão dessas questões na abordagem dos alunos pode acarretar um entendimento superficial das operações matemáticas.

Em relação a maneira de resolver os problemas aritméticos, Sá (2003, p. 79) define que: problema aritmético é aquele problema que, em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explicita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade.

Conforme o mencionado autor, os problemas aritméticos podem ser categorizados em: *simples e combinados*. Definindo-os como:

> - **Os problemas aritméticos simples** são aqueles problemas aritméticos que só envolvem uma operação na sua resolução.
> - **Os problemas aritméticos combinados** são aqueles problemas aritméticos que envolvem duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução. (Sá, 2003, p 79)

Os problemas nos quais a incógnita ou pergunta é colocada individualmente em um dos lados da igualdade, após a sua representação matemática dos dados por meio de símbolos, está associada a uma das seguintes expressões:

- $c + b = ?$
- $c - b = ?$
- $c \times b = ?$
- $c \div b = ?$

De acordo com Sá (2003), os problemas aritméticos envolvem o uso de uma única operação ou a combinação de operações, podendo ser repetidas da mesma operação. No âmbito aditivo, esses problemas tendem a ser mais facilmente resolvidos, enquanto no campo multiplicativo podem ser influenciados por diversos fatores dificultando a resolução. Alguns problemas, mesmo os aritméticos, que fazem uso da operação multiplicativa, podem apresentar uma resolução mais complexa.

A definição dos problemas algébricos estar abordada em Sá (2003, p.79): *Os problemas algébricos são aqueles problemas em que, na sua resolução operacional, são usadas de maneira explícita ou implícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade.*

Os problemas algébricos estão categorizados em três tipos: imediato simples, imediato combinado e estruturado, e essas definições podem ser encontradas de forma semelhante em Sá (2003).

> **PROBLEMAS ALGÉBRICOS IMEDIATOS SIMPLES:** são aqueles problemas algébricos nos quais, na sua resolução operacional, é usada apenas uma operação sem o uso explícito de uma variável ou incógnita.
>
> **PROBLEMAS ALGÉBRICOS COMBINADOS:** são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, são efetuadas mais de uma operação sem o uso explícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples e problemas algébricos imediatos.
>
> **PROBLEMAS ALGÉBRICOS ESTRUTURADOS:** são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, é necessário o uso de variáveis ou incógnitas, para que fique explicita cada etapa da resolução (Sá, 2003, p 79).

Os problemas nos quais a incógnita ou a pergunta não está colocada individualmente num dos lados da igualdade após a modelagem dos dados. Nesses problemas, a igualdade é empregada para expressar a relação de equilíbrio necessária entre os dados, ou seja, a igualdade é usada para denotar equilíbrio, está associada a uma das seguintes expressões:

- $? + a = b$
- $? - a = b$
- $a - ? = b$
- $a \times ? = b$
- $a \div ? = b$
- $? \div a = b$

No caso dos problemas algébricos, não é viável selecionar a operação de forma direta com base em seu significado semântico. Em vez disso, é preciso empregar a propriedade inversa da operação.

De acordo com Sá (2003), as questões envolvendo álgebra são todas aquelas que empregam a operação, mas essa relação não é recíproca, o que significa que nem todas as questões que utilizam a operação são classificadas como algébricas. Isso é evidente nas situações que envolvem o cálculo de medidas, combinatória e outros problemas que utilizam a operação de multiplicação, mas que também podem estar presentes em questões tanto algébricas quanto aritméticas.

Na pesquisa conduzida por Sá e Fossa (2008, p. 267), o objetivo foi apresentar uma abordagem para diferenciar problemas relacionados às quatro operações, abordando especificamente os campos aditivo e multiplicativo. Os autores, ao realizarem essa distinção, propuseram dois conjuntos de problemas para ambas as áreas - aritméticas e algébricas - fundamentados na aplicação da propriedade da igualdade.

No 1º grupo, os autores posicionaram aqueles em que a pergunta ou incógnita está isolada em um dos lados da igualdade após uma transição dos dados para a linguagem simbólica (modelagem). Nesses casos, a igualdade é empregada como uma representação dos resultados da operação realizada, ou seja, ela indica as transformações ou as soluções.

No 2º grupo, incluíram os problemas nos quais a pergunta ou incógnita não está isolada em nenhum dos lados da igualdade. Nesses casos, a igualdade é empregada para denotar a relação de equilíbrio entre os dados, e, nesse tipo de problema, a escolha da operação é feita por meio da aplicação da propriedade da operação inversa.

Sá e Fossa (2008, p.268-269) avaliaram as seguintes formulações como uma forma de generalizar os problemas pertencentes ao 1º grupo:

- $c + b = ?$
- $c - b = ?$
- $c \times b = ?$
- $c \div b = ?$

Para abranger os problemas do 2º grupo, os autores sugeriram as seguintes generalizações:

- $? + a = b$

- ? – a = b
- a − ? = b
- a × ? = b
- a ÷ ? = b
- ? ÷ a = b

Sá e Fossa (2008, 269-270) categorizaram o 1º grupo de problemas como aritméticos, enquanto o 2º grupo foi designado como algébrico. Os problemas aritméticos são aqueles em que as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade não são utilizadas de forma implícita ou explícita durante o processo de resolução. Já os problemas algébricos são aqueles que fazem uso implícito ou explícito dessas propriedades. Os autores exemplificam como: “Um cinema tem 25 fileiras de 18 cadeiras cada. Não sendo permitido assistir filme em pé, quantas pessoas são necessárias para lotar o cinema três vezes?”

Os autores propuseram a seguinte categorização para os problemas aritméticos: aritméticos simples e aritméticos combinados.

> **Problema aritmético simples** é aquele que só envolve uma operação na sua resolução. Exemplo: Uma caneta custa R$ 2,00. Quanto custa 7 dessas canetas?
> **Problema aritmético combinado** é aquele que envolve duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução. Exemplo: Uma pessoa foi à feira com R$ 50,00. Comprou R$ 5,00 de frutas e R$ 13,00 de verduras. Quanto lhe sobrou do dinheiro? (Fossa; Sá,2008, 269-270).

Para os problemas algébricos os autores propuseram a seguinte categorização: imediato simples, imediato combinado e estruturado.

> **Problema algébrico imediato simples** é aquele em que, na sua resolução operacional, é usada, apenas, uma operação sem o uso explícito de uma variável ou incógnita. Exemplo: Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa uma dessas canetas?
> **Problema algébrico imediato combinado** é aquele em que, na sua resolução operacional, é efetuada mais de uma operação sem o uso explícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples e problemas algébricos imediatos. Exemplo: Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa sete dessas canetas.
> Esse problema pode ser decomposto nos seguintes dois problemas: 1º) Uma dúzia de canetas custa R$ 36,00. Quanto custa uma dessas canetas? 2º) Uma caneta custa R$ 3,00. Quanto custa sete canetas? Que são, respectivamente, algébrico imediato simples e aritmético simples.
> **Problema algébrico estruturado** é aquele em que, na sua resolução operacional, é necessário o uso de variáveis ou incógnitas, para que fique explícita cada etapa da resolução. Exemplo: Reparti a quantia de R$ 210,00 entre três pessoas de tal modo que o segundo receba R$ 50,00 a mais que

> primeiro e que o terceiro receba R$ 80,00 a mais que o segundo (Fossa; Sá,2008, p. 270-271).

Quanto à modelagem dos problemas aritméticos e algébricos, Sá e Fossa (2008, p. 271) recomendaram que, nos primeiros, a solução sempre se manifesta em uma expressão em que o valor desconhecido permanece isolado no segundo termo da igualdade, enquanto nos segundos, a solução se reflete em uma expressão na qual o valor não é isolado.

Devido ao nível de ensino, optamos por incluir problemas algébricos simples e combinados na nossa sequência de atividades didáticas. Essa abordagem desempenhou um papel crucial na elaboração dos instrumentos de coleta de dados, pois categorizamos as questões em dois aspectos: algébricas (simples) e aritméticas (simples ou combinadas). Além disso, incluímos as questões do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Produto de Medidas, e outras como situações problemas que requerem tanto a aplicação direta da operação, bem como problemas que usam a operação.

3.9 A TEÓRIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS) / ASPECTOS CURRICULARES

Nessa seção apresentamos na primeira subseção, aspectos da TRRS para o ensino e aprendizagem de Matemática. Inicialmente, indicando os principais conceitos trazidos por Duval, tais como, formação, conversão, tratamento e coordenação entre registros de representação; e a relevância desses conceitos para o ensino de Matemática, considerando os aspectos conceituais e metodológicos. Na segunda subseção, trataremos a respeito dos procedimentos e documentos curriculares envolvendo resolução de problemas multiplicativos com números naturais presentes nas orientações curriculares para o 3º ciclo do Ensino Fundamental.

3.9.1 A importância das Representações Semióticas no ensino de matemática

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), ideias escudadas por Raymond Duval, nos fornece contribuições significativas para uma permanente aprendizagem, diante de uma abordagem nos aspectos conceituais, bem como metodológicos, no sentido de possibilitar alternativas concretas no âmbito do ensino da matemática, valorizando a utilização de abundantes elementos que um conceito pode ser representado e, por conseguinte, aprendido.

Os objetos matemáticos transmitem a ideias, conceitos, axiomas que são explicitados através de uma linguagem específica e formal, concisa e universal. Diante disso, os objetos de conhecimento não podem ser acessados diretamente, mas, por meio de representações semióticas. E para Duval (2011), é por meio das representações semióticas que ocorre o processo de aquisição do conhecimento matemático. Esta conclusão o leva à formulação de que sem a *semosis* (do grego) não ocorre a *noésis*, ou seja, sem a capacidade de representar semioticamente um conceito, não há construção do conceito (Azerêdo, Arruda, 2021, p. 3).

De acordo com Duval (1993), um objeto matemático não é algo pronto, acabado, mensurável ou fisicamente observável, mas composto por estruturas ou relações que podem expressar diversas situações, dessa maneira é necessário considerar as diferentes formas de representar o mesmo. Muitas vezes o professor que ensina matemática faz uso de recursos didáticos demonstrativos, visuais ou manipuláveis, que nem sempre ajudam o aluno a expressar certas situações matematicamente. Porém, é indispensável que o professor tenha clareza da diversidade e aplicação de registros de representação semiótica, além de seus respectivos tratamentos e conversões, sistematizando dessa forma as transformações entre eles.

Em conformidade com o autor (1993; 1995; 2003), o tratamento é a transformação de uma representação de partida em uma representação de chegada dentro de um mesmo registro (Duval, 1995, p. 40). A conversão, por sua vez, é a transformação de um sistema de representação semiótica para outro sistema igualmente semiótico (Duval, 1993; 1995; 2003). Ela é uma transformação externa ao registro de representação de partida.

De acordo com Duval, (1993, p. 38), “as representações semióticas são produções formadas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, as quais têm suas construções próprias de significado e funcionamento”. Elas se caracterizam por “um sistema particular de signos, a linguagem, escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e que podem ser convertidos em representações equivalentes dentro de outro sistema semiótico, mas podem apresentar significados diferentes para o sujeito que as utiliza” (Duval, 1995, p. 17).

O importante para que o sujeito reconheça os objetos matemáticos é essencialmente o contato com infinitos registros de representação semiótica, visto que segundo Duval (2003, p.14), “[...] a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação”. Para Duval (2003, p.18), “[...] do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que [...] aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

A respeito de compreensão matemática, Duval (2003) afirma que:

> [...] não se deve jamais confundir um objeto com sua representação. Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente [...]. O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas (Duval, 2003, p. 21).

A utilização de diversos registros de representação facilita o desenvolvimento do conhecimento humano e proporciona a criação de novos sistemas semióticos, considerando-se a evolução nos sistemas de numeração utilizados pela humanidade no decorrer da história. A evolução dos conhecimentos é proveniente da criação e do desenvolvimento de novos e mais específicos sistemas semióticos, resultados do trabalho com diversos registros de representação. Pode-se dizer que a criação de novos registros está diretamente relacionada às necessidades da espécie humana.

Dando seguimento, Duval (2009) afirma que o conhecimento matemático somente é transformado em saber quando acontece a mobilização espontânea por parte dos alunos, de diferentes registros semióticos de um mesmo objeto matemático. Contudo, vale ressaltar que:

> A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes [...] (Duval, 2009, p. 18).

Segundo Duval, para ensinar é preciso ter consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático (Duval, 2011, p. 8-9).

Nessa perspectiva, é fundamental que o professor solicite que os alunos realizem conversões, saindo a utilização do registro de representação inicial e começando a utilizar um outro tipo de registro. Podemos utilizar o exemplo, quando se lê uma situação problema que está expressa em língua materna e transforma-a em um algoritmo ou expressão numérica para solucioná-la, dizemos que foi efetuada uma conversão.

4 **CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI**

Nesta seção apresentamos o material elaborado para a etapa da experimentação: os testes e a sequência de atividades estruturadas com as possíveis dificuldades e obstáculos que os alunos poderão ter no desenvolvimento delas.

O roteiro das atividades é formulado com o título, seguidos do objetivo, material e procedimentos, pois deste modo, ficam elencadas a finalidade de cada atividade, os recursos necessários e a metodologia escolhida para a sua execução. O tempo destinado a aplicação dos testes e de cada atividade será de duas aulas, melhor dizendo, noventa minutos.

As questões dos testes e as atividades da sequência didática foram adaptadas de alguns livros didáticos, do estudo de Sá (2003) e de trabalhos consultados contidos na seção das análises prévias, como o de Santos (2017), Miranda (2021), Barbosa (2021), entre outros. O experimento está organizado a partir das análises preliminares e envolve um grupo que deverá ocorrer em quinze encontros. O grupo é formulado por um pré-teste multiplicativo, uma sequência didática, as quais acontecerão em 15 (quinze) encontros, de noventa minutos cada, com atividades contendo problemas multiplicativos e um pós-teste multiplicativo. Em outras palavras, antes do início da aplicação da sequência didática, os estudantes serão submetidos ao pré-teste multiplicativo com o objetivo de identificar os conhecimentos e as dificuldades que eles possuem a respeito da resolução de problemas multiplicativos com números naturais e para finalizar, após a fase de aplicação da sequência didática será aplicado o pós-teste multiplicativo.

4.1 INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

A etapa do experimento, que compreende a etapa diagnóstica, será dividida em 15 (quinze) encontros. Iniciará com a aplicação do pré-teste multiplicativo e do questionário socioeconômico, seguido de 15 (quinze) encontros, de noventa minutos cada, iniciando com a apresentação de ideias, conceitos e exercícios dos algoritmos, resolução de diversos tipos de problemas multiplicativos e nas demais aulas serão aplicadas as atividades da sequência didática e finalizará com o pós-teste multiplicativo. Observemos o material preparado para cada momento.

4.1.1 Pré-testes e pós-testes

Nessa subseção, apresentamos o teste multiplicativo (pré e pós-teste). Ele será o instrumento utilizado para identificar o conhecimento dos alunos a respeito dos problemas do campo multiplicativo, antes e depois da nossa intervenção e da aplicação das atividades da sequência didática. O teste é composto por 12 (doze) questões que englobam diversas situações com tipos de problemas aritméticos e algébricos, com uma e mais de uma operação, com variação na posição do termo desconhecido. O tempo destinado para sua execução será de noventa minutos.

As análises a *priori* das atividades foram feitas levando em consideração a nossa experiência em sala de aula, assim como os estudos realizados durante a etapa inicial desta pesquisa.

TESTE MULTIPLICATIVO

Objetivo: Avaliar o desempenho dos alunos em problemas multiplicativos.
Material: Folha com os problemas impressos, papel, caneta ou lápis, borracha.
Procedimentos: Entregar para cada aluno uma cópia do teste e solicitar que resolvam.

1. Um forno elétrico custa R$ 470,00. Qual é o valor de três fornos?

Análise a priori do pré-teste: a nossa hipótese é de que os alunos não apresentarão dificuldade em compreender o procedimento fundamental à resolução, dado que se refere a um problema aritmético envolvendo baixa complexidade. Sendo possível, porém, eles se confundirem na efetuação do algoritmo.

Análise a priori do pós-teste: a nossa hipótese é de que a maioria dos alunos resolverão corretamente a operação, por ser uma questão com baixa complexidade.

2. Comprei 3 camisetas e paguei R$ 99,00. Quanto custou cada camiseta?

Análise a priori do pré-teste: provavelmente os alunos apresentarão dificuldade na disposição dos dados, e dessa forma, utilizarão a multiplicação do número de camisa pelo valor total pago, não atentando para a organização do enunciado da questão como também, para a maneira como deve ser resolvido, melhor dizendo, pela operação de divisão, visto que a modelação do problema é **a x ? = b**.

Análise a priori do pós-teste: grande parte dos alunos entenderão que na modelação do problema o termo desconhecido não está separado e, com isso, é um problema algébrico, em que a operação divisão é a indicada para a resolução.

3. Uma confeiteira utiliza 6 ovos em cada bolo. Ela deseja fazer 5 bolos. Quantos ovos ela precisa comprar?

Análise a priori do pré-teste: os alunos poderão entender que o problema se refere a operação de adição, não observando que na modelação do problema a operação apropriada é a multiplicação.

Análise a priori do pós-teste: os alunos entenderão que se refere a operação multiplicação tanto na modelação, quanto na realização do algoritmo.

4. Comprei um tablet por R$ 936,00 e paguei em 6 prestações iguais. Qual o valor de cada prestação?

Análise a priori do pré-teste: a nossa hipótese é de que os alunos terão dificuldade na modelação da questão **a x ? = b**, assim como na identificação da operação e com isso, utilizará a multiplicação, podendo se fixar à disposição dos dados.

Análise a priori do pós-teste: a maioria dos alunos organizarão a sentença, efetuarão a disposição correta dos dados, como também, identificarão que a operação apropriada é a divisão.

5. Júlia comprou algumas pulseiras e pagou R$ 40,00. Se o preço de cada pulseira for R$ 8,00, quantas pulseiras Júlia comprou?

Análise a priori do pré-teste: a expressão "algumas" no início da questão provavelmente não fará os alunos pensarem, que ele representa o termo desconhecido. Dessa forma, não acertarão à modelação **? x a = b**, a qual pode ser resolvida operando a divisão e com isso, utilizarão erroneamente a multiplicação na execução do algoritmo.

Análise a priori do pós-teste: grande parte dos alunos compreenderão que, apesar de, na modelação apareça a multiplicação, a operação apropriada é a divisão, visto que se refere a um problema algébrico com sentença do tipo **? x a = b**.

6. O funcionário de uma livraria, precisa guardar 150 livros em caixas que comportam 30 livros. Quantas caixas serão necessárias para guardar todos os livros?

Análise a priori do pré-teste: a nossa hipótese é de que os alunos terão dificuldades em perceber que se trata de uma divisão. Provavelmente ficarão confusos na execução algorítmica por conter números relativamente elevados.

Análise a priori do pós-teste: os alunos terão facilidade de identificar que se refere a um problema da operação divisão e realizarão corretamente os procedimentos.

7. O pai comprou 32 doces e deseja distribuir com seus 4 filhos. Quantos doces cada filho receberá?

Análise a priori do pré-teste: por não ter muito contato com questões nas quais, a modelação é do tipo **a x ? = b**, onde o termo desconhecido está representado pela expressão "quantos doces cada filho recebeu?", os alunos apresentarão dificuldade para identificar a operação necessária para resolver a questão.

Análise a priori do pós-teste: os alunos terão facilidade de identificar que se refere a um problema da operação divisão e realizarão corretamente os procedimentos.

8. Um estojo escolar custa R$ 25,00, Marcos decidiu comprar 5 estojos. Qual o valor que Marcos pagou na compra?

Análise a priori do pré-teste: a nossa hipótese é de que os alunos não conseguirão identificar de imediato a operação que devem utilizar para resolver o problema. Alguns usarão a operação de adição para encontrar o resultado, enquanto outros associarão com a multiplicação.

Análise a priori do pós-teste: a maioria dos alunos entenderão que representa uma questão algébrica, onde a operação indicada é a divisão.

9. Maria faz caminhada todos os dias, percorrendo 1200m por dia para melhorar sua saúde física. Quantos metros, Maria percorre em uma semana?

Análise a priori do pré-teste: devido o único valor numérico exposto na questão é 1200m, provavelmente os alunos sentirão falta de outra informação, não percebendo que ela está presente nos dias da semana. Mas, ao associar uma semana com 7 dias, não terão dificuldades em identificar que se trata de um problema que envolve a operação de multiplicação.

Análise a priori do pós-teste: os alunos perceberão que o valor a ser multiplicado por 1900 é o número 7 que representa os dias da semana, bem como, que se trata de um problema que envolve a operação multiplicação.

10. Juliana foi comprar um lanche. Numa lanchonete havia 3 sabores de sucos (caju, acerola e laranja) e 2 tipos de salgados (hambúrguer e pizza). De quantas maneiras diferentes Juliana pode escolher um lanche, comprando um suco e um salgado?

Análise a priori do pré-teste: os alunos perceberão que um dos meios de obter o resultado é fazendo a combinação dos sucos com os salgados. E para facilitar a resolução, utilizarão desenhos na associação. Eles não apresentarão dificuldades na resolução, visto que, refere-se a uma questão aritmética com baixa complexidade.

Análise a priori do pós-teste: eles perceberão que um dos meios de obter o resultado é fazendo a combinação dos sabores, como também, usando a sentença, visto que, refere-se a uma questão aritmética com baixa complexidade.

11. Para abastecer sua loja de doces, Mazé comprou uma caixa que contém 16 sacos de pirulitos. Se ela pagou R$ 8,00 por cada saco, quanto Mazé pagou na compra dos sacos de pirulitos?

Análise a priori do pré-teste: os alunos não apresentarão dificuldades na resolução do problema aritmético. Nossa hipótese é que utilizarão a multiplicação e alcançarão ao resultado correto.

Análise a priori do pós-teste: a maioria dos alunos entenderão que, apesar de, na modelação mostre a multiplicação, a operação apropriada é a divisão.

12. A sala de vídeo da escola que Bruno estuda, foi organizada com 5 fileiras contendo 6 cadeiras em cada, para receber a turma do 6º ano. Quantos alunos há nessa turma?

Análise a priori do pré-teste: os alunos não perceberão com facilidade que se refere a uma questão aritmética, da qual a operação apropriada é a multiplicação e não apresentarão dificuldades para resolver.

Análise a priori do pós-teste: a maior parte dos alunos observarão que se refere a uma questão aritmética, da qual a operação apropriada é a multiplicação e não apresentarão dificuldades para resolver.

4.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Com o objetivo de desenvolver atividades adequadas para a turma selecionada como amostra desta pesquisa, utilizamos como base os pontos identificados pela revisão bibliográfica realizada, que destacam alguns fatores que podem contribuir para as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo multiplicação. Com base nessas informações, foram selecionadas estratégias pedagógicas que visam atender às necessidades específicas dessa turma e promover a aprendizagem efetiva desse conteúdo.

Ao elaborarmos as atividades 1 e 2, foi levado em consideração o desenvolvimento da compreensão sobre a reversibilidade das operações como um fator chave para o sucesso na resolução de problemas multiplicativos. Para alcançar esse objetivo, utilizamos uma abordagem que incentiva a redescoberta do princípio multiplicativo da igualdade, que permite aos alunos compreenderem a relação entre a multiplicação e a divisão de forma mais clara e intuitiva. Dessa forma, esperamos que os alunos possam desenvolver um entendimento mais profundo das operações multiplicativas e aprimorar suas habilidades na resolução de problemas.

De acordo com a sexta habilidade para a disciplina de Matemática, no 6º ano do Ensino Fundamental, descrita na BNCC: "(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas" (Brasil, 2017, p. 301). O foco desta pesquisa está centrado nas operações de multiplicação e divisão, uma vez que essas habilidades são fundamentais para a resolução de problemas matemáticos complexos, incluindo aqueles que envolvem equações algébricas. Acreditamos que, ao desenvolver a compreensão e o domínio dessas operações, os alunos estarão mais bem preparados para enfrentar desafios matemáticos em níveis mais avançados, incluindo aqueles que exigem habilidades algébricas mais sofisticadas. De fato, nossa pesquisa inicial de diagnóstico constatou que muitos alunos apresentam dificuldades significativas em problemas de natureza algébrica, o que reforça a importância de focar na construção de uma base sólida de habilidades matemáticas fundamentais.

Ao elaborarmos as atividades, nos baseamos em estudos importantes de Sá (2003), Silva (2015) e Santos (2017), Miranda (2021) e Barbosa (2021) que destacam a importância do entendimento da modelagem da sentença natural de um problema na escolha da operação adequada para a resolução de problemas matemáticos envolvendo números naturais. Esses estudos ressaltam que, ao compreender como a estrutura linguística de um problema matemático está relacionada às operações matemáticas envolvidas, os alunos podem fazer escolhas mais precisas e efetivas na resolução de problemas complexos. Dessa forma, esperamos que a atividade possa ajudar a aprimorar a habilidade dos alunos na modelagem de problemas e na escolha da operação adequada para resolvê-los.

Com o objetivo de ampliar os resultados encontrados na revisão da literatura, elaboramos atividades que trabalham a interpretação de problemas multiplicativos com uma única operação, para que pudéssemos avançar para problemas mais complexos com múltiplas operações. As atividades desenvolvidas visam trabalhar a redescoberta e o aprofundamento das habilidades necessárias para a resolução de problemas multiplicativos.

Nesta etapa, apresentaremos as sessões de aulas que serão realizadas por meio das questões propostas, todas estão seguidas da descrição de nossas expectativas em relação ao entendimento dos estudantes a respeito das questões propostas, que são nossas análises *a priori.*

Apresentaremos as atividades elaboradas para a etapa de intervenção, com problemas multiplicativos. As atividades descritas nesta subseção, foram planejadas para serem desenvolvidas em 17 (dezessete) encontros. Elas têm por finalidades incentivar os estudantes a perceberem as regularidades e irregularidades dos problemas multiplicativos e descobrir uma regra geral para resolvê-los. Observemos as atividades.

4.2.1 Atividade 1

Quadro 6 – Atividade 1 – Multiplicação na igualdade (Atividade de redescoberta) continua

Título: multiplicação na igualdade.

Objetivo: descobrir quando por meio da multiplicação uma igualdade permanece verdadeira.

Material: roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.

Procedimento: preencha o quadro a seguir.

Valores	***a = b***	**A expressão a = b é verdadeira?**		***a x c = b x d***	**A expressão *a x c = b x d* é verdadeira?**	
		Sim	**Não**		**Sim**	**Não**
a = 3 b = 3 c = 5 d = 5						
a = 6 b = 6 c = 4 d = 4						

a = 7 b = 7 c = 2 d = 2						
a = 10 b = 10 c = 3 d = 3						
a = 3 b = 3 c = 4 d = 2						
a = 4 b = 4 c = 1 d = 6						
a = 2 b = 2 c = 4 d = 7						
a = 9 b = 2 c = 3 d = 3						
a = 10 b = 5 c = 4 d = 4						
a = 7 b = 1 c = 6 d = 6						
a = 2 b = 8 c = 12 d = 3						
a = 4 b = 5 c = 10 d = 8						
a = 6 b = 9 c = 6 d = 4						

Observações:
Conclusão:

Fonte: adaptada de Santos, 2017

Análise a priori da atividade 1:

Com a atividade 1, espera-se que os estudantes tenham mais facilidade para identificar quando, por meio da multiplicação, uma igualdade permanece verdadeira, no entanto, existem as dificuldades acerca da operação multiplicação ou da aplicação da operação, que provavelmente alguns grupos podem apresentar. O quadro a seguir, apresenta algumas conclusões possíveis na atividade de multiplicação na igualdade.

Quadro 7 – Previsões para a atividade 1

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Se os dois membros de uma igualdade verdadeira forem multiplicados pelo mesmo valor permanece verdadeira. Na multiplicação uma igualdade permanece verdadeira quando multiplicamos os dois membros por números iguais
Válida e não desejada	Se a multiplicação for por números iguais a igualdade permanece verdadeira.
Válida e não desejada	Se o resultado der igual é “SIM” e se der diferente é “NÃO”.
Inválida e não desejada	Quando multiplica os valores que são iguais
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

A prática adquirida com as atividades anteriores, deve servir como base suficiente para que os grupos contemplem e registrem conclusões adequadas, contudo, é possível que algumas equipes deixem as conclusões incompletas ou não válidas.

4.2.2 Atividade 2

Quadro 8 – Atividade 2 – Divisão na igualdade (Atividade de redescoberta) continua

Título: divisão na igualdade
Objetivo: descobrir quando por meio da divisão uma igualdade permanece verdadeira.
Material: roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.
Procedimento: preencha o quadro a seguir.

Valores	***a = b***	**A expressão a = b é verdadeira?**		**a ÷ c = b ÷ d**	**A expressão *a ÷ c = b ÷ d* é verdadeira?**	
		Sim	**Não**		**Sim**	**Não**
a = 12 b = 12 c = 4 d = 4						
a = 6 b = 6 c = 3 d = 3						
a = 15 b = 15 c = 5 d = 5						
a = 10 b = 10 c = 2 d = 2						
a = 16 b = 16 c = 8 d = 4						
a = 12 b = 12 c = 3 d = 6						
a = 20 b = 20 c = 5 d = 4						
a = 14 b = 21 c = 7 d = 7						
a = 9 b = 12 c = 3 d = 3						
a = 16 b = 8 c = 4 d = 4						
a = 12 b = 8 c = 3 d = 2						

a = 10 b = 25 c = 2 d = 5						
a = 14 b = 6 c = 7 d = 3						
Observações: **Conclusão:**						

Fonte: adaptada de Santos, 2017

Análise a priori da atividade 2:

O esperado é que os estudantes não apresentem dificuldades em observar que dividindo os dois membros de uma igualdade por um mesmo número diferente de zero, a igualdade permanecerá verdadeira.

Considerando que os cálculos utilizam algarismos que possuem valores pequenos, para minimizar os problemas com as operações, os maiores valores são de fácil resolução. Contudo, os estudos nos campos conceituais destacam que a divisão para a maioria dos alunos é considerada mais difícil que a multiplicação, com isso é comum que ocorram dificuldades específicas à operação. As possíveis conclusões para a atividade de divisão encontram-se representadas a seguir no quadro.

Quadro 9 – Previsões para a atividade 2

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Se os dois membros de uma igualdade verdadeira forem divididos pelo mesmo valor diferente de zero permanece verdadeira. Quando dividimos os dois lados de uma igualdade, pelo mesmo número, esta igualdade permanece verdadeira.
Válida e não desejada	Quando dividimos o número aos dois lados da igualdade.
Válida e não desejada	Se a divisão for por números iguais a igualdade permanece verdadeira
Válida e não desejada	Se a divisão for por números diferentes a igualdade não permanece verdadeira
Invalida e não desejada	Se forem iguais primeiro divide e depois multiplica.
Invalida e não desejada	Se eles são iguais não pode dividir pelo mesmo número.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

Esta atividade utiliza da experiência dos estudantes por meio da prática com as atividades anteriores, bem como, de um olhar mais direcionado para identificar regularidades e de uma reincidência em formular conclusões entre outros aspectos positivos.

4.2.3 Atividade 3

Quadro 10 – Atividade 3 – Sentenças multiplicativas (Atividade de redescoberta)

Título: sentenças multiplicativas **Objetivo:** descobrir a relação entre o valor desconhecido e a operação usada para resolver as sentenças multiplicativas. **Material:** roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta. **Procedimento:** entregar a cada grupo uma lista com as questões abaixo, solicitar que os mesmos determinem o valor da interrogação em cada caso e que escrevam as observações e conclusões identificadas.		
a) 3 × 7 = ?	**i)** 6 × ? = 24	**q)** ? ÷ 5 = 11
b) 5 × 4 = ?	**j)** 15 × ? = 60	**r)** ? ÷ 8 = 12
c) 6 × 2 = ?	**k)** 5 × ? = 50	**s)** ? ÷ 10 = 20
d) 9 × 8 = ?	**l)** 20 × ? = 140	**t)** ? ÷ 25 = 14
e) ? × 2 = 16	**m)** 8 ÷ 2 = ?	**u)** 30 ÷ ? = 6
f) ? × 4 = 28	**n)** 48 ÷ 6 = ?	**v)** 56 ÷ ? = 7
g) ? × 16 = 32	**o)** 32 ÷ 4 = ?	**x)** 84 ÷ ? = 12
h) ? × 9 = 45	**p)** 90 ÷ 15 = ?	**z)** 100 ÷ ? = 2
Observação: **Conclusão:**		

Fonte: adaptada de Santos, 2017

Análise a priori da atividade 3:

Esta atividade foi desenvolvida para trabalhar a determinação do valor desconhecido em sentenças matemáticas multiplicativas, com variação da incógnita nas três possíveis posições, por meio do princípio multiplicativo da igualdade. A referida atividade é composta por “Sentença Multiplicativas”, cujas variações da incógnita, a qual o aluno terá que determinar o valor desconhecido, são dos tipos:

$a \times b = ?$, $a \div b = ?$; $? \times b = c$, $? \div b = c$; $a \times ? = c$ e $a \div ? = c$.

A atividade poderá apresentar obstáculos operacionais, na medida em que o valor desconhecido ocupe diferentes posições. A mesma requer habilidades e conhecimento de conceitos, algoritmos e regras para resolução das sentenças que vão além dos presentes nas atividades anteriores.

Quadro 11 – Previsões para a atividade 3

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	A escolha da operação correta para descobrir o valor desconhecido está relacionada à localização da interrogação.
Válida e não desejada	Para encontrar o valor, você deve realizar a operação contrária à que foi feita originalmente para chegar a esse valor desconhecido. Dessa forma, é possível "desfazer" a operação e encontrar o valor original.
Válida e não desejada	Quando a interrogação se encontrar no final da frase, precisamos realizar a operação direta. Já quando ela estiver no início ou no meio da frase, precisamos realizar a operação inversa.
Invalida e não desejada	O resultado de uma multiplicação pode ser obtido por divisão.
Invalida e não desejada	O resultado de uma divisão pode ser obtido por multiplicação.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

A experiência adquirida com as tarefas anteriores deve fornecer uma base sólida para que os grupos possam considerar e registrar conclusões adequadas. No entanto, é possível que algumas equipes apresentem conclusões incompletas ou inválidas. É importante lembrar que o aprendizado é um processo contínuo e que, às vezes, pode ser necessário revisar ou corrigir conclusões para chegar a resultados precisos e confiáveis.

4.2.4 Atividade 4

Quadro 12 – Atividade 4 – Compra e venda (Atividade de redescoberta) continua

Título: problemas multiplicativos – compra e venda
Objetivo: descobrir uma relação entre a quantidade de mercadoria, o valor unitário da mercadoria e o valor a pagar.
Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.
Procedimentos:

- Organizar a sala em grupos de 4 alunos;
- Ler atentamente cada questão;
- Responda cada questionamento associado a cada questão;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento;
- Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade.

1. Mariana comprou três caixas de bombons. Se uma caixa de bombons custa R$ 8,00. Quanto Mariana pagou?
a) Quantas caixas de bombons foram compradas por Mariana?
b) Qual a valor de cada caixa de bombom?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Mariana pagou pelas caixas de bombom compradas?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

2. Carlos quer comprar quatro camisetas, sendo que uma camiseta custa R$ 30,00. Quanto ele vai gastar nesta compra?
a) Quantas camisetas foram compradas por Carlos?
b) Qual a valor de cada camisetas?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Carlos gastou na compra das camisetas?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

3. Mônica comprou quatro pizzas a R$ 25,00 cada uma. Quanto Mônica gastou na compra das pizzas?
a) Quantas pizzas foram compradas por Mônica?
b) Qual a valor de cada pizza?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Mônica gastou na compra das pizzas?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

4. Manoel comprou duas bolas de futebol, sendo que uma bola custa R$ 50,00. Quanto Manoel gastou com a compra das bolas de futebol?
a) Quantas bolas de futebol foram compradas por Manoel?
b) Qual a valor de cada bola de futebol?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Manoel gastou na compra das bolas?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

5. Bruno comprou seis garrafas de água e pagou R$ 3,00 em cada uma. Qual o valor pago por Bruno na compra das garrafas de água?
a) Quantas garrafas de água foram compradas por Bruno?
b) Qual a valor de cada garrafa de água?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Bruno pagou na compra das garrafas de água?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

6. Amanda comprou quatro livros e pagou R$ 20,00 por cada um. Qual o valor gasto por Amanda compra dos livros?
a) Quantos livros foram comprados por Amanda?
b) Qual a valor de cada livro?
c) O que a questão pede?

d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Amanda gastou na compra dos livros?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

7. Isabel comprou três caixas de chocolates e pagou R$ 15,00 em cada uma das caixas. Quanto Isabel gastou na compra das caixas de chocolates?
a) Quantas caixas de chocolates foram compradas por Isabel?
b) Qual a valor de cada caixa de chocolate?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Isabel gastou na compra das caixas de chocolates?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

8. Mário comprou cinco calças e pagou R$ 100,00 por cada calça. Qual o valor que Mário gastou na compra das calças?
a) Quantas calças foram compradas por Mário?
b) Qual a valor de cada calça?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Mário gastou na compra das calças?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

9. Susi comprou seis latas de refrigerantes e pagou o valor de R$ 5,00 em cada uma. Quanto Susi gastou na compra das latas de refrigerantes?
a) Quantas latas de refrigerantes foram compradas por Susi?
b) Qual a valor de cada lata?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Susi gastou na compra das latas de refrigerantes?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

10. Mateus comprou cinco pacotes de biscoitos, pagando R$ 4,00 em cada um. Qual o valor gastou por Mateus na compra dos pacotes de biscoitos?
a) Quantos pacotes de biscoitos foram comprados por Mateus?
b) Qual a valor de cada pacote de biscoito?
c) O que a questão pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quanto Mateus gastou na compra dos pacotes de biscoitos?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

Vamos organizar as informações das questões no quadro.

Questão	**Quantidade de mercadoria**	**Valor unitário da mercadoria**	**Valor pago**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

10				

Observação:

Conclusão:

Fonte: adaptada de Santos, 2017

Análise a priori da atividade 4:

De acordo com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 4 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

A atividade 4, também incorpora o conceito de multiplicação em sua descrição, assim como situações que envolvem valores monetários. Seu objetivo é consolidar as associações determinadas em atividades anteriores, referentes a quantidade de mercadoria comprada, o preço por unidade do produto e o preço total a ser pago. Essas compreensões terão um impacto direto na formulação da sentença e na identificação da operação matemática, dependendo do tipo de problema apresentado.

Presumimos que os alunos sejam capazes de perceber a seguinte relação:

Quantidade de mercadoria multiplicada pelo Preço por unidade resulta no Preço total a pagar.

Os estudantes podem enfrentar desafios na compreensão de como realizar esta tarefa, sendo que ela está relacionada ao conceito multiplicativo e envolve situações matemáticas distintas das atividades anteriores (por exemplo, a x b = c; a ÷ b = c). Ao término da tarefa, existe uma tabela para que os alunos preencham colocando a sentença, a forma como calculou e a operação utilizada para solucionar cada questão, conforme sua própria rotina. O quadro terá a seguinte formulação:

Quadro 13 – Preenchimento esperado da atividade 4 continua

Questão	Quantidade de mercadoria	valor unitário da mercadoria	Sentença	Cálculo	valor a pagar
Q1	**3**	**8**	3 x 8 = ?	3 x 8 =	**24**

Q2	**4**	**30**	4 x 30 = ?	4 x 30 =	**120**
Q3	**4**	**25**	4 x 25 = ?	4 x 25 =	**100**
Q4	**2**	**50**	2 x 50 = ?	2 x 50 =	**100**
Q5	**6**	**3**	6 x 3 = ?	6 x 3 =	**18**
Q6	**4**	**20**	4 x 20 = ?	4 x 20 =	**80**
Q7	**3**	**15**	3 x 15 = ?	3 x 15 =	**45**
Q8	**5**	**100**	5 x 100 = ?	5 x 100 =	**500**
Q9	**6**	**5**	6 x 5 = ?	6 x 5 =	**30**
Q10	**5**	**4**	5 x 4 = ?	5 x 4 =	**20**

Fonte: autora, 2023

A atividade 4 envolve problemas aritméticos de estrutura multiplicativa em situações com valores monetários. Acreditamos que nas questões aritméticas (1 a 10), os alunos não terão dificuldades, devido ao fato de que a operação usada para resolver o problema seja a mesma da sentença.

Quadro 14 – Previsões para atividade 4

Tipo de conclusão	**Conclusão esperada**
Válida e desejada	Quando o problema pedir o valor total a ser pago, multiplicamos a quantidade de mercadoria pelo preço pago da unidade.
Válida e não desejada	Para obter o resultado, multiplicamos os dois valores dado na questão.
Invalida e não desejada	Para encontrar o resultado, podemos multiplicar ou dividir o valor da mercadoria pelo valor pago pela unidade.
Não formulada	Grupos que não formularam questões

Fonte: autora, 2023

A vivência adquirida por meio das atividades de redescoberta deve estabelecer um alicerce sólido para que os alunos possam analisar e documentar de forma verificada. No entanto, é possível que alguns alunos apresentem respostas incompletas ou inválidas. É essencial lembrar que o processo de aprendizagem é contínuo e, ocasionalmente, pode ser necessário revisar ou corrigir para obter resultados precisos e independentes.

4.2.5 Atividade 5

Quadro 15 – Atividade 5 – Compra e venda (Atividade de aprofundamento)

Título: problemas multiplicativos – compra e venda
Objetivo: praticar a relação entre a quantidade de mercadoria, o valor unitário da mercadoria e o valor a pagar.
Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.
Procedimentos:

- Ler atentamente cada questão;
- Responda cada questionamento associado a cada questão;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento na folha.

1. Ítalo comprou três canetas. Se uma caneta custa R$ 5,00. Quanto Ítalo pagou na compra das canetas?
2. Renata quer comprar cinco blusas, sendo que uma blusa custa R$ 10,00. Quanto Renata vai gastar nesta compra?
3. Jonas comprou quatro bonés e pagou R$ 20,00 por cada um. Qual o valor gasto por Jonas compra dos bonés?
4. Marta comprou oito garrafas de água e pagou R$ 16,00 na compra. Qual o valor de cada garrafas de água?
5. Lais comprou três pacotes de adesivos e pagou o valor de R$ 15,00. Quanto custa um pacote de adesivo?
6. Marcos comprou quatro latas de refrigerante e pagou o valor de R$ 20,00. Quanto custa uma lata de refrigerante?
7. Roberta comprou cinco lápis e pagou R$ 10,00 para o vendedor. Qual o valor que Roberta pagou em cada lápis?
8. Eliana comprou alguns livros a R$ 25,00 cada um e pagou o valor de R$ 100,00. Quantos livros Eliana comprou?
9. Fabrício comprou alguns pacotes de peteca a R$ 4,00 cada um e pagou R$ 20,00 por toda a compra. Quantos pacotes de peteca Fabrício comprou?
10. Se uma caixa de chocolates custa R$ 15,00 e Ana pagou R$ 60,00 pela compra. Quantas caixas de chocolate Ana comprou?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 5:

Com base no esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 5 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

A atividade 5 é uma atividade de aprofundamento, onde os alunos devem praticar e desenvolver a aprendizagem adquirida na realização da atividade 4, de redescoberta composta por questões norteadoras que facilitam a percepção da relação entre a quantidade de mercadoria, o valor unitário da mercadoria e o valor a pagar. Esta atividade de aprofundamento é composta de problemas aritméticos que são (Q1, Q2, Q3) e os algébricos (Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10), sendo que as questões Q4, Q5, Q6 e Q7, são do tipo **a x ? = c**, onde o valor unitário da mercadoria é desconhecido e as questões Q8, Q9 e Q10, são do tipo **? x b = c**, nas quais a quantidade de mercadoria é desconhecida.

4.2.6 Atividade 6

Quadro 16 – Atividade 6 – Agrupamento de elementos (Atividade de redescoberta) continua

Título: problemas multiplicativos – agrupamento de elementos **Objetivo:** descobrir uma relação entre a quantidade de agrupamento de elementos, a quantidade de elementos por agrupamento e o total de elementos. **Materiais necessários:** lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis (calculadora). **Procedimentos:** • Organizar a sala em grupos de 4 alunos; • Ler atentamente cada questão; • Responda cada questionamento associado a cada questão; • Registre as respostas obtidas em cada questionamento; • Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade.
1. Pedro comprou 3 pacotes de bolas de gude com 7 bolas de gude em cada pacote. Quantas bolas de gude Pedro comprou? a) Quantos pacotes de bolas de gude Pedro comprou? b) Quantas bolas de gude havia em cada pacote? c) O que o problema pede? d) Que sentença representa a situação? e) Quantas bolas de gude Pedro comprou? f) Qual a operação usada para resolver a questão? Como você fez para determinar o total de bolas de gude que Pedro comprou? **2.** Um feirante fez 10 sacos iguais com mangas para vender. Ele colocou com 4 mangas em cada saco. Quantas mangas foram usadas? a) Quantos pacotes de mangas o feirante fez? b) Quantas mangas havia em cada pacote? c) O que o problema pede? d) Que sentença representa a situação? e) Quantas mangas o feirante usou? f) Qual a operação usada para resolver a questão? Como você fez para determinar o total de mangas que o feirante usou? **3.** Uma boleira vai fazer 6 bolos. Ela gasta 5 ovos em cada bolo. Quantos ovos ela vai gastar? a) Quantos ovos a boleira gasta em cada bolo? b) Quantos bolos ela vai fazer? c) O que o problema pede?

d) Que sentença representa a situação?
e) Quantos ovos a boleira vai gastar nos 6 bolos?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de ovos gastos nos 6 bolos?

4. Dália comprou 4 pacotes de figurinhas com 7 figurinhas em cada pacote. Quantas figurinhas Dália comprou?
a) Quantos pacotes de figurinhas Dália comprou?
b) Quantas figurinhas havia em cada pacote?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantas figurinhas Dália comprou?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de figurinhas que Deja comprou?

5. Um comerciante montou 6 sacos iguais de laranjas para vender. Ele montou sacos com 10 laranjas em cada. Quantas laranjas foram utilizadas?
a) Quantos pacotes de laranjas o comerciante montou?
b) Quantas laranjas havia em cada pacote?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantas laranjas o comerciante utilizou?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de laranjas que o comerciante utilizou?

6. Uma loja de doces tem 8 pacotes de balas, e em cada pacote há 12 balas. Quantas balas a loja possui?
a) Quantos pacotes de balas a loja de doces tem?
b) Quantas balas havia em cada pacote?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantas balas a loja de doces possui?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de balas que a loja de doces possui?

7. Um estudante comprou 3 pacotes de lápis. Em cada pacote tinham 6 lápis. Quantos lápis ele comprou?
a) Quantos pacotes de lápis o estudante comprou?
b) Quantas lápis havia em cada pacote?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantos lápis o estudante comprou?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de lápis que o estudante comprou?

8. Uma escola vai realizar uma competição esportiva e precisa levar 60 alunos. Cada ônibus tem capacidade para 30 alunos. Quantos ônibus a escola precisar reservar?
a) Quantos alunos a escola precisa levar?
b) Qual a capacidade de alunos em cada ônibus?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantos ônibus a escola vai precisar?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de carteiras que há na sala de Lucas?

9. Uma confeiteira vai fazer 10 bolos. Ela utiliza 3 colheres de manteiga em cada bolo. Quantas colheres de manteiga ela precisará para fazer os bolos?
a) Quantas colheres de manteiga a confeiteira utiliza em cada bolo?
b) Quantos bolos ela vai fazer?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantas colheres de manteiga a confeiteira vai utilizar nos 10 bolos?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de colheres de manteiga utilizadas nos 10 bolos?

10. Um produtor embalou 8 caixas com ovos. Em cada caixa ele embalou 12 ovos. Quantos ovos foram embalados no total?

a) Quantas caixas o produtor de ovos embalou?
b) Quantos ovos o produtor embalou em cada caixa?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Quantos ovos o produtor embalou?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?
Como você fez para determinar o total de ovos embalados pelo produtor?

Com base nas resoluções anteriores preencha o quadro abaixo:

Questão	**Quantidade de agrupamentos**	**Quantidade de elementos por agrupamento**	**Total de elementos**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Observação:

Conclusão:

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 6:

Nesta atividade, é esperado que os estudantes possuam conhecimento e habilidade suficientes para resolver as questões sem depender dos itens presentes nas atividades de redescoberta, uma vez que o objetivo é que eles identifiquem prontamente o que é solicitado, realizem a modelagem do problema e sigam adiante com a resolução. A atividade 6 tem o propósito de reforçar as estratégias aprendidas nas aulas anteriores e permitir que os alunos desenvolvam suas próprias abordagens compreendendo que a melhor forma de organizar os dados é traduzindo-os para a linguagem matemática.

De acordo com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 6 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

Quadro 17 – Previsões para atividade 6

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Para resolver, temos que identificar a relação existente entre o valor por unidade para descobrir o valor total.
Válida e não desejada	Para resolver, temos que fazer a distribuição dos valores de forma igual.
Invalida e não desejada	Podemos fazer a soma dos valores para resolver o problema.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

Na atividade de redescoberta 6, desejamos que os estudantes descubram a relação existente, na qual a quantidade de agrupamento multiplicada pela quantidade de elementos de cada agrupamento resulta no total de elementos. Este resultado é uma generalização da relação de compra e venda.

Quantidade de agrupamento multiplicada pela quantidade de elementos de cada agrupamento resulta no total de elementos.

4.2.7 Atividade 7

Quadro 18 – Atividade 7 – Agrupamento de elementos (Atividade de aprofundamento) continua

Título: problemas multiplicativos – Agrupamento de elementos
Objetivo: praticar a relação entre a quantidade de agrupamento de elementos, a quantidade de elementos por agrupamento e o total de elementos.
Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis
Procedimentos:

- Ler com bastante atenção as questões;
- Resolva cada questão proposta;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento na folha.

1. Um trem possui 8 vagões com capacidade de 20 passageiros em cada. Quantos passageiros este trem pode transportar?
2. O ônibus de seu Jorge tem capacidade de transportar 35 pessoas em cada viagem para um campeonato de futebol. Se o ônibus precisou fazer 4 viagens com a sua capacidade completa, quantas pessoas o ônibus transportou?
3. Marcos utilizou seu carro para levar os alunos até o clube. Se o carro tem capacidade de transportar 7 pessoas e ele precisou fazer 5 viagens com a capacidade completa, quantos alunos Marcos transportou?
4. A escola de Mariana precisa levar 40 alunos em um passeio, e cada ônibus tem capacidade para 20 alunos. Quantos ônibus a escola precisar reservar?
5. Nossa escola tem 350 alunos e vai organizar um passeio ao parque Aquático. Para o passeio a escola alugou ônibus com capacidade de 50 lugares. Quantos ônibus a escola alugou?
6. Quantas viagens serão necessárias para levar 150 pessoas em um ônibus que leva apenas passageiros sentados e tem capacidade para transportar 30 passageiros?
7. Se um trem possui capacidade de transportar 25 passageiros em cada vagão, quantos vagões possui o trem que transporta 100 pessoas?
8. Uma escola precisa levar 120 alunos em um shopping. Qual é a capacidade do ônibus, se o mesmo precisa fazer 3 viagens com a quantidade igual de alunos?

9.	Qual é a capacidade de cada vagão de um trem que transporta 180 pessoas e possui 6 vagões?
10.	Qual é a capacidade de cada sala de aula de uma escola que acomoda 240 alunos e possui 12 salas de aula?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 7:

A atividade 7 tem o objetivo de reforçar as conexões determinadas nas atividades anteriores, associadas à quantidade de parcelas, valor de cada parcela e o valor total a ser pago. Esta atividade de aprofundamento contém problemas aritméticos que são (Q1, Q2, Q3), do tipo **a x b = ?** e os algébricos que são (Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10), sendo que as questões Q4, Q5, Q6 e Q7, são do tipo **a x ? = c**, onde a quantidade de elementos por agrupamento é desconhecido e as questões Q8, Q9 e Q10, são do tipo **? x b = c**, nas quais a quantidade de agrupamento de elementos é desconhecida. Consideramos que nas questões com a parte algébrica os alunos apresentem mais dificuldades, em virtude de envolverem a operação de divisão, a qual é mais desafiadora para os alunos, ou seja, demonstram mais dificuldades na sua resolução.

Com base no esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 7 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

4.2.8 Atividade 8

Quadro 19 – Atividade 8 – Pagamento em prestações (Atividade de redescoberta) continua

Título: problemas multiplicativos - Pagamento em prestações **Objetivo:** descobrir uma relação entre a quantidade de prestações de uma compra, o valor de cada prestação e o valor final pago. **Materiais necessários:** lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis. **Procedimentos:** • Organizar a sala em grupos de 4 alunos; • Ler com bastante atenção as questões; • Resolva cada questão proposta; • Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade.
1. Se Julia comprar uma televisão em 8 prestações iguais de R$ 120,00, qual é o valor da televisão? a) Em quantas prestações Julia vai comprar a televisão? b) Qual o valor de cada prestação? c) O que o problema pede? d) Que sentença representa a situação? e) Qual o valor da televisão?

f) Qual a operação usada para resolver a questão?

2. José comprou um notebook em 12 prestações iguais no valor de R$ 100,00. Qual é o valor do notebook?
   a) Em quantas prestações José comprou o notebook?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor do notebook?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
3. Martha comprou um relógio em 5 prestações iguais de R$ 45,00. Quanto Martha pagou pela compra relógio?
   a) Em quantas prestações Martha comprou o relógio?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor do relógio?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
4. Se Carlos comprar uma bicicleta em 6 prestações iguais de R$ 90,00, qual é o valor da bicicleta?
   a) Em quantas prestações Carlos quer comprar a bicicleta?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor da bicicleta?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
5. Tatiane comprou uma mochila em 10 prestações iguais de R$ 25,00. Qual é o valor da mochila?
   a) Em quantas prestações Tatiane comprou a mochila?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor da mochila?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
6. Se Armando comprar uma bola de futebol em 8 prestações iguais de R$ 30,00, qual é o valor da bola de futebol?
   a) Em quantas prestações Armando quer comprar a bola de futebol?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor da bola de futebol?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
7. Cláudia comprou um tablet em 4 prestações iguais de R$ 250,00. Qual o valor do tablet?
   a) Em quantas prestações Cláudia comprou o tablet?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor do tablet?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
8. Um kit para tênis de mesa pode ser pago em 7 prestações iguais de R$ 30,00. Qual é o valor do kit para tênis de mesa?
   a) Em quantas prestações pode ser pago o kit para tênis de mesa?
   b) Qual o valor de cada prestação?
   c) O que o problema pede?
   d) Que sentença representa a situação?
   e) Qual o valor do kit para tênis de mesa?
   f) Qual a operação usada para resolver a questão?
9. Um estojo para pintura pode ser pago em 4 prestações iguais de R$ 25,00. Qual é o valor do estojo de pintura?
   a) Em quantas prestações estojo para pintura pode ser pago?
   b) Qual o valor de cada prestação?

c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Qual o valor do estojo para pintura?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

10. Tony quer comprar um celular que pode ser pago em 12 prestações iguais de R$ 150,00. Qual é o valor do celular?
a) Em quantas prestações Tony comprar o celular?
b) Qual o valor de cada prestação?
c) O que o problema pede?
d) Que sentença representa a situação?
e) Qual o valor do celular?
f) Qual a operação usada para resolver a questão?

Com base nas resoluções anteriores preencha o quadro abaixo:

Questão	**Quantidade de prestação**	**Valor de cada prestação**	**Valor total pago**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Observação:

Conclusão:

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 8:

De acordo com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 8 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

Na descrição da atividade 8, também se encontra o conceito de multiplicação, bem como situações que envolvem valores monetários. O objetivo desta tarefa é consolidar as conexões estabelecidas nas atividades anteriores, relacionadas à quantidade de parcelas, valor de cada parcela e o valor total a ser pago. O conhecimento adquirido nessas atividades terá um efeito significativo na construção da sentença matemática e na seleção da operação matemática apropriada, de acordo com a natureza do problema apresentado.

Presumimos que os alunos sejam capazes de apontar a seguinte relação:

Quantidade de prestações multiplicado pelo valor de cada prestação resulta no valor total a pagar.

Os estudantes podem não enfrentar dificuldades ao realizar esta tarefa, sendo que ela está ligada ao conceito de multiplicação e apresenta situações matemáticas semelhantes as atividades anteriores (por exemplo, a x b = c; a ÷ b = c). Ao finalizá-la, os alunos terão acesso a uma tabela para preencher, na qual devem inserir a expressão matemática, a maneira como realizaram o cálculo e a operação utilizada para solucionar cada questão, de acordo com a sua própria estratégia. A tabela terá o seguinte modelo:

Quadro 20 – Preenchimento esperado da atividade 8

Questão	**Quantidade de prestação**	**Valor de cada prestação**	**valor a pagar**
Q1	**8**	**120**	**960**
Q2	**12**	**100**	**1200**
Q3	**5**	**45**	**225**
Q4	**6**	**90**	**540**
Q5	**10**	**25**	**250**
Q6	**8**	**30**	**240**
Q7	**4**	**250**	**1000**
Q8	**7**	**30**	**210**
Q9	**4**	**25**	**100**
Q10	**12**	**150**	**1800**

Fonte: autora, 2023

Esta atividade requer a resolução de problemas relacionados à estrutura multiplicativa, envolvendo operações aritméticas e algébricas em contextos monetários com prestações. É nossa expectativa que as questões que envolvem a parte aritmética (1 a 10), não sejam desafiadoras para os alunos, uma vez que a operação necessária para solucionar o problema é a mesma operação presente na sentença.

Quadro 21 – Previsões para atividade 8

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Quando o problema pedir o valor total, multiplicamos a quantidade de prestação com o valor de cada prestação. Mas, quando o problema fornecer o valor total e faltar um dos termos, dividimos os valores fornecidos.
Válida e não desejada	A escolha da operação adequada para encontrar o valor desconhecido depende da posição da ?
Invalida e não desejada	Encontramos o resultado multiplicando ou dividindo os valores.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

4.2.9 Atividade 9

Quadro 22 – Atividade 9 – Pagamento em prestações (Atividade de aprofundamento) continua

Título: problemas multiplicativos - Pagamento em prestações
Objetivo: praticar a relação entre a quantidade de prestações de uma compra e o valor final pago.

Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.
Procedimentos:

- Ler com bastante atenção as questões;
- Resolva cada questão proposta;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento na folha.

1. Amanda quer comprar uma calça em 3 prestações iguais de R$ 40,00. Qual é o valor da calça?
2. Marcos comprou um tênis em 4 prestações iguais de R$ 25,00. Qual é o valor do tênis?
3. Célia comprou um óculo em 5 prestações iguais de R$ 30,00. Quanto Célia pagou pelos óculos?
4. Fábio quer comprar uma chuteira que custa R$ 90,00 em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?
5. Cecília quer comprar uma sandália que custa R$ 50,00 em 2 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?
6. Rogério quer comprar uma camisa de futebol que custa R$ 100,00 em 4 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

7. Carol quer comprar um vestido que custa R$ 45,00 em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? 8. Um kit para corrida que custa R$ 60,00 e pode ser pago em prestações iguais de R$ 30,00. Em quantas prestações a compra pode ser paga? 9. Um estojo para maquiagem que custa R$ 80,00 e pode ser pago em prestações iguais de R$ 20,00. Em quantas prestações a compra pode ser paga? 10. Alex quer comprar um relógio que custa R$ 120,00 e pode ser pago em prestações iguais de R$ 40,00. Em quantas prestações a compra pode ser paga?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 9:

Conforme o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 9 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de um para muitos.

Esta atividade tem objetivo de fortalecer as relações determinadas nas atividades anteriores, associadas à quantidade de parcelas, valor de cada parcela e o valor total a ser pago. Esta atividade de aprofundamento contém problemas aritméticos que são (Q1, Q2, Q3), do tipo **a x b = ?** e os algébricos que são (Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10), sendo que as questões Q4, Q5, Q6 e Q7, são do tipo **a x ? = c**, onde o valor de cada prestação é desconhecido e as questões Q8, Q9 e Q10, são do tipo **? x b = c**, nas quais a quantidade de prestação é desconhecida. Acreditamos que as questões que envolvem a parte algébrica sejam mais desafiadoras, visto que envolvem a operação de divisão, a qual os alunos demonstram mais dificuldades na resolução.

4.2.10 Atividade 10

Quadro 23 – Atividade 10 – Ideia de configuração retangular (Atividade de redescoberta) continua

Título: total de quadradinhos **Objetivo:** descobrir uma maneira prática de determinar o total de quadradinhos contidos em um retângulo. **Materiais necessários:** folha de retângulos, roteiro da atividade, lápis ou caneta, borracha. **Procedimentos:** para cada retângulo responda o que se pede: • determine o número de quadradinhos em cada linha dos retângulos dos retângulos da folha de retângulos; • determine o número de quadradinhos em cada coluna dos retângulos dos retângulos da folha de retângulos; • determine o total de quadradinhos em cada retângulo dos retângulos da folha de retângulos; • preencher o quadro de registro.

RETÂNGULOS	Nº DE QUADRADINHOS EM CADA LINHA	Nº DE QUADRADINHOS EM CADA COLUNA	Nº TOTAL DE QUADRADINHOS
FIGURA 1			
FIGURA 2			
FIGURA 3			
FIGURA 4			
FIGURA 5			
FIGURA 6			
FIGURA 7			
FIGURA 8			
FIGURA 9			
FIGURA 10			

Observação:

Conclusão:

Fonte: adaptada de Miranda, 2021

Análise a priori da atividade 10:

Essa parte descreve uma atividade de redescoberta que visa trabalhar a habilidade de produto de medidas, por meio da resolução de problemas, tendo como ideia a configuração retangular. Ela se desenvolve por meio da contagem dos quadradinhos que formam os retângulos e em seguida, o preenchimento do quadro que busca descobrir o número de quadradinhos em cada linha e em cada coluna dos retângulos da folha de retângulos (Apêndice D). Acreditamos que ao final dessa atividade, os alunos compreendam que o total de quadradinhos que forma cada figura é igual ao produto do número de quadradinhos das linhas pelo número de quadradinhos das colunas.

No quadro 24, apresentamos as previsões para a atividade 10, os tipos de conclusões, assim como as conclusões esperadas.

Quadro 24 – Previsões para atividade 10

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Para encontrarmos o resultado, temos que multiplicar a quantidade de quadros da linha com a quantidade de quadros da coluna.
Válida e desejada	Para encontrarmos o resultado, temos que multiplicar a quantidade de quadros na horizontal com a quantidade de quadros na vertical
Válida e não desejada	Para encontrarmos o resultado, temos que somar todos os quadros das linhas e os das colunas
Invalida e não desejada	Para encontrarmos o resultado, temos que somar a quantidade de quadros da linha com a quantidade de quadros da coluna, ou somar a quantidade de quadros da horizontal com a quantidade de quadros da vertical
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

Consoante o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 10 como de relação ternária com eixo de produto de medidas e classe de configuração retangular.

4.2.11 Atividade 11

Quadro 25 – Atividade 11 – Ideia de configuração retangular (Atividade de aprofundamento) continua

Título: problemas multiplicativos envolvendo a ideia de configuração retangular.
Objetivo: resolver problemas multiplicativos envolvendo a ideia de configuração retangular.
Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.
Procedimentos:

- Ler com bastante atenção as questões;
- Resolva cada questão proposta;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento na folha.

1. Em uma sala de espera há 12 fileiras com 5 cadeiras cada. Quantas cadeiras há na sala de espera?
2. Em uma folha de papel há 15 quadrados em cada linha e 10 quadrados em cada coluna. Quantos quadrados há no total nesta folha de papel?
3. Em um tabuleiro de xadrez há 8 quadrados em cada linha e 8 quadrados em cada coluna. Quantos quadrados há no total neste tabuleiro?
4. Para revestir o chão de uma sala, são necessários 120 azulejos. Se eles estão dispostos em fileiras de 10 azulejos, quantas fileiras serão necessárias para revestir todo o chão da sala?

5. Em um ônibus turístico, cabem 45 turistas sentados. Cada fileira tem 8 poltronas. Quantas fileiras há no ônibus turístico? 6. Para revestir a cozinha, uma pessoa precisa de 56 azulejos. Se eles estão dispostos em 8 fileiras, quantos azulejos há em cada fileira? 7. No estádio de futebol, há 80 poltronas dispostas em fileiras e colunas. Se são 10 colunas, quantas são as fileiras? 8. Uma sala de aula tem 40 cadeiras dispostas em fileiras e colunas. Se são 5 as colunas, quantas são as fileiras? 9. Em uma sala de teatro, há 130 poltronas dispostas em fileiras e colunas. Se são 10 colunas, quantas são as fileiras? 10. Uma pessoa precisa de 100 azulejos para revestir o banheiro. Se eles estão dispostos em 10 fileiras, quantos azulejos há em cada fileira?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 11:

Segundo o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 11 como de relação ternária com eixo de produto de medidas e classe de configuração retangular.

Esse tópico descreve uma atividade de aprofundamento que busca praticar a ideia de configuração retangular como parte do produto de medidas, através da resolução de problemas. A atividade proposta inclui questões aritméticas (Q1, Q2, Q3), bem como questões algébricas (Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10). Com a resolução da atividade anterior, esperamos que o aluno seja capaz de responder a atividade de aprofundamento com menos dificuldades. Porém, é possível que eles apresentem um pouco de dificuldade em resolver os problemas algébricos, sendo que para obter o resultado procurado, devem utilizar a operação de divisão.

4.2.12 Atividade 12

Quadro 26 – Atividade 12 – Princípio Fundamental da Contagem (Atividade de redescoberta)continua

Título: problemas multiplicativos contendo o Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo) **Objetivo:** descobrir uma lei geral para resolver problemas multiplicativos contendo o Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo) **Materiais necessários:** lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis. **Procedimentos:** organizar a turma em grupos de 3 a 4 alunos, entregar a cada grupo uma lista com as questões abaixo para que resolvam, solicitar que os mesmos determinem a lei geral e que escrevam as observações e conclusões identificadas.
1. Rogério tem 4 camisetas e 3 bermudas. De quantas maneiras diferentes Ronaldo pode se vestir usando sempre uma bermuda e uma camiseta?

2. Um homem possui 5 ternos, 6 camisas e 4 pares de sapato. De quantas formas ele poderá vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?
3. Marcos foi a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece 7 pratos diferentes de carne e 5 tipos diferentes de sobremesa. De quantas formas Marcos podia fazer sua refeição?
4. Uma sorveteria vende bolas de sorvete com cobertura. Ela oferece 6 sabores de sorvete (morango, chocolate, passas, flocos, uva e cupuaçu) e 4 sabores de cobertura (morango, chocolate, limão e creme). Quantas combinações de uma bola de sorvete e uma cobertura é possível fazer com esses sabores?
5. Carol comprou um estojo de relógios com 4 mostradores e 8 pulseiras diferentes. De quantas maneiras diferentes Carol pode combinar os mostradores com as pulseiras coloridas?
6. Em uma lanchonete existem 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 8 tipos de sorvete. Quantas combinações de lanches poderão ser formadas de modo que contenha: 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete?
7. Num restaurante que vende comida italiana, o cliente pode escolher entre 5 tipos de massa, tendo ainda 8 opções de molho. Quantos pratos diferentes podem ser montados contendo um tipo de massa e um tipo de molho?
8. Em uma festa de aniversário havia 25 crianças, sendo 10 meninos e 15 meninas. Para dançar em uma apresentação, quantos casais diferentes poderiam ser formados?
9. Em uma lanchonete, é oferecido o famoso a moda da casa. Todos os lanches possuem pão de hamburguer, e o cliente pode escolher uma combinação entre: 3 possibilidades de carne (bovina, de frango e vegetariana), 4 tipos de molhos (de cebola, de alho, branco e vermelho) e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras diferentes um cliente pode fazer o pedido?
10. De quantas maneiras podemos escolher um chefe de turma, um vice e um suplente para representar a turma do 6º ano 03, sendo que há 13 candidatos a chefe, 10 candidatos a vice e 6 candidatos a suplente?

Com base nas resoluções anteriores preencha o quadro abaixo:

Questões	**Quantidade de etapas independentes**	**1ª Etapa**	**2ª Etapa**	**3ª Etapa**	**Total**
Q1					
Q2					
Q3					
Q4					
Q5					
Q6					
Q7					
Q8					
Q9					
Q10					

Observações:

Conclusão:

Fonte: adaptada de Barbosa, 2021

Análise a priori da atividade 12:

O propósito dessa atividade é descobrir o Princípio Fundamental da Contagem, e para isso, são empregadas questões com natureza aritmética, o que facilita a compreensão. No entanto, é importante destacar que, de acordo com a classificação proposta por Sá (2003), essas questões não envolvem diretamente a operação de multiplicação, mas se utilizam esse conceito. Além disso, a escolha das palavras é relevante, pois evita o uso de termos relacionados à multiplicação, tornando-se possivelmente o primeiro contato de muitos estudantes com o Princípio Fundamental da Contagem.

A combinação desses elementos certamente apresentará desafios aos estudantes. Além disso, as questões com 3 etapas são formadas por várias operações de multiplicação, o que pode gerar outro obstáculo. É essencial ter domínio da multiplicação ou empregar um pensamento combinatório para resolver essas questões.

A organização dessas atividades seguiu as diretrizes adotadas por Sá (2018) em seu trabalho intitulado "Momentos de uma aula de matemática por atividade", buscando descobrir uma lei geral para solucionar problemas de contagem. A escolha do material foi feita ao adaptar a atividade por Santos (2017) e Rosas (2018). No planejamento da aula, foram utilizados uma atividade impressa contendo uma lista de questões e auxílio do quadro para detalhamento das respostas, criada conforme as recomendações de Sá (2018) e com espaço destinado ao registro, elaboração de desafios e previsão da institucionalização.

Quadro 27 – Previsões para atividade12

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida e desejada	Para obter o resultado, realizamos a multiplicação das etapas que não dependem uma da outra, ou seja, as etapas independentes.
Válida e não desejada	Realizamos a multiplicação das etapas. Realizamos a multiplicação repetidamente ou apenas uma vez.
Invalida e não desejada	Precisa apenas obter o resultado da multiplicação das etapas.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: autora, 2023

De acordo com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 12 como de relação ternária com eixo de produto de medidas e classe de combinatória.

Esta atividade rompe com o modelo das atividades anteriores e a conclusão não é análoga as outras, por isso pode aparecer muitas conclusões inválidas.

4.2.13 Atividade 13

Quadro 28 – Atividade 13 – Princípio Fundamental da Contagem (Atividade de aprofundamento)

Título: problemas multiplicativos contendo o Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo)
Objetivo: resolver problemas multiplicativos contendo o Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo)
Materiais necessários: lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.
Procedimentos:

- Ler com bastante atenção as questões;
- Resolva cada questão proposta;
- Registre as respostas obtidas em cada questionamento na folha.

1. João tem 2 paletós (azul e verde), 3 camisas (branca, vermelha e amarela), e 4 gravatas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir usando um paletó, uma camisa e uma gravata?
2. Uma sorveteria produz sorvetes deliciosos. Os sorvetes podem ser de 3 tamanhos, de 4 formas e de 5 tipos diferentes de sabores. Quantos tipos diferentes de sorvete a sorveteria pode produzir?
3. Em uma padaria há 5 tipos de bolo (chocolate, baunilha, morango, limão e iogurte), 4 tipos de recheios (morango, doce de leite, brigadeiro e creme) e 3 tipos de coberturas (chocolate, glacê e chantilly). De quantas maneiras diferentes você pode escolher um bolo, escolhendo um tipo, um recheio e uma cobertura?
4. Há 3 rotas da cidade X para a cidade Y e 5 rotas da cidade Y para a cidade Z. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode ir da cidade X para a cidade Z passando pela cidade Y?
5. Maria tem 2 saias (vermelha e preta), 3 blusas (branca, amarela e verde), e 4 pares de sapatos. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir usando uma saia, uma blusa e um par de sapatos?
6. Em uma sorveteria há 4 sabores de sorvete (chocolate, baunilha, morango e iogurte), 3 tipos de tortas (maçã, limão e chocolate) e 2 tipos de coberturas (nozes e cerejas). De quantas maneiras diferentes você pode escolher um sorvete, escolhendo um sabor, uma torta e uma cobertura?
7. Um chef possui 10 tipos de saladas e deseja preparar alguns tipos de massas, para poder oferecer 60 tipos de pratos aos seus clientes. Quantos tipos de massas ele precisa preparar?
8. Maria tem saias e blusas e poderá se vestir de 12 maneiras diferentes. Se ela tem 3 blusas, quantas saias ela deve ter para usar uma saia e uma blusa sem repetir?
9. Em uma sorveteria há 15 maneiras diferentes você pode escolher um sorvete para comer. Eles são servidos em cones de três tamanhos (p, m e g). Quantos sabores de sorvete são ofertados?
10. Uma confeiteira possui 12 tipos de sobremesas e deseja preparar alguns tipos de pães, para poder oferecer 36 tipos de lances aos seus clientes. Quantos tipos de pães ela precisa preparar?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 13:

O objetivo desta atividade é permitir que os alunos se familiarizem com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para isso, foram elaboradas questões aritméticas (Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 e Q6) que, em teoria, facilitariam o entendimento dos alunos. Porém, algumas das questões envolvem múltiplas etapas de multiplicação, o que pode ser um desafio para os alunos que não dominam completamente essa habilidade. Como também apresentam questões classificadas por Sá (2003) como algébricas (Q7, Q8, Q9 e Q10), que são as que utilizam para a resolução a propriedade da igualdade e, necessitam da operação de divisão para determinar o resultado procurado. Com isso, esperamos que os alunos resolvam facilmente as questões que utilizam o PFC presente nas questões aritméticas e apresentem um pouco mais de dificuldade nas questões algébricas, que possuem a necessidade de dividir.

Com base o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 12 como de relação ternária com eixo de produto de medidas e classe de combinatória.

4.2.14 Atividade 14

Quadro 29 – Atividade 14 – Problemas com mais de uma operação com valores monetários (Atividade de aprofundamento)

Título: problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários. **Objetivo:** resolver problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários. **Materiais necessários:** lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis. **Procedimentos:** entregar a cada aluno uma lista com as questões abaixo, solicitar que resolvam Individualmente.
1. Quatro peras custam R$ 28,00. Quanto pagarei por 8 peras? **2.** Cinco camisetas custam R$600,00. Se comprei apenas três camisetas, quanto paguei por esta compra? **3.** Se comprei 7 Kg da carne por R$ 63,00, quanto custaria 4 Kg dessa carne? **4.** Seis bananas custam R$12,00. Paguei R$ 36,00 por algumas bananas. Quantas bananas comprei? **5.** Duas camisas custam R$140,00. Paguei R$ 350,00 por algumas camisas. Quantas camisas comprei? **6.** Paguei R$ 60,00 por algumas canetas. Se dez canetas custam R$20,00. Quantas canetas comprei? **7.** Quanto custará 2 Kg de frango, sendo que paguei R$45,00 por 5 Kg? **8.** Oito brinquedos custam R$ 640,00. Se comprei apenas três brinquedos, quanto paguei? **9.** Três calças custam R$450,00. Se comprei apenas duas calças, quanto paguei por esta compra? **10.** Quatro quilos de peixe custam R$200,00. Paguei R$ 350,00 por alguns quilos de peixe. Quantos quilos de peixe comprei?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 14:

Esta atividade implica na resolução de problemas de multiplicação algébrica em situações com valores monetários, sem o auxílio de elementos interrogativos. Isso pode apresentar desafios para os alunos, pois as palavras interrogativas costumam guiar o processo de resolução. No entanto, acredita-se que as habilidades adquiridas nas atividades anteriores possam ajudar na compreensão desta tarefa e que os alunos possam identificar as relações presentes nas formulações dos problemas, permitindo que eles tenham sucesso na resolução deles.

Em concordância com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 14 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de muitos para muitos.

4.2.15 Atividade 15

Quadro 30 **–** Atividade 15 – Problemas com mais de uma operação sem valores monetários (Atividade de aprofundamento)

Título: problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários. **Objetivo:** resolver problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários. **Materiais necessários:** lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis. **Procedimentos:** entregar a cada aluno uma lista com as questões abaixo, solicitar que resolvam Individualmente.
1. João tem 42 litros de leite para fazer 14 quilos de queijo. Quantos litros de leite ele precisará para fazer 7 quilos de queijo? **2.** Maria comprou 60 frutas para distribuir entre 12 pessoas. Quantas frutas ela deverá ter se ela quiser distribuir para 6 pessoas? **3.** João tem 84 sacos de ração para alimentar 28 animais. Quantos sacos de ração ele precisará para alimentar 14 animais? **4.** Maria comprou 112 maçãs para fazer 42 compotas. Quantas maçãs ela precisará para fazer 21 maçãs compotas? **5.** João tem 168 metros de tecido para fazer 56 vestidos. Quantos vestidos ele consegue fazer com 84 metros de tecido? **6.** Dona Joana precisa de 15 ovos para fazer 5 bolos. Quantos ovos ela vai precisar para fazer 7 bolos? **7.** João tem 60 laranjas para fazer 10 copos de sucos. Quantas laranjas ele precisará para fazer 14 copos de sucos? **8.** Se seis abacaxis que custaram R$18,00 e Maria pagou R$ 39,00 por alguns abacaxis. Quantas abacaxis ela comprou? **9.** João utiliza 12 bolas em 4 partidas de futebol. Quantas bolas ele utilizaria em 9 partidas? **10.** Maria comprou 42 chocolates para enfeitar três mesas. Quantos chocolates ela deverá comprar para enfeitar 7 mesas?

Fonte: autora, 2023

Análise a priori da atividade 15:

Esta é uma atividade que implica na resolução de problemas multiplicativos algébricos em situações que não envolvem valores monetários. Com as relações estabelecidas nas atividades anteriores e apesar da ausência de itens interrogativos, os quais na maioria das vezes direcionam o processo de resolução dos problemas, consideramos que os alunos não enfrentarão dificuldades para solucionar estes problemas, visto que situações similares foram abordadas em outras atividades.

Em concordância com o esquema do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) na figura 3, página 46, apresentado por Magina, Merlini e Santos (2014, p. 5), podemos classificar a atividade 15 como de relação quaternária com eixo de proporção simples e classe de muitos para muitos.

4.2.16 Reflexões sobre a Sequência Didática

Nossa meta é reduzir as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas multiplicativos, instruindo-os na compreensão das propriedades de igualdade e no reconhecimento da relação entre as operações de multiplicação e divisão. O sucesso dessa abordagem depende do compromisso do professor-pesquisador em orientar o método de Ensino por Atividades, agindo como facilitador na construção do conhecimento dos alunos, permitindo que eles cresçam de maneira autônoma e promovendo sua capacidade de progredir independentemente.

Uma sequência didática que engloba atividades de exploração, definição de conceitos, tarefas de aprofundamento e jogos possibilita tanto a aprendizagem quanto a internalização de ideias e o desenvolvimento de abordagens de solução de maneira mais eficaz. Por fim, é recomendado que o professor estimule a cooperação mútua entre os alunos durante as atividades em grupo, uma vez que a interação auxilia a abordar ou até mesmo resolver dificuldades, além de aperfeiçoar o processo de incorporação do conhecimento.

Na próxima seção, será relatado o *lócus* da pesquisa, como esta sequência didática fora implementada junto aos estudantes, bem como foi conduzida a fase experimental, que é a terceira etapa da Engenharia Didática.

5 EXPERIMENTAÇÃO

Esta seção se destina a relatar como ocorreu a aplicação da sequência didática, para tal fim é necessário descrevermos os instrumentos que foram empregados, bem como foram obtidos os resultados. Utilizamos como instrumento de coleta de dados: testes; questionário socioeducacional; sequência didática; ficha de observação da aula por atividade de redescoberta, assim como um diário de campo, além dos registros fotográficos, das considerações da equipe sobre as intervenções necessárias.

A experimentação da sequência didática deste trabalho de pesquisa ocorreu em uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal, localizada em Parauapebas, no Estado do Pará. O lócus de nosso trabalho atende estudantes do 1º ano ao 9º ano do ensino fundamental. Nessa mesma turma *a priori* aconteceu a experimentação da parte aditiva, aplicada pela mestranda participante do mesmo programa que o nosso, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

O experimento foi desenvolvido em 17 (dezessete) encontros de noventa minutos cada, onde ocorreu a aplicação de 16 (dezesseis) atividades, divididas entre pré e pós-teste, atividades de redescoberta, atividades de aprofundamento. O tempo de duração de cada encontro será de 90 (noventa) minutos, podendo ter sido concluído em um período de maior ou menor tempo de acordo com desenvolvimento por parte dos alunos, como está demonstrado no quadro a seguir.

O quadro 31 apresenta a forma de organização da experimentação para a turma que aconteceu a aplicação.

CRONOGRAMA DA EXPERIMENTAÇÃO

Quadro 31 – Cronograma de aplicação da Sequência Didática continua

DATA	ENCONTROS	ATIVIDADES	TEMPO PREVISTO	TEMPO GASTO
30/08/2023	**I**	Questionário socioeducacional e Pré-teste	90 minutos	80 minutos

05/09/2023	**II**	**Atividade 1 –** Multiplicação na igualdade - Atividade de redescoberta	90 minutos	70 minutos
06/09/2023	**III**	**Atividade 2 –** Divisão na igualdade - Atividade de redescoberta	90 minutos	65 minutos
06/09/2023	**IV**	**Atividade 3 –** Sentenças multiplicativas - Atividade de redescoberta	90 minutos	70 minutos
11/09/2023	**V**	**Atividade 4 –** Problemas multiplicativos compra e venda – Atividade de redescoberta	90 minutos	80 minutos
12/09/2023	**VI**	**Atividade 5 –** Problemas multiplicativos compra e venda – Atividade de aprofundamento	90 minutos	60 minutos
13/09/2023	**VII**	**Atividade 6 –** Problemas multiplicativos com agrupamento de elementos - Atividade de redescoberta	90 minutos	70 minutos
20/09/2023	**VIII**	**Atividade 7 –** Problemas multiplicativos com agrupamento de elementos - Atividade de aprofundamento	90 minutos	65 minutos
25/09/2023	**XI**	**Atividade 8 -** Problemas multiplicativos com pagamento em prestações - Atividade de redescoberta	90 minutos	75 minutos
26/09/2023	**X**	**Atividade 9 -** Problemas multiplicativos com pagamento em prestações - Atividade de aprofundamento	90minutos	50 minutos
26/09/202	**XI**	**Atividade 10 -** Problemas multiplicativos com Ideia de Configuração Retangular - Atividade de redescoberta	90 minutos	30 minutos
27/09/2023	**XII**	**Atividade 11 –** Problemas multiplicativos com Ideia de Configuração Retangular - Atividade de aprofundamento	90 minutos	45 minutos
02/10/2023	**XIII**	**Atividade 12 -** Problemas multiplicativos com o Princípio Fundamental Da Contagem Princípio Multiplicativo – Atividade de redescoberta	90 minutos	80 minutos
03/10/2023	**XIV**	**Atividade 13 -** Problemas multiplicativos com o Princípio Fundamental Da Contagem Princípio Multiplicativo – Atividade de aprofundamento	90 minutos	70 minutos

04/10/2023	**XV**	**Atividade 14 -** Problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários - Atividade de aprofundamento	90 minutos	80 minutos
10/10/2023	**XVI**	**Atividade 15 –** Problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários - Atividade de aprofundamento	90 minutos	70 minutos
11/10/2023	**XVII**	Pós-teste	90 minutos	45 minutos

Fonte: autora, 2023

Antes de iniciarmos a aplicação da sequência didática buscamos a direção da escola para apresentar nossas pretensões, onde buscamos receptividade e apoio para a realização dessa experimentação. Para que a direção e os responsáveis pelos alunos compreendessem melhor o que estávamos propondo, realizamos uma reunião com eles esclarecendo que se tratava de uma pesquisa a nível de mestrado, onde iriamos ministrar o conteúdo de resolução de problemas multiplicativos por meio de uma metodologia diferenciada da tradicional e que estávamos ligados ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Nesse momento, entregamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE (Apêndice A) aos responsáveis e solicitamos sua autorização para a realização desta pesquisa.

As informações obtidas neste estudo foram documentadas através do uso de um registro de campo e uma ficha de observação, conforme descrito nos estudos de Sá (2017). Para a realização da parte experimental, contamos com a participação da professora que trabalha com a turma do sexto ano e que também está cursando o mestrado. Ela se ofereceu para implementar a sequência didática, participando como observadora nas aulas.

5.1 INFORMAÇÕES A SEREM PRODUZIDAS NA EXPERIMENTAÇÃO

Destacamos que, com exceção do pré-teste e pós-teste que foram realizados individualmente, as demais atividades foram desenvolvidas em grupos com até 4 (quatro) estudantes. Quanto a formação das equipes, esta função coube aos próprios alunos, sendo o professor o mediador do processo. Acreditamos que o trabalho em grupo auxilia no desenvolvimento de habilidades de cooperação e comunicação, bem como a capacidade de observar e registrar resultados de forma clara e objetiva.

Em todos os encontros o professor pesquisador esteve acompanhado de uma professora observadora. A função da professora observadora é auxiliar o professor pesquisador nos registros das ocorrências em sala de aula durante a experimentação. Para isso, a observadora dispunha de uma ficha de acompanhamento para cada encontro, onde registrou o comportamento do professor e de cada equipe durante a realização das atividades propostas.

Portanto, mediante a aplicação da Sequência Didática, dos registros de observações e dos feedbacks dos estudantes, foram produzidas as informações necessárias para análise da pesquisa. No quadro a seguir, apresentamos um resumo das informações produzidas durante o processo de experimentação que serão elementos norteadores para a análise a posteriori.

Quadro 32 – Informações adquiridas na Experimentação continua

Informações	Como?	Por quê?
Socioeducacionais	Por meio da aplicação de um questionário socioeducacional.	O questionário permite ao investigador ou professor obter uma compreensão mais abrangente do cenário em que os estudantes estão imersos. Ele disponibiliza dados referentes ao ambiente domiciliar, disponibilidade de recursos, acesso a materiais educativos, respaldo familiar e outras variáveis socioeconômicas que podem impactar a educação dos alunos.
Conhecimentos prévios	Mediante a aplicação de um pré-teste sobre o conteúdo problemas multiplicativos com números naturais.	O pré-teste permite ao pesquisador ou docente aferir o grau de compreensão que os alunos têm sobre o tópico que será explorado na subsequente série de atividades didáticas.
Observações sobre o processo experimental	Fazer anotações sobre o modo como os alunos estão desempenhando as atividades, as estratégias por eles adotadas, os obstáculos que enfrentam e as abordagens que demonstram ter sucesso.	Essas perguntas disponibilizarão dados sobre a evolução da aprendizagem e das competências dos estudantes na aplicação das atividades relacionadas a problemas multiplicativos envolvidos números naturais.

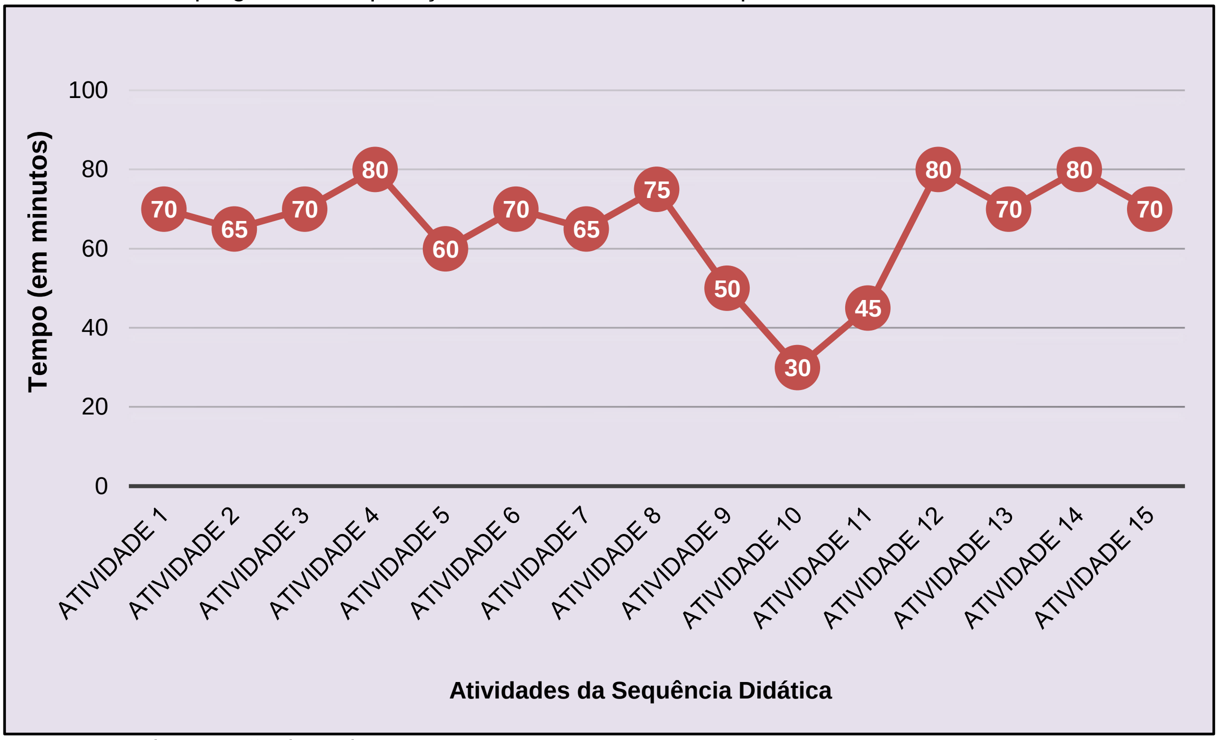
Resoluções, observações e conclusões dos alunos	Através da execução de atividades experimentais, os alunos apresentam soluções e considerações a respeito dos resultados obtidos, assim como as relações identificadas nas tarefas em andamento.	As resoluções podem indicar o grau de compreensão dos envolvidos, suas interpretações dos resultados e suas habilidades para aplicar as relações definidas em diversas situações.
Erros e dificuldades	No decorrer das atividades experimentais, é frequente que os envolvidos cometam equívocos ou confrontem-se com obstáculos ao resolver os problemas apresentados.	Detectar os equívocos mais comuns ou os obstáculos enfrentados pode ser útil para destacar conceitos específicos que são relevantes de uma atenção e revisão mais aprofundadas.
Tempo de realização das atividades	Esses dados foram gerados por meio da anotação dos horários de início e finalização de cada atividade realizada pelos discentes.	A avaliação dos períodos em que os estudantes investem na resolução de uma tarefa oferece percepções valiosas sobre seu rendimento, desafios, velocidade de aprendizagem e evolução ao longo do período.
Frequência dos alunos	Por meio do registro de presença/frequência em cada encontro durante a implementação da Sequência Didática.	A assiduidade e o envolvimento nas atividades são elementos que têm o potencial de afetar o rendimento dos discentes.
Conhecimentos adquiridos	Através da realização de um pós-teste.	O pós-teste permite analisar o desempenho dos alunos antes e depois da aplicação da Sequência Didática.

Fonte: autora, 2023

5.2 INTERVENÇÃO E DELINEAMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

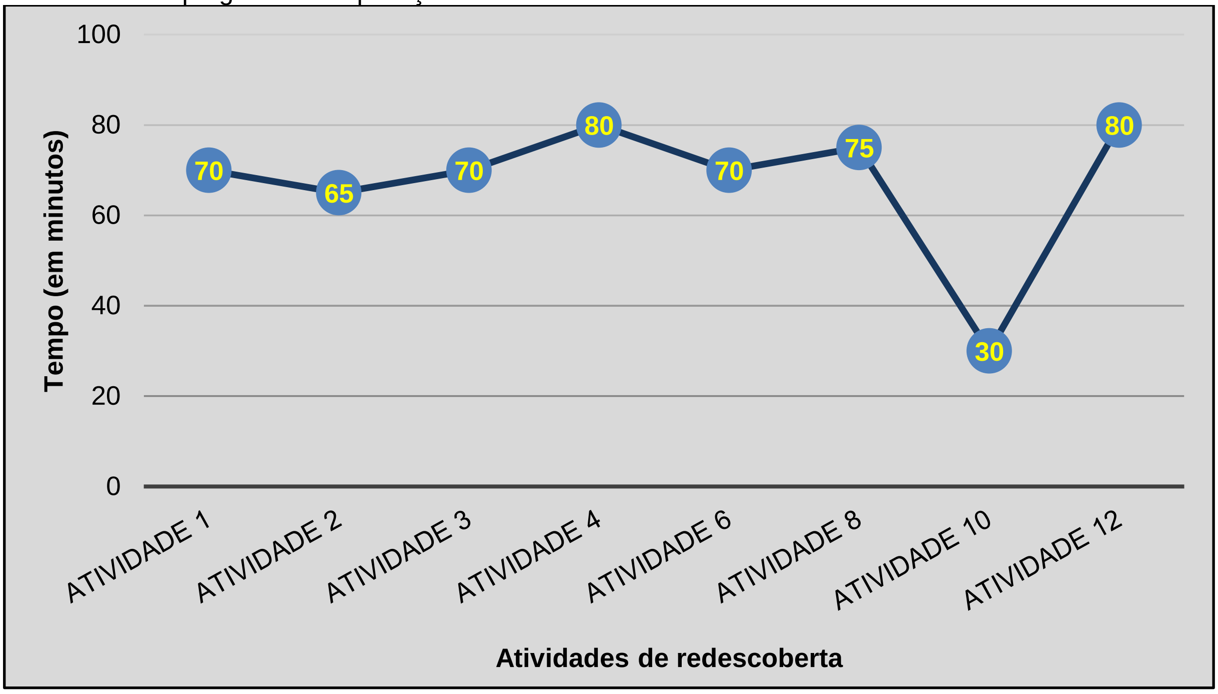
A etapa de intervenção refere-se aos problemas de estruturas multiplicativas e está organizada em 17 encontros didático-pedagógicos. Na primeira sessão fizemos a aplicação do questionário socioeconômico e do pré-teste de multiplicativo, seguida de 16 encontros destinadas a aplicação de quinze atividades e encerrou com o pós-teste multiplicativo. Iniciaremos mostrando o gráfico 1 que indica o tempo gasto para o desenvolvimento das atividades da sequência didática e o gráfico 2 indicando o tempo gasto para o desenvolvimento das atividades de redescoberta.

Gráfico 1 – Tempo gasto nas aplicações das atividades da sequência didática



Fonte: experimentação (2023)

Gráfico 2 – Tempo gasto nas aplicações das atividades de redescoberta



Fonte: experimentação (2023)

O gráfico 1 e 2 indicam uma redução no tempo de aplicação da atividade 1 para a atividade 2. Essas atividades possuíam o mesmo formato. A primeira envolvia o princípio multiplicação da igualdade e a segunda o princípio da divisão em uma igualdade. Isto mostra que ao longo do experimento os discentes foram demonstrando mais agilidade na execução das tarefas. Segundo Sá (1999, p.81), “a experiência tem mostrado que o educando fica mais rápido à medida que as atividades são vencidas e deste modo o maior tempo gasto no início é recompensado posteriormente”.

Na atividade 3 os discentes tinham que determinar o valor desconhecido em sentenças matemáticas multiplicativas, durante o processo de resolução perceberam que a interrogação se referia a um valor que podia ser multiplicado ou dividido nos dois membros da igualdade sem alterar o resultado. Essa atividade demandou o mesmo tempo que a primeira atividade, por ser de redescoberta, com observações e conclusões.

A atividade 4 foi a que demandou mais tempo e a que os estudantes apresentaram mais dificuldades no seu desenvolvimento. Nela os discentes tinham que responder a 6 itens interrogativos para cada questão, dentre as quais deveriam elaborar a sentença de modelação, determinar a operação e realizar o cálculo, após isso preencher um quadro em que os discentes descreviam o cálculo e a operação realizada na resolução de cada sentença. E no final foi proposto para fazerem observações e conclusões.

Na atividade 5 os alunos tinham que praticar a resolução de problemas multiplicativos sem a presença de itens interrogativos, mas sem o preenchimento do quadro e sem a proposição de observações e conclusões. Isso influenciou na menor demanda de tempo para realização.

A atividade 6 era composta por questões com a presença de itens interrogativos, e continha problemas sobre agrupamentos de elementos, onde os alunos deviam descobrir uma relação entre a quantidade de agrupamentos de elementos, a quantidade de elementos por agrupamentos e o total de elementos.

A atividade 7 era uma atividade de aprofundamento que apresentava somente questões específicas de agrupamento de elementos, onde o aluno exercitaria essa relação com a resolução de dez questões.

Para a atividade 8, composta por questões específicas de pagamentos em prestações, foi necessário a utilização de mais tempo comparada à atividade anterior, pois contava com a presença de valores monetários em seu contexto de formulação e com o preenchimento do quadro no final da atividade, assim como a proposição de observações e conclusões.

A atividade 9 era composta de dez questões, uma atividade de aprofundamento que apresentava somente questões de pagamentos em prestações, onde o aluno exercitaria essa relação com a resolução da atividade. Teve conclusão em um tempo menor que o atividade anterior.

Na atividade 10, os alunos deviam descobrir uma relação entre as linhas e as colunas de um retângulo com o total de quadrinhos que formavam o mesmo. Era uma atividade de redescoberta. Mesmo com o preenchimento do quadro e a formulação das observações e conclusões, os alunos utilizaram menos tempo para o término da atividade.

A atividade 11 era uma atividade de aprofundamento, de fixação, que apresentava somente questões específicas com ideia de configuração retangular, onde o aluno exercitaria a relação entre linhas, colunas e o total de quadrinhos.

Para a atividade 12, os alunos utilizaram mais tempo na conclusão da mesma. Por se tratar de uma atividade de redescoberta composta de problemas multiplicativos contendo o Princípio Fundamental da Contagem, com itens interrogativos, com um quadro resumo no final da atividade, bem como com a proposição das observações e conclusões.

A atividade 13, por mais que se tratasse de uma atividade de aprofundamento, os alunos precisaram de quase o mesmo tempo utilizado para a conclusão da atividade anterior. Apresentava dez questões contendo o Princípio Fundamental da Contagem.

Para a atividade 14, composta de dez questões contendo problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários, os discentes utilizaram oitenta minutos na sua conclusão, mesmo sem o preenchimento do quadro e sem a proposição de observações e conclusões.

A atividade 15 era composta de dez questões contendo problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários. Os discentes utilizaram menos tempo para a sua conclusão, em relação a atividade anterior. A atividade 15 não continha o preenchimento do quadro e nem a proposição de observações e conclusões.

Antes da atividade 1, realizamos a aplicação do questionário socioeducacional e do pré-teste. Após a atividade 15, no encontro seguinte, aplicamos o pós-teste. O pré-teste continha 12 questões específicas de problemas multiplicativos, e foi realizado com quase o dobro do tempo do pós-teste que era composto com as mesmas questões do pré-teste.

5.2.1 Encontro I

Em 30 de agosto de 2023, no horário das 11h 00min às 12h 30min, iniciamos a primeira etapa de instrução com a aplicação de um questionário socioeducacional e o pré-teste. Este questionário consiste em uma série de perguntas destinadas a uma abundância de dados relacionados à idade, gênero, nível de escolaridade dos responsáveis, métodos de estudo, camada com a disciplina de matemática, desempenho em matemática, bem como a abordagem usada nas aulas e à capacidade de matemática resolver problemas.

Após esta conversa inicial, nos apresentamos aos discentes como professora de matemática e estávamos realizando uma pesquisa em nível de mestrado pela Universidade do Estado do Pará. Evidenciamos a importância e a seriedade da pesquisa e a participação e colaboração de cada aluno para que obtivéssemos êxito na execução da mesma. Explicamos que se tratava de uma pesquisa sobre resolução de problemas multiplicativos envolvendo os números naturais e que para a participação deles seria necessária à autorização dos responsáveis, por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A).

Conversamos com os alunos sobre a maneira pela qual conduziríamos as aulas e explicamos que algumas atividades seriam executadas em equipes, enquanto outras seriam realizadas individualmente. Além disso, comunicamos que seriam realizados testes antes e após o experimento.

Após o término da aplicação do questionário de pesquisa sobre as informações socioeducacionais dos estudantes, os mesmos foram submetidos ao pré-teste de nossa pesquisa, que continha 12 problemas multiplicativos com diversas formulações de ideias multiplicativas e teve como objetivo identificar os conhecimentos prévios que os educandos possuíam sobre o assunto abordado.

Realizamos a distribuição do teste a todos os 33 estudantes presentes e devido à idade dos alunos, optamos por ler em voz alta este questionário, deixando um intervalo de tempo para que os alunos respondessem. Como era previsto surgiram vários questionamentos sobre as operações que deveriam ser utilizadas na resolução dos problemas. Neste momento tivemos que intervir e orientá-los que deveriam resolvê-lo de acordo com os seus conhecimentos e esclarecemos que nos próximos encontros iríamos estudar o conteúdo abordado no teste. Os estudantes ficaram mais tranquilos e deram prosseguimento a resolução desse instrumento de pesquisa.

Durante a realização do pré-teste não foi permitido o uso da calculadora ou de qualquer outro tipo de recurso didático.

Desta atividade participaram 33 alunos, entretanto utilizamos apenas as informações dos discentes que participaram do pré-teste e pós-teste, esta sessão durou cerca de 90 minutos. Para que todos os grupos finalizassem a atividade foram necessários 80 minutos, de 11h00min a 12h20min. Os resultados do questionário socioeducacional estão dispostos a seguir.

5.2.1.1 Perfil dos discentes

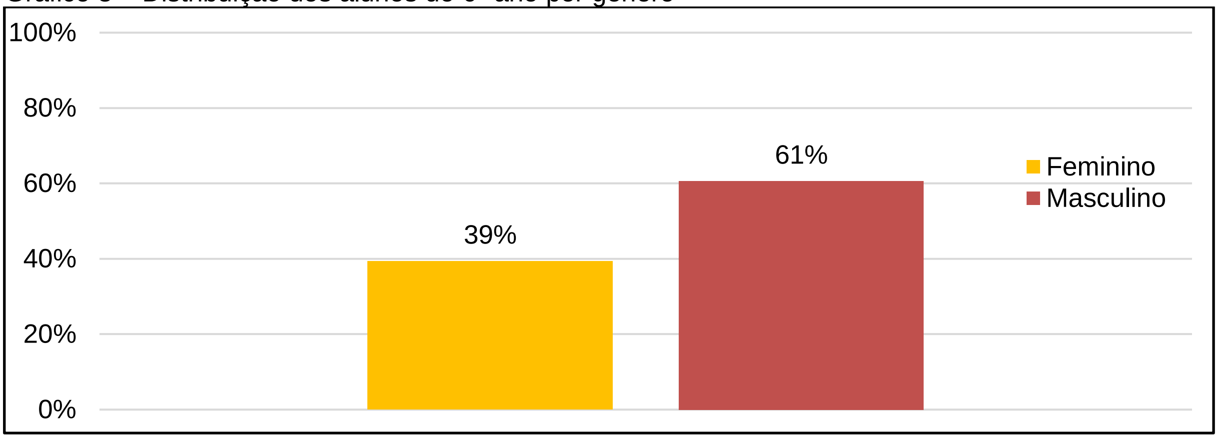
Com a finalidade de identificarmos o perfil socioeconômico dos discentes da turma em que ocorreu o experimento, a relação destes com a matemática e o assunto abordado, aplicamos um questionário composto de 22 perguntas, aos 33 alunos da turma do 6º ano. A sistematização dos resultados gerou o seguinte perfil dos discente:

Tabela 1 – Distribuição dos alunos do 6º ano por gênero

Gênero	**Quantidade de alunos**	%
Feminino	13	39%
Masculino	20	61%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 3 – Distribuição dos alunos do 6º ano por gênero



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

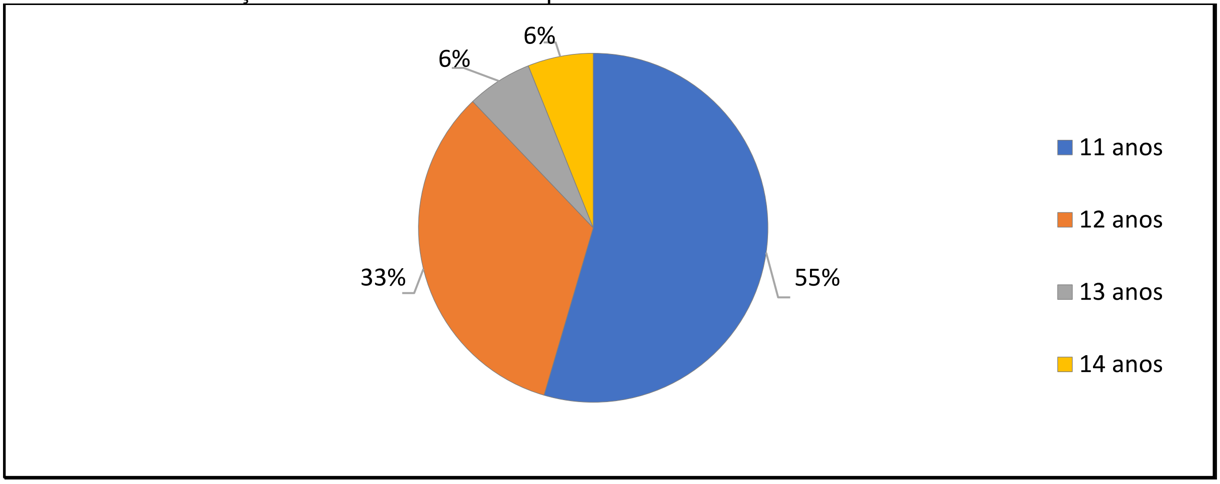
A diferença entre o número de alunos por gênero é bem significante, havendo uma predominância de alunos do sexo masculino. A seguir apresentamos a distribuição dos estudantes por idade.

Tabela 2 – Distribuição dos alunos do 6º ano por idade

Idade	Quantidade de alunos	%
11 anos	18	55%
12 anos	11	33%
13 anos	2	6%
14 anos	2	6%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 4 – Distribuição dos alunos do 6º ano por idade



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

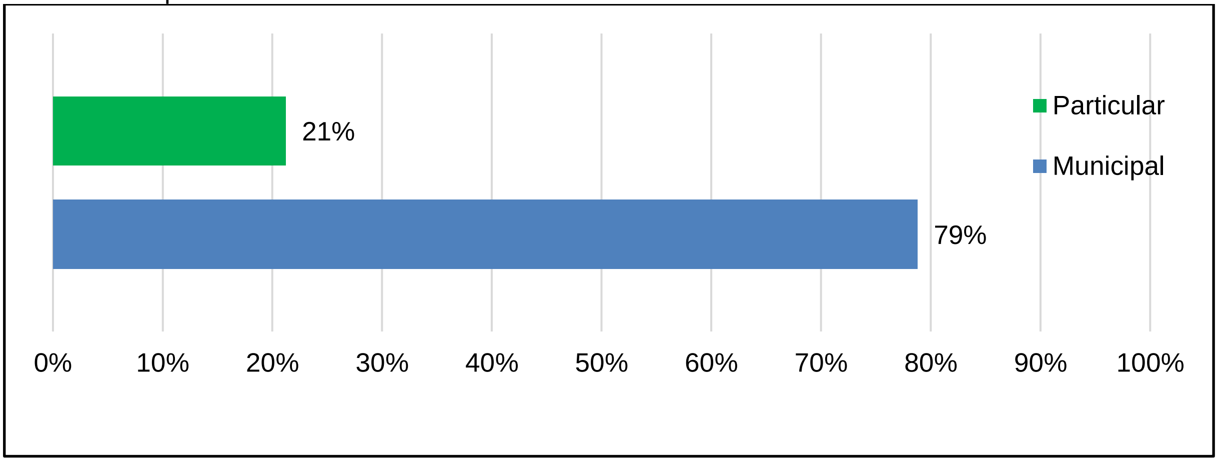
Levando em consideração a idade de início do ensino fundamental que é de 6 anos de idade de acordo com a Lei nº 11.274, os dados acima mostram que esses alunos não apresentam distorção idade-série, pois a maioria deles, 55%, possuem 11 anos de idade. A seguir veremos em qual tipo de escola os alunos frequentaram no ano anterior.

Tabela 3 – Tipo de escola do ano anterior

Tipo de escola do ano anterior	Quantidade de alunos	%
Municipal	26	79%
Particular	7	21%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 5 – Tipo de escola do ano anterior



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

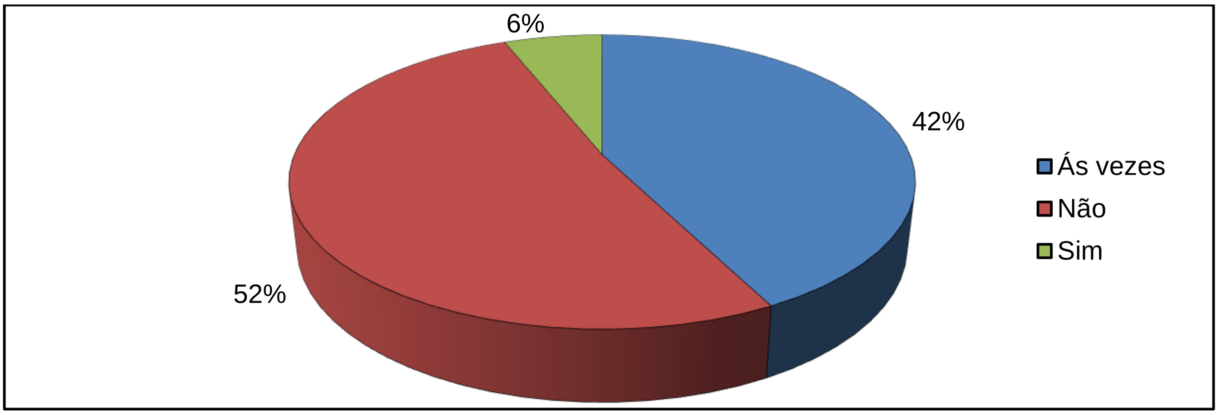
Os dados anteriores mostram que 79% dos alunos cursaram o 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal. Para Silva (2015) todos os estudantes cursaram o 5º o ano em uma escola pública, desta forma esses dados estão de acordo com a nossa pesquisa. A seguir veremos o índice de alunos que trabalha de forma remunerada.

Tabela 4 – Exercício de atividade remunerada

Trabalha de forma remunerada	Quantidade de alunos	%
Às vezes	14	42%
Não	17	52%
Sim	2	6%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 6 – Exercício de atividade remunerada



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

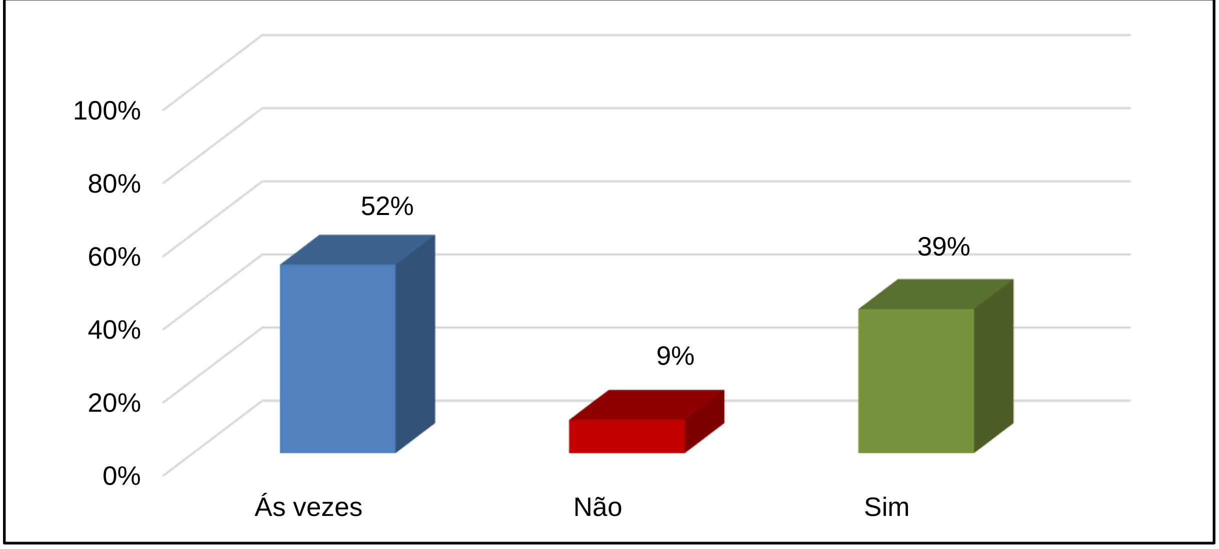
Os dados anteriores indicam que a maioria dos estudantes, correspondendo a 52% da amostra, não está envolvida em atividades remuneradas. No entanto, é importante destacar que uma parcela significativa, equivalente a 42% dos alunos, ocasionalmente realizam algum tipo de trabalho remunerado. Esse número contraria o artigo 60 do Estatuto da Criança e do Adolescente, que estabelece que o trabalho remunerado só é permitido para menores a partir de quatorze anos, na condição de aprendizes. Uma vez que os participantes da pesquisa estejam na faixa etária de 11 a 13 anos, eles não deveriam, em nenhuma circunstância, estar envolvidos em atividades de trabalho. A seguir, apresentaremos os dados relativos aos hábitos de compra.

Tabela 5 – Hábito de fazer compras

Hábito de fazer compras	**Quantidade de alunos**	**%**
Às vezes	17	52%
Não	3	9%
Sim	13	39%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 7 – Hábito de fazer compras



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Os resultados anteriores indicam que a maioria dos alunos, representando 91% da amostra, ocasional ou com frequência tem o costume de fazer compras. Este número é menor em comparação com os dados encontrados nos estudos de Santos (2017) e Silva (2015), que registrou, respectivamente, percentuais de 96% e 89,96% em relação à prática de fazer compras. O hábito de realizar compras pode ser de relevância, visto que os estudantes têm a oportunidade de lidar com dinheiro e possivelmente realizar operações de multiplicação e divisão, o que pode facilitar a realização das atividades durante a implementação da sequência didática.

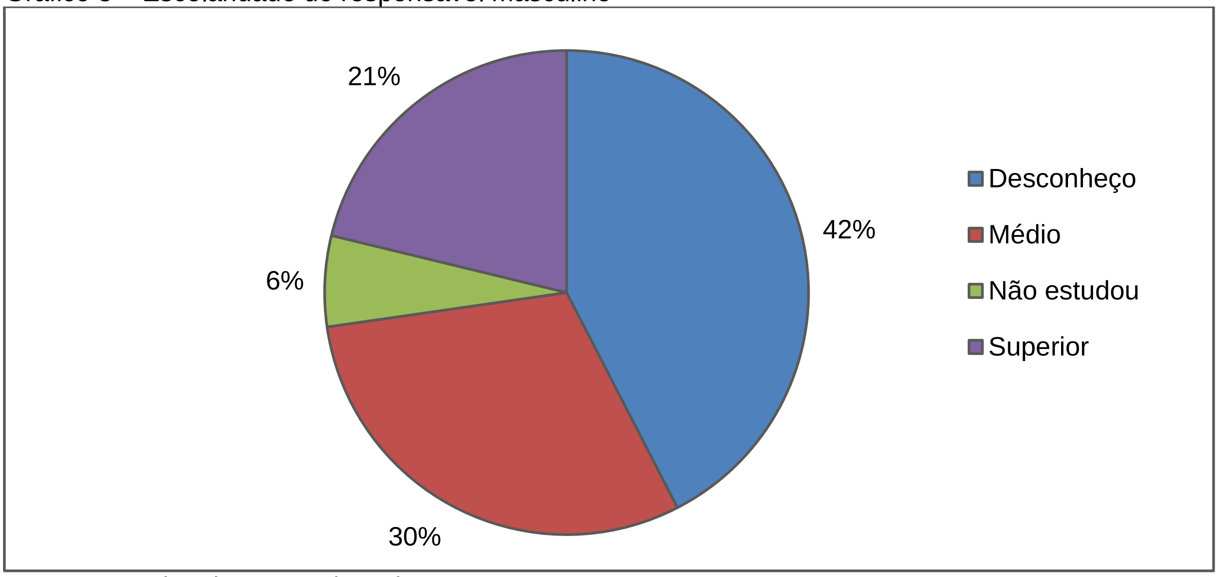
A seguir apresentamos o grau de escolaridade do responsável masculino dos participantes da pesquisa.

Tabela 6 – Escolaridade do responsável masculino

Escolaridade do responsável masculino	**Quantidade de alunos**	**%**
Desconheço	14	42%
Médio	10	30%
Não estudou	2	6%
Superior	7	21%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 8 – Escolaridade do responsável masculino



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

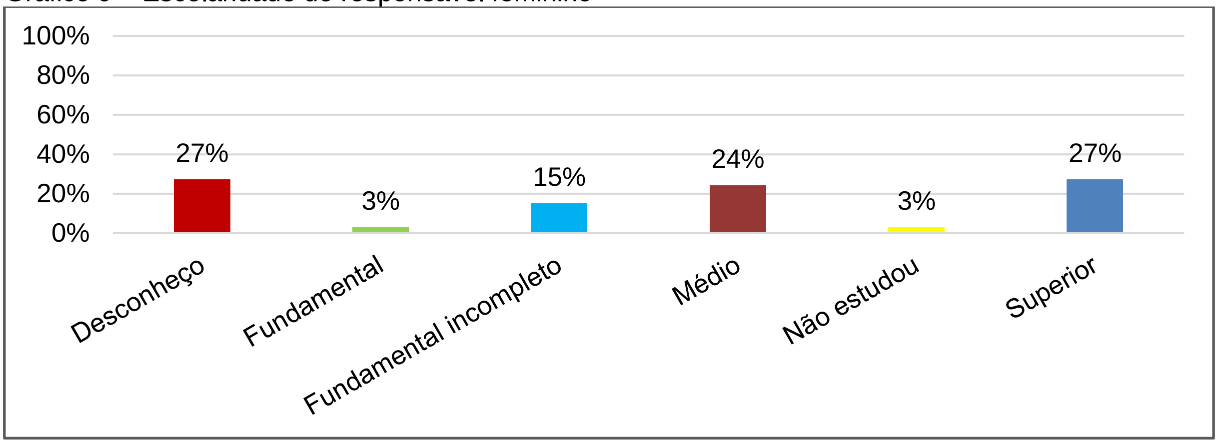
Os dados anteriores indicam que 30% dos responsáveis do sexo masculino finalizaram o Ensino Médio, com um destaque para 21% que concluíram o Ensino Superior. Esses resultados são mais elevados do que os de Santos (2017), que registrou 22% dos responsáveis do sexo masculino com nível médio e 7% com nível superior. A seguir, fornecemos informações sobre a educação das responsáveis do sexo feminino.

Tabela 7 – Escolaridade do responsável feminino

Escolaridade do responsável feminino	**Quantidade de alunos**	**%**
Desconheço	9	27%
Fundamental	1	3%
Fundamental incompleto	5	15%
Médio	8	24%
Não estudou	1	3%
Superior	9	27%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 9 – Escolaridade do responsável feminino



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

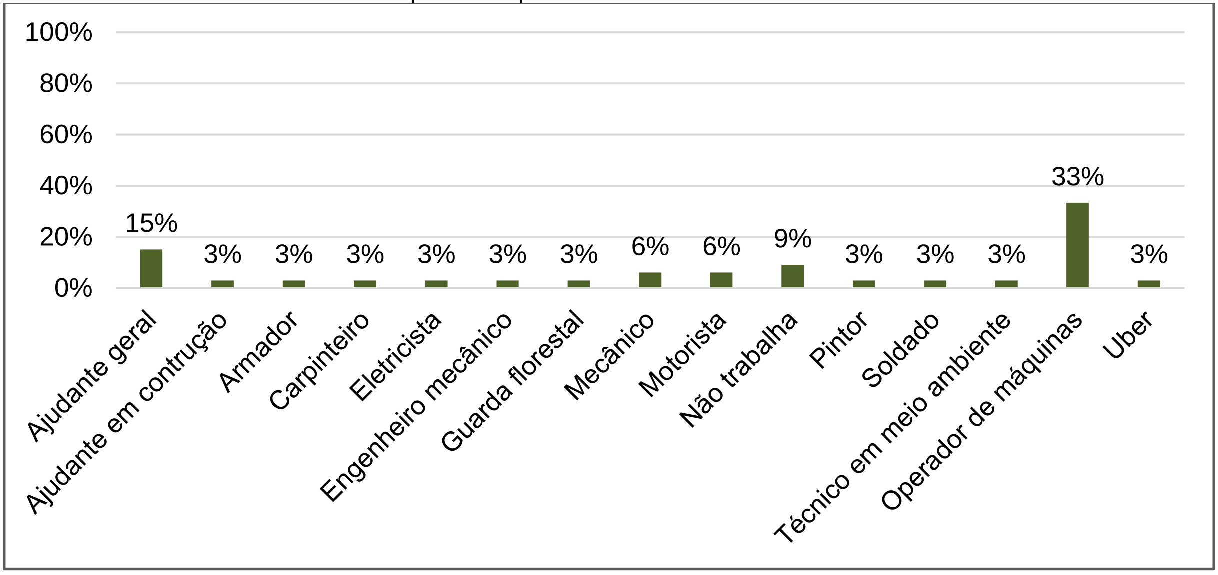
As informações anteriores evidenciam que 24% dos responsáveis do sexo feminino finalizaram o Ensino Médio, com 27% deles completando o ensino superior. Esses resultados diferem dos de Santos (2017), que registrou 29% dos responsáveis do sexo feminino com nível médio e 9% com nível superior. A seguir, apresentamos as ocupações desempenhadas pelos responsáveis do sexo masculino.

Tabela 8 – Profissões exercidas pelos responsáveis masculinos

Profissão do responsável masculino	Quantidade de alunos	%
Ajudante geral	5	15%
Ajudante em construção	1	3%
Armador	1	3%
Carpinteiro	1	3%
Eletricista	1	3%
Engenheiro mecânico	1	3%
Guarda florestal	1	3%
Mecânico	2	6%
Motorista	2	6%
Não trabalha	3	9%
Pintor	1	3%
Soldado	1	3%
Técnico em meio ambiente	1	3%
Operador de máquinas	11	33%
Uber	1	3%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 10 – Profissões exercidas pelos responsáveis masculinos



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

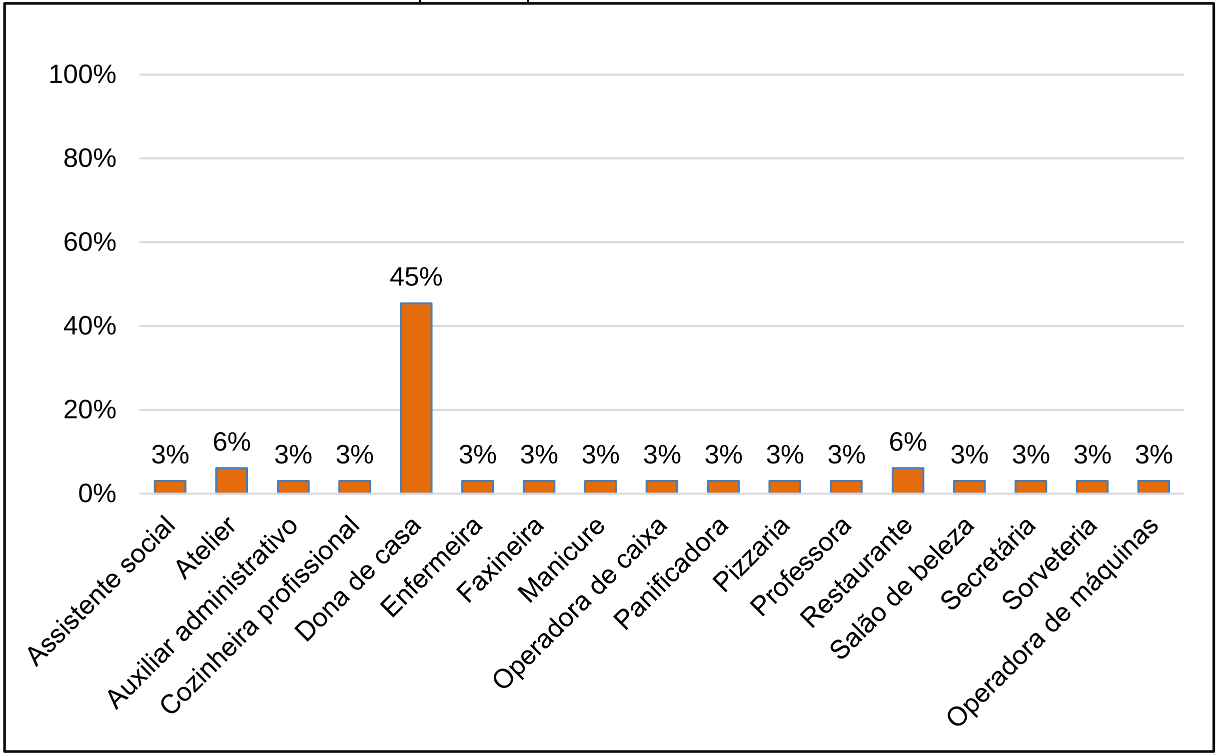
As informações acima indicam que os responsáveis do sexo masculino dos participantes da pesquisa predominantemente desempenham ocupações informais e autônomas, o que está em consonância com os resultados encontrados na pesquisa de Santos (2017), na qual a maioria das profissões dos responsáveis masculinos dos alunos da amostra também eram caracterizadas como informais e autônomas. A seguir, fornecemos informações sobre as profissões das responsáveis do sexo feminino.

Tabela 9 – Profissões exercidas pelos responsáveis femininos

Profissão do responsável feminino	Quantidade de alunos	%
Assistente social	1	3%
Atelier	2	6%
Auxiliar administrativo	1	3%
Cozinheira profissional	1	3%
Dona de casa	15	45%
Enfermeira	1	3%
Faxineira	1	3%
Manicure	1	3%
Operadora de caixa	1	3%
Panificadora	1	3%
Pizzaria	1	3%
Professora	1	3%
Restaurante	2	6%
Salão de beleza	1	3%
Secretária	1	3%
Sorveteria	1	3%
Operadora de máquinas	1	3%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 11 – Profissões exercidas pelos responsáveis femininos



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

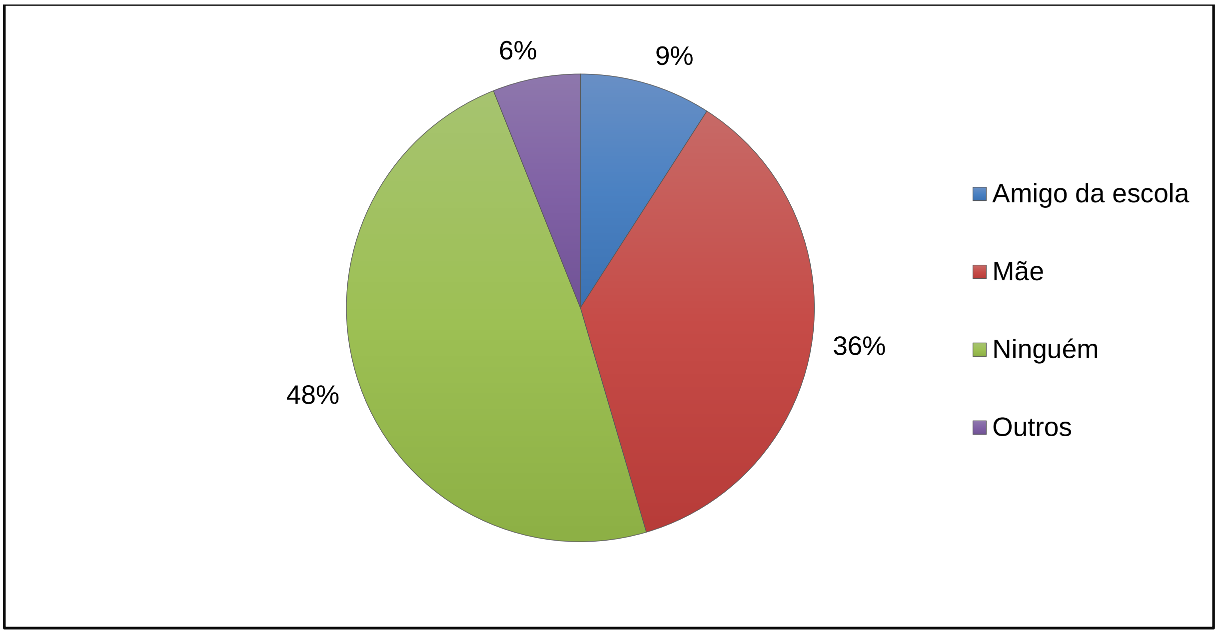
As informações anteriores revelam que a maior parte dos responsáveis femininos, com 45% são donas de casa, o que está em conformidade com os resultados encontrados na pesquisa de Santos (2017), na qual a maioria das responsáveis do sexo feminino dos participantes da amostra, com 40%, também desempenhavam o papel de donas de casa. Os próximos dados se referem a quem presta auxílio aos estudantes nas atividades de matemática.

Tabela 10 – Auxílio nas tarefas de matemática

Ajuda nas tarefas de matemática	**Quantidade de alunos**	**%**
Amigos da escola	3	9%
Mãe	12	36%
Ninguém	16	48%
Outros	2	6%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 12 – Auxílio nas tarefas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

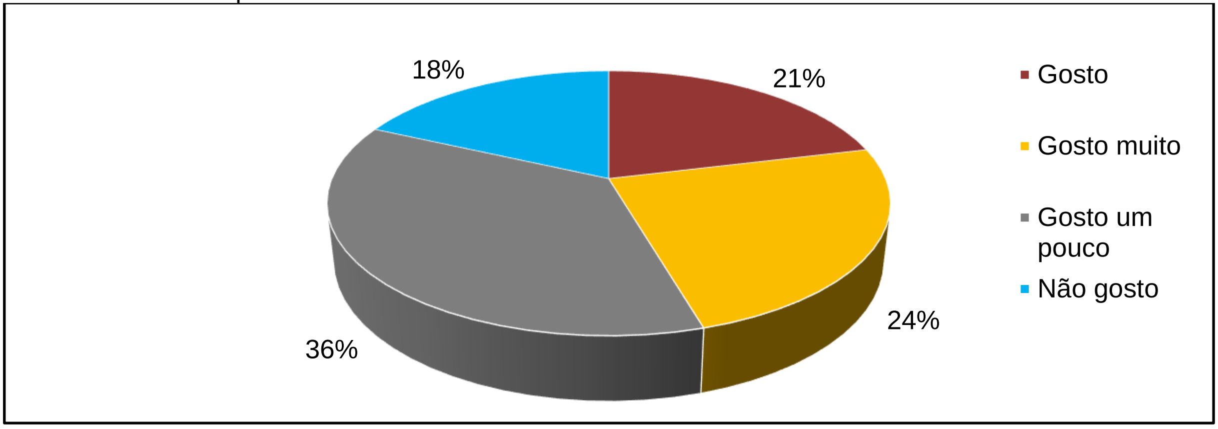
O resultado anterior nos informa que a maioria dos estudantes não recebem auxílio de ninguém para a realização das tarefas de matemática, sendo um valor de 48% deles e 36% recebem auxílio somente da mãe. Esse resultado é menor do que os encontrados no estudo de Silva (2015) e maior do que os da pesquisa de Santos (2017), que registraram, respectivamente, percentuais de 82,61% e 20% para os alunos que recebem ajuda dos pais nas tarefas de matemática. A seguir, enfatizamos se os estudantes têm interesse em estudar matemática.

Tabela 11 – Gosto pela matemática

Gosta de estudar matemática	**Quantidade de alunos**	**%**
Gosto	7	21%
Gosto muito	8	24%
Gosto um pouco	12	36%
Não gosto	6	18%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 13 – Gosto pela matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

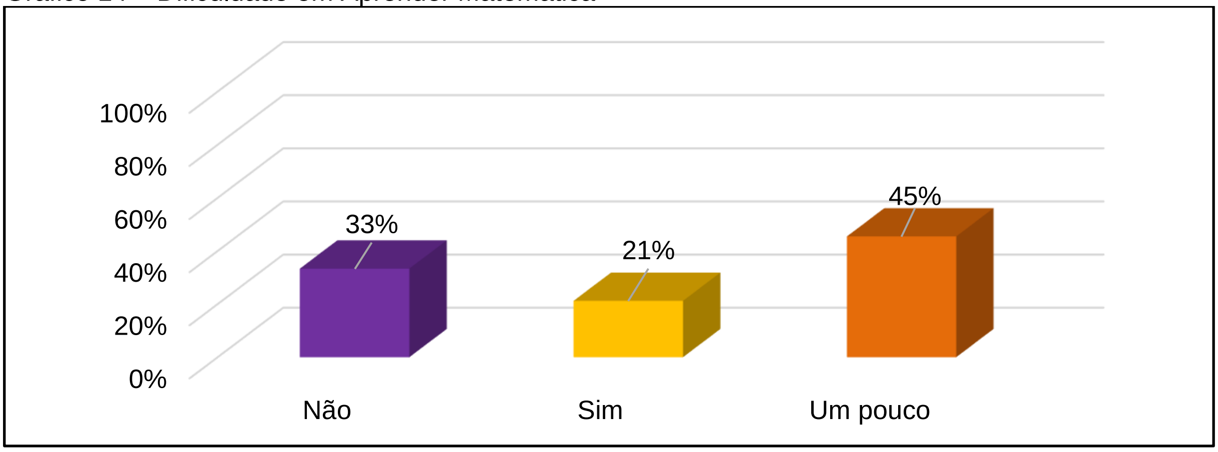
As informações anteriores indicam que a maioria dos alunos examinados, correspondendo a 45%, tem uma afinidade com a matemática, sendo que dentro desse grupo, 24% afirmam gostar muito da disciplina, enquanto 21% afirmam gostar da mesma. Esses resultados divergem dos encontrados por Santos (2017), que relatou que 60% dos examinados tinham pouco interesse pela matéria. A seguir, apresentamos os dados relativos à dificuldade em aprender matemática.

Tabela 12 – Dificuldade em Aprender Matemática

Dificuldade em aprender matemática	Quantidade de alunos	%
Não	11	33%
Sim	7	21%
Um pouco	15	45%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 14 – Dificuldade em Aprender Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

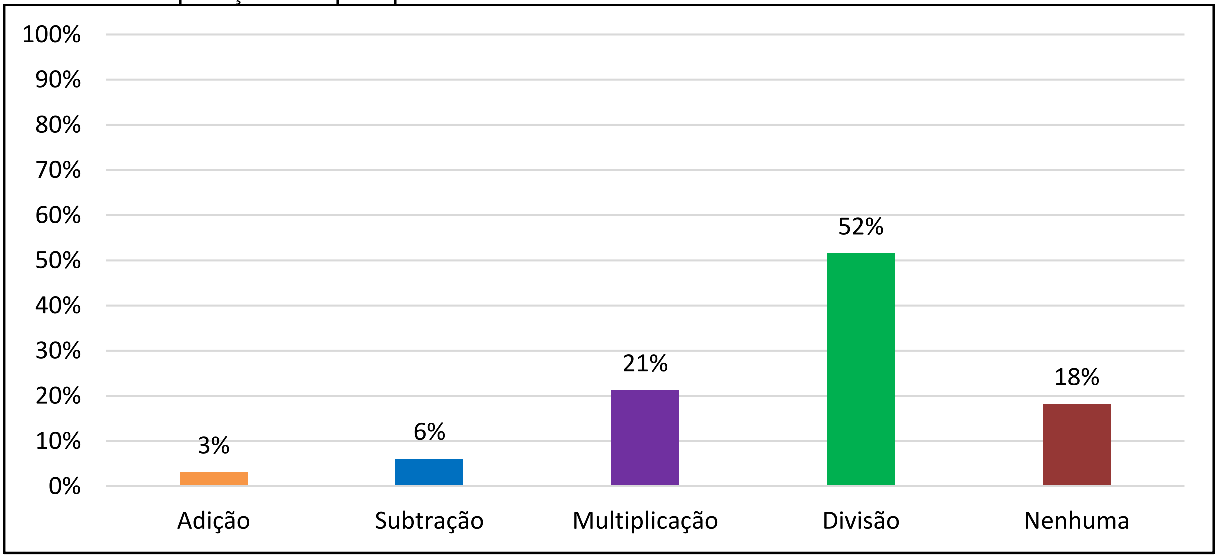
Em relação à aprendizagem da matemática, a maioria dos estudantes, representando 66% da amostra, afirmou enfrentar desafios significativos ao compreender os conceitos dessa disciplina. Essas estatísticas corroboram com os resultados de uma pesquisa realizada por Santos (2017), na qual a maioria dos alunos, equivalente a 72%, indicou ter alguma dificuldade no processo de aprendizagem da matemática. Nossa intenção é identificar as áreas específicas em que os alunos encontram dificuldades durante a fase de experimentação. Na continuidade, apresentamos os dados relacionados à operação matemática em que os discentes enfrentam mais obstáculos.

Tabela 13 – Operação em que apresenta mais dificuldades

Operações	**Quantidade de alunos**	**%**
Adição	1	3%
Subtração	2	6%
Multiplicação	7	21%
Divisão	17	52%
Nenhuma	6	18%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 15 – Operação em que apresenta mais dificuldades



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

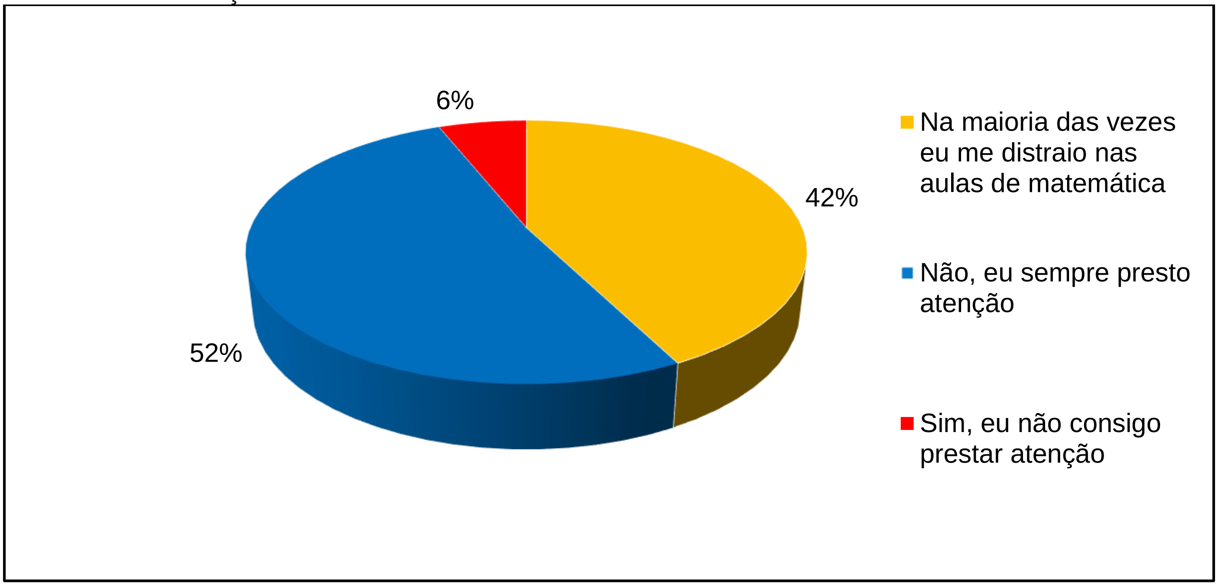
As informações anteriores evidenciaram que a divisão é a operação matemática na qual os estudantes participantes da pesquisa enfrentam as maiores dificuldades, com uma taxa de 52%. Em seguida, a multiplicação é mencionada como a segunda operação mais desafiadora, com uma taxa de 21%. Estes resultados estão em consonância com as descobertas do estudo de Santos (2017), que também destacaram as dificuldades predominantes dos alunos na operação de divisão com 65,7%, enquanto as dificuldades na multiplicação foram menos pronunciadas com 11,4%. A seguir apresentamos os dados relacionados à falta de concentração durante as aulas de matemática.

Tabela 14 – Distração durante as aulas de matemática

Distração nas aulas de matemática	**Quantidade de alunos**	**%**
Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática	14	42%
Não, eu sempre presto atenção	17	52%
Sim, eu não consigo prestar atenção	2	6%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 16 – Distração durante as aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

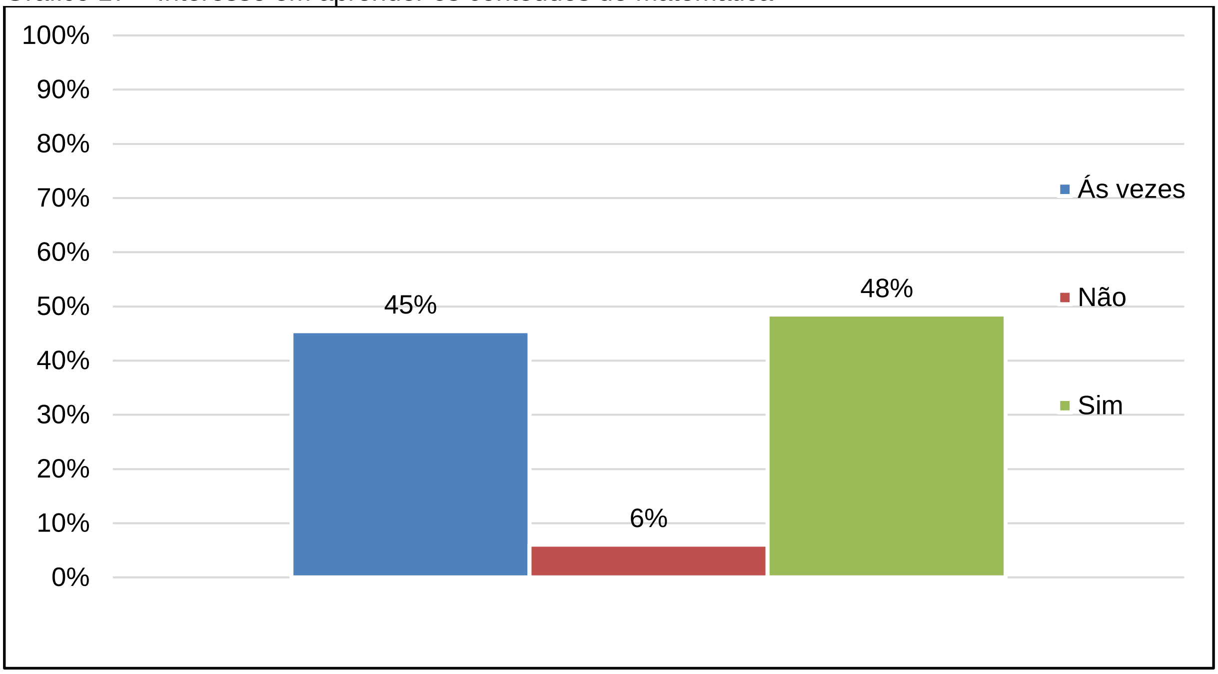
Os resultados mencionados acima indicam que uma parcela significativa dos estudantes, correspondendo a 48%, enfrenta dificuldades para manter a concentração durante as aulas de matemática. Estas descobertas coincidem com os resultados da pesquisa realizada por Santos (2017), na qual 64% dos alunos afirmaram que se distraem nas aulas de matemática. A seguir, apresentaremos os dados relacionados à capacidade das aulas de matemática em despertar o interesse dos alunos pelo aprendizado dos conteúdos ministrados.

Tabela 15 – Interesse em aprender os conteúdos de matemática

Aulas de matemática despertam o interesse em aprender os conteúdos	**Quantidade de alunos**	**%**
Às vezes	15	45%
Não	2	6%
Sim	16	48%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 17 – Interesse em aprender os conteúdos de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

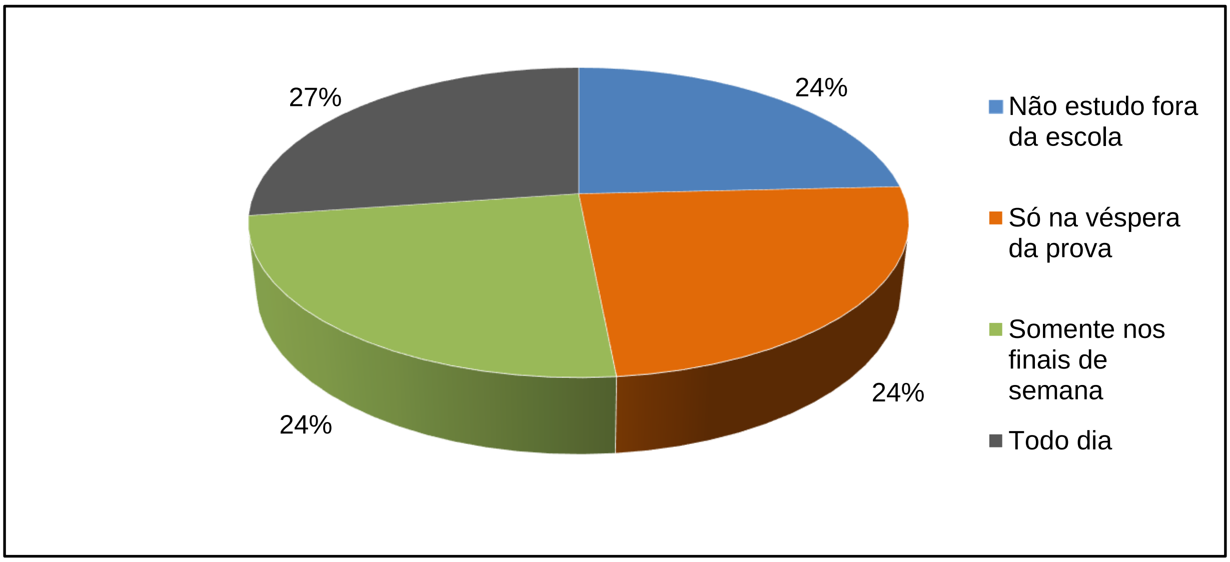
Conforme os resultados divulgados, observamos que a maior parte dos alunos demonstra interesse em aprender os conteúdos nas aulas de matemática. Acreditamos que esse resultado terá impacto positivo no desempenho das atividades e testes durante a fase experimental. Agora, passamos a apresentar as informações sobre os hábitos de estudo adotados pelos alunos fora do ambiente escolar.

Tabela 16 – Hábitos de estudo fora da escola

Hábitos de estudo fora da escola	**Quantidade de Alunos**	**%**
Não estudo fora da escola	8	24%
Só na véspera da prova	8	24%
Somente nos finais de semana	8	24%
Todo dia	9	27%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 18 – Hábitos de estudo fora da escola



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

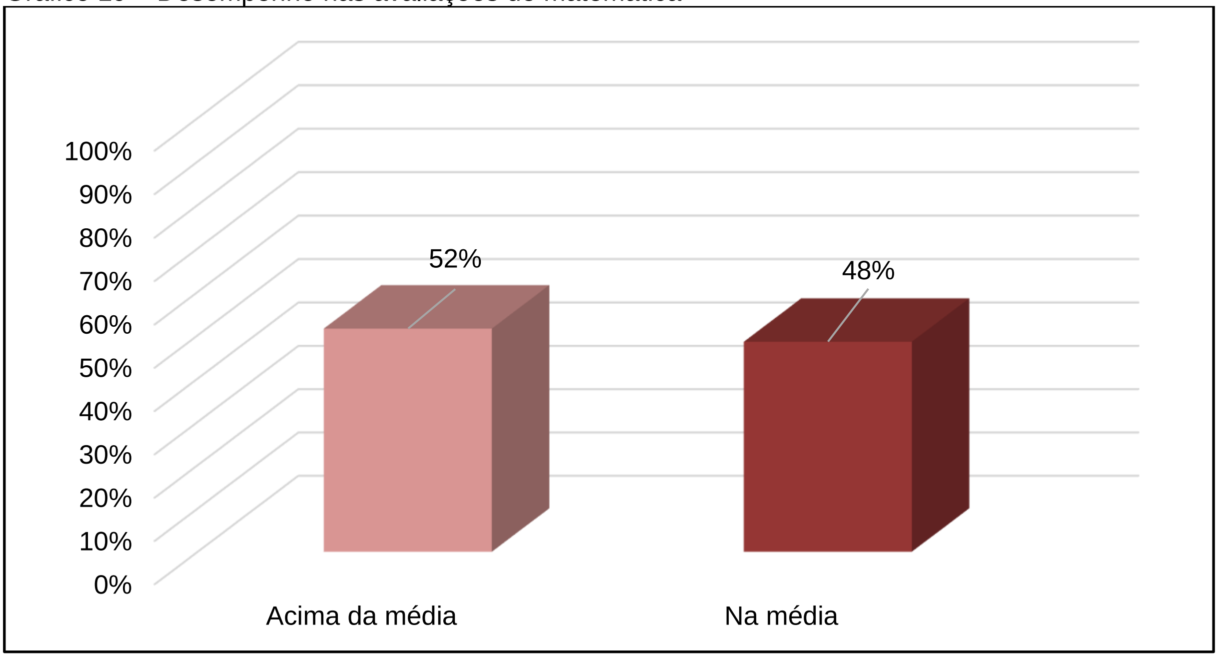
De acordo com as informações anteriores, uma parcela dos alunos, representando 24%, revelou que têm o hábito de estudar matemática fora da escola apenas na véspera das provas. Outros 24% afirmaram estudar matemática somente nos finais de semana, enquanto 5,56% presumiam não estudar matemática fora da escola, e 27% afirmaram que estudam matemática todos os dias. Estes resultados coincidem com os dados da pesquisa de Santos (2017), na qual 23% dos participantes afirmaram estudar matemática em períodos próximos às provas bimestrais. A seguir apresentamos os resultados dos alunos nas avaliações de matemática, levando em consideração as conquistas que eles alcançaram nessa matéria.

Tabela 17 – Desempenho nas avaliações de matemática

Notas em matemática	**Quantidade de Alunos**	**%**
Acima da média	17	52%
Na média	16	48%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 19 – Desempenho nas avaliações de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

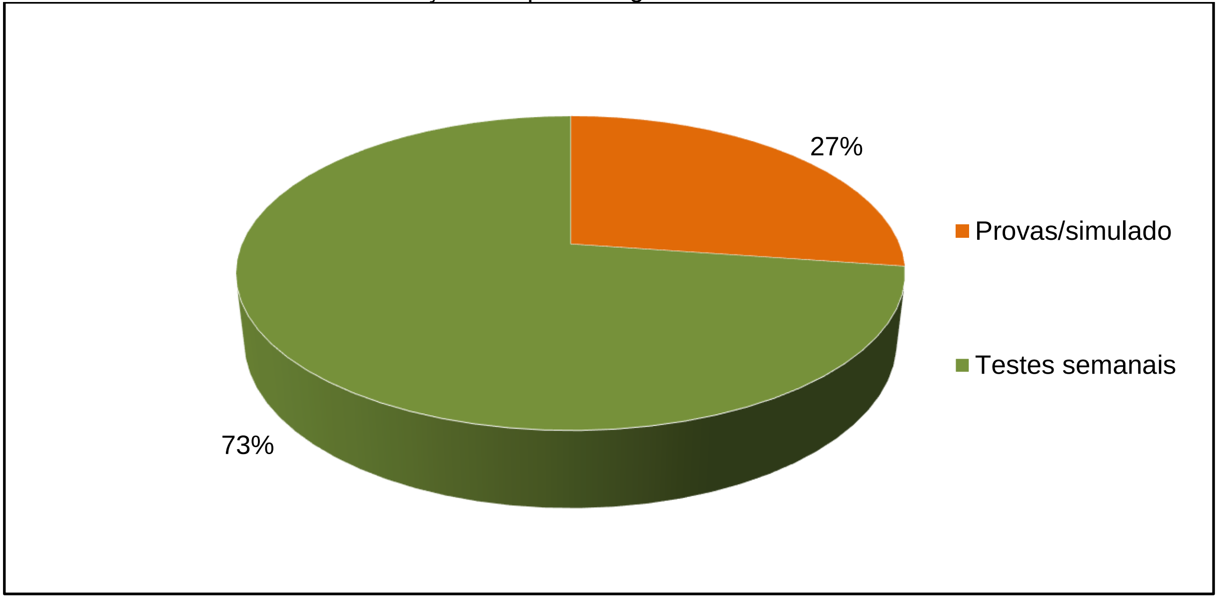
As informações anteriores revelam que a maior parte dos alunos, equivalente a 52%, alcança resultados que estão acima da média e 48% dos alunos possem notas na média em matemática, o que está em conformidade com os resultados da pesquisa realizada por Santos (2017), na qual a maioria dos estudantes, representando 77,1%, relataram notas que se situam acima da média em matemática. A seguir apresentamos as formas que o professor(a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem.

Tabela 18 – Instrumentos de avaliação da aprendizagem

Instrumentos de avaliação da aprendizagem	**Quantidade de Alunos**	**%**
Provas/simulado	9	27%
Testes semanais	24	73%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 20 – Instrumentos de avaliação da aprendizagem



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

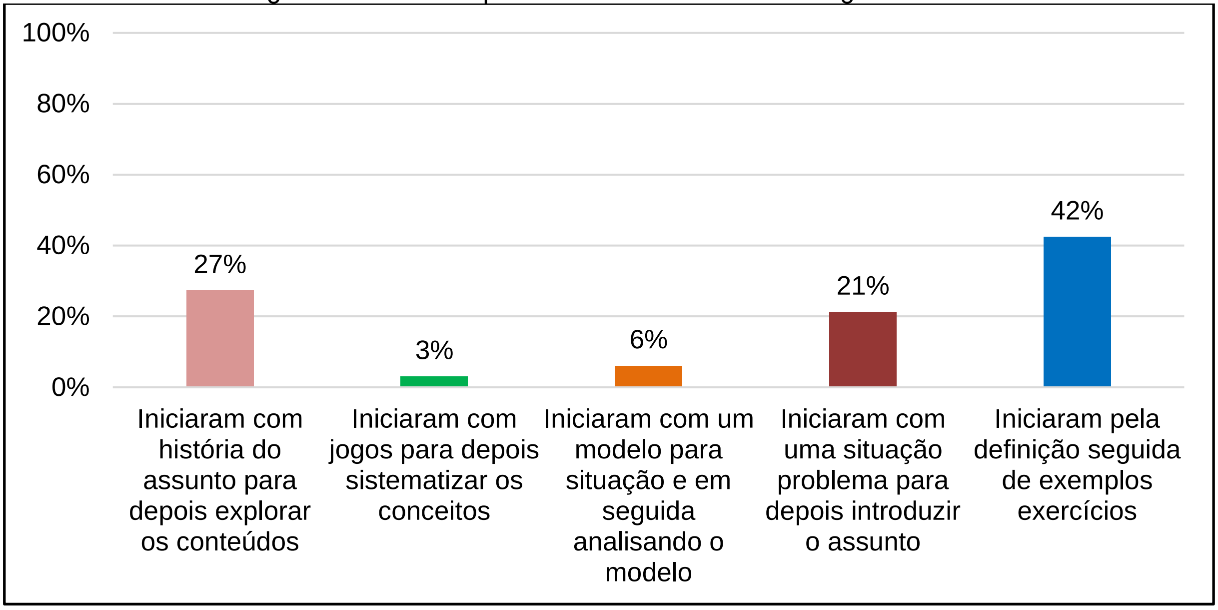
As informações acima indicam que a maioria expressiva, correspondendo a 73%, dos métodos empregados para avaliar a aprendizagem consistem em testes semanais e 27% representam provas/simulados, o que reflete uma abordagem predominantemente tradicional na avaliação. A seguir, apresentamos os dados relacionados à percepção dos alunos sobre a forma como os professores conduzem a maioria das aulas de matemática.

Tabela 19 – Metodologia de ensino dos professores de matemática segundo os discentes

Métodos	**Quantidade de Alunos**	**%**
Iniciaram com história do assunto para depois explorar os conteúdos	9	27%
Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos	1	3%
Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo	2	6%
Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto	7	21%
Iniciaram pela definição seguida de exemplos exercícios	14	42%
Total geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 21 – Metodologia de ensino dos professores de matemática segundo os discentes



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

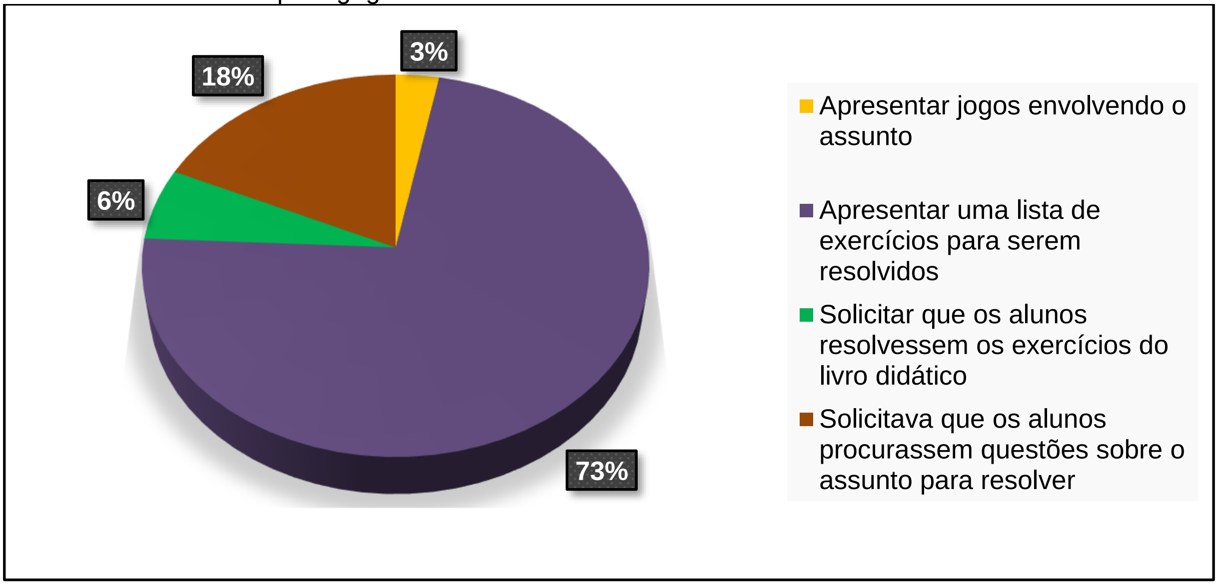
Quanto às abordagens pelos professores em suas aulas, a maioria dos alunos, representando 42%, afirmam que os professores começaram com a definição seguida de exemplos e exercícios. É importante ressaltar que apenas 21% dos professores iniciam suas aulas com uma situação-problema antes de introduzir o conteúdo. A seguir apresentamos os recursos pedagógicos utilizados pelos professores para auxiliar na assimilação dos conteúdos matemáticos.

Tabela 20 – Recursos pedagógicos

Recursos pedagógicos utilizados nas aulas de matemática	Quantidade de alunos	%
Apresentar jogos envolvendo o assunto	1	3%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	24	73%
Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático	2	6%
Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver	6	18%
Total Geral	**33**	**100%**

Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Gráfico 22 – Recursos pedagógicos



Fonte: Pesquisa de campo (2023)

Quanto aos meios educacionais empregados pelos professores para consolidar o conteúdo, é evidente que a abordagem predominante é a resolução de questões relacionadas ao tópico em discussão. Nesse sentido, 73% dos recursos pedagógicos utilizados consistem em listas de exercícios fornecidos pelos professores, enquanto 6% são constituídos por questões retiradas do livro didático, 18% envolvem questões pesquisadas pelos próprios alunos, a pedido dos professores e somente 3% utilizam jogos para fixação do conteúdo.

5.2.2 Encontro II

A realização do encontro II (dois) ocorreu no dia 05 de setembro de 2023, com a aplicação da primeira atividade de aprendizagem da sequência didática: Atividade 1 (Multiplicação na igualdade). Neste momento propusemos que a turma composta de 27 alunos fosse organizada em 11 (onze) equipes de três e quatro alunos cada. Os grupos foram nomeados como G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10 e G11; já os discentes de cada equipe de D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31} e D_{32}. Este encontro teve duração de uma hora e trinta minutos, das 11h00min às 12h30min e contou com participação dos 33 alunos da turma. Em seguida entregamos a cópia da primeira atividade a cada grupo, solicitando que fizessem uma leitura inicial da atividade e nos colocamos a disposição para esclarecer possíveis dúvidas sobre a resolução.

A primeira atividade teve como objetivo conduzir os estudantes a descobrirem quando por meio da multiplicação uma igualdade permanece verdadeira. Ela foi formada por um quadro com 13 situações que atribuíam diferentes valores para a, b, c, d e os estudantes deveriam verificar se as igualdades a = b e a x c = b x d eram verdadeiras ou falsas.

Para que todos os grupos finalizassem a atividade foram necessários 70 minutos, de 11h00min a 12h10min. Pelo fato de já terem tido contato anteriormente com duas atividades semelhantes a essa (de adição e subtração), pois tinham feito parte da aplicação de uma sequência didática para essas duas operações, eles não apresentaram muitas dificuldades no preenchimento do quadro, no entanto apenas o preenchimento do quadro não foi suficiente para que todos os grupos fossem capazes de identificar as regularidades presentes em cada situação, tivemos que realizar alguns exemplos no quadro branco de como deveriam proceder no preenchimento.

Após todos os grupos terem terminado e entregue a atividade 1, fizemos a socialização no quadro branco do quadro de registro da atividade preenchido e das conclusões registradas pelos grupos no final da resolução.

A seguir apresentamos o quadro 33 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 1.

Quadro 33 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 1

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	Uma igualdade permanece verdadeira quando multiplicamos os dois lados por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G2	Descobrimos que a igualdade continua verdadeira quando multiplicamos os dois lados da igualdade por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G3	Para uma igualdade continuar verdadeira, precisamos multiplicar os dois lados do sinal de igual por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G4	Quando temos uma igualdade, se multiplicamos os dois lados pelo mesmo valor, ela continua verdade.	Válida, prevista e desejada
G5	É verdadeira porque os números são iguais e não deu certo porque era números diferentes.	Válida, prevista e não desejada
G6	Uma igualdade permanece verdadeira se multiplicamos os dois lados pelos mesmos números.	Válida, prevista e desejada
G7	A igualdade é verdadeira quando os números multiplicados são iguais nos dois lados da igualdade.	Invalida, não prevista e não desejada
G8	Observamos que a igualdade continua verdadeira quando multiplicamos os dois lados da igualdade por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G9	Um valor é verdadeiro quando os números são iguais.	Invalida, não prevista e não desejada
G10	Quando os números são iguais A = 2 e B = 2 é assim que dar certo 2 x 5 = 2 x 5 e assim dar errado 2 x 3 = 2 x 5.	Válida, prevista e não desejada
G11	Quando temos uma igualdade e multiplicamos os dois lados pelo mesmo valor, ela continua verdadeira.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023)

De posse das conclusões de cada grupo fomos ao quadro branco para discuti-las e então chegarmos ao momento da institucionalização, última fase do ensino por atividades, onde levamos os estudantes a compreenderem que uma igualdade só permanece verdadeira quando multiplicamos o mesmo número nos dois lados da igualdade. Deste modo, classificamos a validade de cada conclusão conforme se aproximava ou não da institucionalização da atividade 1, bem como nas demais atividades de redescoberta.

A seguir apresentamos o quadro 34 com as características das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 1.

Quadro 34 – Características das conclusões da atividade 1

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	7	63,64%
Válida, prevista e não desejada	2	18,18%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	2	18,18%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

O quadro 34 revela que 63,64% dos grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida e desejada, dentro de nossas previsões. O mesmo quadro também mostra que 18,18% dos grupos elaboraram conclusões válidas, previstas e não desejadas e que 18,18% dos grupos formularam conclusão Inválida, não prevista e não desejada para esta atividade. Neste sentido foi necessária à nossa intervenção para que o objetivo da atividade fosse alcançado. O quadro 35 indica a validade das conclusões da atividade 1.

Quadro 35 – Validade das conclusões da atividade 1

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	7	63,64%
Parcialmente válida	2	18,18%
Inválida	2	18,18%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Na aplicação da primeira atividade percebemos que os estudantes obtiveram bom desempenho no preenchimento dos quadros, no entanto, além das dificuldades de percepção das regularidades presentes em cada uma, os discentes também apresentaram obstáculos em formalizar verbalmente ou na forma de escrita suas conclusões, registrando-as na maioria das vezes de forma confusa.

5.2.3 Encontro III

No encontro III (três) que ocorreu no dia 06 de setembro de 2023 e teve duração de uma hora e trinta minutos, das 11h00min às 12h30min e contou com participação dos 27 alunos da turma organizados em 11 grupos com três alunos cada. Aplicamos a segunda atividade de aprendizagem da sequência didática: Atividade 2 (Divisão na igualdade) que teve a mesma estrutura da primeira atividade, nossa intenção foi conduzir os estudantes a descobrirem quando por meio da divisão uma igualdade permanece verdadeira. Essa atividade também foi formada por um quadro com 13 situações que atribuíam diferentes valores para a, b, c, d e os alunos deveriam verificar se as igualdades a = b e a : c = b : d eram verdadeiras ou falsas.

Para a conclusão desta atividade foi necessários 65 minutos, das 11h00min às 12h05min. A realização da primeira atividade facilitou o desenvolvimento da segunda, no entanto os grupos também apresentaram dificuldades no momento de elaborar de forma escrita a conclusão da atividade. Desta forma, também foi necessária nossa intervenção para que os estudantes atingissem o objetivo da mesma.

Na etapa seguinte, aconteceu a socialização das conclusões elaboradas pelos grupos e em seguida fizemos a institucionalização da atividade, mostrando o conceito da relação encontrada nas conclusões. Os grupos se mostraram motivados e atentos nas explicações e resoluções

A seguir apresentamos o quadro 36 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 2.

Quadro 36 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 2 continua

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	Para uma igualdade continuar verdadeira, precisamos dividir os dois lados do sinal de igual por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G2	Quando tenho uma igualdade só é verdadeira se eu dividir os dois lados igualmente. Se eu dividir a	Válida, prevista e não desejada

	igualdade por números diferentes não fica uma igualdade verdadeira.	
G3	Descobrimos que a igualdade continua verdadeira quando dividimos os dois lados da igualdade por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G4	Uma igualdade permanece verdadeira quando dividimos os dois lados da igualdade por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G5	Observamos que uma igualdade continuará verdadeira quando dividimos os dois lados por números iguais.	Válida, prevista e desejada
G6	Se dividimos os dois lados de uma igualdade pelo mesmo valor, ela continua verdadeira.	Válida, prevista e desejada
G7	Para dar resultados iguais tem que ser valores iguais.	Invalida, não prevista e não desejada
G8	Quando eu divido os dois lados se for igual o número vai ser igual vai ser verdadeira.	Invalida, não prevista e não desejada
G9	Para que uma igualdade continue verdadeira, temos que dividir os dois lados por valores iguais.	Válida, prevista e desejada
G10	Se eu pego dois números iguais e divido os dois números por isso que é uma conta verdadeira.	Invalida, não prevista e não desejada
G11	Entendo que dividindo 8 ÷ 2 = 8 ÷ 2 são iguais e 8 ÷ 2 = 8 ÷ 3 não são iguais.	Válida, prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023)

Após receber as conclusões de cada grupo, direcionamos ao quadro branco para discuti-las e então atingirmos o momento da institucionalização, última fase do ensino por atividades, onde conduzimos os alunos a compreenderem que uma igualdade só permanece verdadeira quando dividimos os dois lados da igualdade pelo mesmo número. Deste modo, classificamos a validade de cada conclusão conforme se aproximava ou não da institucionalização da atividade 2, bem como nas demais atividades de redescoberta.

O quadro 37 expõe a frequência e o percentual de acordo com a característica das conclusões formuladas pelos alunos na atividade 2.

Quadro 37 – Caraterísticas das conclusões da atividade 2 continua

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	6	54,55%

Válida, prevista e não desejada	2	18,18%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	3	27,27%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 37 percebemos que 54,55% grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada, 18,18% dos grupos elaboraram conclusões válidas, previstas e não desejada e 27,27% formularam conclusões inválidas, não previstas e não desejadas para essa atividade. Desta forma, também foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 38 indica a validade das conclusões da atividade 2.

Quadro 38 – Validade das conclusões da atividade 2

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	6	54,55%
Parcialmente válida	2	18,18%
Inválida	3	27,27%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Na realização da segunda atividade percebemos que os estudantes demonstraram bom desempenho no preenchimento dos quadros, porém, além das dificuldades de percepção das regularidades presentes em cada uma, os alunos também apresentaram obstáculos em formalizar suas conclusões na forma de escrita.

5.2.4 Encontro IV

No dia 06 de setembro de 2023 ocorreu o encontro IV (quatro) de nossa pesquisa, com realização da atividade 3, denominada sentenças multiplicativas. Teve duração de uma hora e trinta minutos, das 13h30min às 15h00min, onde 27 alunos da turma participaram. Para a realização dessas atividades foi mantida a mesma organização das duas primeiras, ou seja, foram formados 11 grupos com três alunos em cada. No entanto, cinco discentes (D_3, D_7, D_{14}, D_{25} e D_{27}) de grupos diferentes estiveram ausentes dessa sessão de ensino.

Para a conclusão da atividade 3 teve duração de 70 minutos, de 13h30min a 14h40min; apresentou como objetivo praticar a determinação do valor desconhecido numa sentença em que esse valor era representado por uma interrogação e sua posição sofria variação na sentença e posteriormente preencher um quadro que identificava a sentença formada, o cálculo efetuado e a operação utilizada. Nesta atividade foi permitida a utilização da tabuada, o que provocou uma exagerada euforia entre eles, por estarem em contato com uma ferramenta que apesar de simples, serviu como motivação para a realização da atividade.

No desenvolvimento desta atividade esperava-se que os discentes determinassem o valor desconhecido por meio das propriedades da multiplicação e divisão na igualdade (objetivos das duas atividades anteriores), porém a maioria dos estudantes realizou os cálculos com o auxílio da tabuada. Neste momento observamos que os alunos optaram por resolver de maneira intuitiva, alguns estudantes utilizaram artifícios de contagem em algumas questões e outros fizeram uso da conta armada. Como as questões desta atividade distinguiam-se entre aritméticas e algébricas, com variação da incógnita nas três possíveis posições para a multiplicação e também para a divisão (a x b = ?, a x ? = c, ? x b = c, a ÷ b = ?, a ÷ ? = c, ? ÷ b = c), percebemos que quando as sentenças eram aritméticas, os estudantes encontravam os resultados com maior facilidade, porém nas sentenças algébricas eles faziam diversas tentativas para encontrar as soluções e a partir disso identificavam a operação necessária para a resolução.

No quadro 39 apresentamos os percentuais de acertos, erros por questão para termos um panorama de quais tipos de sentenças representaram maior ou menor dificuldade para esta turma na atividade 3.

Quadro 39 – Desempenho nas sentenças multiplicativas continua

Sentença	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
a) 3 × 7 = ?	Aritmética	11	0	100%	0%
b) 5 × 4 = ?	Aritmética	11	0	100%	0%

c) 6 × 2 = ?	Aritmética	11	0	100%	0%
d) 9 × 8 = ?	Aritmética	09	02	81,82%	18,18%
e) ? × 2 = 16	Algébrica	09	02	81,82%	18,18%
f) ? × 4 = 28	Algébrica	11	0	100%	0%
g) ? × 16 = 32	Algébrica	10	01	90,91%	9,09%
h) ? × 9 = 45	Algébrica	10	01	90,91%	9,09%
i) 6 × ? = 24	Algébrica	11	0	100%	0%
j) 15 × ? = 60	Algébrica	09	02	81,82%	18,18%
k) 5 × ? = 50	Algébrica	09	02	81,82%	18,18%
l) 20 × ? = 140	Algébrica	06	05	54,55%	45,45%
m) 8 ÷ 2 = ?	Aritmética	09	02	81,82%	18,18%
n) 48 ÷ 6 = ?	Aritmética	06	05	54,55%	45,45%
o) 32 ÷ 4 = ?	Aritmética	09	02	81,82%	18,18%
p) 90 ÷ 15 = ?	Aritmética	06	05	54,55%	45,45%
q) ? ÷ 5 = 11	Algébrica	07	04	63,64%	36,36%
r) ? ÷ 8 = 12	**Algébrica**	**05**	**06**	**45,45%**	**54,55%**
s) ? ÷ 10 = 20	**Algébrica**	**04**	**07**	**36,36%**	**63,64%**
t) ? ÷ 25 = 14	Algébrica	06	05	54,55%	45,45%
u) 30 ÷ ? = 6	Algébrica	06	05	54,55%	45,45%
v) 56 ÷ ? = 7	**Algébrica**	**05**	**06**	**45,45%**	**54,55%**
x) 84 ÷ ? = 12	**Algébrica**	**05**	**06**	**45,45%**	**54,55%**
z) 100 ÷ ? = 2	**Algébrica**	**05**	**06**	**45,45%**	**54,55%**

Fonte: Experimentação (2023)

A partir destes resultados podemos observar que os maiores índices de erros surgiram em questões do tipo algébrica (itens r, s, v, x e z). A partir da análise dos erros de cada grupo, percebemos que a maior parte ocorreu em questões que envolviam a operação de divisão ou a inversão da operação da questão, onde houve muitos erros de cálculo pelo baixo domínio da turma em lidar com os algoritmos desta operação.

Assim, analisando especificamente os itens, inferimos que nos itens **r** e **s** a maioria dos erros se deram por conta de ser uma questão algébrica do tipo ? ÷ b = c, em que os alunos deveriam utilizar a operação inversa para chegar ao resultado, mas percebemos que os discentes aplicaram a operação original da questão.

Nos itens **v**, **x** e **z** os alunos apresentaram um alto índice de erro devido ser uma questão algébrica do tipo a ÷ ? = c, que envolve a operação de divisão na sua resolução. Os discentes utilizaram a operação correta, porém houve muitos erros de cálculo pelo baixo domínio em tratar com os algoritmos desta operação.

Quadro 40 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 3 continua

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	Quando o valor desconhecido está no começo ou no meio da sentença, devemos fazer o valor invertido.	Inválida, não prevista e não desejada
G2	Se o valor desconhecido está no final, usamos a operação da questão. Se tiver no começo ou no meio trocamos a operação.	Válida, prevista e desejada
G3	Fazemos a conta direto quando o número desconhecido está no final e a gente tem que fazer a conta invertida quando está no começo ou meio.	Válida, prevista e não desejada
G4	Descobrimos que se o valor desconhecido tiver no final da questão usamos a operação da sentença, se tiver no começo trocamos, se tiver no meio pode trocar ou não.	Válida, prevista e desejada
G5	Quando o ponto de interrogação está no final usamos a operação da questão. Se tiver no início trocamos e se tiver no meio troca na multiplicação e na divisão não troca.	Válida, prevista e desejada
G6	Nós usamos a multiplicação e a divisão para resolver as questões.	Inválida, não prevista e não desejada
G7	Observamos que se a ? está no final resolvemos direto, se a ? está no início trocamos a conta, se a ? tiver no meio da questão troca ou não a conta.	Válida, prevista e não desejada
G8	Na multiplicação se o valor desconhecido tiver no final usamos a conta da questão e se tiver no início ou no meio precisa trocar a conta. Na divisão se o valor desconhecido tiver no final faz direto a conta, se tiver no início troca a conta e se tiver no final não troca a conta.	Válida, prevista e desejada
G9	Descobrimos que quando o valor desconhecido está no fim da questão fica mais fácil de responder.	Inválida, não prevista e não desejada

G10	Percebemos que em algumas questões temos que fazer o contrário das contas de multiplicação e divisão.	Inválida, não prevista e não desejada
G11	Observamos que nem sempre a sentença de multiplicação se resolve multiplicando e a sentença de divisão se resolve dividindo.	Inválida, não prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023)

A seguir apresentamos o quadro 41 com as características das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 3.

Quadro 41 – Características das conclusões da atividade 3

Características das conclusões	**Frequência**	**Percentual**
Válida, prevista e desejada	4	36,36%
Válida, prevista e não desejada	2	18,18%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	5	45,45%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 41 percebemos que 36,36% grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada, 18,18% dos grupos elaboraram conclusões válidas e previstas e não desejadas e 45,45% dos grupos formularam conclusões inválidas, não previstas e não desejadas para essa atividade. Desta forma, também foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 42 indica a validade das conclusões da atividade 3.

Quadro 42 – Validade das conclusões da atividade 3

Validade das conclusões	**Frequência**	**Percentual**
Válida	4	36,36%
Parcialmente válida	2	18,18%
Inválida	5	45,45%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

De acordo com o quadro 42 verificamos que 36,36% dos discentes encontraram conclusões válidas, 18,18% apresentaram conclusões parcialmente válidas. Bem como, 45,45% das conclusões apresentadas foram inválidas por conter ideias incompletas, mas o ponto positivo foi que todos os grupos formularam alguma conclusão, mostrando o interesse dos discentes em concluir a atividade apesar da inexperiência.

5.2.5 Encontro V

O encontro V (cinco) de ensino do experimento ocorreu no dia 12 de setembro de 2023 com a aplicação da atividade 4. Esta sessão teve duração de uma hora e trinta minutos, de 11h00minh a 12h30min, e participação de 27 alunos, os discentes ausentes foram D_1, D_6, D_{13}, D_{14} e D_{19}. Inicialmente a sala foi organizada em 11 (onze) grupos de três alunos em cada, depois entregamos uma cópia do roteiro da atividade a cada aluno e solicitamos que resolvessem as questões e preenchessem o quadro do final da atividade.

Para a conclusão da atividade 4 teve duração de 80 minutos, das 11h00min às 12h20min, e teve como objetivo levar os discentes a descobrirem uma lei geral para a resolução de problemas multiplicativos com uma operação em situações envolvendo valores monetários. Esta atividade era composta por 10 questões aritméticas com situações envolvendo dinheiro. Apesar desta atividade conter questões semelhante a atividade 3 da etapa multiplicativa, sentenças multiplicativas, os alunos apresentaram um pouco de dificuldades em seu desenvolvimento.

Os alunos conseguiram descobrir uma lei geral relacionada as situações de compra e venda, ou seja, a quantidade total a pagar (quantidade de mercadoria x valor unitário da mercadoria = valor a pagar). O preenchimento do quadro final da atividade ajudou na sintetização das ideias, na medida em foi revisto todo o processo de resolução das questões, bem como os discentes conseguiram observar as regularidades presentes no referido quadro, estabelecendo assim as relações entre a posição da incógnita na sentença da modelação do problema e a escolha da operação adequada para solucioná-lo.

De posse das conclusões de cada grupo fomos ao quadro branco para discuti-las e então chegarmos ao momento da institucionalização, última fase do ensino por atividades, onde levamos os estudantes a compreenderem que quantidade de mercadoria multiplicada pelo valor unitário da mercadoria resulta no valor a pagar.

A seguir apresentamos o quadro 43 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 4.

Quadro 43 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 4

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	A quantidade de mercadoria multiplicada pelo valor unitário da mercadoria é igual ao valor pago.	Válida, prevista e desejada
G2	Multiplico a quantidade de mercadoria pelo valor unitário da mercadoria é o total	Válida, prevista e desejada
G3	Percebemos que a quantidade de mercadoria vezes o valor unitário da mercadoria é igual ao valor pago.	Válida, prevista e desejada
G4	Se fizer a multiplicação da quantidade de mercadoria com o valor unitário da mercadoria encontramos o valor pago.	Válida, prevista e desejada
G5	Devemos fazer a multiplicação da quantidade de mercadoria com o valor unitário da mercadoria para encontrar o valor pago.	Válida, prevista e desejada
G6	Multiplico a quantidade de mercadoria pelo valor da unidade da mercadoria dá o total	Válida, prevista e desejada
G7	Se eu faço a multiplicação da quantidade de mercadoria com o valor unitário da mercadoria consigo o valor pago.	Válida, prevista e desejada
G8	Quando multiplicamos a quantidade de mercadoria com o valor unitário da mercadoria descobrimos o valor pago.	Válida, prevista e desejada
G9	O valor pago é igual a multiplicação dos outros valores.	Inválida, não prevista e não desejada
G10	Multiplica a quantidade de mercadoria pelo valor unitário da mercadoria.	Válida, prevista e não desejada
G11	Multiplicando a quantidade e acho o resultado.	Inválida, não prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023)

Ao final do registro das conclusões iniciamos a institucionalização. Neste momento, optamos por reproduzir o quadro apresentado ao final da atividade, no quadro branco, para que toda turma pudesse visualizar e discutir as possíveis formas de preenchimento. Desta forma, chegamos à conclusão da turma: Quando multiplicamos a quantidade de mercadoria pelo valor unitário da mercadoria, é igual ao valor a pagar.

No quadro 44 apresentamos as características das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 4, seguido das frequências e percentuais.

Quadro 44 – Características das conclusões da atividade 4

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	8	72,73%
Válida, prevista e não desejada	1	9,09%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	2	18,18%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 44 percebemos que 72,73% grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada, 9,09% dos grupos elaboraram conclusões válidas, previstas e não desejadas e 18,18% formularam conclusões inválida, não prevista e não desejada para essa atividade. Desta forma, também foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 45 indica a validade das conclusões da atividade 4.

Quadro 45 – Validade das conclusões da atividade 4

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	8	72,73%
Parcialmente válida	1	9,09%
Inválida	2	18,18%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Na realização da quarta atividade observamos que os alunos apresentaram interesse, empolgação e tiveram bom desempenho no preenchimento do quadro final, no entanto, além das dificuldades de formulação das conclusões e de percepção das regularidades presentes em cada questão, os alunos também apresentaram entraves em identificar a operação necessária para a resolução, assim como na aplicação da operação de divisão.

5.2.6 Encontro VI

O encontro VI (seis) de ensino ocorreu no dia 12 de setembro de 2023, com a aplicação da atividade 5, a qual se refere a uma atividade de fixação de problemas de estruturas multiplicativas. O encontro teve início das 11h00min às 12h25min e duração de 1h30min, com frequência de 30 alunos. A atividade 5 tinha como objetivo praticar a resolução de problemas multiplicativos com uma operação em situações com valores monetários, composta por dez questões, sendo que as três primeiras eram aritméticas, com sentenças do tipo a x b = ? ou a ÷ b = ?. As quatro seguintes eram algébricas, com sentenças do tipo a x ? = c ou a ÷ ? = c. E as três últimas eram também algébricas, com sentenças do tipo ? x b = c ou ? ÷ b = c. Esta atividade de aprofundamento era diferente da anterior, devido à ausência dos itens interrogativos, os discentes dispunham apenas do enunciado das questões seguido de um espaço em branco para resolução e deveriam resolvê-las de acordo com os conhecimentos adquiridos durante os encontros de ensino que a antecederam. Com o intuito de diminuir os erros numéricos especialmente nas questões algébricas que precisavam utilizar a operação de divisão na resolução, permitimos o uso da tabuada na resolução das questões.

Um aluno solicitou ajuda, pois as questões 3 e 6, na visão dele, deveriam ser resolvidas com a mesma operação, no caso a multiplicação e que teriam o mesmo resultado. Com a intervenção da professora, explicando que a questão 3 tratava-se de uma questão aritmética do tipo a x b = ?, a qual a interrogação aparece no final da sentença e que a questão 6 tratava-se de uma questão algébrica, do tipo a x ? = c, ou seja, a interrogação aparece no meio da sentença e que neste caso a operação precisa ser invertida. O aluno conseguiu entender e resolveu corretamente a questão.

A atividade 5 teve a duração de 60 minutos para a sua conclusão, das 11h00min às 12h00min. Com as atividades entregues, iniciamos a etapa de socialização das respostas por parte dos alunos e em seguida passamos para o momento da institucionalização dos tipos de questões e suas resoluções.

Apresentamos no quadro 46 os percentuais de acertos, erros por questão da atividade 5 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 46 – Desempenho nas questões da atividade 5

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
Q1	Aritmética	26	04	86,67%	13,33%
Q2	Aritmética	26	04	86,67%	13,33%
Q3	Aritmética	20	10	66,67%	33,33%
Q4	**Algébrica**	**15**	**15**	**50%**	**50%**
Q5	**Algébrica**	**15**	**15**	**50%**	**50%**
Q6	**Algébrica**	**17**	**13**	**56,67%**	**43,33%**
Q7	**Algébrica**	**16**	**14**	**53,33%**	**46,67%**
Q8	Algébrica	19	11	63,33%	36,67%
Q9	Algébrica	22	08	73,33%	26,67%
Q10	**Algébrica**	**12**	**18**	**40%**	**60%**

Fonte: Experimentação (2023)

Com base no quadro 46, podemos observar que os maiores percentuais de erros foram nas questões algébricas que envolviam a operação de divisão, nas questões que deveriam utilizar a inversa da operação original da sentença matemática, com maior destaque na questão dez (Q10) a qual o discente se deparou com a aplicação inversa da operação, onde neste caso foi a divisão, a qual apresentam maior dificuldade na sua execução.

Esta atividade de aprofundamento ajudou os alunos a consolidarem sua compreensão na resolução de problemas multiplicativos com uma operação em situações com valores monetários. Por meio de problemas desafiadores, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos, reforçando sua compreensão e aprofundando seu conhecimento. Além disso, estimulou o pensamento crítico, o pensamento matemático e o desenvolvimento de estratégias eficazes para resolver situações aritméticas e algébricas.

5.2.7 Encontro VII

No encontro VII (sete), aconteceu a aplicação da atividade 6, no dia 13 de setembro de 2023, das 11h 00min às 12h30min, se caracterizou como uma atividade de redescoberta, contendo 10 questões multiplicativas na qual os discentes deveriam resolvê-las de acordo com os conhecimentos adquiridos durante as sessões de ensino que a antecederam. Inicialmente a sala foi organizada em 11 (onze) grupos de três alunos em cada, depois entregamos uma cópia do roteiro da atividade a cada grupo, solicitamos que resolvessem as questões e preenchessem o quadro do final da atividade. Desta forma, deixamos os alunos livres para escolher qual o melhor caminho para se chegar à solução de cada problema. A conclusão da atividade 6 teve duração de uma 1h10min, das 11h00min às 12h10min, com a participação de 32 alunos.

Os alunos precisariam descobrir uma lei geral relacionada as situações de agrupamentos, ou seja, a quantidade total de elementos (quantidade de agrupamentos x quantidade de elementos por agrupamento = total de elementos). O preenchimento do quadro final da atividade ajudou na sintetização das ideias, a medida em os alunos revisava todo o processo de resolução das questões, bem como os alunos conseguiram identificar as regularidades presentes no referido quadro, formulando assim as sentenças da modelação do problema e a escolha da operação adequada para solucioná-lo.

Os alunos elaboraram a sentença natural dos problemas propostos, demonstrando que houve a aquisição de um novo comportamento na resolução de questões multiplicativas, onde eles compreenderam que o procedimento de modelação da sentença natural é fundamental para a escolha da operação adequada. A maioria dos discentes, optaram por efetuar os cálculos utilizando a conta armada.

Os fatos observados e aqui descritos nos fizeram inferir que a turma participante deste experimento desenvolveu as habilidades de modelação, escolha da operação, bem como as elaborações algorítmicas necessárias, a partir das atividades desenvolvidas por nossa sequência didática até esta etapa da experimentação.

A seguir apresentamos o quadro 47 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 6.

Quadro 47 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 6 continua

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	Quando eu multiplico a quantidade de grupos com a quantidade de elementos do grupo, eu consigo descobrir a quantidade total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G2	Se eu multiplicar a quantidade de agrupamentos e multiplicar pela quantidade de elementos de cada agrupamento, eu descubro o total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G3	Quando eu multiplico a quantidade de grupos com a quantidade de elementos do grupo, eu descubro a quantidade total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G4	Se eu pegar a quantidade de agrupamentos e multiplicar pela quantidade de elementos de cada agrupamento, eu descubro o total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G5	Quando eu multiplico a quantidade de elementos com a dos grupos, eu consigo descobrir a quantidade de elementos total.	Válida, prevista e desejada
G6	Se eu pegar e multiplicar a quantidade de agrupamentos pela quantidade de elementos de cada grupo, eu consigo encontrar o total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G7	Quando eu multiplico a quantidade de grupos com a quantidade de elementos do grupo eu consigo descobrir a quantidade total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G8	Observamos que a quantidade de agrupamentos multiplicada pela quantidade de elementos por agrupamentos dá o valor total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G9	Multiplicando a quantidade de agrupamentos com a quantidade de elementos em cada um dos agrupamentos, eu consigo encontrar a quantidade total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G10	Eu posso pegar a quantidade de agrupamentos e multiplicar pela quantidade de elementos de cada agrupamento e descubro o total de elementos.	Válida, prevista e desejada
G11	Eu descobri que multiplicando a quantidade de agrupamentos com a quantidade de elementos em	Válida, prevista e desejada

	cada agrupamento eu descubro a quantidade total de elementos.	

Fonte: Experimentação (2023)

Com a realização da atividade 6 percebemos que os estudantes apresentaram interesse, empolgação e bom desempenho na resolução e no preenchimento do quadro final, no entanto, demonstraram dificuldades de percepção nas regularidades presentes em cada uma das questões, assim como formalizar a escrita de suas conclusões. Apresentamos o quadro 48 com as características, frequências e percentuais das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 6.

Quadro 48 – Características das conclusões da atividade 6

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	11	100%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 48 percebemos que 100% dos grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada. Ao final da institucionalização, conseguimos perceber que a vivência das atividades levou os discentes a compreenderem melhor as conclusões para essa atividade. Desta forma, também foi necessária a nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 49 indica a validade das conclusões da atividade 6.

Quadro 49 – Validade das conclusões da atividade 6 continua

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	11	100%
Parcialmente válida	0	0%
Inválida	0	0%

Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Com esta atividade também esperávamos que os discentes percebessem a relação entre a quantidade de agrupamentos, a quantidade de elementos em cada agrupamento e o total de elementos. Após a correção das atividades podemos observar que todos os discentes tiveram acertos no total das questões propostas. Acreditamos que estas questões exigiram pouco esforço dos discentes na modelação da sentença e escolha da operação por serem questões semelhantes as anteriores.

5.2.8 Encontro VIII

O encontro VIII (oito) de ensino ocorreu no dia 20 de setembro de 2023 com duração das 11h00min às 12h30min, onde ocorreu a aplicação da atividade 7, atividade de aprendizagem, de aprofundamento, com situações sem envolver valores monetários. Com o objetivo de aprofundar a lei geral relacionada entre a quantidade de agrupamento de elementos, a quantidade de elementos por agrupamento e o total de elementos identificada na atividade anterior, atividade 6. Este encontro teve participação de 28 alunos e duração de 65 minutos, das 11h00min às 12h05min.

Antes da distribuição das atividades, perguntamos aos alunos o que se lembravam da aula anterior e muitos logo ressaltaram ter sido um assunto difícil e que não tinham estudado as operações do jeito que foi apresentado naquela aula. Esclarecemos que a ideia das atividades era contribuir para a compreensão das etapas utilizados na resolução de situações-problema para que, além de resolverem, pudessem, de fato, compreender o desenvolvimento das etapas até a solução.

A atividade 7 é composta por dez questões, sendo as três primeiras questões aritméticas, com sentenças do tipo a x b = ? ou a ÷ b = ?. As quatro seguintes eram algébricas, com sentenças do tipo ? x b = c ou ? ÷ b = c. E as três últimas eram também algébricas, com sentenças do tipo a x ? = c ou a ÷ ? = c.

Quando iniciamos a atividade os alunos tiveram certa dificuldade em responder a cada item das questões. Mostramos na primeira questão como deveriam proceder e, então, iniciaram as resoluções das questões 2 e 3 com maior segurança. Contudo, quando iniciaram a questão 4, algébrica, ainda não compreendiam como fazer a disposição dos dados, então pedimos que se lembrassem do procedimento feitos nas três primeiras questões e logo entenderam que o procedimento multiplicativo seguia o mesmo raciocínio, mesmo que o termo desconhecido estivesse em posição diferente das questões anteriores. Com isso, a todo o momento procurávamos lembrá-los da regra geral.

A seguir apresentamos o quadro 50 o desempenho nas questões feitas pelos alunos na resolução da atividade 7 e seus percentuais.

Quadro 50 – Desempenho nas questões da atividade 7

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Em branco	Percentual de Acertos	Percentual de Erros	Percentual em Branco
Q1	Aritmética	23	05	0	82,14%	17,86%	0%
Q2	**Aritmética**	**14**	**14**	**0**	**50%**	**50%**	**0%**
Q3	Aritmética	25	03	0	89,29%	10,71%	0%
Q4	Algébrica	19	09	0	67,86%	32,14%	0%
Q5	Algébrica	20	07	01	71,43%	25%	3,57%
Q6	Algébrica	19	08	01	67,86%	28,57%	3,57%
Q7	Algébrica	20	08	0	71,43%	28,57%	0%
Q8	Algébrica	18	09	01	64,29%	32,14%	3,57%
Q9	**Algébrica**	**16**	**11**	**01**	**57,14%**	**39,29%**	**3,57%**
Q10	Algébrica	18	09	01	64,29%	32,14%	3,57%

Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com o quadro 50, podemos observar que as dificuldade nas questões algébricas do tipo ? x b = c e a x ? = c continuam com o índice alto nas análises das resoluções, com destaque maior para as questões 2 e 9 (Q2 e Q9) com percentuais de 50% e 39,29% de erro, respectivamente.

No quadro 51, apresentamos o resultado obtido acerca das soluções das questões da atividade 7, determinadas pelos alunos.

Quadro 51 – Resultados das Questões da Atividade 7

Correção	Quantidade de Questões	Percentual
Resolução em BRANCO	05	1,79%
Resolução ERRADA	83	29,64%
Resolução CORRETA	192	68,57%
TOTAL	**280**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023)

Durante a realização da atividade, os alunos ainda apresentavam dificuldades na operacionalização da tabuada, com isso, a todo instante éramos chamados para auxiliá-los nesse processo. A compreensão do conteúdo e a resolução correta das questões mostram que os alunos estão internalizando os conceitos e aplicando as estratégias corretas para resolver problemas relacionados a sentenças aritméticas e algébricas. Isso é fundamental para o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas e demonstra um bom progresso e compreensão por parte dos alunos no decorrer da Sequência Didática.

5.2.9 Encontro IX

O encontro IX (nove) de ensino ocorreu no dia 25 de setembro de 2023, das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de redescoberta, atividade 8 com situações envolvendo valores monetários. Teve participação de 28 alunos, com duração para a conclusão de 75 minutos, das 11h00min às 12h15min e com o objetivo de descobrir uma relação entre a quantidade de prestações, o valor unitário da prestação e o valor total pago de uma compra.

Na atividade 8 os alunos deveriam resolver 10 questões multiplicativas de uma operação em situações com valores monetários, permeadas por itens interrogativos que auxiliavam na interpretação deles, e ao final deveriam preencher um quadro no qual deveriam relacionar a sentença ao cálculo realizado e à operação escolhida em cada questão.

Na organização, a turma foi orientada a formar grupos de três ou quatro alunos em cada, formando 11 grupos. Por mais que se tratasse de uma atividade semelhante a outra anteriormente realizada, os alunos utilizaram um pouco mais de tempo para concluir a resolução e preencher o quadro de registro.

Os alunos apresentaram algumas dificuldades na operação de multiplicação com dois algarismos, na interpretação dos dados, bem como, mostraram fragilidade em desenvolver conclusões consistentes. Apesar disso, observamos que houve melhora na construção das frases, buscando expressar seus pensamentos de acordo com as orientações recebidas, pois os alunos sempre buscavam o auxílio da professora e faziam as observações do que tinham entendido verbalmente e com esse auxílio construíram suas conclusões de forma escrita.

A seguir apresentamos o quadro 52 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 8.

Quadro 52 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 8 continua

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	Usando a operação de multiplicação descobri que multiplicando 120 x 8 = 920.	Válida, prevista e não desejada
G2	Eu multipliquei o valor da prestação vezes o outro valor e consegui o resultado.	Válida, prevista e não desejada
G3	Eu aprendi que as prestações vezes o valor da prestação eu encontro o valor total pago.	Válida, prevista e desejada
G4	O valor total é dado através da multiplicação da quantidade de prestação pelo valor da prestação.	Válida, prevista e desejada
G5	Descobri que só multiplicando a quantidade de prestação e o valor de cada prestação encontro o resultado.	Válida, prevista e desejada
G6	Eu descobri que multiplicando a quantidade de prestação com o valor de cada prestação eu encontro o valor total pago.	Válida, prevista e desejada
G7	Quando eu multiplico a prestação com o valor de cada prestação eu encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G8	A quantidade de prestações multiplicada pelo valor de cada prestação é igual ao valor total pago.	Válida, prevista e desejada
G9	Se eu multiplicar a quantidade de prestações pelo valor da prestação eu consigo o valor total.	Válida, prevista e desejada

G10	Observei que multipliquei a quantidade de prestação, valor de cada prestação para ter o valor total pago.	Válida, prevista e desejada
G11	Por que você multiplica a quantidade de prestações, o valor de cada prestação e encontra o valor pago.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023)

A seguir apresentamos o quadro 53 com as características das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 8.

Quadro 53 – Características das conclusões da atividade 8

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	9	81,82%
Válida, prevista e não desejada	2	18,18%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 55 percebemos que 81,82% grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada, 18,18% dos grupos elaboraram conclusões válidas, previstas e não desejadas para essa atividade. Desta forma, também foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 54 indica a validade das conclusões da atividade 8.

Quadro 54 – Validade das conclusões da atividade 8

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	9	81,82%
Parcialmente válida	2	18,18%
Inválida	0	0%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Em nosso entendimento esta sessão de ensino foi muito produtiva no que diz respeito a levar os alunos a se familiarizarem com a formulação de sentenças multiplicativas a partir de um problema escrito, isto é, transpor da linguagem materna para a linguagem matemática, modelando a posição da incógnita representada pelo ponto de interrogação, em consonância com o objetivo da atividade que era levar os estudantes a conhecerem a modelação de problemas envolvendo estruturas multiplicativas.

5.2.10 Encontro X

O encontro X (dez) de ensino ocorreu no dia 26 de setembro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de aprofundamento, atividade 9 com situações envolvendo valores monetários. Teve participação de 30 alunos, com duração para a conclusão de 50 minutos, das 11h00min às 11h50min e com o objetivo de exercitar a resolução de problemas envolvendo a relação entre a quantidade de prestações, o valor unitário da prestação e o valor total pago de uma compra.

Esta atividade foi desenvolvida com a finalidade de fixar as ideias trabalhadas anteriormente e tirar dúvidas que, porventura, ainda existissem na resolução deste tipo de questão. Com a realização de diversas atividades de redescoberta e aprofundamento, os alunos estavam apreendendo melhor a dinâmica das resoluções, à medida que as aulas avançavam. Observamos bastante maior interesse e empenho em resolver as questões corretamente, pois compreenderam a necessidade de sanar suas dúvidas para obter melhor aprendizagem. De modo geral, foram poucas as dúvidas e dificuldades neste dia e não houve a necessidade de mostrar nenhuma forma de resolução no quadro.

A atividade 9 é composta por dez questões, sendo as três primeiras questões aritméticas, com sentenças do tipo a x b = ?. As quatro seguintes eram algébricas, com sentenças do tipo a x ? = c. E as três últimas eram também algébricas, com sentenças do tipo ? x b = c.

Quando todos finalizaram a atividade, ainda restava um tempo para o término do horário, então aproveitamos para retomamos a importância de uma leitura atenta para o entendimento de quais informações presentes no enunciado são pertinentes a resolução e como poderiam ser organizadas para chegar a resultados corretos. Deixamos evidente que uma dessas formas era recorrer a montagem da sentença matemática, para visualizar as regularidades e com isso identificar a operação necessária para a resolução da questão. Mostramos no quadro branco a formulação das sentenças, as interpretações para a identificação da operação a ser utilizada na resolução, assim como as resoluções das dez questões da atividade 9.

Apresentamos no quadro 55 os percentuais de acertos, erros por questão da atividade 9 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 55 – Desempenho nas questões da atividade 9

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Em branco	Percentual de Acertos	Percentual de Erros	Percentual em Branco
Q1	Aritmética	28	02	0	93,33%	6,67%	0%
Q2	Aritmética	23	07	0	76,67%	23,33%	0%
Q3	Aritmética	25	04	01	83,34%	13,33%	3,33%
Q4	**Algébrica**	**13**	**17**	**0**	**43,33%**	**56,67%**	**0%**
Q5	**Algébrica**	**11**	**19**	**0**	**36,67%**	**63,33%**	**0%**
Q6	**Algébrica**	**14**	**15**	**01**	**46,67%**	**50%**	**3,33%**
Q7	**Algébrica**	**13**	**17**	**0**	**43,33%**	**56,67%**	**0%**
Q8	Algébrica	22	07	01	73,34%	23,33%	3,33%
Q9	Algébrica	23	07	0	76,67%	23,33%	0%
Q10	Algébrica	22	08	0	73,34%	26,66%	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Observando o quadro 55, podemos verificar que os maiores índices de erros estão nas questões 4, 5, 6 e 7 (Q4, Q5, Q6 e Q7). Estas questões são algébricas do tipo a x ? = c, a qual os alunos utilizariam a inversão da operação para obter o resultado. Também podemos notar que diferente das outras questões, o valor total aparece no início dos dados, podendo levar o discente a um entendimento equivocado.

Essa tarefa de aprofundamento permitiu que os estudantes solidificassem sua compreensão na resolução de problemas de multiplicativos envolvendo valores monetários. Através de desafios complexos, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar os princípios aprendidos, fortalecendo assim sua compreensão e ampliando seus conhecimentos. Além disso, ela fomentou o desenvolvimento do pensamento crítico e matemático, bem como a criação de estratégias eficazes para solucionar situações envolvendo sentenças aritméticas e algébricas.

5.2.11 Encontro XI

O encontro XI (onze) de ensino ocorreu no dia 26 de setembro de 2023 das 12h00min às 12h30min com apresentação da atividade de redescoberta, atividade 10 sem situações envolvendo valores monetários. Teve participação de 30 alunos, com duração para a conclusão de 30 minutos, das 12h00min às 12h30min e com o objetivo de descobrir a quantidade total de quadradinhos contidos em um retângulo. Para a realização dessa atividade era necessário apenas contar a quantidade de quadradinhos existentes em cada linha e em cada coluna dos retângulos presentes em uma malha quadriculada e depois determinar a quantidade total de quadradinhos contida em cada retângulo.

Para a realização da atividade 10, a turma foi organizada em grupos de três ou quatro alunos cada. O material foi entregue a cada grupos e as orientações necessárias foram repassadas aos alunos que não apresentaram dificuldades na realização da atividade, concluindo com pouco tempo de duração. Ao término da aplicação da atividade 10, realizamos a socialização das resoluções com os alunos.

A seguir apresentamos o quadro 56 com a transcrição das conclusões feitas pelos grupos na atividade 10.

Quadro 56 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 10 continua

Grupos	Transcrição	Classificação
G1	O total de quadros é encontrado na multiplicação do número de linha com o número de coluna.	Válida, prevista e desejada
G2	Para descobrir o resultado precisamos multiplicar a linha pela coluna.	Válida, prevista e desejada
G3	Eu peguei o número de linhas e multipliquei por quadros das colunas e deu o total de quadrinhos.	Válida, prevista e desejada

G4	O número de linhas x colunas é o total de quadrinhos.	Válida, prevista e desejada
G5	Descobri que o número de linhas vezes o número de coluna é igual o resultado.	Válida, prevista e desejada
G6	Multiplicando a linha com a coluna eu acho o total de quadrinhos.	Válida, prevista e desejada
G7	Multiplicando as linhas e colunas chego no resultado.	Válida, prevista e desejada
G8	Quando multiplico o número de linhas com o número de colunas é igual ao total de quadros.	Válida, prevista e desejada
G9	Se eu multiplicar a linha pela coluna eu consigo o total de quadrinhos.	Válida, prevista e desejada
G10	O total de quadrinhos é a multiplicação de linhas multiplicado por colunas o resultado dá certo.	Válida, prevista e desejada
G11	O número total de quadrinhos é o número de quadrinhos em coluna vezes o número de quadrinhos em linha.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023)

A seguir apresentamos o quadro 57 com as características das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 10.

Quadro 57 – Características das conclusões da atividade 10

Características das conclusões	**Frequência**	**Percentual**
Válida, prevista e desejada	11	100%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 57 percebemos que 100% dos grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida, prevista e desejada. Ao final da institucionalização, conseguimos perceber que a vivência das atividades levou os discentes a compreenderem melhor as conclusões para essa atividade. Desta forma, não foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 58 indica a validade das conclusões da atividade 10.

Quadro 58 – Validade das conclusões da atividade 10

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	11	100%
Parcialmente válida	0	0%
Inválida	0	0%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Observamos que esta sessão de ensino foi muito produtiva no que diz respeito que os alunos não tiveram dificuldades em observar as regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade e conseguiram chegar à seguinte conclusão: o total de quadradinhos contidos em um retângulo for igual ao produto do número de quadradinhos em cada linha pelo número de quadradinhos em cada coluna.

5.2.12 Encontro XII

O encontro XII (doze) de ensino ocorreu no dia 27 de setembro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de aprofundamento, atividade 11 sem situações envolvendo valores monetários. Teve participação de 29 alunos, com duração para a conclusão de 45 minutos, das 11h00min às 11h45min e com o objetivo de praticar a resolução de questões com ideia de configuração retangular e de exercitar que o total de quadradinhos contidos em um retângulo é igual ao produto do número de quadradinhos em cada linha pelo número de quadradinhos em cada coluna. Esta atividade continha 10 questões, sendo 3 aritméticas (Q1, Q2 e Q3) e 7 algébricas (Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q10). Os discentes apresentaram dificuldades na resolução dos problemas algébricos, nos quais havia a necessidade de se ter a ideia de reversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão.

Para sanar as dificuldades relacionadas a escolha da operação adequada para solucionar o problema orientamos os alunos a montarem a sentença da modelação da questão. A partir desta orientação conseguimos sanar as dificuldades dos discentes em relação a escolha da operação. Alguns alunos também cometeram erros no procedimento algoritmo da operação de divisão e na maioria das vezes essas falhas estavam relacionadas a dificuldade com a tabuada e para reduzir esses entraves, permitimos o uso da tabuada durante a resolução das questões.

Apresentamos no quadro 59 os percentuais de acertos, erros por questão da atividade 11 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 59 – Desempenho nas questões da atividade 11

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
Q1	Aritmética	28	01	96,55%	3,45%
Q2	Aritmética	28	01	96,55%	3,45%
Q3	Aritmética	26	03	89,66%	10,34%
Q4	Algébrica	23	06	79,31%	20,69%
Q5	Algébrica	25	04	86,21%	13,79%
Q6	**Algébrica**	**22**	**07**	**75,86%**	**24,14%**
Q7	Algébrica	25	04	86,21%	13,79%
Q8	Algébrica	25	04	86,21%	13,79%
Q9	Algébrica	26	03	89,66%	10,34%
Q10	Algébrica	27	02	93,10%	6,90%

Fonte: Experimentação (2023)

No quadro 59 podemos observar a redução significativa dos índices de erros, sendo o maior deles no valor de 24,14% na questão 6 (Q6), uma questão algébrica do tipo ? x b = c.

Essa atividade de aprofundamento contribuiu significativamente para fortalecer a proficiência dos alunos na resolução de problemas com ideia de configuração retangular. Aproveitamos a aula para entender cada uma das operações e exercitar o cálculo por meio da resolução direta do algoritmo, em que os alunos puderam fazer suas continhas, recorrendo a tabuada. Avaliamos que esta aula foi muito precisa para garantir o sucesso das próximas atividades, pois sem estes conhecimentos, certamente os alunos continuariam com dificuldade nas aulas subsequentes.

5.2.13 Encontro XIII

O encontro XIII (treze) de ensino ocorreu no dia 02 de outubro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de redescoberta, atividade 12, a qual envolve o Princípio Fundamental da contagem. Teve participação de 30 alunos, com duração para a conclusão de 80 minutos, das 11h00min às 12h20min.

Para esta atividade a classe foi dividida em grupos com três ou quatro alunos em cada. O objetivo desta atividade era descobrir uma lei geral para resolver questões de contagem. A atividade continha 10 questões do tipo aritméticas com duas ou três etapas (a x b = ? e a x b x c = ?). Inicialmente solicitamos que os discentes resolvessem de forma empírica as questões e depois preenchessem o quadro no final da atividade com a situação, o número de etapas, o número de possibilidades de cada etapa e o total de possibilidades.

Como informado na análise *a priori* desta atividade os discentes apresentaram dificuldades na resolução dessas questões, pelo fato desses tipos de problemas dependerem de outra área da matemática (Princípio Fundamental da Contagem) para determinar a operação a ser utilizada na sua resolução. Tivemos que fazer intervenções no quadro branco com exemplos e explicações e logo após os alunos perceberam as regularidades presentes no preenchimento do quadro no final da atividade e todos os grupos conseguiram formalizar a conclusão esperada: o total de possibilidades é igual ao produto entre as possibilidades de cada etapa.

A seguir apresentamos o quadro 60 com a transcrição e classificação das conclusões feitas pelos grupos na atividade 12.

Quadro 60 – Classificação das conclusões feita pelos grupos na atividade 12 continua

Grupos	**Transcrição**	**Classificação**
G1	Quando multiplico as etapas, encontro o total.	Válida, prevista e desejada
G2	Se eu multiplicar as etapas descubro o valor total.	Válida, prevista e desejada

G3	Quando eu multiplico as etapas descubro o total.	Válida, prevista e desejada
G4	Se multiplicar as etapas encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G5	Descobri que ao multiplicar as etapas encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G6	Se eu multiplico as etapas descubro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G7	Conclui que ao multiplicar as etapas encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G8	Descobri que quando multiplico as etapas encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G9	Eu observei que preciso multiplicar as etapas para encontrar o valor total.	Válida, prevista e desejada
G10	Descobri que ao multiplicar as etapas encontro o valor total.	Válida, prevista e desejada
G11	Quando multiplico as etapas encontro o total.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023)

Com a realização da atividade 12 percebemos interesse, empolgação e bom desempenho na resolução e no preenchimento do quadro final pelos estudantes, no entanto, demonstraram dificuldades de percepção nas regularidades presentes em cada uma das questões. Apresentamos o quadro 61 com as características, frequências e percentuais das conclusões elaboradas pelos grupos na atividade 12.

Quadro 61 – Características das conclusões da atividade 12

Características das conclusões	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	11	100%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Conforme o quadro 61 percebemos que 100% dos grupos conseguiram elaborar uma conclusão considerada válida e prevista e desejada. Ao final da institucionalização, conseguimos perceber que as atividades anteriores levaram os discentes a compreenderem melhor as conclusões para essa atividade. Desta forma, também foi necessária à nossa intervenção para o alcance do objetivo da atividade. O quadro 62 indica a validade das conclusões da atividade 12.

Quadro 62 – Validade das conclusões da atividade 12

Validade das conclusões	Frequência	Percentual
Válida	11	100%
Parcialmente válida	0	0%
Inválida	0	0%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	**11**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Com esta atividade também esperávamos que os discentes percebessem a diferença na modelação da sentença de acordo com o número de etapas que o problema aritmético apresentava, após a correção das atividades podemos observar que as questões em que os estudantes tiveram maior dificuldade foram Q2, Q6, Q9 e Q10. Acreditamos que estas questões por possuírem três etapas, exigiram um esforço maior dos discentes na modelação da sentença e na execução da operação por serem questões com duas multiplicações sucessivas.

5.2.14 Encontro XIV

O encontro XIV (quatorze) de ensino ocorreu no dia 03 de outubro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de aprofundamento, atividade 13 com situações envolvendo o Princípio Fundamental da contagem. Teve participação de 31 alunos, com duração para a conclusão de 70 minutos, das 11h00min às 12h10min e com o objetivo de praticar a resolução de questões com ideia de contagem e de exercitar a lei geral identificada na atividade anterior, atividade

12, onde o total de possibilidades é igual ao produto entre as possibilidades de cada etapa.

A atividade 13 continha 10 questões do tipo com duas ou três etapas, sendo 6 aritméticas (a x b = ? e a x b x c = ?) e 4 algébricas (a x ? = c e ? x b = c) e para reduzir as dificuldade que os alunos apresentam com a operação de multiplicação e divisão, permitimos a utilização da tabuada durante a resolução da atividade.

Apresentamos no quadro 63 os percentuais de acertos e erros por questão da atividade 13 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 63 – Desempenho nas questões da atividade 13

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
Q1	Aritmética	´30	01	96,77%	3,23%
Q2	Aritmética	29	02	93,55%	6,45%
Q3	Aritmética	28	03	90,32%	9,68%
Q4	Aritmética	28	03	90,32%	9,68%
Q5	Aritmética	31	0	100%	0%
Q6	Aritmética	30	01	96,77%	3,32%
Q7	Algébrica	28	03	90,32%	9,68%
Q8	Algébrica	30	01	96,77%	3,23%
Q9	**Algébrica**	**27**	**04**	**87,10%**	**12,90%**
Q10	Algébrica	30	01	96,77%	3,23%

Fonte: Experimentação (2023)

Os discentes apresentaram dificuldades na resolução das questões algébricas, pois precisavam determinar o número de possibilidades de uma etapa conhecendo o número de possibilidades de uma outra etapa e o total de possibilidades, ou seja, para determinar a solução do problema era necessária a ideia de reversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão. Para sanar as dificuldades mencionadas anteriormente, orientamos os alunos a montarem a sentença da modelação do problema para melhor identificar a etapa que faltava, bem como a operação que utilizaria na resolução da questão. A partir das orientações os alunos conseguiram solucionar as questões algébricas (Q7, Q8, Q9 e Q10), com destaque para a questão 9 (Q9) que teve o índice de erro maior, no valor de 12,90%.

5.2.15 Encontro XV

O encontro XV (quinze) de ensino ocorreu no dia 04 de outubro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de aprofundamento, atividade 14 com situações envolvendo a resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários. Teve participação de 30 alunos, com duração para a conclusão de 80 minutos, das 11h00min às 12h20min e com o objetivo de praticar a resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários, composta por 10 questões algébricas imediatas combinadas. Segundo Sá (2003, p. 84) “os problemas algébricos combinados são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, são efetuadas mais de uma operação sem o uso explícito ou implícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples”. Os alunos apresentaram muitas dificuldades no desenvolvimento desta atividade, pois na resolução operacional dessas questões eram usadas mais de uma operação e a relação “um para muitos” estava implícita no enunciado do problema.

Previamente solicitamos que os alunos resolvessem de forma empírica as questões e posteriormente discutimos as resoluções uma a uma e explicamos que esses tipos de problemas podem ser resolvidos em etapas, sendo que cada etapa é representada por uma sentença e que para solucioná-los era necessário em primeiro lugar determinar a relação “um para muitos”. Mostramos no quadro branco a resolução de alguns exemplos e a partir disso, os alunos conseguiram perceber a regularidade existente nas questões.

Apresentamos no quadro 64 os percentuais de acertos, erros por questão da atividade 14 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 64 – Desempenho nas questões da atividade 14

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
Q1	Algébricos combinados	29	01	96,67%	3,33%
Q2	Algébricos combinados	28	02	93,33%	6,67%
Q3	Algébricos combinados	28	02	93,33%	6,67%
Q4	**Algébricos combinados**	**23**	**07**	**76,67%**	**23,33%**
Q5	Algébricos combinados	28	02	93,33%	6,67%
Q6	**Algébricos combinados**	**21**	**09**	**70%**	**30%**
Q7	Algébricos combinados	27	03	90%	10%
Q8	Algébricos combinados	30	0	100%	0%
Q9	Algébricos combinados	26	04	86,67%	13,33%
Q10	Algébricos combinados	27	03	90%	10%

Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com o quadro 64, podemos perceber que por mais que os alunos não tenham realizado uma atividade de redescoberta sobre resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações com valores monetários, o desempenho obtido apresentou um pequeno índice de erros, destacando as questões 4 e 6 (Q4, e Q6) que tiveram um percentual de 23,33% e 30% de erro, respectivamente.

5.2.16 Encontro XVI

O encontro XVI (dezesseis) de ensino ocorreu no dia 10 de outubro de 2023 das 11h00min às 12h30min com apresentação da atividade de aprofundamento, atividade 15 com situações envolvendo a resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários. Teve participação de

29 alunos, com duração para a conclusão de 70 minutos, das 11h00min às 12h10min e com o objetivo de praticar a resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários, composta por 10 questões algébricas imediatas combinadas. Como dito anteriormente, para Sá (2003, p. 84) “os problemas algébricos combinados são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, são efetuadas mais de uma operação sem o uso explícito ou implícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples”.

Os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento desta atividade, mesmo tendo resolvido a atividade 14, que é semelhante a atividade 15, pois para a resolução dessas questões os alunos precisaram usar mais de uma operação e a relação “um para muitos”, que estava implícita no comando do problema.

O processo para a resolução, foi feita por meio de intervenções como orientados na atividade 14. Os alunos resolveram as questões baseando-se nos exemplos e explicações que fizemos utilizando o quadro branco e posteriormente discutimos as dúvidas uma a uma, relembrando-os que esses tipos de problemas podem ser resolvidos por meio de etapas, visto que cada etapa representa uma sentença e que para solucioná-los era necessário inicialmente determinar o valor unitário, a relação “um para muitos”.

Apresentamos no quadro 65 os desempenhos e os percentuais de acertos, erros por questão da atividade 15 para termos uma visão de quais tipos de questões aritméticas ou algébricas representaram maior ou menor dificuldade para a turma.

Quadro 65 – Desempenho nas questões da atividade 15 continua

Questão	Classificação	Acertos	Erros	Percentual de Acertos	Percentual de Erros
Q1	Algébricos combinados	28	01	96,55%	3,45%
Q2	Algébricos combinados	27	02	93,10%	6,90%
Q3	Algébricos combinados	27	02	93,10%	6,90%
Q4	**Algébricos combinados**	**26**	**03**	**89,66%**	**10,34%**
Q5	Algébricos combinados	28	01	96,55%	3,45%

Q6	Algébricos combinados	27	02	93,10%	6,90%
Q7	Algébricos combinados	27	02	93,10%	6,90%
Q8	Algébricos combinados	27	02	93,10%	6,90%
Q9	Algébricos combinados	28	01	96,55%	3,45%
Q10	Algébricos combinados	28	01	96,55%	3,45%

Fonte: Experimentação (2023)

Observando o quadro 65, podemos perceber que por mais que os discentes não tenham realizado uma atividade de redescoberta sobre resolução de problemas multiplicativos com mais de uma operação em situações sem valores monetários, o desempenho obtido apresentou um índice de erros muito baixo em relação as atividades iniciais, destacamos a questão 4 (Q4) que teve um percentual de 10,34% de erro.

5.2.17 Encontro XVII

No encontro XVII (dezessete) aplicamos o pós-teste da nossa sequência didática, que ocorreu no dia 11 de outubro de 2023, das 11h00min às 12h30min. Teve participação de 32 alunos que o realizaram individualmente, com duração para a conclusão de 45 minutos, das 11h00min às 11h45min e com o objetivo de verificar e avaliar as habilidades adquiridas pelos alunos após a realização dos encontros de ensino.

Este teste continha as mesmas questões do pré-teste, 12 questões com diversas formulações de ideias multiplicativas. A aplicação aconteceu de maneira tranquila, os alunos permaneceram concentrados e empenhados em resolver as questões de forma correta com base no que haviam aprendido.

Após a conclusão da atividade, houve um período disponível antes do término das aulas, o que aproveitamos para uma discussão sobre os dias de ensino. Durante esse intervalo, fizemos algumas indagações relacionadas aos procedimentos necessários para resolver as questões, às correlações identificadas nas tarefas, à interpretação dos dados e às estratégias de cálculo. Quando se tratou dos dias de aula, os alunos compartilharam suas percepções, inicialmente expressando dificuldades com a matéria e preocupações com possíveis resultados desfavoráveis nos testes, devido à novidade dos problemas apresentados. No entanto, à medida que compreenderam como abordar essas questões, ganharam confiança e tranquilidade. Em relação ao entendimento das etapas de resolução, notamos que a maioria dos alunos respondeu com segurança às perguntas.

5.2.18 Síntese das Características das Conclusões

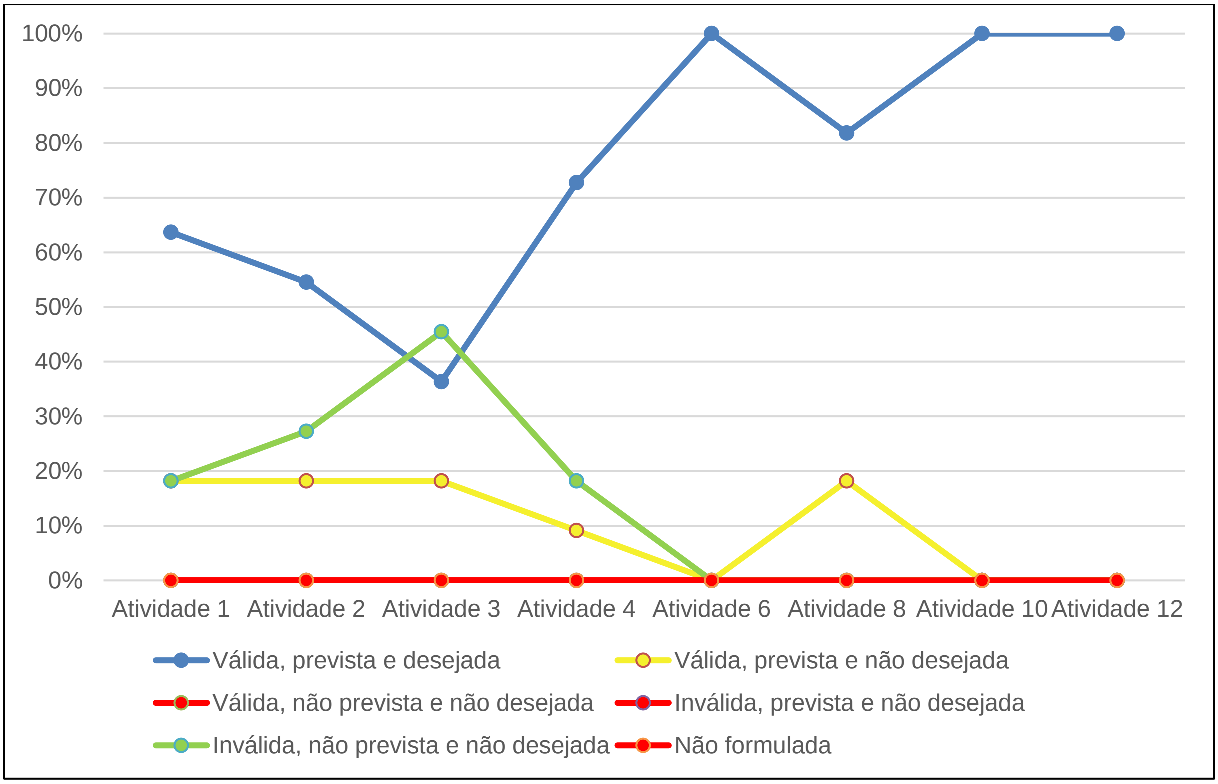
Apresentamos a seguir uma síntese das características das conclusões apresentadas pelos discentes nas 8 (oito) atividades de redescobertas aplicadas durante a experimentação.

Quadro 66 – Síntese das Características das Conclusões

Atividades	Características das Conclusões					
	Válida, prevista e desejada	Válida, prevista e não desejada	Válida, não prevista e não desejada	Inválida, prevista e não desejada	Inválida, não prevista e não desejada	Não formulada
Atividade 1	63,64%	18,18%	0%	0%	18,18%	0%
Atividade 2	54,55%	18,18%	0%	0%	27,27%	0%
Atividade 3	36,36%	18,18%	0%	0%	45,45%	0%
Atividade 4	72,73%	9,09%	0%	0%	18,18%	0%
Atividade 6	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 8	81,82%	18,18%	0%	0%	0%	0%
Atividade 10	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 12	100%	0%	0%	0%	0%	0%

Fonte: Experimentação (2023)

Gráfico 23 – Síntese das Características das Conclusões



Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com o quadro 66 e o gráfico 23, compostos pela síntese das características das conclusões apresentadas pelos discentes durante as aplicações das atividades de redescoberta, podemos verificar que as conclusões consideradas válida, prevista e desejada tiveram um crescimento significativo, variando inicialmente de 63,64%, atingindo um percentual de 100% nas últimas atividades. As conclusões consideradas válida, prevista e não desejada passaram de 18,18% nas primeiras atividades para 0% nas últimas atividades. A respeito das conclusões consideradas válida, não prevista e não desejada, assim como as conclusões inválida, prevista e não desejada, podemos observar que permaneceram com o percentual de 0% em todas as atividades propostas. Sobre as conclusões consideradas inválida, não prevista e não desejada podemos afirmar que o percentual decresceu de 18,18% na primeira atividade para 0% nas últimas atividades aplicadas. O percentual de conclusões não formuladas permaneceu 0% em todas as atividades de redescoberta aplicadas durante a experimentação.

Diante dessa análise fica validada a evolução dos discentes na identificação das informações necessárias para a resolução das atividades, bem como o interesse em responder a atividade, utilizando o seu entendimento, por mais que não estivesse totalmente correto.

5.2.19 Frequência dos alunos no experimento

Apresentamos a seguir a frequência dos alunos durante o experimento, que foi um fator pedagógico favorável pela assiduidade por se tratar de uma sequência de atividades, conforme explicado no início da aplicação.

Quadro 67 – Frequência dos alunos no experimento e nota no pós-teste continua

MÊS		AGOSTO	SETEMBRO									OUTUBRO					NOTA NO PÓS-TESTE
			DIAS														
Nº	DISCENTES	30	05	06	11	12	13	20	25	26	27	02	03	04	10	11	%
01	D$_1$	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	91,67
02	D$_2$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	83,33
03	D$_3$	P	F	F	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	75,00
04	D$_4$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
05	D$_5$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	91,67
06	D$_6$	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
07	D$_7$	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	100,00
08	D$_8$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	100,00
09	D$_9$	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
10	D$_{10}$	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
11	D$_{11}$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
12	D$_{12}$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
13	D13	P	P	P	F	P	P	P	P	P	F	P	P	F	F	P	100,00
14	D$_{14}$	P	P	F	F	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
15	D$_{15}$	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
16	D$_{16}$	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	91,67
17	D$_{17}$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
18	D$_{18}$	P	P	P	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	P	100,00
19	D$_{19}$	P	P	P	F	F	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
20	D$_{20}$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	100,00
21	D$_{21}$	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	75,00

22	D_{22}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
23	D_{23}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	83,33
24	D_{24}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	83,33
25	D_{25}	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
26	D_{26}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
27	D_{27}	P	P	F	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	F	P	100,00
28	D_{28}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100,00
29	D_{29}	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	100,00
30	D_{30}	P	F	P	P	P	P	P	F	P	P	F	F	P	P	P	83,33
31	D_{31}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	83,33
32	D_{32}	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	75,00

Fonte: Experimentação (2023)

O quadro 67 apresenta que os alunos participantes da pesquisa obtiveram um alto índice de frequência no experimento. O alto índice de frequência foi um dos fatores que levaram ao sucesso do que foi proposto na aplicação da sequência didática. Esperamos que a frequência nas atividades reflita em bons resultados para a pesquisa. A seguir faremos nossas considerações a respeito da realização da experimentação.

A partir das informações expostas neste quadro, notamos que 12 discentes frequentaram todos os encontros de ensino, e estes sujeitos representam aproximadamente 37,50% da amostra, 14 discentes ficaram ausentes em um ou dois encontros de ensino, representando 43,75% da amostra e 6 discentes se ausentaram por três ou mais encontros de ensino, gerando um percentual de 18,75% da amostra da pesquisa.

Todos os discentes, 32 alunos, sendo 100% da amostra participaram do pré e pós-teste da experimentação, onde trabalhamos os problemas multiplicativos com uma e duas operações. Este fato contribuiu para uma expressiva evolução dos discentes no último teste aplicado.

O percentual de faltas dos discentes durante a experimentação variou de 6,67% a 26,67%, de modo que os discentes D_1, D_5, D_8, D_9, D_{10}, D_{15}, D_{16}, D_{20}, D_{25}, D_{29} e D_{32} tiveram 6,67% de faltas durante a realização da experimentação. Os discentes D_6, D_7 e D_{18} tiveram 13,33% de faltas. Os participantes D_3, D_{14} e D_{19} tiveram 20% de faltas. Os alunos D_{13}, D_{27} e D_{30} alcançaram um percentual de 26,67% de faltas. Os discentes

D_2, D_4, D_{11}, D_{12}, D_{17}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{26}, D_{28} e D_{31} não apresentaram ausência durante toda a experimentação. A tabela 21 apresenta o percentual de faltas dos discentes durante as sessões de ensino e os rendimentos dos discentes no pós-teste multiplicativo.

Tabela 21 – Rendimento no pós-teste e percentual de faltas nas sessões de ensino

Percentual de Faltas	**RENDIMENTO NOS PÓS-TESTES MULTIPLICATIVO**			
	Rendimento no pós-teste multiplicativo (0 a 79%)	**Rendimento no pós-teste multiplicativo (80 a 89%)**	**Rendimento no pós-teste multiplicativo (90 a 99%)**	**Rendimento no pós-teste multiplicativo (100%)**
0%	D_{21}	D_2, D_{23}, D_{24} e D_{31}	------	D_4, D_{11}, D_{12}, D_{17}, D_{22}, D_{26} e D_{28}
6,67%	D_{32}	------	D_1, D_5 e D_{16}	D_8, D_9, D_{10}, D_{15}, D_{20}, D_{25} e D_{29}
13,33%	------	------	------	D_6, D_7 e D_{18}
20%	D_3	------	------	D_{14} e D_{19}
26,67%	-----	D_{30}	------	D_{13} e D_{27}

Fonte: Experimentação (2023)

Os discentes que frequentaram todas as aplicações das atividades, ou seja, que não tiveram faltas (0%), apresentam os seguintes rendimentos nos pós-testes multiplicativos: D_{21} obteve 75% de acertos; D_2, D_{23}, D_{24} e D_{31} atingiram 83,33% de acertos; D_4, D_{11}, D_{12}, D_{17}, D_{22}, D_{26} e D_{28} tiveram 100% de acertos.

A tabela mostra que entre os discentes que tiveram 6,67% de faltas nas sessões de ensino, o D_{32} teve um rendimento nos pós-testes multiplicativo de 75%, mesmo tendo faltado somente em uma sessão multiplicativa. Os discentes D_1, D_5, D_{16} tiveram rendimento de 91,67% no pós-teste, porém faltaram em apenas uma sessão de ensino. Para o percentual de 13,33% de faltas, os discente D_6, D_7 e D_{18} apresentaram rendimento de 100% no pós-teste multiplicativo e faltaram a duas sessões de ensino.

Podemos observar que, com o percentual de 20% de faltas, o estudante D_3, mesmo apresentando esse percentual, teve rendimento de 75% no pós-teste. E os discente D_{14} e D_{19} que faltaram três sessões de ensino multiplicativo, teve rendimento de 100% no pós-teste multiplicativo.

A análise do percentual de 26,67% de faltas evidenciou que o participante D_{30} tive rendimento de 83,33% no pós-teste, e esse esteve ausente em quatro sessões de ensino multiplicativa. E os discentes D_{13} e D_{27}, mesmo tendo faltado em quatro sessões de ensino multiplicativo, apresentaram um rendimento de 100% no pós-teste.

A análise da frequência dos participantes mostrou que ela foi um dos fatores que influenciou na melhoria do rendimento dos discentes no pós-teste. A seguir apresentamos algumas considerações sobre a realização da experimentação.

5.2.20 Considerações sobre a realização da experimentação

Durante a experimentação aplicamos um total de 15 (quinze) atividades, um pré e pós-testes e a aplicação do questionário socioeducacional, em 17 (dezessete) encontros de ensino. Durante o experimento o professor da turma (Mestranda) e o professor observador ficaram muito agradecidos e motivados para desenvolver o trabalho, assim como, deram total apoio aos alunos.

A utilização do ensino por atividade experimental como metodologia, propondo a resolução das atividades de forma individual, em dupla e ainda disponibilizando o quadro para discutirem resultados, tornaram as aulas de matemática mais atrativas e dinâmicas, contribuindo para uma maior participação dos alunos.

A análise do pré-teste e a realização dos encontros de ensino confirmaram as dificuldades dos discentes na interpretação do enunciado dos problemas, para fazer a escolha da operação adequada, e no desenvolvimento das operações de multiplicação e divisão, no sentido de efetuar com propriedades e algoritmos.

Durante a análise do pós-teste, constatamos que a formulação adequada da sentença de modelação do problema propiciou com mais frequência o acerto na escolha da operação adequada para solucioná-lo. Isso contribuiu para que os alunos fornecessem os resultados de forma significativa e autônoma.

Ressaltamos que, a cada diagnóstico aplicado no decorrer da experimentação fazíamos um ponto de reflexão de nossas proposições, e as revisões também foram muito importantes para o entendimento conceitual e prático nas resoluções de questões do campo multiplicativo.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta seção analisaremos os resultados dos instrumentos de produção das informações que utilizaremos na aplicação da sequência didática. O tratamento estatístico dos dados que serão obtidos na fase de experimentação será realizado por meio da comparação percentual dos resultados do pré-teste e do pós-teste, com análise de índice de acertos, erros e itens em branco, por questão e por estudante. Neste momento analisaremos também os tipos de erros cometidos no pós-teste com base em nossa revisão de estudos e no estudo diagnóstico. Com isso, esperamos realizar uma análise quantitativa e, ao mesmo tempo, qualitativa, utilizando os referenciais teóricos colocados nos primeiros capítulos deste trabalho, apontando quais as possíveis dificuldades em resolução de problemas com estrutura multiplicativa com números naturais, especialmente com duas operações, e quais habilidades os estudantes possam ter desenvolvido a partir de nossa sequência didática.

Por fim, faremos uso do teste de hipóteses para amostra dependente, de modo a obter conclusões estatísticas em relação ao nosso experimento. O Teste Exato de Fisher será utilizado como complemento para sondar a existência de relação entre o desempenho dos estudantes nos testes e as respostas do questionário socioeducacional. Os resultados dos testes e do questionário serão sistematizados em quadros, tabelas e gráficos.

Para validar o nosso experimento, verificaremos, por intermédio dos resultados se conseguimos alcançar o objetivo apresentado no início do texto, o qual se refere a: analisar os possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 6º ano do ensino fundamental na resolução de questões envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais e se conseguimos responder a indagação: que tipo de efeito a aplicação de uma sequência didática por atividades experimentais pode provocar no desempenho de estudantes de uma turma do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas multiplicativos com números naturais?

6.1 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Iniciamos a análise dos dados da turma realizando o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* dos testes multiplicativos que estão apresentadas no quadro 68.

Quadro 68 – Confronto da análise a priori e análise a posteriori dos testes multiplicativos continua

ATIVIDADES	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
1	Espera-se que os estudantes tenham mais facilidade para identificar quando, por meio da multiplicação, uma igualdade permanece verdadeira, no entanto, existem as dificuldades acerca da operação multiplicação ou da aplicação da operação, que provavelmente alguns grupos podem apresentar.	A atividade de multiplicação ocorreu de maneira mais naturalmente. Como teve a aplicação da sequência didática aditiva a princípio, os estudantes não apresentaram dificuldades, observaram a regularidade das questões multiplicativas, fazendo analogia dessa atividade com as atividades da etapa aditiva do experimento.	Positiva
2	O esperado é que os estudantes não apresentem dificuldades em observar que dividindo os dois membros de uma igualdade por um mesmo número diferente de zero, a igualdade permanecerá verdadeira.	Nesta segunda atividade os discentes utilizaram a primeira atividade e a experiência com a atividades da parte aditiva como modelo e não apresentaram muitas dificuldades para redigir as conclusões, entretanto ainda que as conclusões se aproximassem do esperado, ainda tivemos que intervir em alguns aspectos, tais como a semântica das operações, palavras que representam operações, tivemos muitos erros, mas os erros refletiam conclusões incompletas, que poderiam ser consideradas parcialmente válidas e dificuldade para nomear a operação utilizada.	Positiva
3	A atividade poderá apresentar obstáculos operacionais, na medida em que o valor desconhecido ocupe diferentes posições. A mesma requer habilidades e conhecimento de conceitos, algoritmos e regras para resolução das sentenças que vão além dos presentes nas atividades anteriores.	Os estudantes apresentaram algumas dificuldades, principalmente nas questões algébricas, onde tivemos que fazer intervenções exemplificando com a igualdade. Por mais que tivessem dúvidas, fizeram analogia dessa atividade com a atividade da etapa aditiva, mostrando que as habilidades adquiridas nas atividades anteriores serviram de base para a resolução dessa atividade.	Positiva

4	Presumimos que os alunos sejam capazes de perceber a seguinte relação: **quantidade de mercadoria multiplicada pelo Preço por unidade resulta no Preço total a pagar.** Os estudantes podem enfrentar desafios na compreensão de como realizar esta tarefa, sendo que ela está relacionada ao conceito multiplicativo e envolve situações matemáticas distintas das atividades anteriores (por exemplo, a x b = c; a ÷ b = c).	Os estudantes não apresentaram dificuldades em resolver essa atividade e conseguiram chegar à relação fundamental de compra e venda rapidamente, e conseguindo escolher a operação adequada por meio da elaboração da sentença natural, em alguns casos, deixando evidente que as práticas anteriores serviram de base para a realização dessa atividade.	**Positiva**
5	Os alunos devem praticar e desenvolver a aprendizagem adquirida na realização da atividade 4, de redescoberta composta por questões norteadoras que facilitam a percepção da relação entre a quantidade de mercadoria, o valor unitário da mercadoria e o valor a pagar. Esta atividade de aprofundamento é composta de problemas aritméticos e os algébricos, do tipo a x ? = c, e ? x b = c.	Nessa atividade de aprofundamento, os estudantes não apresentaram grandes dificuldades. Associaram as questões dessa atividade com as questões da atividade anterior, conseguindo resolver sem intervenções. As dúvidas que surgiram foram a respeito das questões algébricas, mas conseguiram resolver com a elaboração da sentença natural, onde percebiam que deveria fazer a inversão da operação presente na questão.	**Positiva**
6	É esperado que os estudantes possuam conhecimento e habilidade suficientes para resolver as questões sem depender dos itens presentes nas atividades de redescoberta. A atividade 6 tem o propósito de reforçar as estratégias aprendidas nas aulas anteriores e permitir que os alunos desenvolvam suas próprias abordagens compreendendo que a melhor forma de organizar os dados é traduzindo-os para a linguagem matemática. Desejamos que os estudantes descubram a relação existente, na qual a **quantidade de agrupamento multiplicada pela quantidade de elementos de cada agrupamento resulta no total de elementos.**	Nessa atividade, os estudantes não apresentaram dificuldades em identificar a relação entre a quantidade de agrupamentos, a quantidade de elementos de cada agrupamento e o resultado total de elementos, e conseguiram por meio do uso dos itens interrogativos, preencher o quadro no final da atividade e escrever as conclusões alcançadas, afirmando que para determinar a quantidade total de elementos é necessário multiplicar a quantidade de agrupamentos pela quantidade de elementos de cada agrupamento.	**Positiva**
7	Consideramos que nas questões com a parte algébrica os alunos apresentem mais dificuldades, em virtude de envolverem a operação de divisão, a qual é mais desafiadora para os alunos, ou seja, demonstram mais dificuldades na sua resolução.	Nessa atividade de aprofundamento, os estudantes não apresentaram dificuldades. Associaram as questões dessa atividade com as questões da atividade anterior, conseguindo resolver sem intervenções. As dúvidas que surgiram foram a respeito das questões algébricas, mas conseguiram resolver as mesmas com a elaboração da sentença natural, onde identificavam a necessidade da inversão da operação presente na questão.	**Positiva**

8	Presumimos que os alunos sejam capazes de apontar a seguinte relação: **quantidade de prestações multiplicado pelo valor de cada prestação resulta no valor total a pagar.** Os estudantes podem não enfrentar dificuldades ao realizar esta tarefa, sendo que ela está ligada ao conceito de multiplicação e apresenta situações matemáticas semelhantes as atividades anteriores (por exemplo, a x b = c; a ÷ b = c).	Nessa atividade, os estudantes não apresentaram dificuldades em identificar a relação entre a quantidade de prestações, o valor de cada prestação e o valor total a pagar, e conseguiram por meio do uso dos itens interrogativos, preencher o quadro no final da atividade e escrever as conclusões alcançadas, afirmando que para determinar o valor total a pagar é necessário multiplicar a quantidade de prestações pelo valor de cada prestação.	**Positiva**
9	Acreditamos que as questões que envolvem a parte algébrica sejam mais desafiadoras, visto que envolvem a operação de divisão, a qual os alunos demonstram mais dificuldades na resolução.	Nessa atividade de aprofundamento, os estudantes não apresentaram dificuldades. Associaram as questões dessa atividade com as questões da atividade anterior, conseguindo resolver sem intervenções. As dúvidas que surgiram foram a respeito das questões algébricas, mas conseguiram resolvê-las com a elaboração da sentença natural, onde identificavam a necessidade de inverter a operação presente na questão.	**Positiva**
10	Acreditamos que ao final dessa atividade, os alunos compreendam que o total de quadradinhos que forma cada figura é igual ao produto do número de quadradinhos das linhas pelo número de quadradinhos das colunas.	Os discentes não apresentaram dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, na medida em que tinham apenas que contar a quantidade de quadradinhos em cada linha e coluna dos retângulos na malha quadriculada e depois determinar a quantidade total de quadradinhos contida em cada retângulo. Os alunos não tiveram dificuldades em observar as regularidades presentes no preenchimento do quadro da atividade e conseguiram chegar à conclusão de que o total de quadradinhos contidos em um retângulo é igual a multiplicação do número de quadradinhos em cada linha pelo número de quadradinhos em cada coluna.	**Positiva**
11	Esperamos que o aluno seja capaz de responder a atividade de aprofundamento com menos dificuldades. Porém, é possível que eles apresentem um pouco de dificuldade em resolver os problemas algébricos, sendo que para obter o resultado procurado, devem utilizar a operação de divisão.	Essa é atividade de aprofundamento, os estudantes não apresentaram dificuldades. Associaram as questões dessa atividade com as questões da atividade anterior, conseguindo resolver sem intervenções. As dúvidas que surgiram foram a respeito das questões algébricas, mas conseguiram resolver as mesmas com facilidade, após a elaboração da sentença natural, onde identificavam a necessidade de inverter a operação presente na questão.	**Positiva**

12	A combinação dos elementos certamente apresentará desafios aos estudantes. Além disso, as questões com 3 etapas são formadas por várias operações de multiplicação, o que pode gerar outro obstáculo. É essencial ter domínio da multiplicação ou empregar um pensamento combinatório para resolver essas questões.	Os estudantes perceberam as regularidades presentes no preenchimento do quadro no final da atividade e grande parte dos grupos conseguiram formalizar a conclusão esperada de que o total de etapas é igual ao produto entre as etapas independentes.	**Positiva**
13	Esperamos que os alunos resolvam facilmente as questões que utilizam o PFC presente nas questões aritméticas e apresentem um pouco mais de dificuldade nas questões algébricas, que possuem a necessidade de dividir.	Os discentes apresentaram dificuldades na resolução das questões algébricas, pois tinham que determinar o número de possibilidades de uma etapa conhecendo o número de possibilidades de uma ou duas etapas e o total de possibilidades, ou seja, para determinar a solução do problema era necessária a ideia de reversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão.	**Positiva**
14	Esta atividade implica na resolução de problemas de multiplicação algébrica em situações com valores monetários, sem o auxílio de elementos interrogativos. Isso pode apresentar desafios para os alunos, pois as palavras interrogativas costumam guiar o processo de resolução. No entanto, acredita-se que as habilidades adquiridas nas atividades anteriores possam ajudar na compreensão desta tarefa e que os alunos possam identificar as relações presentes nas formulações dos problemas, permitindo que eles tenham sucesso na resolução deles.	Os estudantes não apresentaram dificuldades no desenvolvimento desta atividade. Por se tratar de uma atividade com mais de uma operação, tinham que descobrir o valor unitário em questão para depois continuar com a resolução da questão contendo valores monetários. Percebemos que os erros numéricos no procedimento algorítmico da multiplicação e divisão diminuíram bastante, em virtude das atividades aplicadas anteriormente. As experiências adquiridas nas atividades anteriores serviram de suporte para a realização dessa atividade.	**Positiva**
15	Com as relações estabelecidas nas atividades anteriores e apesar da ausência de itens interrogativos, os quais na maioria das vezes direcionam o processo de resolução dos problemas, consideramos que os alunos não enfrentarão dificuldades para solucionar estes problemas, visto que situações similares foram abordadas em outras atividades.	Os estudantes não apresentaram dificuldades no desenvolvimento desta atividade. Por se tratar de uma atividade com mais de uma operação, precisavam descobrir o valor unitário em questão para depois continuar com a resolução da questão sem valores monetários. Percebemos que os erros numéricos no procedimento algorítmico da multiplicação e divisão diminuíram bastante, em virtude das atividades aplicadas anteriormente. As experiências adquiridas nas atividades anteriores serviram de suporte para a realização dessa atividade.	**Positiva**

Fonte: Experimentação (2023)

A análise *a posterior* confirmou a maioria dos comportamentos esperados e descritos na análise *a priori*, resultando em validações positivas. As conclusões e observações alinham-se de maneira consistente com as hipóteses inicialmente formuladas para a turma.

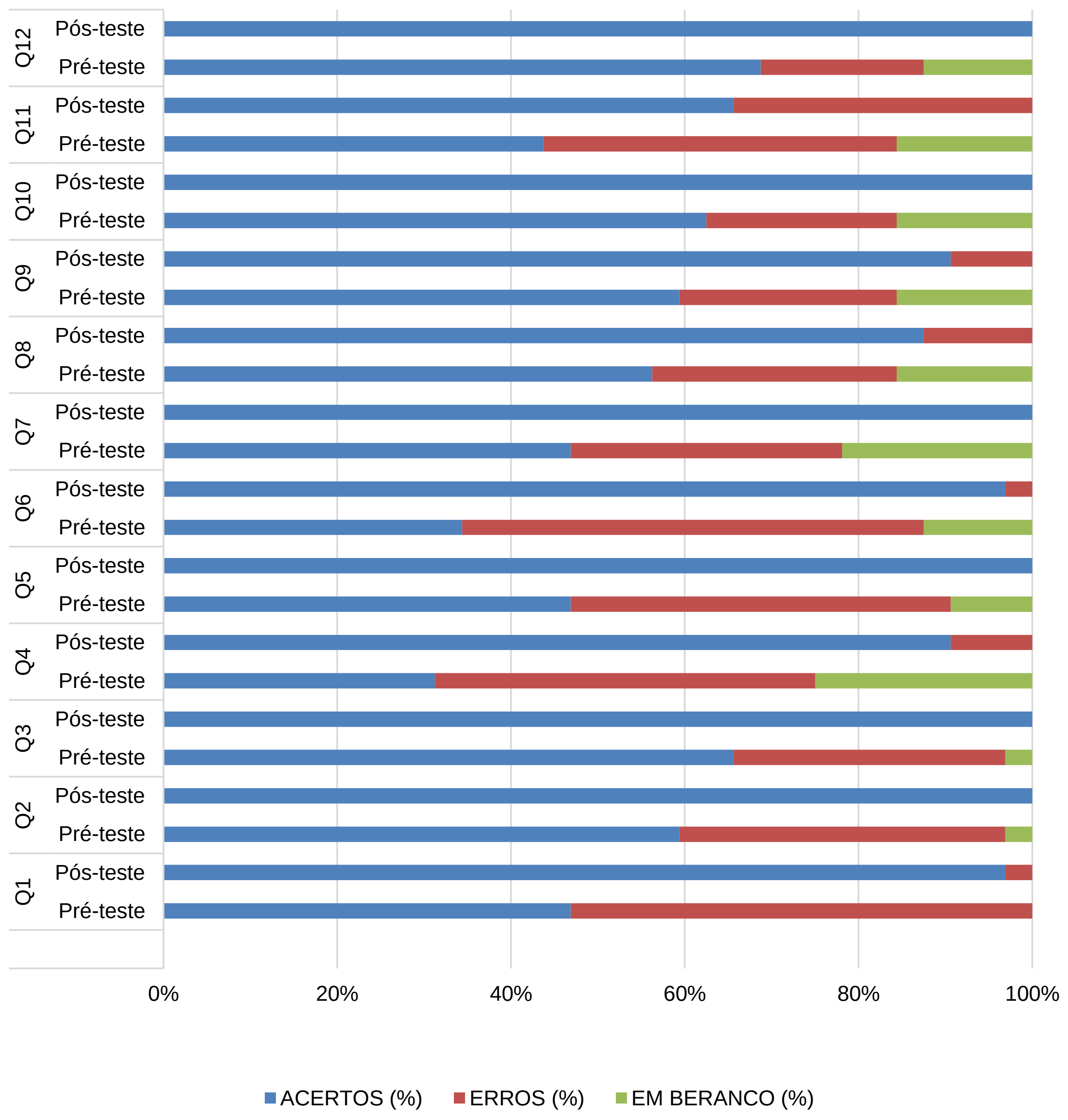
Continuamos a análise observando os percentuais de acertos (quando o estudante apresentou uma resolução e o resultado estava correto), erros (quando o estudante apresentou uma resolução e o resultado não estava correto) e em branco (quando o estudante não apresentou nenhuma resolução) em cada questão dos testes (pré e pós-teste). Também apresentamos a classificação de cada problema em aritmético, algébrico e a sentença natural correspondente a cada situação proposta.

Quadro 69 – Desempenho por questões nos testes

QUESTÃO	TIPO	SENTEÇA	ACERTOS (%)		ERROS (%)		EM BRANCO (%)	
			Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Q1	Aritmética	3 x 470 =	46,88	96,88	53,12	3,12	0	0
Q2	Algébrica	3 x ? = 99	59,38	100,00	37,50	0	3,12	0
Q3	Aritmética	6 x 5 = ?	65,63	100,00	31,25	0	3,12	0
Q4	Algébrica	6 x ? = 936	31,25	90,63	43,75	9,37	25,00	0
Q5	Algébrica	? x 8 = 40	46,88	100,00	43,75	0	9,37	0
Q6	Algébrica	? x 30 = 150	34,38	96,88	53,12	3,12	12,50	0
Q7	Algébrica	4 x ? = 32	46,88	100,00	31,25	0	21,87	0
Q8	Aritmética	5 x 25 = ?	56,25	87,50	28,13	12,50	15,62	0
Q9	Aritmética	7 x 1200 = ?	59,38	90,63	25,00	9,37	15,62	0
Q10	Aritmética	3 x 2 = ?	62,50	100,00	21,88	0	15,62	0
Q11	Aritmética	8 x 16 = ?	43,75	65,62	40,63	34,38	15,62	0
Q12	Aritmética	5 x 6 = ?	68,75	100,00	18,75	0	12,5	0

Fonte: Experimentação (2023)

Gráfico 24 – Desempenho por questões nos testes



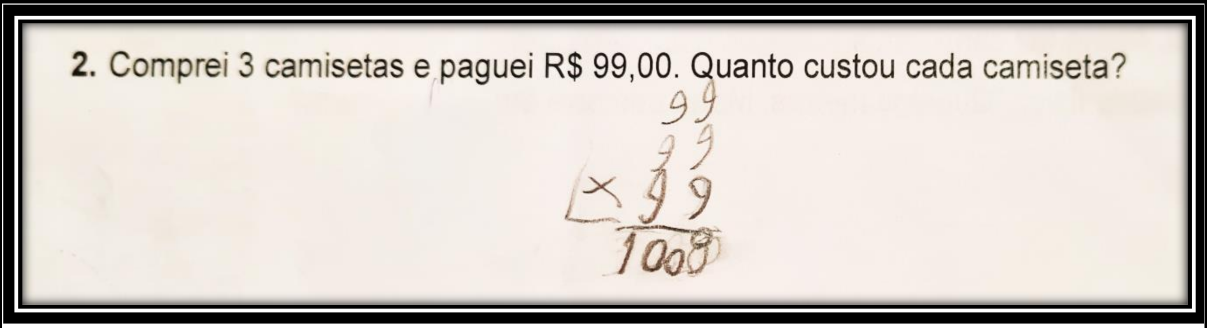
Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com os dados apresentados no quadro 69 e gráfico 24 percebemos que houve um aumento do percentual de acertos em todas as questões do pós-teste em comparação ao pré-teste. Sendo que as questões “Q2”, “Q3”, “Q5”, “Q7”, “Q10” e “Q12” foram os casos em que o percentual de acertos correspondeu a 100% no pós-teste. As questões “Q4” e “Q6” apresentaram a maior crescente de acertos, onde o percentual de acertos no pré-teste foram de 31,25%, 34,38% e no pós-teste foram de 90,63%, 96,88% respectivamente as questões. Destacamos a questão “Q12” como a que teve o maior índice de erro com 18,75% no pré-teste e obtiveram um percentual de 0% de erro no pós-teste. No caso da questão “Q12” no pré-teste, o erro predominante foi na organização e execução da propriedade algorítmica.

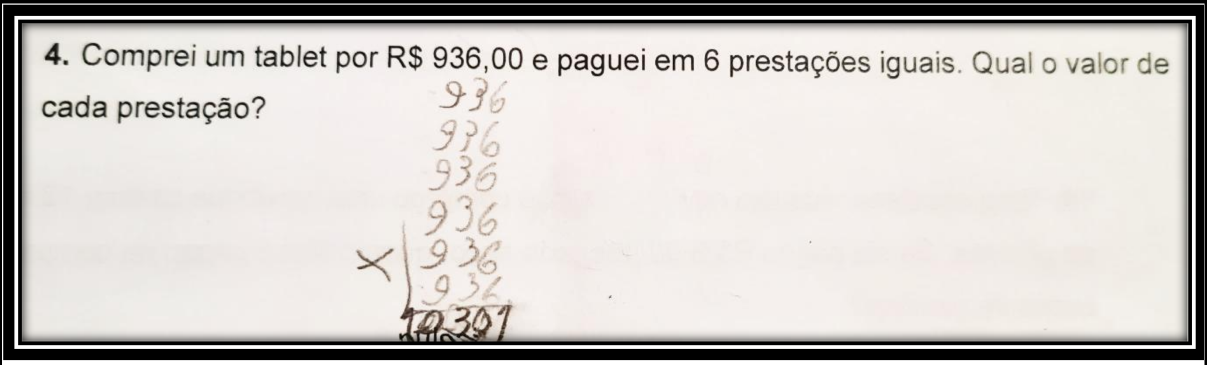
O baixo percentual de acerto nas questões mencionadas acima pode ser justificado pelo fato delas serem algébricas. Além disso, as questões “Q4” e “Q6” trazem indícios falsos da operação usada para resolver o problema, sendo necessária a ideia de reversibilidade entre as operações de multiplicação e divisão para solucioná-lo. Já a questão “Q12” é um problema da operação de multiplicação, mas sendo necessário o conhecimento de outra área da matemática, configuração retangular, para determinar a operação adequada para solucionar a questão, no caso de uma questão algébrica. Segundo Sá (2003, p. 76), os problemas que usam uma operação são mais difíceis para as crianças do que os problemas de uma operação.

A amostra apresentou um maior percentual de acerto nos problemas aritméticos do que nos algébricos no pré-teste multiplicativo. Os erros no pré-teste multiplicativo estão ligados a interpretação do enunciado do problema, ou seja, a escolha da operação adequada para solucionar a questão, isso se deve ao fato de algumas questões serem algébricas e incongruentes semanticamente. A figura a seguir apresenta exemplos desse tipo de erro cometido por alguns alunos no pré-teste multiplicativo.

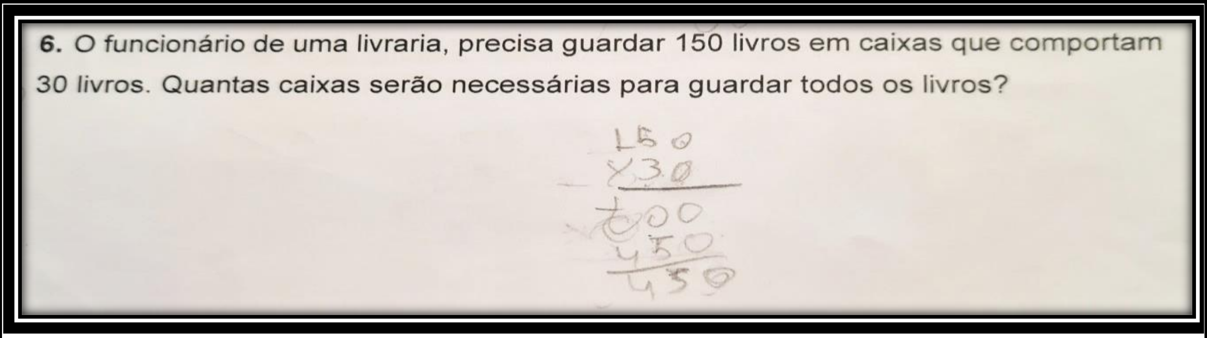
Figura 14 – Exemplos de erros relacionais no pré-teste multiplicativo continua



Resolução da questão Q2 do aluno D_4

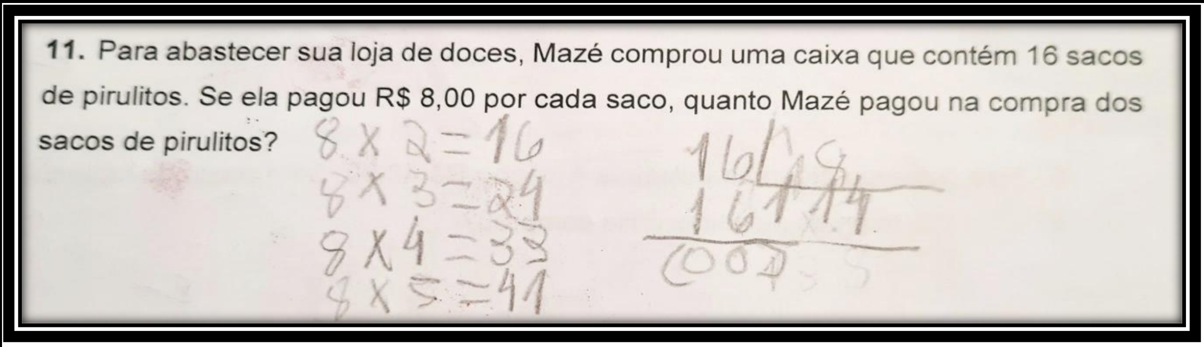


Resolução da questão Q4 do discente D_4



6. O funcionário de uma livraria, precisa guardar 150 livros em caixas que comportam 30 livros. Quantas caixas serão necessárias para guardar todos os livros?

Resolução da questão Q6 do discente D_{18}



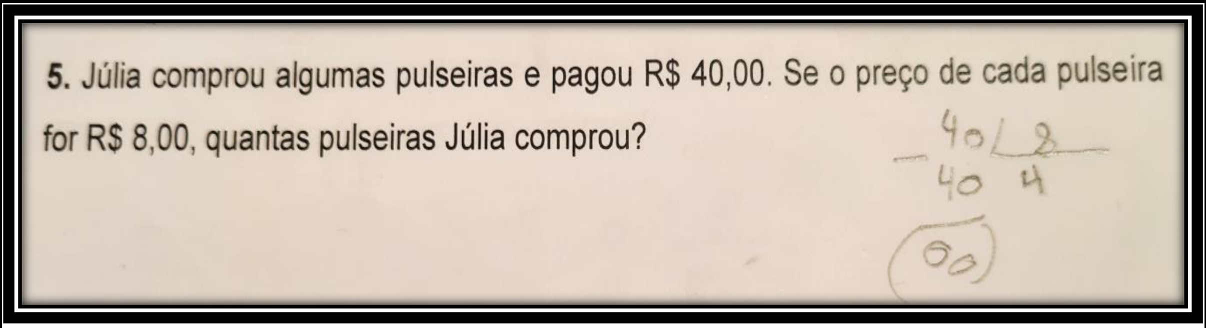
11. Para abastecer sua loja de doces, Mazé comprou uma caixa que contém 16 sacos de pirulitos. Se ela pagou R$ 8,00 por cada saco, quanto Mazé pagou na compra dos sacos de pirulitos?

Resolução da questão Q11 do discente D_{20}

Fonte: Experimentação (2023)

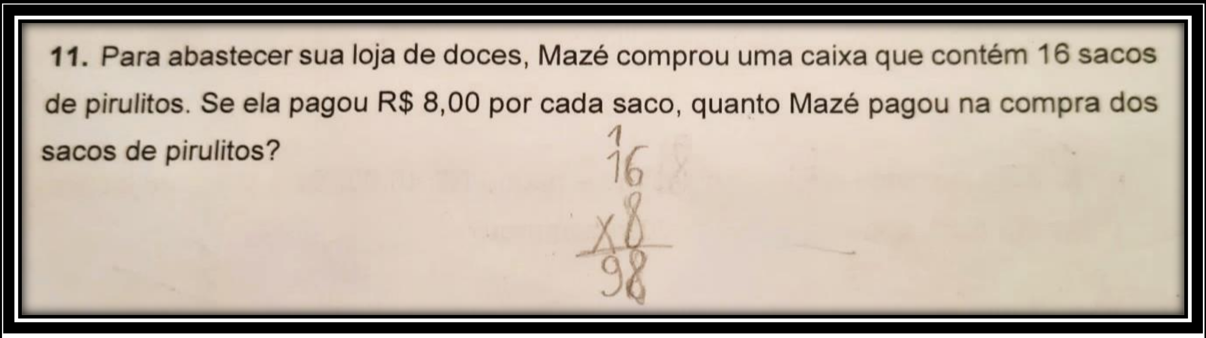
Os discentes também cometeram falhas nos procedimentos algorítmicos das operações de multiplicação e divisão nas questões do pré-teste multiplicativo, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 15 – Exemplos de erros numéricos no pré-teste multiplicativo continua



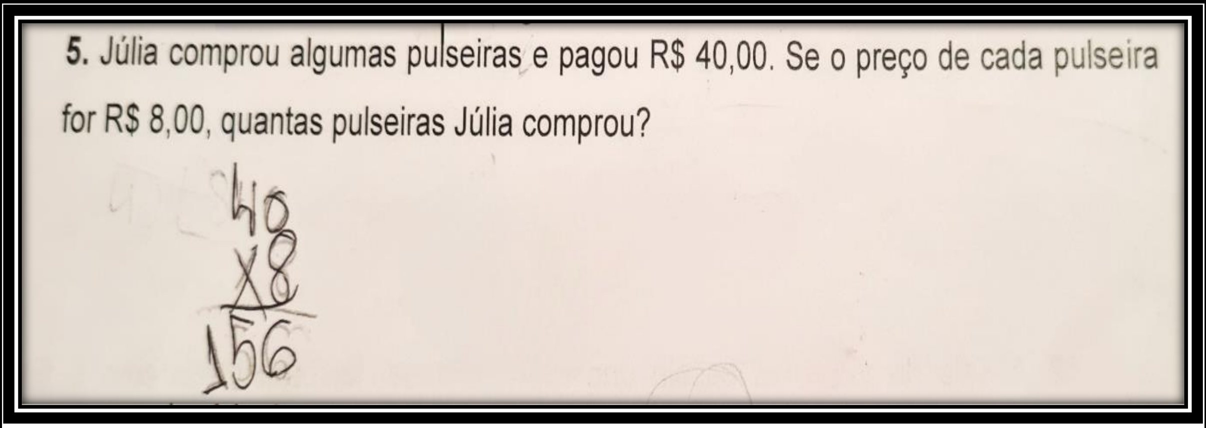
5. Júlia comprou algumas pulseiras e pagou R$ 40,00. Se o preço de cada pulseira for R$ 8,00, quantas pulseiras Júlia comprou?

Resolução da questão Q5 do aluno D_7

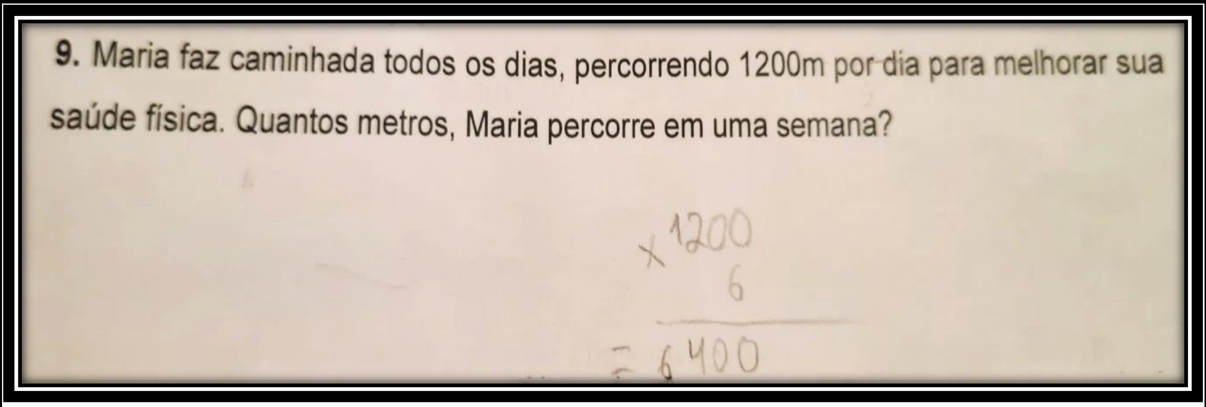


11. Para abastecer sua loja de doces, Mazé comprou uma caixa que contém 16 sacos de pirulitos. Se ela pagou R$ 8,00 por cada saco, quanto Mazé pagou na compra dos sacos de pirulitos?

Resolução da questão Q11 do discente D_8



Resolução da questão Q5 do discente D_{21}

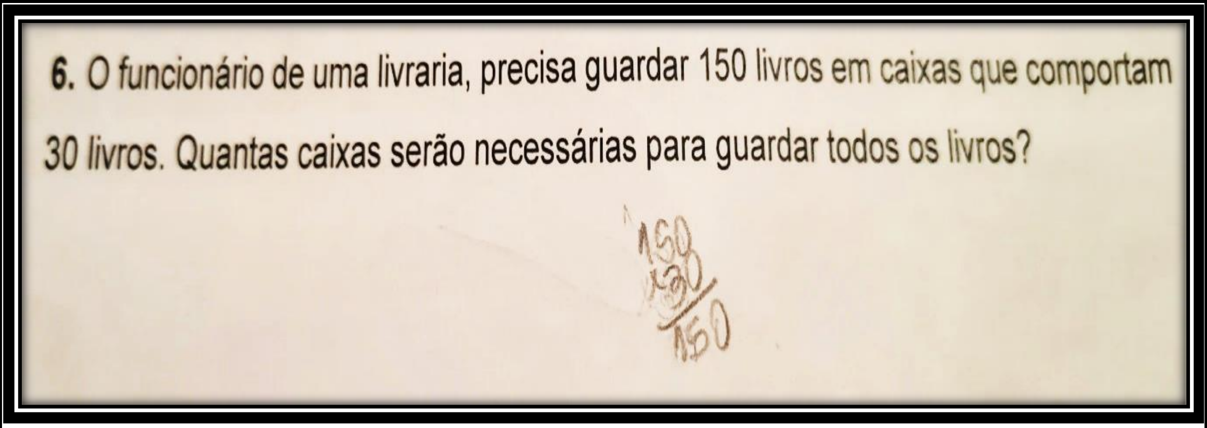


Resolução da questão Q9 do discente D_{24}

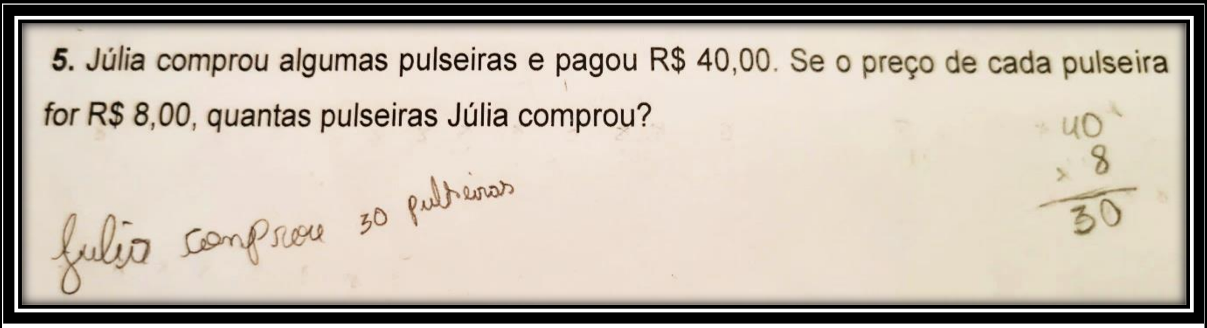
Fonte: Experimentação (2023)

Alguns discentes cometeram equívocos tanto na escolha da operação quanto no procedimento algorítmico das operações de multiplicação e divisão, segundo apresentamos na figura a seguir.

Figura 16 – Exemplos de erros relacionais e numéricos no pré-teste multiplicativo continua



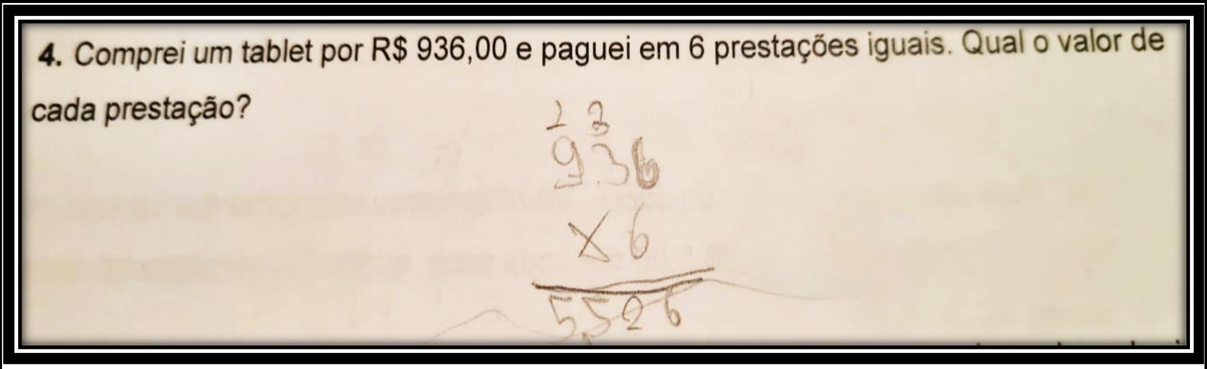
Resolução da questão Q6 do aluno D_5


5. Júlia comprou algumas pulseiras e pagou R$ 40,00. Se o preço de cada pulseira for R$ 8,00, quantas pulseiras Júlia comprou?

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times\ 8 \\ \hline 30 \end{array}$$

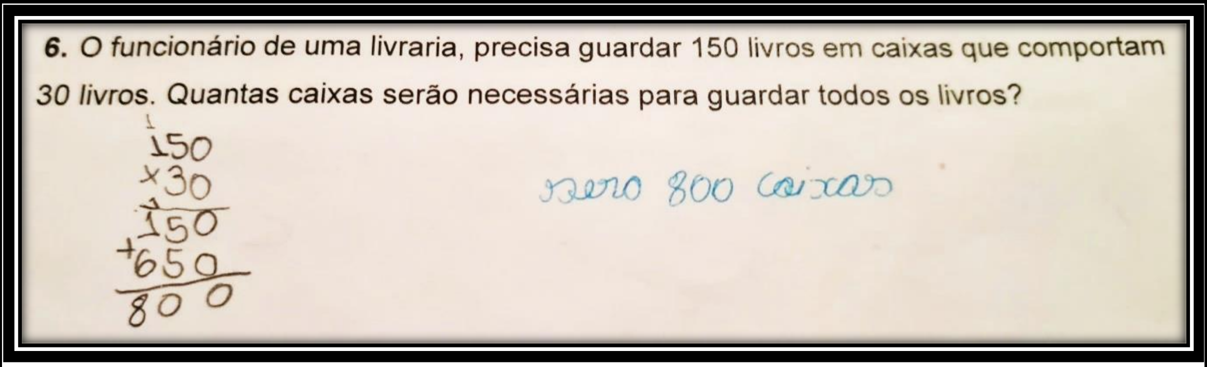
Julia comprou 30 pulseiras

Resolução da questão Q5 do discente D_{16}


4. Comprei um tablet por R$ 936,00 e paguei em 6 prestações iguais. Qual o valor de cada prestação?

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3} \\ 936 \\ \times\ 6 \\ \hline 5526 \end{array}$$

Resolução da questão Q4 do discente D_{18}


6. O funcionário de uma livraria, precisa guardar 150 livros em caixas que comportam 30 livros. Quantas caixas serão necessárias para guardar todos os livros?

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 30 \\ \hline 150 \\ +650 \\ \hline 800 \end{array}$$

sero 800 caixas

Resolução da questão Q6 do discente D_{28}

Fonte: Experimentação (2023)

No pós-teste multiplicativo o percentual de acertos aumentou, o percentual de erros diminui e nenhuma questão foi deixada em branco. As questões em que os discentes apresentaram o maior percentual de acertos no pós-teste multiplicativo foram as questões “Q1”, “Q2”, “Q3”, “Q5”, “Q6”, “Q7”, “Q10” e “Q12”. Toda a amostra acertou as questões “Q2”, “Q3”, “Q5”, “Q7”, “Q10” e “Q12”, como já citadas e o percentual de acertos nas outras questões variou entre 65,62% e 96,88%.

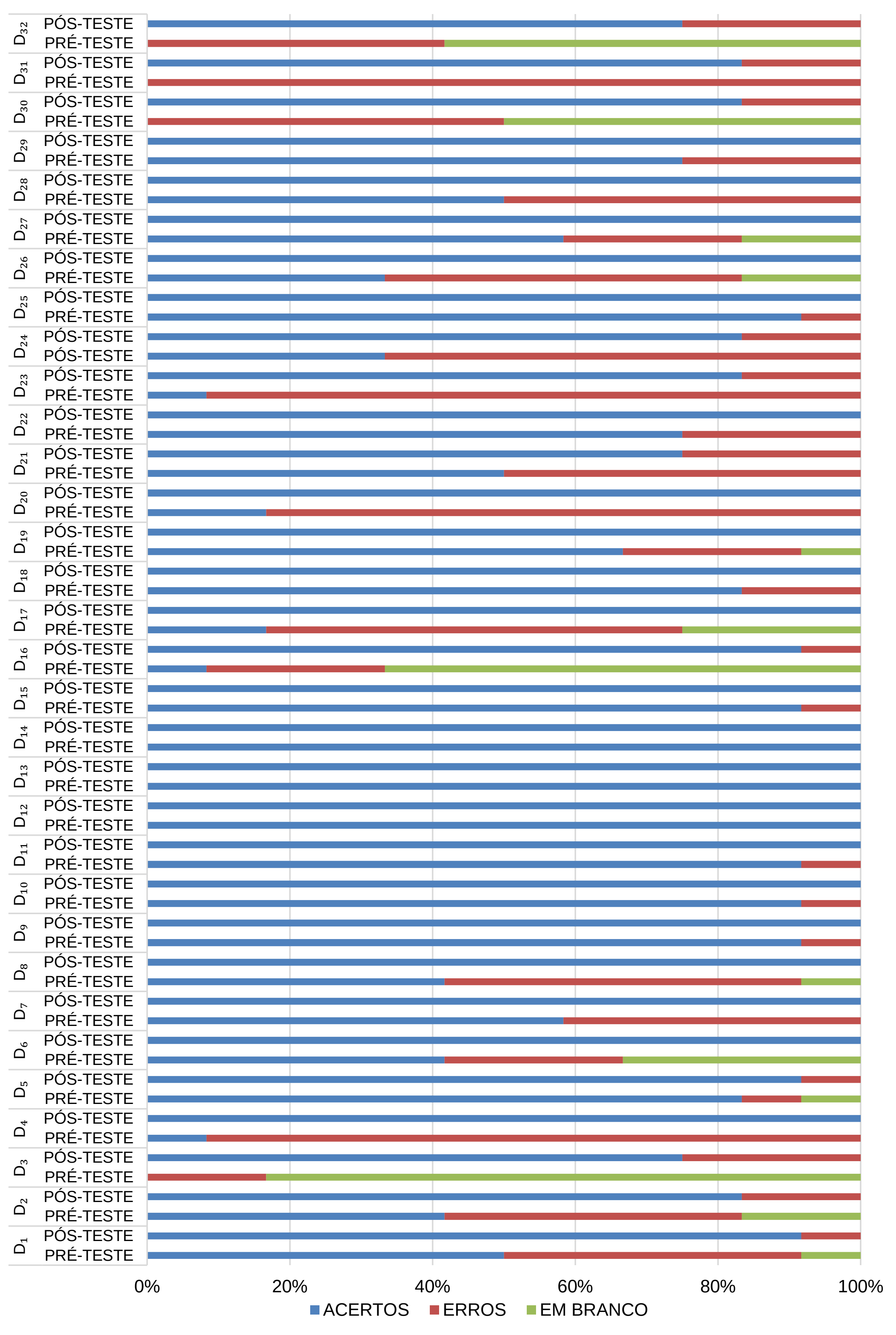
Apesar dos discentes apresentarem um desempenho melhor nas questões aritméticas do que nas algébricas, houve um aumento percentual de acertos muito maior nas questões algébricas do pós-teste multiplicativo do que nas aritméticas. A seguir apresentamos os resultados dos testes multiplicativos de acordo com o desempenho por aluno.

Quadro 70 – Desempenho por aluno nos testes multiplicativos

DISCENTES	ACERTOS (%)		ERROS (%)		EM BRANCO (%)	
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
D_1	50,00	91,67	41,67	8,33	8,33	0
D_2	41,67	83,33	41,67	16,67	16,66	0
D_3	0	75,00	16,67	25,00	83,33	0
D_4	8,33	100,00	91,67	0	0	0
D_5	83,34	91,67	8,33	8,33	8,33	0
D_6	41,67	100,00	25,00	0	33,33	0
D_7	58,33	100,00	41,67	0	0	0
D_8	41,67	100,00	50,00	0	8,33	0
D_9	91,67	100,00	8,33	0	0	0
D_{10}	91,67	100,00	8,33	0	0	0
D_{11}	91,67	100,00	8,33	0	0	0
D_{12}	100,00	100,00	0	0	0	0
D_{13}	100,00	100,00	0	0	0	0
D_{14}	100,00	100,00	0	0	0	0
D_{15}	91,67	100,00	8,33	0	0	0
D_{16}	8,33	91,67	25,00	8,33	66,67	0
D_{17}	16,67	100,00	58,33	0	25,00	0
D_{18}	83,33	100,00	16,67	0	0	0
D_{19}	66,67	100,00	25,00	0	8,33	0
D_{20}	16,67	100,00	83,33	0	0	0
D_{21}	50,00	75,00	50,00	25,00	0	0
D_{22}	75,00	100,00	25,00	0	0	0
D_{23}	8,33	83,33	91,67	16,67	0	0
D_{24}	33,33	83,33	66,67	16,67	0	0
D_{25}	91,67	100,00	8,33	0	0	0
D_{26}	33,33	100,00	50,00	0	16,67	0
D_{27}	58,33	100,00	25,00	0	16,67	0
D_{28}	50,00	100,00	50,00	0	0	0
D_{29}	75,00	100,00	25,00	0	0	0
D_{30}	0	83,33	50,00	16,67	50,00	0
D_{31}	0	83,33	100	16,67	0	0
D_{32}	0	75,00	41,67	25,00	58,33	0

Fonte: Experimentação (2023)

Gráfico 25 – Desempenho por aluno nos testes multiplicativos



Fonte: Experimentação (2023)

No pré-teste multiplicativo, 60% dos discentes (D_3, D_4, D_{16}, D_{17}, D_{20}, D_{23}, D_{24}, D_{26}, D_{30}, D_{31} e D_{32}) tiveram menos de 35% de acerto. O número de erros foi maior do que o de questões em branco, demonstrando que, mesmo não tendo acertado as questões, ao discentes realizaram algum tipo de tentativa de resolução. Por outro lado, os discentes (D_1, D_5, D_7, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{18}, D_{19}, D_{21}, D_{22}, D_{25}, D_{27}, D_{28} e D_{29}) apresentaram índices de acertos superior a 50%, mostrando um bom entendimento sobre o assunto, mesmo antes de receberem orientação sobre ele neste ano.

Os alunos D_3, D_{30}, D_{31} e D_{32} não acertaram nenhuma das questões do pré-teste multiplicativo, porém D_3 e D_{32} progrediram para 75% de acerto no pós-teste; D_{30} e D_{31} progrediram para 83,33% de acerto no pós-teste multiplicativo. Além destes, os alunos D_4, D_{16} e D_{23} tiveram no primeiro teste apenas 8,33% de acerto, já no pós-teste multiplicativo os discentes progrediram para 100%, 91,67% e 83,33% de acerto, respectivamente. E ainda os alunos D_{17} e D_{20} que, embora tenham obtido 16,67% de acertos no pré-teste multiplicativo, no pós-teste melhoraram significativamente seus índices de acertos para 100%. A seguir apresentamos a análise dos tipos de erros nos testes multiplicativos

6.1.1 Categorias de Erros nos Testes Multiplicativos

Nesta subseção apresentamos os tipos de erros cometidos pelos discentes nas questões dos testes multiplicativos, identificando os fatores que ocasionaram tais equívocos. Com o intuito de analisarmos esses erros elegemos algumas categorias, como: elaboração da sentença da modelação ou natural da questão, cálculo relacional e cálculo numérico.

Para a análise das sentenças verificamos se os estudantes realizaram sua elaboração de forma correta ou incorreta ou não as elaboraram. Já no que se refere à escolha e efetivação da operação analisamos os acertos, erros e itens em branco. O quadro a seguir contém as três categorias de erros mencionadas anteriormente.

Quadro 71 – Categorias de erros por questão nos testes multiplicativos

QUESTÃO	Tipo	Sentença	Elaboração da sentença natural da questão (%)						Escolha da operação (%)						Efetuar a operação					
			Elaborou sentença adequada		Elaborou sentença inadequada		Não elaborou sentença		Acerto		Erro		Em branco		Acerto		Erro		Em branco	
			Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Q1	Aritmética	3 x 470 =	0	15,63	0	0	100	84,37	96,87	96,87	3,13	3,13	0	0	46,87	96,87	53,13	3,13	0	0
Q2	Algébrica	3 x ? = 99	0	28,13	0	0	100	71,87	65,63	100,00	31,25	0	3,13	0	59,37	100,00	37,50	0	3,13	0
Q3	Aritmética	6 x 5 = ?	3,13	28,13	0	0	96,87	71,87	87,50	96,87	12,50	3,13	0	0	65,62	100,00	31,25	0	3,13	0
Q4	Algébrica	6 x ? = 936	0	15,63	0	0	100	84,37	59,37	100,00	15,63	0	25,00	0	34,37	90,62	40,63	9,38	25,00	0
Q5	Algébrica	? x 8 = 40	0	25,00	0	0	100	75,00	37,50	93,75	37,50	6,25	9,38	0	46,87	100,00	43,75	0	9,38	0
Q6	Algébrica	? x 30 = 150	0	18,75	0	0	100	81,25	34,37	100,00	56,25	0	9,38	0	31,25	100,00	56,25	0	12,50	0
Q7	Algébrica	4 x ? = 32	0	15,63	0	0	100	84,37	65,62	96,87	15,63	3,13	18,75	0	46,87	100,00	31,25	0	21,88	0
Q8	Aritmética	5 x 25 = ?	0	21,87	0	0	100	78,13	78,12	100,00	9,38	0	12,50	0	59,37	90,62	28,13	9,38	12,50	0
Q9	Aritmética	7 x 1200 = ?	0	18,75	0	0	100	81,25	65,62	100,00	18,75	0	15,63	0	56,25	90,62	28,13	9,38	15,62	0
Q10	Aritmética	3 x 2 = ?	0	40,62	0	0	100	59,38	75,00	78,12	9,37	21,88	15,63	0	62,50	100,00	21,88	0	15,62	0
Q11	Aritmética	8 x 16 = ?	0	18,75	0	0	100	81,25	81,25	96,87	6,25	3,13	12,50	0	43,75	65,62	40,63	34,38	15,62	0
Q12	Aritmética	5 x 6 = ?	0	59,37	0	0	100	40,63	81,25	96,87	6,25	3,13	12,50	0	68,75	100,00	18,75	0	12,50	0

Fonte: Experimentação (2023)

A análise do quadro mostra que somente na questão Q3 do pré-teste 3,13% dos discentes elaboram a sentença natural de forma correta, porém no pós-teste, ela foi elaborada de forma correta em quase todas as questões, com um percentual que varia entre 15,63% e 59,37% dos discentes. Isso mostra que os discentes não buscaram colocar em prática os conhecimentos adquiridos anteriormente, no que se refere a elaboração da sentença, com isso, o índice de não elaboração das sentenças no pré-teste foi bastante elevado. As questões Q1, Q3, Q8, Q9, Q10, Q11 e Q12 eram aritméticas e Q2, Q4, Q5, Q6 e Q7 eram algébricas.

Nas questões aritméticas alguns estudantes escolhiam a operação diretamente pela leitura do comando do problema, enquanto nos problemas algébricos a sentença era elaborada no caderno ou mentalmente, com isso obtinham a operação correta para efetuar o cálculo do teste. Essa técnica eles já utilizavam principalmente nas atividades e diagnósticos propostos pelo professor.

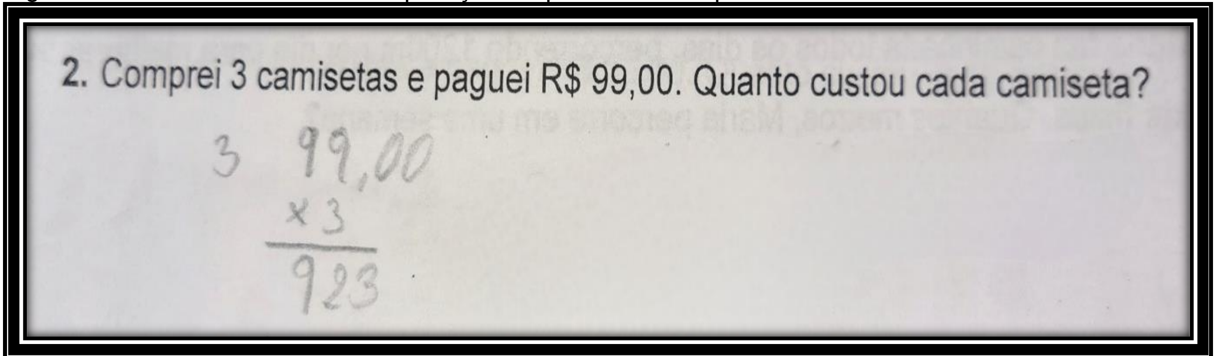
Em relação à escolha da operação, os dados apresentados no quadro mostram uma grande evolução do pré-teste para o pós-teste, tendo em vista que em todas as questões do segundo teste o percentual de acertos foi superior ao primeiro. No que se refere a efetuar a operação, em todas as questões, houve crescimento no percentual de acertos, comparando os valores do pré-teste com o pós-teste.

Esses indícios mostram a relevância da sentença na resolução de um problema, na medida em que a elaboração da sentença auxiliou na escolha da operação de acordo com o tipo de problema, aritmético ou algébrico, e da posição do termo desconhecido.

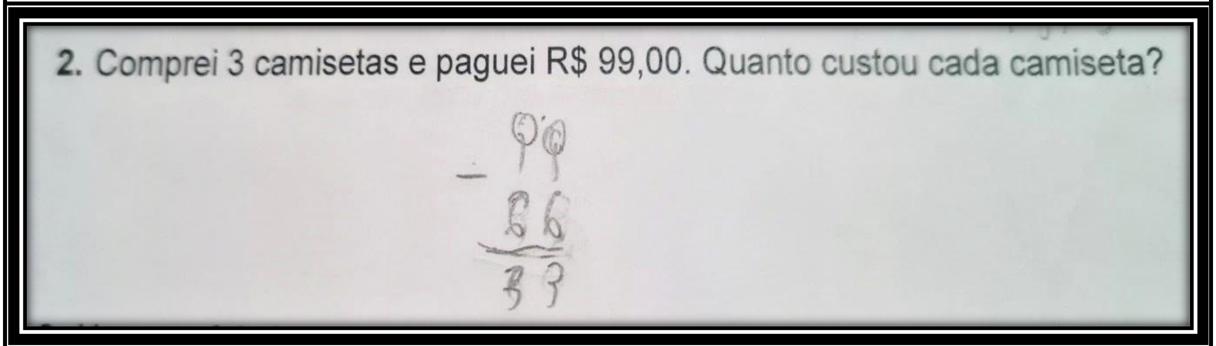
Em 99,74% das resoluções das questões deste primeiro teste multiplicativo não foram elaboradas sentenças, ou seja, essas resoluções pautaram-se na escolha direta da operação e na execução do algoritmo da multiplicação ou divisão. A sequência didática deste experimento era embasada na elaboração da sentença natural do problema, que tinha como objetivo facilitar a escolha da operação adequada para solucionar a questão.

A figura 17 apresenta exemplos de escolha incorreta da operação com a ausência da sentença natural nas questões do pré-teste multiplicativo.

Figura 17 – Erros na escolha da operação do pré-teste multiplicativo



Resolução da questão Q2 do discente D_3



Resolução da questão Q2 do discente D_{17}

Fonte: Experimentação (2023)

O percentual de erro na escolha da operação no pré-teste multiplicativo que era de 18,49% diminui para 3,65% no pós-teste. Essa diminuição do erro na escolha da operação adequada para resolver as questões do pós-teste multiplicativo deve-se ao fato de grande parte dos discentes ter elaborado primeiramente a sentença natural da questão para depois escolher, com base na sentença, a operação adequada para resolver o mesmo. Os erros na escolha da operação, nos testes, foram maiores nas questões algébricas do que nas aritméticas. Nas questões Q2, Q4, Q6, Q8 e Q9 do pós-teste multiplicativo o percentual de erro na escolha da operação foi zero, onde podemos verificar que as três primeiras questões eram algébricas e as duas últimas aritméticas. Essa situação foi evidenciada também nas pesquisas de Santos (2017) e Oliveira (2023).

A sequência didática desta experimentação foi baseada em Sá (2003), pois os problemas aritméticos são os que usam durante o processo de resolução, de forma implícita ou explícita, as propriedades multiplicativas da igualdade, e os algébricos são os que não usam essa propriedade de forma explícita ou implícita. Essa escolha teve como objetivo facilitar a seleção da operação adequada para solucionar o problema.

No que se refere ao cálculo numérico o percentual de erro no procedimento dos algoritmos das operações de multiplicação e divisão foi de 35,94% no pré-teste multiplicativo e diminui para 5,47% no pós-teste. Os erros mais frequentes nessas operações estavam relacionados a tabuada. Alguns discentes apresentaram erros nos cálculos relacional e numérico. No pré-teste multiplicativo 12,24% das questões foram deixadas em branco, entretanto no segundo teste todas as questões foram respondidas pelos discentes.

A seguir, apresentamos a relação entre a elaboração da sentença natural dos problemas e a escolha da operação adequada para solucionar as questões dos testes multiplicativos.

6.1.2 Elaboração da sentença natural e escolha da operação adequada para solucionar questões Multiplicativas

Nesta subseção apresentamos uma análise por questão da elaboração da sentença natural do problema e da escolha da operação adequada para solucioná-lo nas doze questões dos testes multiplicativos (pré- e pós-testes).

Os testes apresentaram os enunciados dispostos nos quadros abaixo.

Quadro 72 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na primeira questão dos testes multiplicativos

continua

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Um forno elétrico custa R$ 470,00. Qual é o valor de três fornos?</td><td colspan="3">Q1</td><td colspan="3">3 x 470 =</td></tr>
<tr><td colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</td></tr>
<tr><td colspan="3">PRÉ-TESTE</td><td colspan="3">PÓS-TESTE</td></tr>
<tr><td>Elaborou sentença adequada</td><td>Elaborou sentença inadequada</td><td>Não elaborou sentença</td><td>Elaborou sentença adequada</td><td>Elaborou sentença inadequada</td><td>Não elaborou sentença</td></tr>
<tr><td>ESCOLHA DA OPERAÇÃO</td><td>Acerto</td><td>-------</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}, D_{32}</td><td>D_{15}, D_{17}, D_{28}, D_{29}, D_{32}</td><td>-------</td><td>D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{30}, D_{31},</td></tr>
</table>

	Erro	-------	-------	D_{23}			D_{19}
	Em Branco	-------	--------	-------	-------	-------	--------

Fonte: Experimentação (2023)

Na primeira questão do pré-teste multiplicativo nenhum dos discentes elaborou corretamente, nem mesmo formulou incorretamente a sentença natural (3 x 470 = ?). Podemos observar que 100% dos discentes não elaboraram a sentença natural desta questão no pré-teste multiplicativo, sendo que 96,87% acertaram a escolha da operação e 3,13% erraram a escolha no referido teste.

No pós-teste multiplicativo 15,62% elaboraram a sentença natural corretamente e acertaram a escolha da operação. O percentual de discentes que não elaboraram a sentença natural e acertaram a escolha da operação foi de 81,25%. Os discentes que não elaboraram a sentença natural e erraram a escolha da operação, podem ser representados pelo percentual de 3,13% Do total da amostra.

A seguir apresentamos a análise da segunda questão dos testes multiplicativos.

Quadro 73 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na segunda questão dos testes multiplicativos

continua

ENUNCIADO		**NÚMERO DA QUESTÃO**			**SENTENÇA NATURAL**		
Comprei 3 camisetas e paguei R$ 99,00. Quanto custou cada camiseta?		Q2			3 x ? = 99		
		ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL					
		PRÉ-TESTE			**PÓS-TESTE**		
		Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**
ESCOLHA DA OPERAÇÃO	**Acerto**	------	------	D_1, D_2, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{26}, D_{27}, D_{28}	D_2, D_9, D_{15}, D_{23}, D_{25}, D_{28}, D_{29}, D_{31}, D_{32}	------	D_1, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{26}, D_{27}, D_{30},

	Erro	------	------	D_3, D_4, D_{13}, D_{17}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{29}, D_{30}, D_{31}	------	------	------
	Em Branco	------	------	D_{32}	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

Na segunda questão do pré-teste multiplicativo, nenhum aluno elaborou a sentença natural (3 x ? = 99) corretamente. O percentual de discentes que não elaborou a sentença natural e acertou a escolha da operação no pré-teste multiplicativo foi de 65,62%. Os discentes que não elaboraram a sentença natural no pré-teste multiplicativo e erraram a escolha da operação podem ser representados pelo percentual de 31,25%. O percentual de questões que foram deixadas em branco no primeiro teste foi de 3,13% da amostra.

No pós-teste multiplicativo 28,13% dos discentes elaboraram corretamente a sentença natural que representa esta questão. O percentual de discentes que não elaboraram a sentença natural no pós-teste multiplicativo foi de 71,87%, sendo que desses alunos todos acertaram a escolha da operação. E no pós-teste multiplicativo nenhum discente deixou questão em branco.

A seguir, apresentamos a análise da terceira questão dos testes multiplicativos.

Quadro 74 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na terceira questão dos testes multiplicativos
continua

ENUNCIADO		**NÚMERO DA QUESTÃO**			**SENTENÇA NATURAL**		
Uma confeiteira utiliza 6 ovos em cada bolo. Ela deseja fazer 5 bolos. Quantos ovos ela precisa comprar?		Q3			6 x 5 = ?		
		ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL					
		PRÉ-TESTE			**PÓS-TESTE**		
		Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**
ESCOLHA DA	**Acerto**	D_3	------	D_1, D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15},	D_2, D_9, D_{15}, D_{23}, D_{24},	------	D_1, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_{10}, D_{11}, D_{12},

				D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}	D_{25}, D_{28}, D_{29}, D_{32}		D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{26}, D_{27}, D_{30}, D_{31},
	Erro	------	------	D_2, D_6, D_{19}, D_{32}	------	------	D_{19}
	Em Branco	------	------	------	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

Na terceira questão do pré-teste multiplicativo 3,13% dos discentes elaborou a sentença natural (6 x 5 = ?) e o discente acertou a escolha da operação. Os discentes que não elaboraram a sentença natural desta questão no pré-teste multiplicativo representam o percentual de 96,87% da amostra, sendo que 84,37% acertaram a escolha da operação e 12,5% erraram a escolha da operação no referido teste.

No pós-teste multiplicativo 28,12% dos discentes elaboraram corretamente a sentença natural que representa esta questão e acertaram a escolha da operação. O percentual da amostra que não elaborou a sentença natural desta questão no pós-teste multiplicativo foi de 71,88%, sendo que 68,75% desses discentes acertaram a escolha da operação e 3,13% erraram a escolha da operação. No pós-teste multiplicativo nenhum discente deixou essa questão em branco.

A seguir, apresentamos a análise da quarta questão dos testes multiplicativos.

Quadro 75 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na quarta questão dos testes multiplicativos

continua

ENUNCIADO	**NÚMERO DA QUESTÃO**			**SENTENÇA NATURAL**		
Comprei um tablet por R$ 936,00 e paguei em 6 prestações iguais. Qual o valor de cada prestação?	Q4			6 x ? = 936		
	ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL					
	PRÉ-TESTE			**PÓS-TESTE**		
	Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**

ESCOLHA DA OPERAÇÃO	**Acerto**	------	------	D_2, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{27}, D_{28}, D_{29},	D_2, D_{28}, D_{29}, D_{31}, D_{32}	------	D_1, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{30},
	Erro	------	------	D_4, D_{18}, D_{23}, D_{31}, D_{32}	------	------	------
	Em Branco	------	------	D_1, D_3, D_5, D_6, D_{16}, D_{17}, D_{26}, D_{30}	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

A respeito da quarta questão, nenhum dos discentes elaborou a sentença natural corretamente (6 x ? = 936) no pré-teste multiplicativo. O percentual de discentes que não elaborou a sentença natural no pré-teste e acertaram a escolha da operação foi de 59,37% da amostra. Os discentes que não elaboraram a sentença natural e erraram a escolha da operação pode ser representado pelo percentual de 15,63%. A quantidade de discentes que deixou essa questão em branco no pré-teste representa 25% da amostra.

No pós-teste multiplicativo 15,63% da amostra elaborou a sentença corretamente, e todos acertaram a escolha da operação. Os discentes que não elaboraram a sentença natural e acertaram a escolha da operação corresponde a 84,37% da amostra no referido teste.

A seguir, apresentamos a análise da quinta questão dos testes multiplicativos.

Quadro 76 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na quinta questão dos testes multiplicativos

continua

ENUNCIADO	**NÚMERO DA QUESTÃO**	**SENTENÇA NATURAL**
Júlia comprou algumas pulseiras e pagou R$ 40,00. Se o preço de	Q5	? x 8 = 40
	ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL	

cada pulseira for R$ 8,00, quantas pulseiras Júlia comprou?		PRÉ-TESTE			PÓS-TESTE		
		Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**
ESCOLHA DA OPERAÇÃO	**Acerto**	------	------	D_1, D_7, D_8, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{18}, D_{22}, D_{28}, D_{31}	D_2, D_{15}, D_{23}, D_{25}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}	------	D_1, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{27}, D_{32}
	Erro	------	------	D_4, D_5, D_9, D_{10}, D_{16}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{29}, D_{30}, D_{32}		------	D_{19}, D_{26}
	Em Branco	------	------	D_2, D_3, D_6	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

Na quinta questão do pré-teste multiplicativo 37,50% dos discentes não elaboraram a sentença natural (? x 8 = 40) e acertaram a escolha da operação no referido teste. O percentual de discentes que não elaboraram a sentença natural e erraram a escolha da operação foi de 53,13% da amostra. E por fim, os discentes que deixaram essa questão em branco representa o percentual de 9,37% dos participantes.

No pós-teste multiplicativo 25,00% dos discentes elaboraram a sentença corretamente e todos acertaram a escolha da operação. O percentual da amostra que não elaborou a sentença natural foi de 75,00% dos discentes, sendo que 68,75% acertaram a escolha da operação e 6,25% erraram a escolha da operação.

A seguir, apresentamos a análise da sexta questão dos testes multiplicativos.

Quadro 77 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na sexta questão dos testes multiplicativos

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">O funcionário de uma livraria, precisa guardar 150 livros em caixas que comportam 30 livros. Quantas caixas serão necessárias para guardar todos os livros?</td><td colspan="3">Q6</td><td colspan="3">? x 30 = 150</td></tr>
<tr><th colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><th colspan="3">PRÉ-TESTE</th><th colspan="3">PÓS-TESTE</th></tr>
<tr><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th></tr>
<tr><th rowspan="3">ESCOLHA DA OPERAÇÃO</th><th>Acerto</th><td>------</td><td>------</td><td>D_{8}, D_{11}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{20}, D_{22}, D_{24}, D_{27}, D_{32}</td><td>D_{23}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}, D_{32}</td><td>------</td><td>D_{1}, D_{2}, D_{3}, D_{4}, D_{5}, D_{6}, D_{7}, D_{8}, D_{9}, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27},</td></tr>
<tr><th>Erro</th><td>------</td><td>------</td><td>D_{1}, D_{2}, D_{4}, D_{5}, D_{6}, D_{7}, D_{9}, D_{10}, D_{12}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{21}, D_{23}, D_{25}, D_{28}, D_{29}, D_{31}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
<tr><th>Em Branco</th><td>------</td><td>------</td><td>D_{3}, D_{26}, D_{30}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023)

Na sexta questão do pré-teste multiplicativo, o percentual da amostra que não elaborou a sentença natural (? x 30 = 150) foi de 100,00%, sendo que entre esses 34,37% acertaram a escolha da operação, 56,25% erraram a escolha da operação no referido teste e 9,38% dos participantes deixaram essa questão em branco.

No pós-teste 18,75% dos discentes elaboraram a sentença natural corretamente e todos esses discentes acertaram a escolha da operação. O percentual de participantes que não elaboraram a sentença natural foi de 81,25%, sendo que todos esses discentes acertaram a escolha da operação. Podemos observar também que nenhum participante deixou a questão do referido teste em branco.

A seguir apresentamos a análise da sétima questão dos testes multiplicativos.

Quadro 78 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na sétima questão dos testes multiplicativos

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">O pai comprou 32 doces e deseja distribuir com seus 4 filhos. Quantos doces cada filho receberá?</td><td colspan="3">Q7</td><td colspan="3">4 x ? = 32</td></tr>
<tr><td colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</td></tr>
<tr><td colspan="3">PRÉ-TESTE</td><td colspan="3">PÓS-TESTE</td></tr>
<tr><td>Elaborou sentença adequada</td><td>Elaborou sentença inadequada</td><td>Não elaborou sentença</td><td>Elaborou sentença adequada</td><td>Elaborou sentença inadequada</td><td>Não elaborou sentença</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ESCOLHA DA OPERAÇÃO</td><td>Acerto</td><td>------</td><td>------</td><td>D_1, D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{18}, D_{19}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}</td><td>D_{17}, D_{19}, D_{28}, D_{29}, D_{31}</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{30}, D_{32}</td></tr>
<tr><td>Erro</td><td>------</td><td>------</td><td>D_2, D_{20}, D_{23}, D_{29}, D_{31}</td><td>------</td><td>------</td><td>D_{16}</td></tr>
<tr><td>Em Branco</td><td>------</td><td>------</td><td>D_3, D_6, D_{16}, D_{17}, D_{30}, D_{32}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023)

Na sétima questão do pré-teste multiplicativo, o percentual da amostra que não elaborou a sentença natural (4 x ? = 32) foi de 100,00%, sendo que entre esses 65,63% acertaram a escolha da operação, 15,62% erraram a escolha da operação e 18,75% dos participantes deixaram essa questão em branco no referido teste.

No pós-teste 15,62% dos discentes elaboraram a sentença natural corretamente e todos esses discentes acertaram a escolha da operação. O percentual de participantes que não elaboraram a sentença natural foi de 84,38%, sendo que desses discentes 81,25% acertaram a escolha da operação, enquanto 3,13% erraram a escolha da operação. Ainda podemos observar que nenhum participante deixou a questão do referido teste em branco.

A seguir, apresentamos a análise da oitava questão dos testes multiplicativos.

Quadro 79 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na oitava questão dos testes multiplicativos

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="5">Um estojo escolar custa R$ 25,00, Marcos decidiu comprar 5 estojos. Qual o valor que Marcos pagou na compra?</td><td colspan="3">Q8</td><td colspan="3">5 x 25 = ?</td></tr>
<tr><th colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><th colspan="3">PRÉ-TESTE</th><th colspan="3">PÓS-TESTE</th></tr>
<tr><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th></tr>
<tr></tr>
<tr><th rowspan="3">ESCOLHA DA OPERAÇÃO</th><th>Acerto</th><td>------</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_4, D_5, D_6, D_7, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28}, D_{29}, D_{31}</td><td>D_{15}, D_{23}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}, D_{32}</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}</td></tr>
<tr><th>Erro</th><td>------</td><td>------</td><td>D_8, D_{20}, D_{21}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
<tr><th>Em Branco</th><td>------</td><td>------</td><td>D_3, D_{16}, D_{30}, D_{32}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023)

Na oitava questão do pré-teste multiplicativo, 78,13% da amostra não elaboraram a sentença natural (5 x 25 = ?) e acertaram a escolha da operação. O percentual dos discentes que não elaboraram a sentença natural no pré-teste e erraram a escolha da operação foi de 9,37% da amostra. Os participantes que deixaram essa questão em branco representam um percentual de 12,50%.

No pós-teste multiplicativo 21,88% dos discentes elaboraram a sentença natural corretamente e todos esses discentes acertaram a escolha da operação. O percentual da amostra que não elaborou a sentença natural, mas que acertaram a escolha da operação de foi de 78,12% dos discentes. Observamos também que nenhum participante deixou a questão do referido teste em branco.

A seguir apresentamos a análise da nona questão dos testes multiplicativos.

Quadro 80 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na nona questão dos testes multiplicativos

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Maria faz caminhada todos os dias, percorrendo 1200m por dia para melhorar sua saúde física. Quantos metros, Maria percorre em uma semana?</td><td colspan="3">Q9</td><td colspan="3">7 x 1200 =</td></tr>
<tr><th colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><th colspan="3">PRÉ-TESTE</th><th colspan="3">PÓS-TESTE</th></tr>
<tr><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th></tr>
<tr><th rowspan="3">ESCOLHA DA OPERAÇÃO</th><th>Acerto</th><td>------</td><td>------</td><td>D_1, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{28},</td><td>D_9, D_{15}, D_{23}, D_{28}, D_{29}, D_{32}</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}, D_{30}, D_{31}</td></tr>
<tr><th>Erro</th><td>------</td><td>------</td><td>D_4, D_6, D_{21}, D_{23}, D_{29}, D_{31}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
<tr><th>Em Branco</th><td>------</td><td>------</td><td>D_2, D_3, D_{16}, D_{30}, D_{32}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023)

Na nona questão no pré-teste multiplicativo, nenhum dos alunos elaborou a sentença natural (7 x 1200 =?). O percentual dos discentes que não elaboraram a sentença natural foi de 100,00%, sendo que entre esses 65,63% acertaram a escolha da operação, 18,75% erraram a escolha da operação e 15,62% dos participantes deixaram essa questão em branco no referido teste.

No pós-teste 18,75% da amostra elaborou a sentença natural corretamente e acertou a escolha da operação. O percentual de discentes que não elaboraram a sentença natural foi de 81,25% da amostra, sendo que todos esses discentes acertaram a escolha da operação no referido pós-teste. Verificamos ainda que nenhum participante deixou a questão em branco.

A seguir apresentamos a análise da décima questão dos testes multiplicativos.

Quadro 81 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na décima questão dos testes multiplicativos

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNCIADO</th><th colspan="3">NÚMERO DA QUESTÃO</th><th colspan="3">SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Juliana foi comprar um lanche. Numa lanchonete havia 3 sabores de sucos (caju, acerola e laranja) e 2 tipos de salgados (hambúrguer e pizza). De quantas maneiras diferentes Juliana pode escolher um lanche, comprando um suco e um salgado?</td><td colspan="3">Q10</td><td colspan="3">3 x 2 = ?</td></tr>
<tr><th colspan="6">ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL</th></tr>
<tr><th colspan="3">PRÉ-TESTE</th><th colspan="3">PÓS-TESTE</th></tr>
<tr><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th><th>Elaborou sentença adequada</th><th>Elaborou sentença inadequada</th><th>Não elaborou sentença</th></tr>
<tr><th rowspan="3">ESCOLHA DA OPERAÇÃO</th><th>Acerto</th><td>------</td><td>------</td><td>D_1, D_2, D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{27}, D_{28}, D_{30}, D_{31}</td><td>D_2, D_4, D_{15}, D_{23}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}</td><td>------</td><td>D_1, D_6, D_7, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{25}, D_{26}, D_{27},</td></tr>
<tr><th>Erro</th><td>------</td><td>------</td><td>D_{21}, D_{26}, D_{29},</td><td>D_9, D_{11}, D_{17}, D_{24}, D_{32}</td><td>------</td><td>D_3, D_5,</td></tr>
<tr><th>Em Branco</th><td>------</td><td>------</td><td>D_3, D_6, D_{16}, D_{17}, D_{32}</td><td>------</td><td>------</td><td>------</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023)

Na décima questão do pré-teste multiplicativo, 75,00% dos discentes não elaboraram a sentença natural (3 x 2 = ?) e acertaram a escolha da operação. O percentual de participantes que não elaboraram a sentença natural e erraram a escolha da operação foi de 9,37% da amostra. Enquanto a quantidade de discentes que deixaram a questão em branco pode ser representada pelo percentual de 15,63% dos participantes.

No pós-teste 40,63% da amostra elaborou a sentença natural corretamente, sendo que 25,00% acertaram a escolha da operação e 15,63% erraram a escolha da referida questão. O percentual de discentes que elaborou a sentença natural foi de 59,37%, sendo que 53,12% desses discentes acertaram a escolha da operação e 6,25% erraram a escolha da operação. Nenhum dos participantes deixou a questão em branco.

A seguir, apresentamos a análise da décima primeira questão dos testes multiplicativos.

Quadro 82 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na décima primeira questão dos testes multiplicativos

continua

ENUNCIADO		NÚMERO DA QUESTÃO			SENTENÇA NATURAL		
Para abastecer sua loja de doces, Mazé comprou uma caixa que contém 16 sacos de pirulitos. Se ela pagou R$ 8,00 por cada saco, quanto Mazé pagou na compra dos sacos de pirulitos?		Q11			8 x 16 = ?		
		ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL					
		PRÉ-TESTE			**PÓS-TESTE**		
		Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**
ESCOLHA DA OPERAÇÃO	**Acerto**	------	------	D_1, D_2, D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}	D_{23}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}, D_{32}	------	D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{22}, D_{24}, D_{25}, D_{26}, D_{27}

	Erro	------	------	D_6, D_{20}	------	------	D_{19}
	Em Branco	------	------	D_3, D_{16}, D_{27}, D_{32}	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

Na décima primeira questão do pré-teste multiplicativo, 100,00% da amostra não elaborou a sentença natural (8 x 16 = ?), sendo que desses 81,25% acertaram a escolha da operação, 6,25% erraram a escolha da operação e 12,50% deixaram a referida questão em branco.

No pós-teste, 18,75% dos discentes elaboraram a sentença natural corretamente e todos esses estudantes acertaram a escolha da operação. O percentual de discentes que não elaborou a sentença natural foi de 81,25%, onde entre esses 78,12% acertaram a escolha da operação e 3,13% erraram a escolha da operação. Ainda podemos verificar que nenhum participante deixou a questão do referido teste em branco.

A seguir apresentamos a análise da décima segunda questão dos testes multiplicativos.

Quadro 83 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação na décima segunda questão dos testes multiplicativos

continua

ENUNCIADO		**NÚMERO DA QUESTÃO**			**SENTENÇA NATURAL**		
A sala de vídeo da escola que Bruno estuda, foi organizada com 5 fileiras contendo 6 cadeiras em cada, para receber a turma do 6º ano. Quantos alunos há nessa turma?		Q12			5 x 6 = ?		
		ELABORAÇÃO DA SENTENÇA NATURAL					
		PRÉ-TESTE			**PÓS-TESTE**		
		Elaborou sentença adequada	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**	**Elaborou sentença adequada**	**Elaborou sentença inadequada**	**Não elaborou sentença**
ESCOLHA DA OPERAÇÃO	**Acerto**	------	------	D_1, D_2, D_4, D_5, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15}, D_{17}, D_{18}, D_{19}, D_{20}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25}, D_{26},	D_2, D_3, D_5, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{15}, D_{17}, D_{18}, D_{20}, D_{21}, D_{23}, D_{24}, D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}, D_{32}	------	D_1, D_4, D_6, D_7, D_8, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{16}, D_{22}, D_{25}, D_{26}, D_{27}

				D_{28}, D_{29}, D_{30}, D_{31}			
	Erro	------	------	D_{6}, D_{21}	D_{19}	------	------
	Em Branco	------	------	D_{3}, D_{16}, D_{27}, D_{32}	------	------	------

Fonte: Experimentação (2023)

Na décima segunda questão no pré-teste multiplicativo, 100,00% da amostra não elaborou a sentença natural (5 x 6 = ?), entre esses 81,25% acertaram a escolha da operação, 6,25% erraram a escolha da operação e 3,12,50% dos discentes deixaram a questão em branco.

No pós-teste 59,38% da amostra elaborou a sentença natural corretamente, sendo que 56,25% dos participantes acertaram a escolha da operação e 3,13% dos discentes erraram a escolha da operação. O percentual dos participantes não elaborou a sentença natural foi de 40,62% da amostra e todos esses discentes acertaram a escolha da operação. Podemos observar que nenhum dos participantes deixou a questão em branco.

A seguir apresentamos um quadro com os percentuais de elaboração correta da sentença natural, formulação incorreta da sentença, não elaboração da sentença e acertos na escolha da operação adequada para solucionar os problemas a partir das categorias mencionadas anteriormente nas questões do pós-teste multiplicativo.

Quadro 84 – Elaboração da sentença natural e escolha da operação adequada nas questões do pós-teste multiplicativo

Questão	Tipo de questão	PÓS-TESTE					
		Elaborou sentença natural corretamente (%)	Acerto da escolha da operação a partir da elaboração correta da sentença natural (%)	Elaborou sentença natural incorretamente (%)	Acerto da escolha da operação a partir da elaboração incorreta da sentença natural (%)	Não elaborou a sentença natural (%)	Acerto da escolha da operação sem a elaboração da sentença natural (%)
Q1	Aritmética	15,63	15,63	0	0	84,37	81,25
Q2	Algébrica	28,12	28,12	0	0	71,87	71,87
Q3	Aritmética	28,12	28,12	0	0	71,88	68,75
Q4	Algébrica	15,63	15,63	0	0	84,37	84,37
Q5	Algébrica	25,00	25,00	0	0	75,00	68,75
Q6	Algébrica	18,75	18,75	0	0	81,25	81,25
Q7	Algébrica	15,62	15,62	0	0	84,38	81,25
Q8	Aritmética	21,88	21,88	0	0	78,12	78,12
Q9	Aritmética	18,75	18,75	0	0	81,25	81,25
Q10	Aritmética	40,63	25,00	0	0	59,37	53,12
Q11	Aritmética	18,75	18,75	0	0	81,25	78,12
Q12	Aritmética	59,38	56,25	0	0	40,62	40,62

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados da tabela acima mostram que em todas as questões do pós-teste multiplicativo 15,63% ou mais dos discentes da amostra elaboraram corretamente a sentença natural do problema, com destaque do maior percentual na questão Q12, na qual 59,38% a formularam corretamente. O percentual médio de elaboração da sentença natural corretamente dos problemas foi de aproximadamente 25,52% da amostra. Em dez das doze questões do segundo teste multiplicativo (Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9 e Q11) todos os discentes que formularam corretamente a sentença natural acertaram a escolha da operação adequada para solucionar o problema.

As questões Q10 e Q12 apresentaram o maior percentual de elaboração correta da sentença natural, respectivamente, 40,63% e 59,38%, sendo que 25,00% na primeira questão e 56,25% na segunda acertaram a escolha da operação a partir da formulação correta da sentença. A questão Q10 era aritmética com valor desconhecido localizado no final da sentença (3 x 2 = ?) e a questão Q12 também era aritmética e usava a operação de multiplicação na sua resolução (5 x 6 = ?), sendo necessária a ideia de configuração retangular para optar pela operação mencionada anteriormente.

As questões Q1, Q4 e Q7 apresentaram o menor índice, 15.63% aproximadamente, de elaboração correta da sentença natural, nestas questões a maioria, 84,38% aproximadamente, não a elaborou a sentença natural. O percentual de acerto na escolha da operação adequada para solucionar estas questões foram elevados, 81,25%, 84,37% e 81,25%, respectivamente. Em todas as dozes questões do teste, não houve elaboração incorreta da sentença natural.

Na comparação entre problemas aritméticos (Q1, Q3, Q8, Q9, Q110, Q11 e Q12) e algébricos (Q2, Q4, Q5, Q6 e Q7) do pós-teste multiplicativo houve um maior percentual de elaboração correta da sentença natural nas questões do primeiro tipo, sendo que em média 29,02% dos discentes elaboraram corretamente a sentença natural nas questões aritméticas e 20,62% nas algébricas. Com isso, o índice de acerto na escolha da operação a partir da elaboração correta da sentença foi maior nas questões aritméticas com 26,34% de acertos do que nas algébricas que representou 20,62% de acertos na escolha. Isso se deve ao fato de que nos problemas aritméticos a operação usada para resolver o problema ser a mesma da sentença (a x b = ? e a ÷ b = ?). O percentual de não elaboração da sentença natural foi maior nas questões algébricas (79,37%) do que nas aritméticas (70,98%).

A elaboração de sentenças naturais em problemas multiplicativos desempenha um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem matemática. Isso porque, ao formular problemas de maneira clara e contextualizada, os alunos podem compreender melhor a situação apresentada e escolher a operação matemática detalhada para resolvê-la.

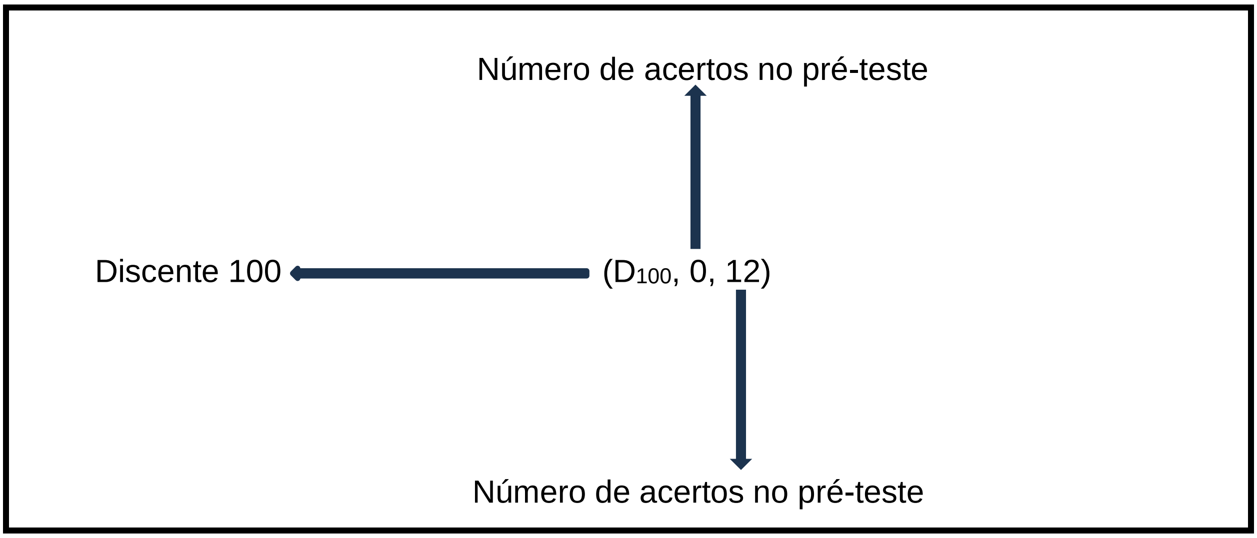
Ao transformar um problema em uma sentença natural, os alunos são desafiados a identificar as informações relevantes, os dados a serem protegidos e as relações matemáticas envolvidas. Essa abordagem auxilia no desenvolvimento de habilidades de leitura, interpretação e raciocínio matemático. Além disso, a criação de sentenças naturais ajuda os alunos a relacionarem os conceitos matemáticos com situações do mundo real, tornando o aprendizado mais significativo e aplicável.

Portanto, a habilidade de elaborar sentenças naturais em problemas multiplicativos não apenas ajuda os alunos a escolherem a operação correta, mas também os capacita a compreender a matemática de maneira mais profunda e a resolver problemas de forma autônoma. É, de fato, uma etapa necessária no processo de resolução de problemas multiplicativos. A seguir apresentamos a relação entre os fatores socioeducacionais, a matemática e o desempenho nos testes multiplicativos.

6.1.3 Relação entre Fatores Socioeducacionais, a Matemática e o Desempenho nos Testes Multiplicativos

Nesta seção, realizamos uma análise das informações resultantes da aplicação do questionário utilizado durante o experimento, em conjunto com a avaliação do desempenho dos alunos nos testes multiplicativos. O objetivo é investigar possíveis conexões entre fatores socioeducacionais e as questões relacionadas à matemática, e identificar como esses elementos impactam o desempenho dos alunos na resolução de problemas multiplicativos.

Os dados contidos nos quadros subsequentes retratam o número de respostas corretas de cada aluno obtidas nos dois testes na etapa multiplicativa. Esses dados são organizados em um conjunto de três elementos: o nome do aluno, sua pontuação no pré-teste e sua pontuação no pós-teste, conforme ilustrado no exemplo a seguir.



Iniciaremos a apresentação dos resultados obtidos com o questionário utilizado no experimento abordando as variáveis afinidade e dificuldade em matemática e o desempenho nos testes multiplicativos.

Quadro 85 – Afinidade e dificuldade em matemática e o desempenho nos testes multiplicativos

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Sim
AFINIDADE COM A MATEMÁTICA	Não gosto	(D_{28}, 6, 12) (D_{32}, 0, 9)	------	(D_{1}, 6, 11) (D_{3}, 0, 9,) (D_{4}, 1, 12) (D_{26}, 4, 12)
	Gosto um pouco	(D_{13},12,12) (D_{19},8,12)	(D_{5},1 0, 11) (D_{6}, 5, 12) (D_{7}, 7, 12) (D_{18}, 10, 12) (D_{21}, 6, 9) (D_{23}, 1, 10) (D_{24}, 4, 10) (D_{25}, 11, 12)	(D_{17}, 2, 12) (D_{22}, 9, 12)
	Gosto	(D_{16}, 1, 11) (D_{20}, 2, 12) (D_{31}, 0, 10)	(D_{2}, 5, 10) (D_{11}, 11, 12) (D_{12}, 12, 12) (D_{30}, 0, 10)	------
	Gosto muito	(D_{8}, 5, 12) (D_{14}, 12 ,12) (D_{15}, 11, 12,) (D_{27}, 7, 12)	(D_{9}, 11, 12) (D_{10}, 11, 12) (D_{29}, 9, 12)	------

Fonte: Experimentação (2023)

O quadro acima mostra que 6,25% dos discentes (D_{28} e D_{32}) não possuem afinidade com a matemática e não têm dificuldade em aprender esta disciplina. O desempenho desses alunos no pré-teste multiplicativo foi baixo, o primeiro discente acertou 6 questões e o segundo nenhuma questão. Os discentes D_1, D_3, D_4 e D_{26} que representam um percentual de 12,50%, afirmaram não ter afinidade com a matemática e têm dificuldade em aprender esta disciplina, apresentaram um baixo rendimento no pré-teste multiplicativo, onde tiveram respectivamente, 6, 0, 1 e 4 de acertos nas questões.

Os discentes D_5, D_6, D_7, D_{18}, D_{21}, D_{23}, D_{24} e D_{25} que disseram ter pouca afinidade com a matemática e um pouco de dificuldade em aprender os conteúdos desta disciplina. No pré-teste multiplicativo apresentaram os seguintes rendimentos, os discentes D_6, D_{23} e D_{24} tiveram desempenho abaixo de 50% de acertos e os discentes D_5, D_7, D_{18}, D_{21} e D_{25} que tiveram um desempenho razoável, acertaram, nesta ordem, 10, 7, 10, 6 e 11 questões cada. Os discentes D_{17} e D_{22} que informaram gostar um pouco de matemática e ter dificuldade em aprender esta disciplina representa o percentual 6,25% da amostra, fato que mostrou o seguinte resultado na aplicação do primeiro teste multiplicativo, 2 e 9 acertos nas questões, respectivamente.

O percentual de alunos que informaram ter afinidade com a matemática e não ter dificuldade em aprender esta disciplina foi de 9,38%. Esses discentes D_{16}, D_{20} e D_{31} apresentaram um baixo desempenho no primeiro teste multiplicativo, o número de acertos foram de 1, 2 e 0 questões, na devida ordem. Os educandos D_2, D_{11}, D_{12} e D_{30} disseram que gostam de matemática e têm um pouco de dificuldade em aprender esta disciplina, eles representam 12,50% da amostra. Esses discentes apresentaram respectivamente o seguinte desempenho no pré-teste multiplicativo, 5, 11, 12 e 0 de acertos nas questões.

Os discentes D_8, D_{14}, D_{15} e D_{27} afirmam que gostam muito de matemática e não têm dificuldade em aprender esta disciplina representam 12,50% da amostra. O pré-teste multiplicativo confirmou, pois, esses alunos apresentaram um desempenho de razoável a alto nesse teste, com os seguintes números de acertos 5, 12, 11 e 7, nesta ordem, onde podemos observar que somente o discente D_8 teve rendimento abaixo de 50%. Os pesquisados que informaram que gostam muito de matemática e têm um pouco de dificuldade em aprender esta disciplina foram D_9, D_{10} e D_{29}, que representam o percentual de 9,35% da amostra, tiveram um alto desempenho no primeiro teste multiplicativo, variando de 75,00% a 91,67% de acertos.

Quadro 86 – Notas e distração nas aulas de matemática e desempenho nos testes multiplicativos

		DISTRAÇÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA		
		Não	Na maioria das vezes	Sim
NOTAS EM MATEMÁTICA	Abaixo da média	------	------	------
	Na média	(D_1, 6, 11) (D_2, 5, 10) (D_5, 10, 11) (D_{17}, 2, 12) (D_{19}, 8, 12) (D_{20}, 2, 12) (D_{21}, 6, 9)	(D_7 ,7, 12) (D_{10}, 11, 12) (D_{11}, 11, 12) (D_{22}, 9, 12) (D_{23}, 1, 10) (D_{25}, 11, 12) (D_{29}, 9, 12)	(D_{18}, 10, 12)
	Acima da média	(D_3, 0, 9) (D_8, 5, 12) (D_9, 11, 12) (D_{14}, 12, 12) (D_{15}, 11, 12,) (D_{16}, 1, 11) (D_{24}, 4, 10) (D_{27}, 7, 12) (D_{31}, 0, 10) (D_{32}, 0, 9)	(D_4, 1, 12) (D_{12}, 12, 12) (D_{13}, 12, 12) (D_{26}, 4, 12) (D_{28}, 6, 12) (D_{30}, 0, 10)	(D_6, 5, 12)

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados acima mostram que os discentes D_1, D_2, D_5, D_{17}, D_{19}, D_{20} e D_{21} representando 21,88% da amostra, disseram que não se distraem nas aulas dessa disciplina e que suas notas em matemática são na média. O desempenho desses educandos, nesta ordem, foram de 6, 5, 10, 8, 8, 2 e 6 acertos nas questões do pré-teste multiplicativo. O percentual de discentes que informou obter notas na média em matemática e na maioria das vezes se distrair nas aulas dessa disciplina foi de 21,88% dos pesquisados, sendo eles D_7, D_{10}, D_{11}, D_{22}, D_{23}, D_{25} e D_{29}. Com exceção do discente D_{23} que acertou 1 (uma) questões no primeiro teste multiplicativo, todos os outros participantes desse grupo apresentaram um desempenho entre 58,33% e 91,67% neste teste. O discente D_{18} afirmou que possui notas na média em matemática e sempre se distrair nas aulas dessa disciplina, ele teve um desempenho de 83,33% nas questões do pré-teste multiplicativo.

Grande parte dos discentes D_3, D_8, D_9, D_{14}, D_{15}, D_{16}, D_{24}, D_{27}, D_{31} e D_{32}, sendo 31,25%da amostra, informaram que obtêm notas acima da média em matemática e não se distrai nas aulas dessa disciplina. O pré-teste multiplicativo mostrou que 60% deles tiveram abaixo de 50% de acertos, o grupo apresentou um desempenho muito baixo nesse teste. As exceções foram os discentes D_9, D_{14}, D_{15} e D_{27} que acertaram, respectivamente, 11, 12, 11 e 7 questões cada. Os pesquisados D_4, D_{12}, D_{13}, D_{26}, D_{28}, D_{30}, representando 18,75% da amostra informaram que possuem notas acima da média em matemática e na maioria das vezes se distrai nas aulas da citada disciplina, esses discentes apresentaram um desempenho de baixo a razoável no primeiro teste multiplicativo, com o número de acertos variando de 0 a 6 questões. Com exceção dos discentes D_{12} e D_{13} que tiveram um desempenho de 100% no pré-teste multiplicativo.

Somente o discente D_6 afirmou que se distrai nas aulas de matemática e que suas notas são acima da média, mas o pré-teste mostra o contrário. Nele o discente teve 41,67% de acerto nas questões, logo, um baixo desempenho. A seguir apresentamos os dados referentes aos hábitos de estudos, auxílio nas tarefas de casa de matemática e desempenho nos testes multiplicativos.

Quadro 87 – Hábitos de estudos, auxílio nas tarefas de casa de matemática e desempenho nos testes multiplicativos

continua

		AJUDA NAS TAREFAS DE CASA DE MATEMÁTICA					
		Mãe	Pai	Professor Particular	Amigo	Ninguém	Outros
HÁBITOS DE ESTUDOS EM MATEMÁTICA	Só na véspera da prova	(D_{24}, 4, 10)	------	------	------	(D_1, 6, 11) (D_{14}, 12, 12) (D_{17}, 2, 12) (D_{19}, 8, 12) (D_{26}, 4, 12) (D_{30}, 0, 10)	(D_{27}, 7, 12)
	Somente nos finais de semana	(D_4, 1, 12) (D_{15}, 11, 12) (D_{18}, 10, 12) (D_{29}, 9, 12)	------	------	(D_{12}, 12, 12)	(D_6, 5, 12) (D_{21}, 6, 9) (D_{31}, 0,1 0)	------

	Não estudo fora da escola	(D_5, 10, 11) (D_{25}, 11, 12)	------	------	------	(D_3, 0, 9) (D_{11}, 11, 12) (D_{13}, 12, 12) (D_{16}, 1, 11) (D_{28}, 6, 12)	------
	Todos os dias	(D_2, 5, 10) (D_8, 5, 12) (D_9, 11, 12) (D_{10}, 11, 12) (D_{32}, 0, 9)	------	-------	(D_{22}, 9, 12)	(D_{20}, 2, 12) (D_{23}, 1, 10)	(D_7, 7, 12)

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro acima revelaram que o discente D_{24} tem a ajuda da mãe para estudar matemática e só estuda no período de prova. No pré-teste, teve rendimento de 33,33% e no pós-teste o rendimento aumentou para 83,33%.

Sem a ajuda de ninguém nas tarefas de matemática e a estudar apenas na véspera da prova, os discentes D_1, D_{14}, D_{17}, D_{19}, D_{26} e D_{30}, representando 18,75% da amostra, apresentaram 6, 12, 2, 8, 4, 0 de acertos nas questões do pré-teste multiplicativo, nesta ordem. O desempenho no pós-teste subiu, respectivamente, para 11,12,12,12,12 e 10 de acertos.

O discente D_{27} informou que tem ajuda de outras pessoas nas tarefas de matemática e só estuda na véspera de prova. No pré-teste seu rendimento foi de 58,33% e no pós-teste avançou para 100%.

Os discentes D_4, D_{15}, D_{18} e D_{29}, que representam 12,50% da amostra informaram que têm ajuda da mãe e só estudam nos finais de semana. No pré-teste tiveram rendimentos de 8,33%, 91,67%, 83,33% e 75%. No pós-teste, os discentes progrediram para 100%.

Quando se trata em ter ajuda de amigos nas tarefas de matemática e estudar só nos finais de semana, o discente D_{12} faz essa citada afirmação. No pré-teste acertou 12 questões e no pós-teste 12 questões, tendo um desempenho de 100% nos dois testes multiplicativos.

Os discentes D_6, D_{21} e D_{31} disseram que não têm ajuda nas tarefas de matemática e só estudam nos finais de semana. No pré-teste, os estudantes obtiveram rendimento de 41,67%, 50,00% e 0% de acertos. No pós-teste os discentes avançaram para 100%, 75% e 83,33% de acertos, na devida ordem.

Os discentes que estudam todos os dias e afirmaram que possuem a ajuda da mãe nas tarefas de matemática, foram D_2, D_8, D_9, D_{10} e D_{32}, sendo 15,25% dos pesquisados. No pré-teste tiveram o rendimento de 41,67% de acertos os dois primeiros, de 91,66% de acertos os dois seguintes e de 0% o último discente. No pós-teste o discente D_2 progrediu para 83,33%, os D_8, D_9 e D_{10} atingiram 100% de acertos e o D_{32} para 75% de acertos.

O percentual de discentes que afirmaram ter ajuda dos amigos nas tarefas de matemática e estudam todos os dias da semana foi de 3,13% da amostra (D_{22}). No primeiro teste tive rendimento de 75% e no pós-teste progrediu para 100%. Os pesquisados que estudam todos os dias e não possuem a ajuda de ninguém nas tarefas de matemática são os discentes D_{20} e D_{23} (6,25% da amostra), os dois tiveram baixo rendimento do pré-teste multiplicativo, com acertos de 2 e 1 questão, na devida ordem. No pós-teste progrediram, respectivamente, para 100% e 83,33% de acertos. Somente o discente D_7 (3,13% da amostra) afirmou que estuda todos os dias e têm a ajuda de outras pessoas nas tarefas de matemática. Ele teve rendimento de 58,33% no pré-teste e progrediu para 100% no pós-teste.

A seguir, apresentamos os dados referentes ao trabalho remunerado, hábitos de fazer compras e desempenho nos testes multiplicativos.

Quadro 88 – Trabalho remunerado, hábito de fazer compras e desempenhos nos testes multiplicativos

		HÁBITO DE FAZER COMPRAS		
		Não	Às vezes	Sim
TRABALHO REMUNERADO	Não	(D_9, 11, 12) (D_{21}, 6, 9)	(D_7, 7, 12) (D_{12}, 12, 12) (D_{17}, 2, 12) (D_{18}, 10, 12) (D_{26}, 4, 12) (D_{28}, 6, 12) (D_{30}, 0, 10) (D_{31}, 0, 10)	(D_1, 6, 11) (D_3, 0, 9) (D_6, 5, 12) (D_{19}, 8, 12) (D_{20}, 2, 12) (D_{22}, 9, 12)
	Às vezes	(D_{15}, 11, 12)	(D_2, 5, 10) (D_5, 10, 11) (D_8, 5, 12) (D_{14}, 12, 12) (D_{16}, 1, 11) (D_{25}, 11, 12)	(D_4, 1, 12) (D_{10}, 11, 12) (D_{11}, 11, 12) (D_{23}, 1, 10) (D_{27}, 7, 12) (D_{29}, 9, 12) (D_{32}, 0, 9)
	Sim	------	(D_{13}, 12, 12) (D_{24}, 4, 10)	------

Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com os dados contidos no quadro acima 16,67% dos discentes informaram que não trabalham de forma remunerada e nem têm o hábito de fazer compras. Os alunos desse grupo apresentaram o desempenho de 91,67% e 50% de acertos na resolução das questões do pré-teste multiplicativo. No pós-teste progrediram para 100% e 75% de acertos. Uma grande parte da amostra, 25%, disseram que não trabalha de forma remunerada e às vezes fazem compras. Os discentes D_7, D_{12}, D_{17}, D_{18}, D_{26}, D_{28}, D_{30} e D_{31}, que fazem parte deste grupo, tiveram um desempenho, na devida ordem, de 58,33%, 100%, 16,67%, 83,33%, 50%, 50%, 0% e 0% de acertos no primeiro teste multiplicativo. 18,75% da amostra, D_1, D_3, D_6, D_{19}, D_{20} e D_{22}, informaram que não trabalha de forma remunerada e tem o hábito de fazer compras. Os participantes acertaram, respectivamente, 6, 0, 5, 8, 2 e 9 nas questões do pré-teste multiplicativo e no pós-teste acertaram 11, 9, 12, 12, 12 e 12 questões no referido teste.

O percentual de 3,13% (D_{15}) da amostra informou que às vezes trabalham de forma remunerada e não costumam fazer compras. Esse aluno teve um desempenho de 91,67% de acerto na resolução das questões do pré-teste multiplicativo. Os discentes que representam 18,75% da amostra, D_2, D_5, D_8, D_{14}, D_{16} e D_{25}, disseram que às vezes trabalha de forma remunerada e às vezes tem o hábito de fazer compras. Esses alunos apresentaram um desempenho de 41,67%, 83,33%, 41,67%, 100%, 8,33% e 91,67% de acertos na resolução das questões do pré-teste multiplicativo. No pós-teste apresentaram um avanço entre 83,3 e 100% de acertos. A respeito dos discentes que às vezes trabalham de forma remunerada e possuem o hábito de fazer compras, temos um percentual de 21,88% da amostra, D_4, D_{10}, D_{11}, D_{23}, D_{27}, D_{29} e D_{32}, onde tiveram um rendimento de 8,33%, 91,67%, 91,67% 8,33%, 58,33%, 75% e 0% de acertos nas questões do primeiro teste multiplicativo. No pós-teste progrediram para 100% os três primeiros discentes, para 83,33% o quarto discente, 100% os dois seguintes e de 75% o último discente.

De acordo com os participantes D_{13} e D_{24} (6,25% da amostra), eles trabalham de forma remunerada e às vezes tem o hábito de fazer compras. No pré-teste tiveram rendimento, nesta ordem, de 100% e 33,33% de acertos nas questões e no pós-teste, 100% e 83,33% de acertos.

A seguir apresentamos os dados referentes à escolaridade dos responsáveis masculino e feminino e o desempenho nos testes multiplicativos.

Quadro 89 – Escolaridade do responsável feminino e masculino e o desempenho nos testes multiplicativos

		ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO					
		Não escolarizado	EF incompleto	EF completo	EM completo	Ensino Superior	Não informado
ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO	Não escolarizado	------	(D_{13}, 12,1 2) (D_{22}, 9,1 2)	------	------	------	------
	EF incompleto	------	------	------	------	------	------
	EF completo	------	------	------	------	------	------
	EM completo	------	------	------	(D_{8}, 5, 12) (D_{12}, 12, 12) (D_{14},1 2, 12) (D_{15}, 11, 12) (D_{28}, 6, 12) (D_{30}, 0, 10) (D_{32}, 0, 9)	(D_{18}, 10, 12) (D_{21}, 6, 9)	(D_{25}, 11, 12)
	Ensino Superior	------	(D_{6}, 5, 12) (D_{10}, 11, 12)	------	------	(D_{2}, 5, 10) (D_{4}, 1, 12) (D_{19}, 8,1 2) (D_{27}, 7, 12) (D_{31}, 0, 10)	------
	Não informado	(D_{29}, 9, 12)	(D_{23}, 1, 10)	(D_{5}, 10, 11)	(D_{20}, 2, 12)	(D_{9}, 11, 12) (D_{16}, 1, 11)	(D_{1}, 6,1 1) (D_{3}, 0, 9) (D_{7}, 7,1 2) (D_{11}, 11,1 2) (D_{17}, 2, 12) (D_{24}, 4, 10) (D_{26}, 4, 12)

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados contidos no quadro acima mostram que apenas dois discentes da amostra, D_{13} e D_{22}, informaram que os seus responsáveis são, masculino é não escolarizado e o feminino possui Ensino Fundamental incompleto. O desempenho desses discentes no pré-teste multiplicativo foi de 100% e 75%, na devida ordem, de acertos e no pós-teste os dois conseguiram 100% de rendimento.

O percentual de discentes da amostra que têm os responsáveis masculino e feminino com Ensino Médio completo é de 21,88%, sendo eles D_{8}, D_{12}, D_{14}, D_{15}, D_{28}, D_{30} e D_{32}. No pré-teste multiplicativo esses discentes apresentaram o seguinte desempenho, nessa ordem, 5, 12, 12, 11, 6, 0, e 0 de acertos cada. No pós-teste os cinco primeiro atingiram 100%, o penúltimo 83,33% e o último 75% de acertos nas questões do teste. Os discentes D_{18} e D_{21} (6,25% da amostra), disseram que seu responsável masculino possui Ensino Médio completo e o feminino Ensino Superior. O primeiro discente acertou 83,33% e o segundo 50% das questões no pré-teste multiplicativo e no pós-teste os dois tiveram avanço para 100% e 75% de rendimento, na devida ordem. Apenas o discente D_{25} informou que seu responsável masculino possui Ensino Médio completo e o feminino não foi informado. Esse discente acertou 91,67% das questões do pré-teste multiplicativo e progrediu para 100% no pós-teste.

Os educandos D_6 e D_{10} disseram que seu responsável masculino possui Ensino Superior e o feminino possui Ensino Fundamental incompleto. O desempenho destes discentes foram, na devida ordem 5 e 11 acertos no primeiro teste multiplicativo. No segundo teste, os dois discentes progrediram para 100% de acertos nas questões.

Segundo os discentes D_2, D_4, D_{19}, D_{27} e D_{31}, seus responsáveis masculino e feminino têm Ensino Superior. O desempenho no pré-teste multiplicativo destes participantes foram, respectivamente, de 41,66%, 8,33%, 66,67%, 58,33% e 0% de acertos nas questões e no segundo teste apresentaram um desempenho muito alto, onde o primeiro discente atingiu 83,33% e os demais avançaram para 100% de acertos, nas questões do referido teste.

O discente D_{29} informou que desconhece a escolaridade do seu responsável masculinos e que seu responsável feminino não é escolarizado. O aluno acertou 9 questões no pré-teste multiplicativo e acertou 12 questões no pós-teste. Apenas o participante D_{23} disse que desconhece a escolaridade do seu responsável masculino e que seu responsável feminino possui Ensino Fundamental incompleto, este aluno acertou apenas uma questão do primeiro teste da etapa multiplicativa e conseguiu progredir no segundo teste, atingindo 10 acertos nas questões. O discente D_5 informou que desconhece a escolaridade do seu responsável masculino e que seu responsável feminino possui Ensino Fundamental completo. Este aluno teve um desempenho de 83,33% de acertos no pré-teste multiplicativo, conseguindo avançar para 91,67% no pós-teste. O discente D_{20} informou que desconhece a escolaridade do seu responsável masculino e que seu responsável feminino possui Ensino Médio completo. O discente acertou 2 questões no pré-teste multiplicativo e acertou todas as questões do pós-teste.

Segundo os discentes D_9 e D_{16}, desconhecem a escolaridade de seu responsável masculino e que seu responsável feminino possui Ensino Superior. Estes participantes tiveram um rendimento de 91,67% e 8,33% no pré-teste e conseguiram progredir para 100% e 91,67% no pós-teste multiplicativo, na devida ordem. Os discentes D_1, D_3, D_7, D_{11}, D_{17}, D_{24} e D_{26} (21,88% da amostra) afirmaram desconhecer a escolaridade de seus responsáveis masculino e feminino. Estes participantes acertaram 6, 0, 7, 11, 2, 4 e 4 das questões do primeiro teste, mas tiveram grande avanço no resultado do segundo teste, com 11, 9, 12, 12, 12, 10 e 12 acertos nas questões do referido teste.

A seguir apresentamos os resultados e análises das correlações entre os fatores socioeconômicos e a diferença das notas nos testes multiplicativos.

6.1.4 Correlações da Etapa Multiplicativa da Experimentação

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos das correlações entre os fatores socioeducativos e os resultados referentes as notas nos testes multiplicativos, com a finalidade de investigar se esses elementos tiveram alguma influência sobre o desempenho dos estudantes nos testes multiplicativos.

A fim de examinar essa correlação, recorremos ao Teste Exato de Fisher, pois esse método é adequado para lidar com dados não paramétricos e permite avaliar a dependência ou independência entre os conjuntos de dados.

O Teste foi desenvolvido por Ronald Aylmer Fisher e por homenagem a ele foi chamado de Teste Exato de Fisher. Ele é empregado em tabelas de contingência 2x2 para comparação de dois grupos constituídos por amostras independentes. Em termos simples, seu propósito é avaliar a independência entre a variável da linha e a variável da coluna (H_0: a variável da linha e a variável da coluna são independentes). Além disso, esse teste fornece um valor preciso e dispensa técnicas de aproximação. O valor-p do Teste Exato de Fisher é exato para todas as dimensões amostrais, garantindo precisão independentemente do tamanho da amostra.

Este teste é concebido com base na ideia de análises de condução em tabelas de contingência, distinguindo-se da maioria dos testes estatísticos, os quais “dependem de uma aproximação que tenderá a se tornar exata à medida que o tamanho das amostras tenderem para o infinito” (AGRESTI, 1992, p. 132 *apud* CABRAL, 2017, p. 22).

O Teste Exato de Fisher, é chamado de exato porque a estatística desse teste possibilita a obtenção direta dos p-values (AGRESTI, 1992, p. 134–135 *apud* CABRAL, 2017, p.22), eliminando a necessidade de consultar qualquer tabela.

Apesar de sua aplicabilidade em tabelas de dimensões mais amplas, como m x n (Mehta e Patel, 1983, p.1 *apud* CABRAL, 2017, p.22), o Teste Exato de Fisher é geralmente indicado para tabelas de contingência de dimensões 2 x 2.

Para atingir os objetivos da análise, estabelecemos um nível de significância de α = 0,05 para o valor-p obtido no teste, o que está associado a um intervalo de confiança de 95% estipulado para as hipóteses. Além disso, utilizamos as notas nos testes multiplicativos, representados na forma de qualidade, com as seguintes classificações: 0 a 5 – baixo; 6 e 7 – médio; 8 e 9 – bom; 10 a 12 - ótimo, para conduzir a análise.

A execução do Teste Exato de Fisher foi conduzida utilizando o software Jamovi Project (2022), que foi desenvolvido pela comunidade científica, disponível na versão 2.3, uma aplicação de código aberto. Optamos por utilizar esse programa devido à sua eficácia, gratuidade e à presença de uma interface extremamente intuitiva.

Para a realização desse experimento, instituímos para o teste de hipótese as seguintes afirmações:

► Hipótese nula (H_0): Não há associação significativa entre as duas variáveis.

► Hipótese alternativa (H_a): Há associação significativa entre as duas variáveis.

A seguir, iniciamos as análises pela correlação entre o gosto pela matemática e a frequência que estuda matemática fora da escola. Os dados obtidos nesta análise estão apresentados no quadro 90.

Quadro 90 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto de estudar matemática e a frequência que estuda matemática fora da escola continua

Você gosta de estudar Matemática?		**Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**				**Total**
		Todo dia	**Não estudo fora da escola**	**Somente nos finais de semana**	**Só na véspera da prova**	
Gosto	Observado	2	2	2	1	7
	Esperado	1,97	1,53	1,75	1,75	7,00
Não gosto	Observado	1	2	1	2	6
	Esperado	1,69	1,31	1,50	1,50	6,00
Gosto um pouco	Observado	3	3	3	3	12
	Esperado	3,38	2,63	3,00	3,00	12,00
Gosto muito	Observado	3	0	2	2	7
	Esperado	1,97	1,53	1,75	1,75	7,00

Total	Observado	9	7	8	8	32
	Esperado	9,00	7,00	8,00	8,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,943						
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e com que frequência você estuda matemática fora da escola não estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 90, referentes ao gosto de estudar matemática e a frequência que estuda matemática fora da escola, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher que não houve associação entre essas informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,943.

A seguir, apresentamos o quadro 91 com as análises da correlação entre a associação entre o gosto de estudar matemática e quem ajuda nas tarefas de matemática.

Quadro 91 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto de estudar matemática e quem ajuda nas tarefas de matemática

Você gosta de estudar Matemática?		**Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**				**Total**
		Ninguém	**Mãe**	**Outros**	**Amigos da escola**	
Não gosto	Observado	4	2	0	0	6
	Esperado	3,00	2,25	0,375	0,375	6,00
Gosto	Observado	5	1	0	1	7
	Esperado	3,50	2,63	0,438	0,438	7,00
Gosto um pouco	Observado	6	4	1	1	12
	Esperado	6,00	4,50	0,75	0,75	12,00
Gosto muito	Observado	1	5	1	0	7
	Esperado	3,50	2,63	0,438	0,438	7,00
Total	Observado	16	12	2	2	32
	Esperado	16,00	12,00	2,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,318						
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e quem lhe ajuda nas tarefas de matemática não estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 91, referentes ao gosto de estudar matemática e quem ajuda nas tarefas de matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre essas informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05, e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,318.

A seguir, exibimos no quadro 92 as análises na correlação entre a associação entre o gosto de estudar matemática e as notas em matemática.

Quadro 92 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto de estudar matemática e as notas em matemática

Você gosta de estudar Matemática?		**Como são suas notas em Matemática geralmente?**		**Total**
		Na média (PR)	**Acima da média (PM)**	
Não gosto	Observado	1	5	6
	Esperado	2,81	3,19	6,00
Gosto	Observado	3	4	7
	Esperado	3,28	3,72	7,00
Gosto um pouco	Observado	9	3	12
	Esperado	5,63	6,38	12,00
Gosto muito	Observado	2	5	7
	Esperado	3,28	3,72	7,00
Total	Observado	15	17	32
	Esperado	15,00	17,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,080				
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e como são suas notas em matemática geralmente não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 92, referentes ao gosto de estudar matemática e as notas em matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,080.

A seguir, mostramos no quadro 93 as análises na correlação entre o gosto de estudar matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados.

Quadro 93 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto de estudar matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados

Você gosta de estudar Matemática?		**As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**			**Total**
		Às vezes	**Sim**	**Não**	
Gosto	Observado	3	4	0	7
	Esperado	3,06	3,50	0,438	7,00
Não gosto	Observado	5	1	0	6
	Esperado	2,63	3,00	0,375	6,00
Gosto um pouco	Observado	4	7	1	12
	Esperado	5,25	6,00	0,750	12,00
Gosto muito	Observado	2	4	1	7
	Esperado	3,06	3,50	0,438	7,00
Total	Observado	14	16	2	32
	Esperado	14,00	16,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,421					
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 93, referentes ao gosto de estudar matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,421.

A seguir, mostramos no quadro 94 as análises na correlação entre o gosto de estudar matemática e a distração nas aulas de matemática.

Quadro 94 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto de estudar matemática e a distração nas aulas de matemática

continua

Você gosta de estudar Matemática?		**Você se distrai nas aulas de Matemática?**			**Total**
		Não, eu sempre presto atenção	**Sim, eu não consigo prestar atenção**	**Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática**	
Gosto	Observado	4	0	3	7
	Esperado	3,72	0,438	2,84	7,00

Não gosto	Observado	3	0	3	6
	Esperado	3,19	0,375	2,44	6,00
Gosto um pouco	Observado	5	2	5	12
	Esperado	6,38	0,75	4,88	12,00
Gosto muito	Observado	5	0	2	7
	Esperado	3,72	0,438	2,84	7,00
Total	Observado	17	2	13	32
	Esperado	17,00	2,00	13,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,867					
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e você se distrai nas aulas de matemática não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 94, referentes ao gosto de estudar matemática e a distração nas aulas de matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,867.

A seguir, mostramos no quadro 95 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e quem ajuda nas tarefas de matemática.

Quadro 95 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e quem ajuda nas tarefas de matemática continua

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**				**Total**
		Ninguém	**Mãe**	**Outros**	**Amigos da escola**	
Só na véspera da prova	Observado	6	1	1	0	8
	Esperado	4,00	3,00	0,50	0,50	8,00
Todo dia	Observado	2	5	1	1	9
	Esperado	4,50	3,38	0,563	0,563	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	5	2	0	0	7
	Esperado	3,50	2,63	0,438	0,438	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	3	4	0	1	8
	Esperado	4,00	3,00	0,50	0,50	8,00
Total	Observado	16	12	2	2	32
	Esperado	16,00	12,00	2,00	2,00	32,00

Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,263	
Conclusão	Os dados obtidos em com que frequência você estuda matemática fora da escola e quem lhe ajuda nas tarefas de matemática não estão associados.

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 95 referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e quem ajuda nas tarefas de matemática, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 0,263, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 96 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas em matemática.

Quadro 96 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas em matemática

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**Como são suas notas em Matemática geralmente?**		**Total**
		Na média (PR)	**Acima da média (PM)**	
Só na véspera da prova	Observado	3	5	8
	Esperado	3,75	4,25	8,00
Todo dia	Observado	6	3	9
	Esperado	4,22	4,78	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	3	4	7
	Esperado	3,28	3,72	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	3	5	8
	Esperado	3,75	4,25	8,00
Total	Observado	15	17	32
	Esperado	15,00	17,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,640				
Conclusão	Os dados obtidos em, com que frequência você estuda matemática fora da escola e como são suas notas em matemática geralmente não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 96, referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas em matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação na análise desses dados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,640.

A seguir, mostramos no quadro 97 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados.

Quadro 97 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**			**Total**
		Às vezes	**Sim**	**Não**	
Só na véspera da prova	Observado	3	5	0	8
	Esperado	3,50	4,00	0,50	8,00
Todo dia	Observado	3	5	1	9
	Esperado	3,94	4,50	0,563	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	4	2	1	7
	Esperado	3,06	3,50	0,438	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	4	4	0	8
	Esperado	3,50	4,00	0,50	8,00
Total	Observado	14	16	2	32
	Esperado	14,00	16,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,807					
Conclusão	Os dados obtidos em, com que frequência você estuda matemática fora da escola e as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 97, referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,807.

A seguir, mostramos no quadro 98 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e distração nas aulas de matemática.

Quadro 98 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e distração nas aulas de matemática

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**Você se distrai nas aulas de Matemática?**			**Total**
		Não, eu sempre presto atenção	**Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática**	**Sim, eu não consigo prestar atenção**	
Só na véspera da prova	Observado	6	2	0	8
	Esperado	4,25	3,25	0,500	8,00
Todo dia	Observado	5	4	0	9
	Esperado	4,78	3,66	0,563	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	3	4	0	7
	Esperado	3,72	2,84	0,438	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	3	3	2	8
	Esperado	4,25	3,25	0,50	8,00
Total	Observado	17	13	2	32
	Esperado	17,00	13,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,419					
Conclusão	Os dados obtidos em, com que frequência você estuda matemática fora da escola e você se distrai nas aulas de matemática não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 98, referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e distração nas aulas de matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,419.

A seguir, mostramos no quadro 99 as análises na correlação entre a quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas em matemática.

Quadro 99 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas em matemática

Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?		**Como são suas notas em Matemática geralmente?**		**Total**
		Na média (PR)	**Acima da média (PM)**	
Ninguém	Observado	7	9	16
	Esperado	7,50	8,50	16,00
Mãe	Observado	6	6	12
	Esperado	5,625	6,38	12,00
Outros	Observado	1	1	2
	Esperado	0,938	1,06	2,00
Amigos da escola	Observado	1	1	2
	Esperado	0,938	1,06	2,00
Total	Observado	15	17	32
	Esperado	15,00	17,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 1,000				
Conclusão	Os dados obtidos em quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e como são suas notas em matemática geralmente não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 99 referentes a quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas em matemática, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 1,000, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 100 as análises na correlação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados.

Quadro 100 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados

Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?		**As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**			**Total**
		Às vezes	**Sim**	**Não**	
Ninguém	Observado	10	6	0	16
	Esperado	7,00	8,00	1,00	16,00
Mãe	Observado	3	7	2	12
	Esperado	5,25	6,00	0,75	12,00
Outros	Observado	1	1	0	2
	Esperado	0,875	1,00	0,125	2,00
Amigos da escola	Observado	0	2	0	2
	Esperado	0,875	1,00	0,125	2,00
Total	Observado	14	16	2	32
	Esperado	14,00	16,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,169					
Conclusão	Os dados obtidos em quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 100, referentes quem ajuda nas tarefas de matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,169.

A seguir, mostramos no quadro 101 as análises na correlação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e a distração nas aulas de matemática.

Quadro 101 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e a distração nas aulas de matemática

Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?		**Você se distrai nas aulas de Matemática?**			**Total**
		Não, eu sempre presto atenção	**Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática**	**Sim, eu não consigo prestar atenção**	
Ninguém	Observado	9	6	1	16
	Esperado	8,50	6,50	1,00	16,00
Mãe	Observado	7	4	1	12
	Esperado	6,38	4,875	0,75	12,00
Outros	Observado	1	1	0	2
	Esperado	1,06	0,813	0,125	2,00
Amigos da escola	Observado	0	2	0	2
	Esperado	1,06	0,813	0,125	2,00
Total	Observado	17	13	2	32
	Esperado	17,00	13,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,723					
Conclusão	Os dados obtidos em quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e você se distrai nas aulas de matemática não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 101 referentes a quem ajuda nas tarefas de matemática e a distração nas aulas de matemática, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 0,723, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 102 as análises na correlação entre as notas em matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados.

Quadro 102 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre as notas em matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados

Como são suas notas em Matemática geralmente?		As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?			Total
		Às vezes	Sim	Não	
Na média (PR)	Observado	7	7	1	15
	Esperado	6,56	7,50	0,938	15,00
Acima da média (PM)	Observado	7	9	1	17
	Esperado	7,44	8,50	1,063	17,00
Total	Observado	14	16	2	32
	Esperado	14,00	16,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 1,000					
Conclusão	Os dados obtidos em como são suas notas em matemática geralmente e as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 102, referentes as notas em matemática e a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 1,000.

A seguir, mostramos no quadro 103 as análises na correlação entre as notas em matemática e a distração nas aulas de matemática.

Quadro 103 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre as notas em matemática e a distração nas aulas de matemática

continua

Como são suas notas em Matemática geralmente?		Você se distrai nas aulas de Matemática?			Total
		Não, eu sempre presto atenção	Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática	Sim, eu não consigo prestar atenção	
Na média (PR)	Observado	7	7	1	15
	Esperado	7,97	6,09	0,938	15,00

Acima da média (PM)	Observado	10	6	1	17
	Esperado	9,03	6,91	1,063	17,00
Total	Observado	17	13	2	32
	Esperado	17,00	13,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,853					
Conclusão	Os dados obtidos em como são suas notas em matemática geralmente e você se distrai nas aulas de matemática não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 103, referentes as notas em matemática e a distração nas aulas de matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação na análise desses dados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,853.

A seguir, mostramos no quadro 104 as análises na correlação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e a distração nas aulas de matemática.

Quadro 104 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e a distração nas aulas de matemática continua

As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?		**Você se distrai nas aulas de Matemática?**			**Total**
		Não, eu sempre presto atenção	**Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática**	**Sim, eu não consigo prestar atenção**	
Às vezes	Observado	7	7	0	14
	Esperado	7,44	5,688	0,875	14,00
Sim	Observado	9	5	2	16
	Esperado	8,50	6,50	1,00	16,00
Não	Observado	1	1	0	2
	Esperado	1,06	0,813	0,125	2,00

Total	Observado	17	13	2	32
	Esperado	17,00	13,00	2,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,658					
Conclusão	Os dados obtidos em as aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados e você se distrai nas aulas de matemática não estão associados.				

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 104, referentes a frequência a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e a distração nas aulas de matemática, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,658.

A seguir, mostramos no quadro 105 as análises na correlação entre o gosto pela matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo.

Quadro 105 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto pela matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo

Você gosta de estudar matemática?		**Notas no pré-teste**				**Total**
		Médio	**Baixo**	**Ótimo**	**Bom**	
Não gosto	Observado	2	4	0	0	6
	Esperado	0,938	2,63	1,69	0,75	6,00
Gosto	Observado	0	5	2	0	7
	Esperado	1,094	3,06	1,97	0,875	7,00
Gosto um pouco	Observado	2	4	3	3	12
	Esperado	1,875	5,25	3,38	1,50	12,00
Gosto muito	Observado	1	1	4	1	7
	Esperado	1,094	3,06	1,97	0,875	7,00
Total	Observado	5	14	9	4	32
	Esperado	5,00	14,00	9,00	4,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,166						
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e notas no pré-teste não estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 105, referentes ao gosto pela matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação na análise desses dados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,166.

A seguir, mostramos no quadro 106 as análises na correlação entre o gosto pela matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo.

Quadro 106 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre o gosto pela matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo

Você gosta de estudar Matemática?		Notas no pós-teste		Total
		Ótimo	Bom	
Não gosto	Observado	4	2	6
	Esperado	5,44	0,563	6,00
Gosto	Observado	7	0	7
	Esperado	6,34	0,656	7,00
Gosto um pouco	Observado	11	1	12
	Esperado	10,88	1,125	12,00
Gosto muito	Observado	7	0	7
	Esperado	6,34	0,656	7,00
Total	Observado	29	3	32
	Esperado	29,00	3,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,207				
Conclusão	Os dados obtidos, em você gosta de estudar matemática e notas no pós-teste não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 106 referentes o gosto pela matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 0,207, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 107 as análises na correlação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pré-teste multiplicativo.

Quadro 107 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pré-teste multiplicativo

Quem ajuda nas tarefas de matemática?		Notas no pré-teste				Total
		Médio	Baixo	Ótimo	Bom	
Ninguém	Observado	3	9	3	1	16
	Esperado	2,50	7,00	4,50	2,00	16,00
Mãe	Observado	0	5	5	2	12
	Esperado	1,875	5,25	3,375	1,50	12,00
Outros	Observado	2	0	0	0	2
	Esperado	0,313	0,875	0,563	0,25	2,00
Amigos da escola	Observado	0	0	1	1	2
	Esperado	0,313	0,875	0,563	0,25	2,00
Total	Observado	5	14	9	4	32
	Esperado	5,00	14,00	9,00	4,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,042						
Conclusão	Os dados obtidos, em quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e notas no pré-teste estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 107, referentes a frequência a quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pré-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que houve associação estatisticamente significativa na análise desses dados, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi menor, no valor de 0,042.

A seguir, mostramos no quadro 108 as análises na correlação entre quem e ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pós-teste multiplicativo.

Quadro 108 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre quem e ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pós-teste multiplicativo
continua

Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?		Notas no pós-teste		Total
		Ótimo	Bom	
Ninguém	Observado	14	2	16
	Esperado	14,50	1,50	16,00
Mãe	Observado	11	1	12
	Esperado	10,88	1,125	12,00
Outros	Observado	2	0	2
	Esperado	1,81	0,188	2,00

Amigos da escola	Observado	2	0	2
	Esperado	1,81	0,188	2,00
Total	Observado	29	3	32
	Esperado	29,00	3,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 1,000				
Conclusão	Os dados obtidos, em quem lhe ajuda nas tarefas de matemática e notas no pós-teste não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 108 referentes a quem e ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pós-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 1,000, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 109 as análises na correlação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo.

Quadro 109 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo continua

As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?		**Notas no pré-teste**				**Total**
		Médio	**Baixo**	**Ótimo**	**Bom**	
Às vezes	Observado	4	6	3	1	14
	Esperado	2,188	6,125	3,938	1,75	14,00
Sim	Observado	1	7	6	2	16
	Esperado	2,50	7,00	4,50	2,00	16,00
Não	Observado	0	1	0	1	2
	Esperado	0,313	0,875	0,563	0,25	2,00
Total	Observado	5	14	9	4	32
	Esperado	5,00	14,00	9,00	4,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,414						

Conclusão	Os dados obtidos, em As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados e notas no pré-teste não estão associados.

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 109, referentes a frequência a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pré-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,414.

A seguir, mostramos no quadro 110 as análises na correlação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo.

Quadro 110 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo

As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados		**Notas no pós-teste**		**Total**
		Ótimo	**Bom**	
Às vezes	Observado	12	2	14
	Esperado	12,69	1,313	14,00
Sim	Observado	15	1	16
	Esperado	14,50	1,50	16,00
Não	Observado	2	0	2
	Esperado	1,81	0,188	2,00
Total	Observado	29	3	32
	Esperado	29,00	3,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,661				
Conclusão	Os dados obtidos, em As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados e notas no pós-teste não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 110 referentes a atenção em aprender os conteúdos de matemática ministrados e as notas no pós-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 0,661, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 111 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pré-teste multiplicativo.

Quadro 111 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pré-teste multiplicativo

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**Notas no pré-teste**				**Total**
		Médio	**Baixo**	**Ótimo**	**Bom**	
Só na véspera da prova	Observado	2	4	1	1	8
	Esperado	1,25	3,50	2,25	1,00	8,00
Todo dia	Observado	1	5	2	1	9
	Esperado	1,41	3,94	2,53	1,125	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	1	2	3	1	7
	Esperado	1,09	3,06	1,97	0,875	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	1	3	3	1	8
	Esperado	1,25	3,50	2,25	1,00	8,00
Total	Observado	5	14	9	4	32
	Esperado	5,00	14,00	9,00	4,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,975						
Conclusão	Os dados obtidos, em com que frequência você estuda matemática fora da escola e notas no pré-teste não estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 111, referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pré-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,975.

A seguir, mostramos no quadro 112 as análises na correlação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pós-teste multiplicativo.

Quadro 112 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pós-teste multiplicativo

Com que frequência você estuda matemática fora da escola?		**Notas no pós-teste**		**Total**
		Ótimo	**Bom**	
Só na véspera da prova	Observado	8	0	8
	Esperado	7,25	0,750	8,00
Todo dia	Observado	8	1	9
	Esperado	8,16	0,844	9,00
Não estudo fora da escola	Observado	6	1	7
	Esperado	6,34	0,656	7,00
Somente nos finais de semana	Observado	7	1	8
	Esperado	7,25	0,750	8,00
Total	Observado	29	3	32
	Esperado	29,00	3,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,884				
Conclusão	Os dados obtidos, em com que frequência você estuda matemática fora da escola e notas no pós-teste não estão associados.			

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 112 referentes a frequência que estuda matemática fora da escola e as notas no pós-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 0,884, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

A seguir, mostramos no quadro 113 as análises na correlação entre as notas em matemática e as notas no pré-teste multiplicativo.

Quadro 113 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre as notas em matemática e as notas no pré-teste multiplicativo

Como são suas notas em Matemática geralmente?		Notas no pré-teste				Total
		Médio	Baixo	Ótimo	Bom	
Na média (PR)	Observado	3	4	4	4	15
	Esperado	2,34	6,56	4,22	1,88	15,00
Acima da média (PM)	Observado	2	10	5	0	17
	Esperado	2,66	7,44	4,78	2,13	17,00
Total	Observado	5	14	9	4	32
	Esperado	5,00	14,00	9,00	4,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 0,092						
Conclusão	Os dados obtidos, em como são suas notas em matemática geralmente e notas no pré-teste não estão associados.					

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 113, referentes as notas em matemática e as notas no pré-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do Teste Exato de Fisher, que não houve associação entre os dados analisados, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, sendo que a significância estabelecida foi de 0,05 e o valor-p encontrado para o teste foi de 0,092.

A seguir, mostramos no quadro 114 as análises na correlação entre as notas em matemática e as notas no pós-teste multiplicativo.

Quadro 114 – Resultado do Teste Exato de Fisher para a associação entre as notas em matemática e as notas no pós-teste multiplicativo continua

Como são suas notas em Matemática geralmente?		Notas no pós-teste		Total
		Ótimo	Bom	
Na média (PR)	Observado	14	1	15
	Esperado	13,60	1,410	15,00
Acima da média (PM)	Observado	15	2	17
	Esperado	15,40	1,59	17,00
Total	Observado	29	3	32
	Esperado	29,00	3,00	32,00
Teste Exato de Fisher - teste multiplicativo Significância estabelecida Valor-p < 0,05 Resultado obtido no Teste Exato de Fisher: 1,000				

Conclusão	Os dados obtidos, em como são suas notas em matemática geralmente e notas no pós-teste não estão associados.

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 114 referentes a as notas em matemática e as notas no pós-teste multiplicativo, revelaram por meio da aplicação do teste Exato de Fisher, que não houve associação entre as informações analisadas, logo não é possível concluir que as variáveis estão associadas, pois o valor-p encontrado para o teste foi de 1,000, sendo maior que a significância estabelecida que foi de 0,05.

Com o objetivo de realizar uma síntese do Teste Exato de Fisher sobre as correlações da etapa multiplicativa do experimento, apresentamos no quadro 115 as associações e não associações entre os fatores socioeducativos e as notas nos testes multiplicativos.

Quadro 115 – Correlações dos fatores socioeducativos e Notas no pré e pós-teste continua

Fatores socioeducativos	Fatores socioeducativos e Notas no pré e pós-teste	Conclusão	Valor-p
Você gosta de estudar Matemática?	Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Não Houve associação	0,943
Você gosta de estudar Matemática?	Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Não Houve associação	0,318
Você gosta de estudar Matemática?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	Não Houve associação	0,080
Você gosta de estudar Matemática?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Não Houve associação	0,421
Você gosta de estudar Matemática?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	Não Houve associação	0,867
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Não Houve associação	0,263
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	Não Houve associação	0,640
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Não Houve associação	0,807
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	Não Houve associação	0,419
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	Não Houve associação	1,000
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Não Houve associação	0,169
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	Não Houve associação	0,723
Como são suas notas em Matemática geralmente?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Não Houve associação	1,000
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	Não Houve associação	0,853

As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	Não Houve associação	0,658
Você gosta de estudar Matemática?	Notas no pré-teste	Não Houve associação	0,166
Você gosta de estudar Matemática?	Notas no pós-teste	Não Houve associação	0,207
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Notas no pré-teste	Houve associação	0,042
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Notas no pós-teste	Não Houve associação	1,000
As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados	Notas no pré-teste	Não Houve associação	0,414
As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados	Notas no pós-teste	Não Houve associação	0,661
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Notas no pré-teste	Não Houve associação	0,975
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Notas no pós-teste	Não Houve associação	0,884
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Notas no pré-teste	Não Houve associação	0,092
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Notas no pós-teste	Não Houve associação	1,000

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 115 mostram que ocorreu somente uma associação que foi entre o fator socioeducativo, quem ajuda nas tarefas de matemática com as notas no pré-teste multiplicativo. Os testes servem apenas verificar a significância da associação das variáveis, não para medir o grau de associação entre duas variáveis. Para saber a intensidade desta relação, utilizamos as medidas de associação. Nesse caso usaremos o coeficiente V de Cramer.

Ao realizar o teste de Qui-quadrado de independência, usa-se o coeficiente V de Cramer para indicar o grau de associação entre as variáveis categóricas. Seu valor varia de 0 a 1, onde o valor 0 corresponde a ausência de associação entre as variáveis, valores próximos de zero correspondem a fraca associação e valores mais próximos de 1 correspondem a associação mais forte. É uma medida útil porque, independentemente do tamanho da tabela, sempre fornece um valor entre 0 e 1, tornando mais fácil comparar a força das associações entre estudos diferentes.

Segundo Comerlato *et al.* (2020, p. 110) o V de Cramer é uma medida de associação baseada em Qui-quadrado e é utilizado quando uma das variáveis apresenta mais de duas categorias de resposta. Se uma das duas variáveis categóricas apresenta mais do que duas categorias, o V de Cramer é mais adequado. Para o teste, os valores são analisados em um intervalo entre 0 e 1, onde o valor 1 indica a máxima relação entre as variáveis e 0 a ausência de relação.

Considerando as medidas encontradas do coeficiente V de Cramer, que podem ser consideradas Correlações de Person para variáveis categóricas (utilizando o < r < 1), apresentamos no quadro 116 uma classificação para esses valores obtidos, com o intuito de classificar os resultados do coeficiente V Cramer.

Quadro 116 – Coeficiente de Correlação

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	CORRELAÇÃO
$r = 1$	Perfeita positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca positiva
$0 < r < 0,1$	Ínfima positiva
$r = 0$	Nenhuma correlação
$- 0,1 < r < 0$	Ínfima negativa
$- 0,5 < r \leq - 0,1$	Fraca negativa
$- 0,8 < r \leq - 0,5$	Moderada negativa
$- 1 < r \leq - 0,8$	Forte negativa
$r = - 1$	Perfeita negativa

Fonte: Barbetta (2012, p. 25)

Representamos a seguir, as medidas de associação encontradas no cálculo do coeficiente V Cramer. Para obtermos esses valores, utilizamos o software Jamovi (2022) versão 2.3, que conduziu os resultados exibidos no quadro 117:

Quadro 117 – Valor de V de Cramer e Grau das correlações para fatores socioeducativos e as notas dos testes multiplicativos continua

Fatores socioeducativos	Fatores socioeducativos e Notas no pré e pós-teste	Valor de V de Cramer	Grau de associação
Você gosta de estudar Matemática?	Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	0,197	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	0,310	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	0,468	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	0,308	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	0,265	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	0,314	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	0,252	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	0,239	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	0.359	Fraca positiva
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Como são suas notas em Matemática geralmente?	0,0626	Ínfima positiva
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	0,357	Fraca positiva
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	0,233	Fraca positiva

Como são suas notas em Matemática geralmente?	As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	0,0626	Ínfima positiva
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	0,123	Fraca positiva
As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Você se distrai nas aulas de Matemática?	0,207	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	Notas no pré-teste	0,367	Fraca positiva
Você gosta de estudar Matemática?	Notas no pós-teste	0,415	Fraca positiva
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Notas no pré-teste	0,446	Fraca positiva
Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Notas no pós-teste	0,138	Fraca positiva
As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados	Notas no pré-teste	0,321	Fraca positiva
As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados	Notas no pós-teste	0,157	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Notas no pré-teste	0,178	Fraca positiva
Com que frequência você estuda matemática fora da escola?	Notas no pós-teste	0,190	Fraca positiva
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Notas no pré-teste	0,460	Fraca positiva
Como são suas notas em Matemática geralmente?	Notas no pós-teste	0,0873	Ínfima positiva

Fonte: Experimentação (2023)

Os dados do quadro 117, mostram que a intensidade de correlação entre as informações analisadas é fraca. E não houve associação dos demais fatores socioeducativos e as notas dos testes multiplicativos, com exceção de quem ajuda nas tarefas de matemática e as notas no pré-teste que houve associação de vapor-p = 0,042. Com isso, concluímos que o bom desempenho dos discentes na resolução de problemas de estruturas multiplicativas se deve às metodologias de ensino adotadas nessa experimentação. A sequência didática aplicada gerou efeito positivo na resolução desses tipos de problemas e na participação dos discentes durante a experimentação.

A seguir apresentamos o teste de hipóteses aplicado aos resultados do experimento, objetivando obter outras conclusões estatísticas sobre os testes multiplicativos.

.

6.1.5 Teste de Hipóteses

Um teste de hipótese é um procedimento que emprega estatísticas calculadas a partir de amostras para avaliar uma proposição sobre o valor de um parâmetro populacional, a qual é chamada de hipótese estatística. Para testar essa afirmação é necessário formular um par de hipóteses, sendo uma que reflete a afirmação em questão e a outra representando seu complemento, quando uma dessas hipóteses é falsa, a outra deve ser verdadeira. Essas hipóteses são denominadas de hipótese nula e hipótese alternativa (LARSON; FARBER, 2016, p. 323-324).

> 1. Uma hipótese nula H_0 é uma hipótese estatística que contém uma afirmação de igualdade, tal como $\leq$, = ou $\geq$.
> 2. A hipótese alternativa H_a é o complemento da hipótese nula. É uma afirmação que é aceita como verdadeira se H_0 for falso e contém uma declaração de desigualdade estrita, tal como $\leq$, ≠ ou $\geq$. O símbolo H_0 é lido como "H zero" ou "H nula", e H_a como "H a" (LARSON; FARBER, 2016, p. 324, grifo autores).

Para formular as hipóteses, é necessário expressar a proposição feita acerca do parâmetro populacional por meio de uma sentença matemática. O quadro subsequente ilustra a conexão entre possíveis afirmações sobre o parâmetro e as respectivas hipóteses nulas ou alternativas.

Quadro 118 – Declarando e construindo hipóteses

Declaração sobre H_0 a média é...	Sentença matemática	Declaração sobre H_a a média é...
. . . maior ou igual a k . . . . pelo menos k . . . . não menos que k.	$\begin{cases} H_0: \mu \geq k \\ H_a: \mu < k \end{cases}$	. . . menor que k . . . . abaixo de k . . . . menos que k.
. . . menor ou igual a k . . . . no máximo k . . . . não mais que k	$\begin{cases} H_0: \mu \leq k \\ H_a: \mu > k \end{cases}$	. . . maior que k . . . . acima de k . . . . mais que k.
. . . igual a k . . . . k . . . . exatamente k	$\begin{cases} H_0: \mu = k \\ H_a: \mu \neq k \end{cases}$	. . . não igual a k . . . . diferente de k . . . . não k.

Fonte: Larson e Farber (2016, p. 325)

Quando conduzimos um teste de hipóteses, temos duas opções de decisão: rejeitar a hipótese nula ou não a rejeitar. Dado que a decisão é fundamentada em uma amostra e não na população total, sempre há a possibilidade de cometermos um equívoco, resultando em erro tipo I ou tipo II.

Segundo Larson e Farber (2016, p. 327), “um erro tipo I ocorre se a hipótese nula é rejeitada quando na realidade é verdadeira e um erro tipo II ocorre se a hipótese nula não é rejeitada quando na realidade ela é falsa.” O quadro a seguir, mostra os quatro possíveis resultados de um teste de hipótese.

Quadro 119 – Resultados possíveis de um teste de hipótese

Decisão	Realidade de H_0	
	H_0 é verdadeira	**H_0 é falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

Fonte: Larson e Farber (2016, p. 327)

Em um teste de hipótese, o nível de significância é a probabilidade máxima permitida de ocorrer um erro tipo I. Ele é simbolizado por α (letra grega minúscula alfa). A probabilidade de um erro tipo II é simbolizada por β (letra minúscula grega beta), afirma Larson e Farber (2016, p. 329).

Ao se determinar o nível de significância em um valor pequeno, almejamos que a probabilidade de rejeitar uma hipótese nula verdadeira seja pequena. Os três níveis de significância usuais são $\alpha = 0{,}10$, $\alpha = 0{,}05$ e $\alpha = 0{,}01$.

6.1.6 Teste de Hipóteses da Turma Analisada

Nesta parte do estudo, os resultados do pré-teste e pós-testes serão comparados sob uma perspectiva estatística, buscando demonstrar de maneira eficaz que a implementação da sequência didática teve o impacto desejado na aprendizagem dos estudantes. Para esse propósito, optamos por utilizar o "teste de hipóteses", uma abordagem estatística que facilita a tomada de decisões relacionadas a uma ou mais população com base nas informações obtidas da amostra.

A estatística de teste padronizada adotada foi a *t-student* para as diferenças entre médias de amostras dependentes. “Duas amostras são dependentes quando cada elemento de uma amostra corresponde a um elemento da outra amostra” (LARSON; FARBER, 2016, p. 391, grifo autor).

É necessário comparar as médias de duas distribuições normais de uma mesma população, no entanto em dois momentos diferentes, que no caso do experimento deste trabalho são o momento do pré-teste (x) e o momento do pós-teste (y). Como estatística de teste padronizada adotamos a t-student para as diferenças entre as médias de amostras dependentes colhidas em diferentes momentos. Segundo Larson e Farber (2016, p. 391), “duas amostras são dependentes quando cada elemento de uma amostra corresponde a um elemento da outra amostra”. A estatística de teste padronizada t-student para amostras dependentes é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}}$$

Em que:

$\boldsymbol{n}$: O número de pares de dados;

d: A diferença entre os valores em um par de dados, d = (valor dos dados na 1ª amostra) – (valor dos dados na 2ª amostra);

$\boldsymbol{\mu_d}$: A média hipotética das diferenças de dados emparelhados na população;

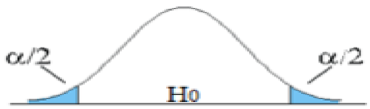
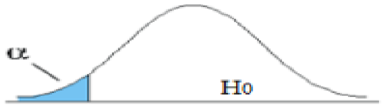
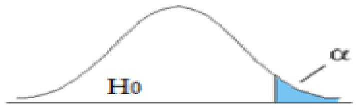
$\bar{\mathbf{d}}$: A média das diferenças entre os valores dos dados emparelhados nas amostras dependentes $\bar{\mathbf{d}} = \frac{\sum \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{n}}$;

S_d: O desvio padrão das diferenças entre os valores dos dados emparelhados nas amostras dependentes **S_d =** $\sqrt{\frac{\sum(d-\overline{d})^2}{n-1}}$.

O grau de liberdade (GL) é o elemento utilizado para construir o gráfico da t-student, que é calculado subtraindo 1 da amostra, devido analisarmos amostras de 32 alunos, então, o grau de liberdade será $n - 1$.

Conforme a determinação das hipóteses: hipótese nula (H_0) e hipótese alternativa (H_a), podemos representar a aceitação de uma e a rejeição da outra, através da curva normal. A seguir apresentamos o quadro com os tipos de curva normal que pode resultar de um teste de hipóteses.

Figura 18 – Tipos de curva normal

Hipóteses	Curva Normal	Interpretação da cauda
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (média 1 = média 2) H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$ (média 1 ≠ média 2)	 	É um teste bicaudal com regiões de rejeição de H_0 em ambas as caudas.
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (média 1 = média 2) H_a: $\mu_1 < \mu_2$ (média 1 < média 2)	 	É um teste com cauda à esquerda, que possui região de rejeição de H_0, na cauda da esquerda.
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (média 1 = média 2) H_a: $\mu_1 > \mu_2$ (média 1 > média 2)	 	É um teste com cauda à direita, que possui região de rejeição de H_0, na cauda da direita.

Fonte: Silva (2015, p. 175)

A figura mostra as possibilidades de curvas normais que compõem um teste de hipóteses, e as respectivas interpretações dos resultados tomando como referência a aceitação ou não da hipótese nula.

No teste de hipótese, após encontrado o resultado do teste por meio da equação mostrada e escolhida as hipóteses que melhor se adequam ao estudo, usa-se a curva normal para verificar quais das hipóteses levantadas serão aceitas ou rejeitadas, tomando como significância o valor de 0,05 e confiança o valor de 1 - α = 0,95.

A tabela a seguir apresenta as notas absolutas dos discentes nos dois testes multiplicativos. As notas variaram de 0 a 12 de acordo com o número de acertos de cada aluno, este intervalo para a pontuação foi escolhido devido ao fato de os testes multiplicativos serem compostos de 12 questões.

Tabela 22 – Desempenhos nos testes multiplicativos e diferença entre as médias continua

Discentes	Nota no pré-teste (X)	Nota no pós-teste (Y)	Diferença (d)	$d - \bar{d}$	$(d - \bar{d})^2$
D_1	6	11	- 5	0,09	0,01
D_2	5	10	- 5	0,09	0,01
D_3	0	9	- 9	-3,91	15,29
D_4	1	12	-11	-5,91	34,93
D_5	10	11	-1	4,09	16,73
D_6	5	12	- 7	-1,91	3,65
D_7	7	12	- 5	0,09	0,01
D_8	5	12	- 7	-1,91	3,65
D_9	11	12	- 1	4,09	16,73
D_{10}	11	12	- 1	4,09	16,73
D_{11}	11	12	- 1	4,09	16,73
D_{12}	12	12	0	5,09	25,91
D_{13}	12	12	0	5,09	25,91
D_{14}	12	12	0	5,09	25,91
D_{15}	11	12	- 1	4,09	16,73
D_{16}	1	11	- 10	-4,91	24,11
D_{17}	2	12	- 10	-4,91	24,11
D_{18}	10	12	- 2	3,09	9,55
D_{19}	8	12	- 4	1,09	1,19
D_{20}	2	12	- 10	-4,91	24,11
D_{21}	6	9	- 3	2,09	4,37
D_{22}	9	12	- 3	2,09	4,37
D_{23}	1	10	- 9	-3,91	15,29
D_{24}	4	10	- 6	-0,91	0,83
D_{25}	11	12	- 1	4,09	16,73
D_{26}	4	12	- 8	-2,91	8,47
D_{27}	7	12	- 5	0,09	0,01
D_{28}	6	12	- 6	-0,91	0,83
D_{29}	9	12	- 3	2,09	4,37
D_{30}	0	10	- 10	-4,91	24,11
D_{31}	0	10	- 10	-4,91	24,11
D_{32}	0	9	- 9	-3,91	15,29
	$\sum X$ = 199	$\sum Y$ = 362	$\sum d$ = - 163 $\bar{d}$ = -5,09		Σ = 420,72

$\mu_d = 0$
$S_d = 3{,}684$
$n = 32$

Fonte: Experimentação (2023)

Em seguida, os dados foram utilizados para a aplicação do teste com base nas fórmulas:

Média do pré-teste ➡ $\mu_x = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{199}{32} = \mathbf{6{,}21875}$

Média do pré-teste ➡ $\mu_y = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{362}{32} = \mathbf{11{,}3125}$

Prosseguindo, o próximo passo foi estabelecermos ao teste as seguintes hipóteses:

a) Hipótese nula (H_0): a média do pré-teste multiplicativo é maior ou igual à do pós-teste multiplicativo.

$H_0 \Rightarrow \mu_X \geq \mu_Y \therefore \mu_X - \mu_Y \geq 0 \therefore \overline{d} \geq 0 \therefore \overline{d} > \mu_d$

b) Hipótese alternativa (H_a): a média do pré-teste multiplicativo é menor que à do pós-teste multiplicativo.

$H_a \Rightarrow \mu_X < \mu_Y \therefore \mu_X - \mu_Y < 0 \therefore \overline{d} < 0 \therefore \overline{d} < \mu_d$

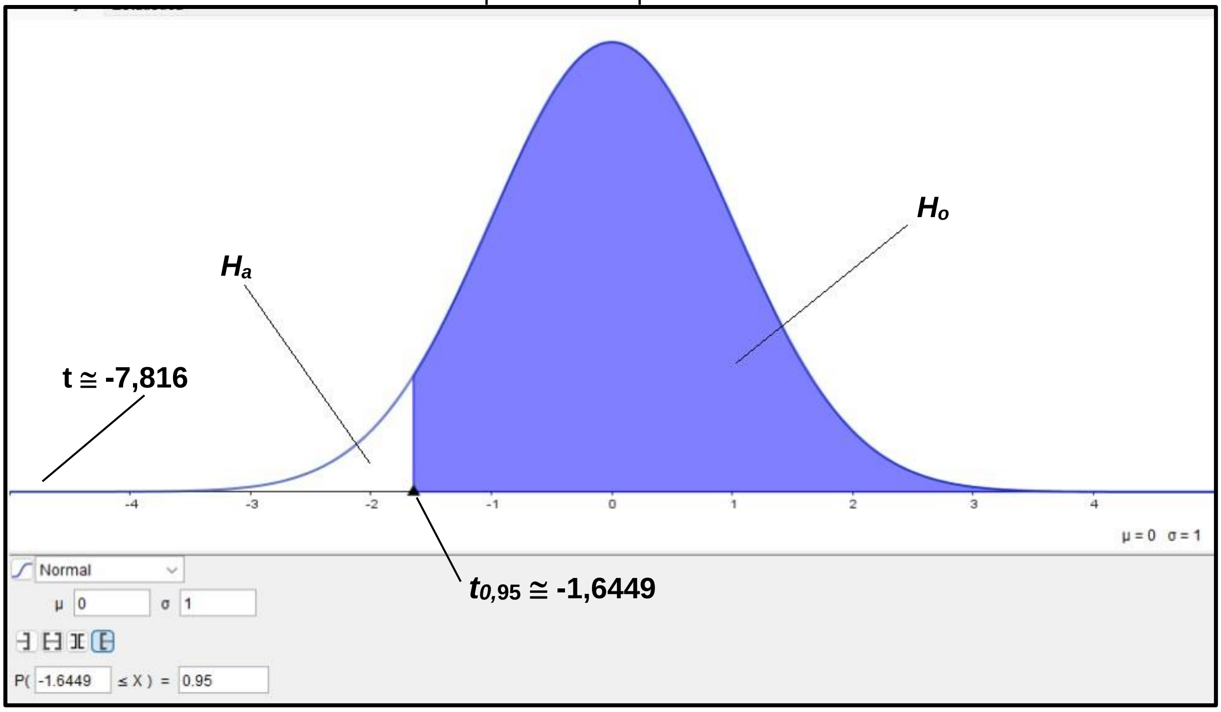
Agora substituiremos os dados da tabela acima na equação a seguir:

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{(6{,}219 - 11{,}313) - 0}{\frac{3{,}684}{\sqrt{32}}} \Rightarrow t = \frac{-5{,}09}{\frac{3{,}684}{\sqrt{32}}} \Rightarrow \mathbf{t \cong -7{,}816}$$

Com base nas hipóteses estabelecidas, podemos representar a aceitação de uma e a rejeição da outra, através da curva normal. Pelo fato de ter boa aceitabilidade na comunidade cientifica, utilizamos como nível de significância: α = 0,05 e de confiança: 1 - α = 0,95, com grau de liberdade igual a g.l. = n -1 = 32 – 1 = 31. Utilizando como ferramenta de análise de dados o programa Microsoft Excel onde encontramos o "Z crítico uni-caudal" igual a – 1,6449. Em seguida, a curva normal unilateral à esquerda gerada no GeoGebra (software de matemática dinâmica), indicará a hipótese rejeitada e, consequentemente, a hipótese aceita. A seguir apresentamos o gráfico da curva normal do teste de hipótese de nosso experimento.

Gráfico 26 – Curva normal do teste de hipótese do experimento



Fonte: Experimentação (2023)

De acordo com as hipóteses estabelecidas, a decisão é aceitar H_0 se $t > t_{1-\alpha}$ ou rejeitá-la se $t \leq t_{1-\alpha}$. A hipótese nula está representada na parte pintada de azul no gráfico acima. Como o valor de $t < t_{0,95}$ ➡ -7,816 < -1,6449, devemos rejeitar a hipótese nula e aceitar a hipótese alternativa. O resultado do teste (t) está fora do intervalo de H_0, fora da região crítica. Isto nos fornece evidências suficientes, com um grau de confiança de 95% (1 – α = 1 – 0,05 = 0,95 ou 95%), para comprovarmos a afirmação da H_a de que as médias do pré-teste multiplicativo foram menores do que as médias do pós-teste multiplicativo, ou seja, a metodologia de ensino surtiu efeito, o que acarretou numa melhora no desempenho dos discentes na resolução de problemas de estruturas multiplicativo no pós-teste.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas multiplicativos, constitui a base dos conteúdos matemáticos que o estudante deve assimilar no ensino fundamental. Desta forma, consideramos crucial que o ensino deste tipo de problema seja abordado sob metodologias que ampliem a autonomia e participação dos estudantes na construção do próprio conhecimento, fazendo com que desenvolvam habilidades que lhes permitam prosseguir na resolução de problemas mais complexos.

Com o intuito de contribuir para o ensino de problemas multiplicativos, apresentaremos os resultados de uma pesquisa que tem como objetivo geral analisar os possíveis efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões envolvendo o campo conceitual multiplicativo com números naturais? E como objetivos específicos, buscamos identificar os erros cometidos pelos discentes do 6º ano na resolução de problemas multiplicativos com números naturais, assim como analisar as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos discentes do 6º ano na resolução de problemas multiplicativos com números naturais.

Com base nos aspectos históricos e conceituais, revisão de estudos e do diagnóstico com estudantes, que foram realizados na fase de análises prévias da metodologia de pesquisa adotada, Engenharia Didática, delineamos um panorama das necessidades de ensino e aprendizagem do objeto matemático problemas com estrutura multiplicativa que nos favoreceu na construção de um produto educacional que traga efeitos positivos sobre o desempenho na aprendizagem dos estudantes.

Na fase de construção, buscamos aprofundar a pesquisa sobre as metodologias de ensino, sequência didática e Ensino por Atividade Experimentais para elaborar um produto que contemplasse ao currículo de matemática e revelasse as dificuldades levantadas nas análises prévias, as quais sejam de caráter afetivo, conceituais de interpretação de problemas, escolha da operação, construção de sentenças com diferentes posições do valor desconhecido, modelação de problemas com uma ou duas operações, como também as dificuldades sobre o uso da linguagem e das relações interpessoais nas aulas de matemática.

Na fase de experimentação aplicamos a sequência didática composta por 15 atividades, dentre elas de redescoberta e de aprofundamento em que os objetivos, de forma gradual e sistemática, se deram em torno da compreensão sobre igualdades multiplicativa, problemas com uma operação e problemas com duas operações em que os educandos possam absorver os significados dos conceitos apreendidos em situações monetárias e não monetárias, aumentando seu conhecimento no campo conceitual sobre problemas multiplicativos.

A experimentação aconteceu em dezesseis encontros nos quais também foram aplicados os pré-teste e pós-teste que foram comparados em análise *a priori* e *a posteriori*, buscando a validação do produto quanto ao desempenho quantitativo dos estudantes mediante os efeitos da sequência didática que foi experimentada. Também foi verificado o desempenho positivo de caráter qualitativo quanto as atitudes comportamentais dos estudantes e sobre a sua experiencia com a Matemática.

Com o desempenho quantitativo das análises a *posteriori,* buscamos mostrar que as dificuldades iniciais que foram averiguadas no pré-teste como a escolha da operação, a elaboração da sentença, as dificuldades quanto as sentenças algébricas com divisão, foram progressivamente superadas ao longo do desenvolvimento das atividades, fazendo com que seu nível de formalização sobre os conceitos estudados ficasse mais elaborados.

Acerca do desempenho qualitativo que observamos ao longo do processo de aprendizagem, o qual foi vivenciado na experimentação da sequência didática aplicada, procuramos evidenciar que a metodologia de ensino por atividades experimentais permitiu que, por meio das redescobertas, os estudantes fossem conduzidos a um nível de autonomia cognitiva e comportamental que demonstrassem sua motivação, capacidade de lidar com os problemas matemáticos do cotidiano com ideias positivas e ampliando o seu conhecimento de forma independente.

Durante a condução da presente pesquisa, surgiram reflexões que deram origem a questionamentos relevantes. O primeiro deles indaga: Qual seria o impacto da aplicação da sequência didática em outras turmas do 6º ano do ensino fundamental? A resposta a essa pergunta é crucial para aprimorar a abordagem didática com base nos resultados obtidos em diferentes contextos escolares.

O segundo questionamento pondera: Seriam os resultados da sequência didática semelhantes se aplicados em turmas dos 5º anos do ensino fundamental? Responder a essa pergunta fornecerá insights sobre a viabilidade de ensinar resolução de problemas multiplicativos com números naturais a discentes de ano escolar anterior ao 6º ano, potencialmente influenciando ajustes ou melhorias curriculares significativas.

O terceiro questionamento indaga: Os efeitos da sequência didática aplicada aos discentes do 6º ano seriam os mesmos em uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA)? As possíveis respostas a essa indagação permitirão a exploração de metodologias alternativas na EJA, abrindo caminho para novos estudos sobre o processo de ensino, aprendizagem e avaliação nessa modalidade escolar. Essas questões suscitam reflexões essenciais para o desenvolvimento contínuo e a adaptação eficaz de práticas pedagógicas.

Esperamos que, com esta sequência didática possamos contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de problemas com estrutura multiplicativa com números naturais, de modo a construir uma educação de melhor qualidade. E que os docentes, não somente, da Educação Básica possam diversificar suas metodologias de ensino de resolução de problemas com estrutura multiplicativa com números naturais, alcançando com isso, os melhores resultados na aprendizagem dos alunos.

E para tal propósito, elaboraremos um produto educacional composto de uma sequência didática para o ensino de problemas multiplicativos envolvendo os números naturais, com base nos resultados obtidos na pesquisa realizada.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas.** In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014.

ALTOÉ, Renan Oliveira. **Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas.** 229f. Dissertação (mestrado) - Instituto Federal do Espírito Santo. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Vitória-ES. 2017.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da Universidade Federal de Paraná. 1 ed., p. 136. 2007.

ALMOULOUD, Saddo. Ag.; SILVA, Maria José Ferreira. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22. Acesso em: 03 nov. 2022.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em: 03 nov. 2022.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactial Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. **Revista: EMP.** V.20, n. 2, p47-83. 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/36808/pdf. Acesso em: 29 nov. 2022.

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz. Engenharia Didática de Formação: repercussões para a formação do professor de Matemática no Brasil. **EMR- Educação Matemática em Revista.** RS, V2. 18, p.121-137, 2017. Disponível em: https://www.academia.edu/36456573/. Acesso em: 29 nov. 2022.

ANDRADE, M. C. G. **As inter-relações entre iniciação matemática e alfabetização**. In: NACARATO, Adair Mendes e LOPES, Celi Espasandin. **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 143-161.

ARAÚJO, André Felipe Queiroz; SANTOS, Ernani Martins dos. Análise do conceito de divisão em um livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental, na ótica da teoria dos campos conceituais. **Anais ...** São Paulo/SP, 2016. Disponível em:http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/6475_2739_D.pdf. Acesso em: 25 jun. 2023.

ARRUDA, Joseane Pinto de. **Cidadania e matemática no livro didático para as séries iniciais do ensino fundamental.** 2004. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação, do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/87510. Acesso em: 02 jul. 2022.

ARTIGUE, Michèle. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.** Colômbia, 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf. Acesso em: 08 nov. 2022.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 8ª ed. Florianópolis: ed. da UFSC, 2012. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7652636/mod_resource/content/1/Barbetta%20-%20Estat%C3%ADstica%20aplicada%20%C3%A0s%20ci%C3%AAncias%20sociais%20%282010%29.pdf . Acesso em: 28 out. 2023.

BARBOSA, Cira Naiá Campos. **O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por atividades experimentais.** Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação). PPGED. Universidade do Estado do Pará, Pará, 2021.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu-RJ. **Anais...** Caxambu-RJ: ANPED, 2001. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf. Acesso em: 04 jan. 2022.

BARBOSA, Jozeildo Kleberson. Campo aditivo e multiplicativo: o que é avaliado na prova brasil do 5º ano. In: Anais do IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia - SINECT. **Anais ...** Ponta Grossa/PR, 2014. Disponível em: http://sinect.com.br/anais2014/anais2014/artigos/ensinodematematica/01405043421.pdf. Acesso em: 18 abr. 2023.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. Alexandria: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69- 85, 2009.

BARRETO, F.S. e BORBA, R E S R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**: Salvador. 2010.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática.** Ed. da FURB, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939/28967. Acesso em: 10 nov. 2022.

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. Autores e editores de compêndios e livros de leitura (1810-1910). **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 475-491, set./dez. 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/pnghDKWfrjkTxN6gPQyDYbr/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 10 nov. 2022.

BITTAR, Marilena. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, R. A. M.; BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.) **Investigações em didática da matemática.** UFPE-Recife, v. 1, p. 101-132, 2017.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, Ole. **A ideologia da certeza em educação matemática.** In: SKOVSMOSE, O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001. cap. 5. p.127-148.

BORBA, Marcelo de Carvalho. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: Reunião anual da Anped, n. 27, 2004, Caxambu-MG. **Anais...**Caxambu-MG, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. ANTES QUE SEJA TARDE: aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** - vol. 7 - número 1 - 2016

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. **Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015.

BORBA, Rute E. S. Rosa; SOUZA, Leandro de Oliveira; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **DESAFIOS DO ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE COMBINATÓRIA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.**EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 9 - número 1 – 2018.

BRASIL. Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** Brasília: DF, Senado, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** –. Brasília, MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – Ensino Médio. Brasília, MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Resultados da Prova Brasil – 2013.** Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/resultados. Acesso em: 09 dez. 2022.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução 2/2017.** Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática –1ª a 4ª série, Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL, **Matriz de Referência de Matemática do SAEB**: Temas e seus descritores 5º ano do ensino fundamental. Disponível em: www.portal.inep.gov.br, acesso em 29 de outubro de 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/, acesso em 20 de dezembro de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 168p. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 148 p. 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental**. 1º e 2º ciclos – Brasília: MEC/SEF, 126p. 1997.

BROUSSEAU, Guy. (2013), **Introduction à l'ingénierie didactique.** Repéré à http://guy-brousseau.com/2760/introduction-a-l%E2%80%99ingenierie-didactique-2013/ posté le 13 décembre 2013. Acesso em: 29 nov. 2022.

BURAK, Dionisio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** 1992. 2v. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP.

CABRAL, Danilo Rafael de Lima. **Testes estatísticos e detecções de mudanças de conceitos em fluxos de dados.** 2017. 107 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, Recife, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/25233. Acesso em: 03 nov. 2023.

CAMPOS, Márcia Azevedo. **Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º. Ano do ensino fundamental.** 2019. 206 fls. Tese. (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.
Disponível em: http://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/29633. Acesso em: 03 nov. 2022.

CAMPOS, Márcia Azevedo; FARIAS, Luiz Márcio Santos. A educação algébrica e a resolução de problemas numéricos no 6º. ano do ensino fundamental: prelúdio ao pensamento algébrico. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v.21, n.3, pp. 143-166, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p143-166. Acesso em: 03 nov. 2022.

CARDOSO, Valdinei Cezar; SCHIO, Rúbia Barcelos Amaral; OLIVEIRA, Samuel Rocha de. **Um Estudo de Situações-Problema do Campo Multiplicativo Exploradas por Professores e Estudantes do Ensino Fundamental.** Nuances: estudos sobre Educação, Presidente Prudente. SP, v. 29, n.3, p.192-214, set./dez., 2018. ISSN: 2236- 0441. DOI: 10.32930/nuances.v.29i3.5733.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em: http://143.54.226.61/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf. Acessado em: 03, out. 2022.

CASTRO, Sandro Benício Goulart. **O ensino de divisibilidade de números naturais por atividades**. 2019. 250 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/570109. Acesso em: 21 maio. 2023

CASTRO, Elizane Rocha; BARRETO, Marcília Chagas; NASCIMENTO, Francisco Jeovane do. O campo conceitual multiplicativo: análise das atividades matemáticas ofertadas no 5º ano do ensino fundamental. **Revista Cocar,** Belém, Edição Especial, nº 3, janeiro/julho, p.88-114, 2017.

CIDRÃO, Georgyana Gomes; ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (Edf): Análise Preliminar e Análise a Priori para a Construção dos Conjuntos Numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências**, *[S. l.]*, v. 11, n. 01, p. 58-72, 2022. DOI: 10.22481/rbba.v11i01.10369. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/rbba/article/view/10369. Acesso em: 29 nov. 2022.

CUNHA FERREIRA, Jorge Williams; NUNES, José Messildo Viana. Concepções Multiplicativas em uma Coleção de Livros Didáticos de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Uma Análise Sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 25, p. 133–151, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5183. Acesso em: 17 ago. 2023

D’AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática: um programa. **A educação matemática em revista**, Blumenau, v. 1, n.1, ago./dez. 1993, p. 5-11.

D’AMBROSIO, Beatriz Silva. **Conteúdo e metodologia na formação de professores.** In: FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes (Orgs). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática. São Paulo: Musa Editora, 2005.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – o elo entre as tradições e a modernidade**. 5. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1). 2013.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática.** Diário do Grande ABC. Santo André: sexta-feira, 31 de outubro de 2003.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil.** Petrópolis: Vozes, 2008.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 22. ed. Campinas: Papirus, 2011.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª Ed. São Paulo; Educ., 2008.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Educ., p.135-154, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **TELÁRIS MATEMÁTICA** (3ª edição). São Paulo: Ática, 2018.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. Ápis: **Matemática** – Ensino Fundamental – Anos Iniciais. 2 ed. São Paulo: Ática, 2014. (Obra em 3 v. do 1º ao 3º ano).

DANTE, L. R. Ápis: **Matemática** – Ensino Fundamental – Anos Iniciais. 2 ed. São Paulo: Ática, 2014. (Obra em 2 v. para 4º e 5º ano).

DAVID, Maria Manuela MS; TOMAZ, Vanessa Sena**. Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.** Autêntica Editora, 2008.

DINIZ, Maria Ignez. **Os problemas convencionais nos livros didáticos.** In.: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 99-102.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.** Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011. Vol. 1.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales** (Segunda edición). Universidad del Vale, Instituto de Educação e Pedagogia, Santiago de Cali: Peter Lang, Colômbia. 2004.

ECHEVERRIA, Maria del Puy Perez; POZO, Juan Ignacio. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender.** In.: POZO, J. I. (Org.); A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-41.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática.** 3. ed. Campina, São Paulo: UNICAMP, 2004. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=3474146. Acesso em: 13 nov. 2022

FERRAZ, Sara Rodrigues. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG).** 218f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Mestrado profissional em Educação Matemática. Ouro Preto-MG. 2016.

FERNANDES, Cícera; SOUSA, Rosalide Carvalho de; ALVES, Francisco Régis Vieira. UMA PROPOSTA DE ANÁLISE DA ENGENHARIA DIDÁTICA DE 1° E 2° GERAÇÃO ALIADA AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. In: Congresso Internacional de Ensino e Formação Docente. **Anais...** Redenção (CE) UNILAB, 2020. Disponível em:

<https//www.even3.com.br/anais/cief2020/236780-UMA-PROPOSTA-DE-ANÁLISE-DA-ENGENHARIA-DIDATICA-DE-1-E-2-GERACAO-ALIADA-AS-SITUACOES-DIDATICAS>. Acesso em: 27 nov. 2022.

FERREIRA, J. W. C.; NUNES, J. M. V. Representações de Estudantes do 4º Ano do Ensino Fundamental Frente a Problemas do Campo Multiplicativo: uma análise de resoluções. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 23, 31 maio 2017. Disponível em: Representações de Estudantes do 4º Ano do Ensino Fundamental Frente a Problemas do Campo Multiplicativo: uma análise de resoluções | Perspectivas da Educação Matemática (ufms.br). Acesso em: 17 jun. 2023

FIGUEIREDO FILHO, Dalson Britto; SILVA JÚNIOR**,** José Alexandre da. Desvendando os Mistérios do Coeficiente de Correlação de Pearson (r)**. Revista Política Hoje**, Vol. 18, n. 1, 2009.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.** 2. ed. Ver. - Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil.** Zetetiké, Campinas, n. 4, 1995.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço de. **Tendências em Educação Matemática: Livro didático**. 2. ed. - Palhoça: Unisul Virtual, 2005. Disponível em: https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/22126/1/fulltext.pdf. Acesso em: 15 jun. 2022

FLORÊNCIO ROCHA KASAHARA, Rita de Cássia; FRANCO DE SÁ, Pedro. Engenharia Didática: overview: Didactic Engineering: overview. **Revista Cocar**, [S. l.], v. 19, n. 37, 2023. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/7542. Acesso em: 20 dez. 2023.

FOSSA, John A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: Edulfpa, 2001

FRANCO DE SÁ, Pedro.; SOUZA E MAFRA, José Ricardo; ANDEW FOSSA, John. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática: The teaching of mathematics through experimental activities in mathematics education. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, 2022. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5498. Acesso em: 27 ago. 2023.

GAY, Mara Regina; Garcia & SILVA, Willian Raphael. **ARARIBÁ MAIS** (1ª edição). São Paulo: MODERNA, 2018.

GOLFETI, Silvia Marques. **Análise de livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental: conteúdos de Estatística descritiva e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).** 2017. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em

Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20192. Acesso em: 01 jul. 2022.

GRANDO, Regina Célia et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, 2000.

JENSKE, Grazielle. **A Teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdos básicos da matemática:** um estudo de caso**,** Dissertação de Mestrado, Pontifica UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2011.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni & CASTRUCCI, Benedecto. **A CONQUISTA DA MATEMÁTICA** (4ª edição). São Paulo: FTD, 2018.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. **Estatística aplicada**. 6. Ed. Tradução: José Fernando Pereira Gonçalves, São Paulo: Pearson, 2016.

LIBÂNEO, José Carlos; OLIVEIRA, João Ferreira; TOSCHI, Mirza Seabra. **Educação Escolar: políticas, estrutura e organização.** 10. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 2012. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5349623/mod_resource/content/1/Gest%C3%A3o%20Escolar_Lib%C3%A2neo.pdf. Acesso em: 01 jul. 2022.

LIMA, Ana Paula Barbosa de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa **RECONHECENDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM COMO ESTRATÉGIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.4, pg.694-714, 2015

LIMA, Renan Gustavo Araujo de.; NEVES, Tatiani Garcia. Possibilidades de uso da engenharia didática na educação matemática e no ensino regular. **Revista Educação Matemática Pesquisa,** v. 21, n. 5, p. 694-708, 2019. Disponível: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p694-708. Acesso em: 03 nov. 2022.

LONGEN, Adilson. **APOEMA MATEMÁTICA** (1ª edição). São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LOPES, Thiago Beirigo; SÁ, Pedro Franco de. Questões aritméticas, questões algébricas e escolha da operação: interrelações em uma revisão bibliográfica. **Perspectivas da Educação Matemática.** v. 16, n. 41, p. 1-22. https://doi.org/10.46312/pem.v16i41.16617. 2023.

LOPES, Thiago Beirigo; FELIX, Ana Paula Nunes. SÁ, Pedro Franco de. A Escolha da Operação em Questões Multiplicativas Aritméticas e em Questões Multiplicativas Algébricas que Envolvem Números Naturais e Números Decimais. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**. Cuiabá, v. 10, n.1, e22020, jan./abr., 2022. https://doi.org/10.26571/reamec.v10i1.13540.

LOPES, Thiago Beirigo; FELIX, Ana Paula Nunes; SÁ, Pedro Franco de. Associação Estatística entre Escolha da Operação em Questões Multiplicativas com Números Naturais e com Números Decimais. **Revista Exitus**, *[S. l.]*, v. 12, n. 1, p. e022046, 2022. DOI: 10.24065/2237-9460.2022v12n1ID1920. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/1920. Acesso em: 29 nov. 2022

LOPES, Thiago; PALMA, Rute; SÁ, Pedro. (2018). Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). Educação Matemática Pesquisa: **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** 20. 10.23925/1983-3156.2018v20i1. p159 - 181.

LOPES, Carmen Simone dos Santos; SÁ, Pedro Franco de; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. O ensino de Problemas Multiplicativos segundo a opinião de professores. In: Anais do XI Seminário de Cognição e Educação Matemática de (SCEM), p. 281-299, de 5-7 out. 2022. **Anais...**Belém/PA, 2022. Disponível em: https://ccse.uepa.br/ppged/?page_id=1951. Acesso em: 19 ago. 2022.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1990.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna**. 2ª Ed. São Paulo: Cortez, 1991.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). Educação Matemática: uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002.

MAFRA, José Ricardo e Souza; SÁ, Pedro Franco de; SILVA, Francisco Robson Alves da. Interface entre o ensino por atividades experimentais E Tendências Na Educação Matemática. **REAMEC -** Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23012, 2023. DOI: 10.26571/reamec.v11i1.13969. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/13969. Acesso em: 14 set. 2023.

MAGINA, M. P.; MERLINI, V.L.; SANTOS, A. **O Desempenho dos estudantes de 4ª Série do Ensino Fundamental frente a Problemas de Estrutura Multiplicativa.** In: X encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Ilhéus: Via Literarum, v. 1. p. 1-11. (2010).

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lucia. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência educação**, Bauru, v. 20, n. 02, p. 517-533, jun. 2014. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132014000200016&lng=pt&nrm=iso . Acesso em: 03 dez. 2022.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; SPINILLO, Alina Galvão. **Repensando a multiplicação e divisão:**

contribuições da teoria dos campos conceituais. 1 ed. São Paulo, PROEM, 2014, 136p.

MAGINA, Sandra; SANTOS, Aparecido; MERLINI, Vera. **Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos estudantes.** XIII CIAEM, Recife, 2011.

MARTINS, Glauce Vilela. **Problemas de Combinatória em Livros Didáticos do 5° Ano Aprovados no PNLD 2016, Comunicação Científica.** Encontro Nacional De Educação Matemática - ENEM Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

MARTINS, Ester Maria Freixedelo. Resolução de situações-problema da categoria isomorfismo de medidas, por alunos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental: reflexão e análise. **Anais...** São Paulo/SP, 2016. Disponível em:http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/6632_2634_ID.pdf. Acesso em: 25 de jun. 2023.

MARTINS, Henrique Araken. **Estruturas de avaliação escolar para mapear habilidades tomando como base as Taxonomias de Bloom em questões de múltipla escolha.** 2016. 77 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6985_2976_ID.pdf. Acesso em: 06 jul. 2022.

MASETTI, Cristina. **Análise de livros didáticos de matemática: função exponencial.** 2016. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19027. Acesso em: 01 jul. 2022.

MATNI, Renata Cristina Alves. **O ensino de problemas com as 4 operações por meio de atividades.** 113 p. TCC (Licenciatura Plena em Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém, 2014.

MELLO, Leila de Souza. **Campo Conceitual Multiplicativo: reflexões sobre o ensino de Matemática em um curso de formação continuada com professoras dos anos iniciais.** 2020. Dissertação (Mestrado Profissional), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020

MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido dos; MAGINA, Sandra Maria Pinto. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação.** Bauru, v.20, n. 2, pp. 517-533, 2014.

MIGUEL, Antonio; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; D’AMBROSIO, Ubiratan. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, set/dez. 2004. Disponível em: Acesso em: 30 jul. 2022.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, Antonio; CARVALHO, Dione Lucchesi de; BRITO, Arlete de Jesus. **História da Matemática em Atividades Didáticas.** 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIRANDA, Denis do Socorro Pinheiro. **O ensino por atividades de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular**. 2021. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

MIRANDA, Natali. de Jesus Ferreira de; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; SÁ, Pedro Franco de. ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE PESQUISA NOS TRABALHOS PUBLICADOS NO EBRAPEM (2014-2021). **REAMEC** - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23090, 2023. DOI: 10.26571/reamec.v11i1.15208. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/15208. Acesso em: 20 dez. 2023.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores.** In: LORENZATO, SERGIO (org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. 2. ed., Campinas: Autores Associados, 2009.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais, O Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. **Investigações em Ensino de Ciências** - v7(1), p. 7-29, 2002. Disponível em https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf. Acesso em 20 jan. 2022.

MOURA Tiago Emanuel Domingos de; SANTOS Emily de Vasconcelos; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do**. A BNCC Para O Ensino Fundamental: uma Descrição do Conteúdo Probabilístico e Articulações com os PCN.** IV CONEDU. V.1, 2017, ISSN 2358-8829 disponível em https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2017/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID7893_17102017122602.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022

MORAIS, R. dos S.; ONUCHIC, L. R. **Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas.** In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014.

MÜLLER, Iraci. Tendências atuais de Educação Matemática. UNOPAR Cient., Ciênc. Hum. Educ., Londrina, v. 1, n. 1, jun. 2000. **Revista Científica.** Disponível em: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20142/mpm5610/tendencias.pdf. Acesso em: 27 nov. 2021.

MÜLLER, Iraci. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, D'Ambrósio 2001.

MULLER, Mary Stilo. **Normas e padrões para teses, dissertações e monografias.** -4 ed – atual. – Londrina: ed. UEL, 2001.

NASCIMENTO, Juliane do; MORELATTI, Maria Raquel Miotto. A Abordagem de Problemas no Material do PIC. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais ...** Curitiba/PR, 2013.

NASCIMENTO, Sheilla Mota Esteffen do. **Problemas multiplicativos no 4º ano do ensino fundamental: ensino e estratégias de resolução.** 89f. Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas-RS. 2017.

OLIVEIRA, Valquíria Magalhães. **O ensino de problemas multiplicativos envolvendo isomorfismo de medidas por meio de atividades experimentais.** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

OLIVEIRA, Valquíria Magalhães de; SÁ, Pedro Franco de. O ensino de problemas multiplicativos envolvendo isomorfismo de medidas por meio de atividades experimentais. **REMATEC,** [S. l.], v. 18, n. 43, p. e2023038, 2023. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023038.id518. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/518. Acesso em: 29 dez. 2023.

OLIVEIRA, Eliana Gomes de; QUEIROZ Cileda de. **COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICADOS ANOS INICIAIS: UMA ANÁLISE DO PNLD.** Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática; Retrospectivas e Perspectivas. Curitiba, PR, 2013.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In.: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; LEAL Junior, Luiz Carlos. Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas como Prática Sociointeracionista. **Bolema** [on-line]. 2015, vol.29, n.53, pp.955-978. ISSN 0103-636X. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/nLsFMY58vc7767N6RV9rGcb/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 14 nov. 2022.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; BOTTA, Luciene Souto. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais**. Revista de Educação Matemática**, São Paulo: SBEM, v. 6, n. 4, 1998, p. 19-26. Disponível em: http://www.revistasbemsp.sbempaulista.org.br/index.php/REMat-SP/article/view/129. Acesso em: 14 nov. 2022.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14 nov. 2022.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Coleção tendências em educação matemática. 2 ed., Belo Horizonte/MG, Autêntica, 2008, 128p.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PASTRÉ, Pierre; MAYEN, Patrick; VERGNAUD, Gerard. La didactique professionnelle. **Revue française de pédagogie**. p.145-198, 2006. Disponível em: https://journals.openedition.org/rfp/157. Acesso em: 29 nov. 2022.

PESSOA Cristiane, BORBA. Rute. **O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DO INÍCIO DO ENSINO FUNDAMENTAL AO TÉRMINO DO ENSINO MÉDIO**. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de julho de 2010

PINHEIRO Carlos Alberto de Miranda **O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA APARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS.** Dissertação da Universidade do Estado do Pará. Belém, 2008/ Dissertação (mestrado).

PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. **Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático.** Tese (Doutorado em educação Cientifica e Tecnológica), 306 p. - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Trad. e adapt. de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978 [1945].

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto metodológico**: tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. - 2 reimpr. – Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

POZO, Juan Ignacio.; ANGÓN, Y. P. **A solução de problemas como conteúdo procedimental da Educação Básica.** In.: POZO, Juan Ignacio (Org.); A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 139- 175.

REGES, Maria Auricélia Gadelha. **Formação de professores que ensinam matemática: experiência fundamentada na teoria das situações didáticas explorando o campo conceitual multiplicativo.** 2020. 194 f. Tese (Doutorado em 2020) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: http://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=96133. Acesso em: 29 out. 2022

RIBEIRO, Flávia Martins Ribeiro; PAZ, Maria Goretti. O ensino da Matemática por meio de novas tecnologias. **Revista Modelos**, Osório, v. 2, agosto 2012.

RIBEIRO, Bruno da Silva**. Matemática Recreativa: uma experiência baseada em clubes**. 2018. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **O livro didático: alcances e limites.** In: Encontro Paulista de Matemática, v. 7, 2004.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos: UFSCar, v. 6, n. 1, p.299-311, mai. 2012.

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de Análise Combinatória por Atividades.** 2018. 315f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/559526/1/Leonardo%20da%20Silva%20Rosas.pdf. Acesso em: 22 jul. 2022

SÁ, Pedro Franco de.; SANTOS, Maria de Lourdes Silva.; RIBEIRO, Andrea da Silva Marques. SAEB e PNLD: dissonâncias e implicações das avaliações de larga escala no contexto educacional brasileiro. **Revista Prática Docente.** v. 5, n. 2, p. 673-699, maio/ago2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/347850289_saeb_e_pnld_dissonancias_e_implicacoes_das_avaliacoes_de_larga_escala_no_contexto_educacional_brasileiro. Acesso em: 06 jul. 2022

SÁ, Pedro Franco de. **Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear.** 2003. 203 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

SÁ Pedro Franco de; FOSSA John Andrew. **Algumas consequências e conclusões de uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos**. Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 05. 2005, Porto. Anais...Porto. (Portugal), 2005.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio. José da Costa. **A Engenharia Didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos.** In: Maria Inês Marcondes; Ivanilde Apoluceno de Oliveira; Elizabeth Teixeira. (Org.). Abordagens Teóricas e Construções Metodológicas na Pesquisa em Educação. 1ed. Belém-PA: EDUEPA, 2011, v. 1, p. 151 - 166.

SÁ, Pedro de Franco. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. 121 p. Belém: IFPA; SINEPEM (Coleção II); vol. 2. Belém, 2021.

SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. REMATEC, [S. l.], v. 15, n. 35, p. 143–162, 2020. DOI: 10.37084/**REMATEC.**1980-3141.2020.n15.p143-162.id290. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/99. Acesso em: 26 ago. 2022.

SÁ, Pedro. Franco de. Ensinando Matemática através da redescoberta. **Traços**, v.2, n 3,77-81, ISSN: 1516-0025, 1999. Disponível em: http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/822. Acesso em: 26 ago. 2022.

SÁ, Pedro. Franco de. e JUCÁ, R. S. (Org.) **Matemática por atividades: experiências didáticas bem-sucedidas.** RJ: Vozes, 2014.

SÁ, Pedro. Franco de. e SILVA, R. C.S. (Orgs). **Calculadora: possibilidades de usos na sala de aula.** Belém: EDUEPA, 2015.

SADDO, Ag Almouloud; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. REVEMAT: **Revista Eletrônica de matemática.** ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22/23452>. Acesso em: 10 jun. 2022.

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais.**2017. 391 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/559493/1/Roberio%20Valente%20Santos.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2019

SILVA, Maxwell Gomes da. **Análise de livros didáticos: concepções, fundamentos e pressupostos para a formação docente.** 2020. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.491. Acesso em: 08 jul. 2022.

SILVA, José Jefferson da; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. **Análise das orientações do ensino de combinatória aos professores através do livro didático**. III CONEDU, 2013.

SILVA, Benedita das Graças Sardinha; SA, Pedro Franco de. Está questão é de vezes ou de dividir? **Revista Cocar**, Belém, Edição Especial, nº 3, janeiro/julho, p.59-87, 2017.

SILVA, Benedita das Graças Sardinha da. **Ensino de problemas envolvendo as quatro operações por meio de atividades.** 2015. 222 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.Disponível em: <https://ccse.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/dissertacoes/09/benedita_das_graas_sardinha_da_silva.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2019.

SILVEIRA, Ênio. **MATEMÁTICA COMPREENSÃO E PRÁTICA** (3ª edição). São Paulo: MODERNA, 2015.

SIQUEIRA, Regiane Aparecida Nunes de. **Tendências da educação matemática na Formação de professores.** Monografia (Especialização em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Ponta Grossa. Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação. Ponta Grossa, 2007.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; CÂNDIDO, Patrícia Terezinha; STANCANELLI, Renata. **Matemática e literatura infantil**. 2. Ed. Belo Horizonte: Lê, 1997.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Ler e aprender matemática. In.: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, p. 69-86. 2001.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (org.) **Resolução de problemas nas aulas de matemática: o recurso da problemateca.** Porto Alegre: Penso, 2016.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luz. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos campos conceituais. *In*: Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio De Janeiro, 1., Rio de Janeiro, 1993. ***Anais...*** Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundão, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, Gerárd. **Multiplicative structures**. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

VERGNAUD, Gerárd. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno ala didática. **Perspectivas**, v. 26, n. 10, 1996, p. 195-207

VERGNAUD, Gerárd. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino de matemática na escola elementar.** Tradução: Maria Lucia Faria Moro. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014. 322p

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes. 1996.

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS ALUNOS.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **Ensino de Problemas Multiplicativos,** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Pedro Franco de Sá e Carmen Simone dos Santos Lopes**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Problemas Aditivos a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) será identificado(a). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gastos ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Problemas Multiplicativos com Números Naturais.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com **Pedro Franco de Sá e Carmen Simone dos Santos Lopes** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n, Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Parauapebas - Pará, ______ de ________________de 2023.

____
Assinatura dos pesquisadores

Eu,____autorizo que meu/minha filho(a)____ a participar, voluntariamente, do projeto citado acima, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do responsável

ANEXO B – QUESTIONÁRIO SÓCIOEDUCACIONAL PARA ALUNOS

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Questionário socioeducacional

Caro (a) Aluno (a),
Este instrumento tem como objetivo obter informações para um estudo que contribuirá para a superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem da matemática, encontrados por professores e alunos durante as atividades de sala de aula. Nesse sentido, sua colaboração é de grande importância para o bom êxito do mesmo. As informações obtidas terão caráter confidencial, ou seja, sua identidade será preservada.
Desde já agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho. Obrigada!

1) Idade: ______ anos.
2) Data de nascimento: ____/____/____
3) Gênero:
( )Masculino ( ) Feminino
4) Qual o tipo de escola em que você estudou ano passado?
( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Particular ( ) conveniada
5) Você é repetente dessa série?
( ) Sim ( ) Não
6) Você trabalha de forma remunerada?
( ) Não ( ) Ás vezes ( ) Sim
7) Você costuma fazer compras (comércio, mercearia, supermercado, etc.)?
( ) Não ( ) Ás vezes ( ) Sim
8) Qual a escolaridade do seu responsável masculino?
( ) Superior ( ) Médio ( )Fundamental
( ) Fundamental incompleto ( ) Não estudou ( ) Desconheço
9) Qual a escolaridade da sua responsável feminino?
( )Superior ( ) Médio ( )Fundamental
( ) Fundamental incompleto ( ) Não estudou ( ) Desconheço
10) Qual a profissão do seu responsável masculino?
____
11) Qual a profissão do seu responsável feminino?
____
12) Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?
( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe
( ) Amigo da escola ( ) Ninguém ( ) Outro: ________________
13) Você gosta de estudar Matemática?
( ) Não gosto ( ) Gosto um pouco ( ) Gosto ( ) Gosto muito
14) Você tem dificuldade para aprender Matemática?
( ) Sim ( ) Um pouco ( ) Não
15) Qual a operação que você tem mais dificuldade em Matemática?
( ) adição ( ) subtração ( ) Multiplicação ( ) Divisão ( ) Nenhuma

16) Você se distrai nas aulas de Matemática?
( )Não, eu sempre presto atenção
( ) Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática
( ) Sim, eu não consigo prestar a atenção
17) As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?
( )Sim ( ) Não ( ) Ás vezes
18) Com que frequência você estuda matemática fora da escola?
( ) Todo dia ( ) somente nos finais de semana
( ) Só na véspera da prova ( ) Não estudo fora da escola.
19) Suas notas em Matemática geralmente são:
( )Abaixo da média (PP) ( ) Na média (PR) ( ) Acima da média (PM)
20) Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?
( ) Provas/simulado ( ) testes semanais ( ) Seminários
( ) Pesquisas ( ) Projetos ( ) Outros:______
21) A maioria das suas aulas de matemática:
( ) Iniciaram pela definição seguida de exemplos exercícios;
( ) Iniciaram com história do assunto para depois explorar os conteúdos;
( ) Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
( ) Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
( ) Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.
22) Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava:
( ) apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto;
( ) solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático
( ) Não propunha exercícios de fixação;
( ) Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

Fonte: adaptado de Barbosa, 2019

ANEXO C - FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA POR ATIVIDADE

FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA POR ATIVIDADE

Nome do Professor:____

Nome do Observador:____

Data__/__/___ Atividade: Horário Inicial:_________ Horário do Término:___________

Quantidade de Alunos:__________ Quantidade de Grupos: ____________________

Objetivo da Atividade: ____

MOMENTO: ORGANIZAÇÃO

DOCENTES		**GRUPOS**										
Dirigiu as ações? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não		**Grupos**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Demonstrou ter planejado a atividade? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não		**Os componentes foram receptivos?**										
Evitou que os alunos desperdiçassem tempo com ações alheias a organização da turma? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não		**Sim** **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Foi objetivo? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não		**O grupo foi formado espontaneamente?**										
Mostrou entusiasmo? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não		**Sim** **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Observação:		**Observação:**										

MOMENTO: SISTEMATIZAÇÃO

DOCENTES	**GRUPOS**										
Supervisionou o grupo quando solicitado ou quando percebeu necessidade?	**Grupos**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**

( ) sim ( ) em partes ( ) Não											
Mostrou-se motivado? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Conseguiu registrar as informações produzidas durante a execução com facilidade?**										
Demonstrou segurança? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Sim** **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Observação:	**Necessitou ou solicitou orientação para registro das informações produzidas?**										
	Sim **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Observação:										

MOMENTO:ANÁLISE

DOCENTES	**GRUPOS**										
Supervisionou fazendo perguntas ao grupo? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Grupos**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Orientou por meio de questionamento para a descoberta da relação? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Descobriu uma relação válida a partir das análises das informações registradas?**										
Motivou os grupos? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Sim** **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Demonstrou segurança? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Sentiu-se a vontade para solicitar orientação?**										
Demonstrou motivação? ( ) sim ( ) em partes ( ) Não	**Sim** **Em parte** **Não**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Observação:	**Apresentou motivação para análise?**										

Sim	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Em parte	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Não	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )

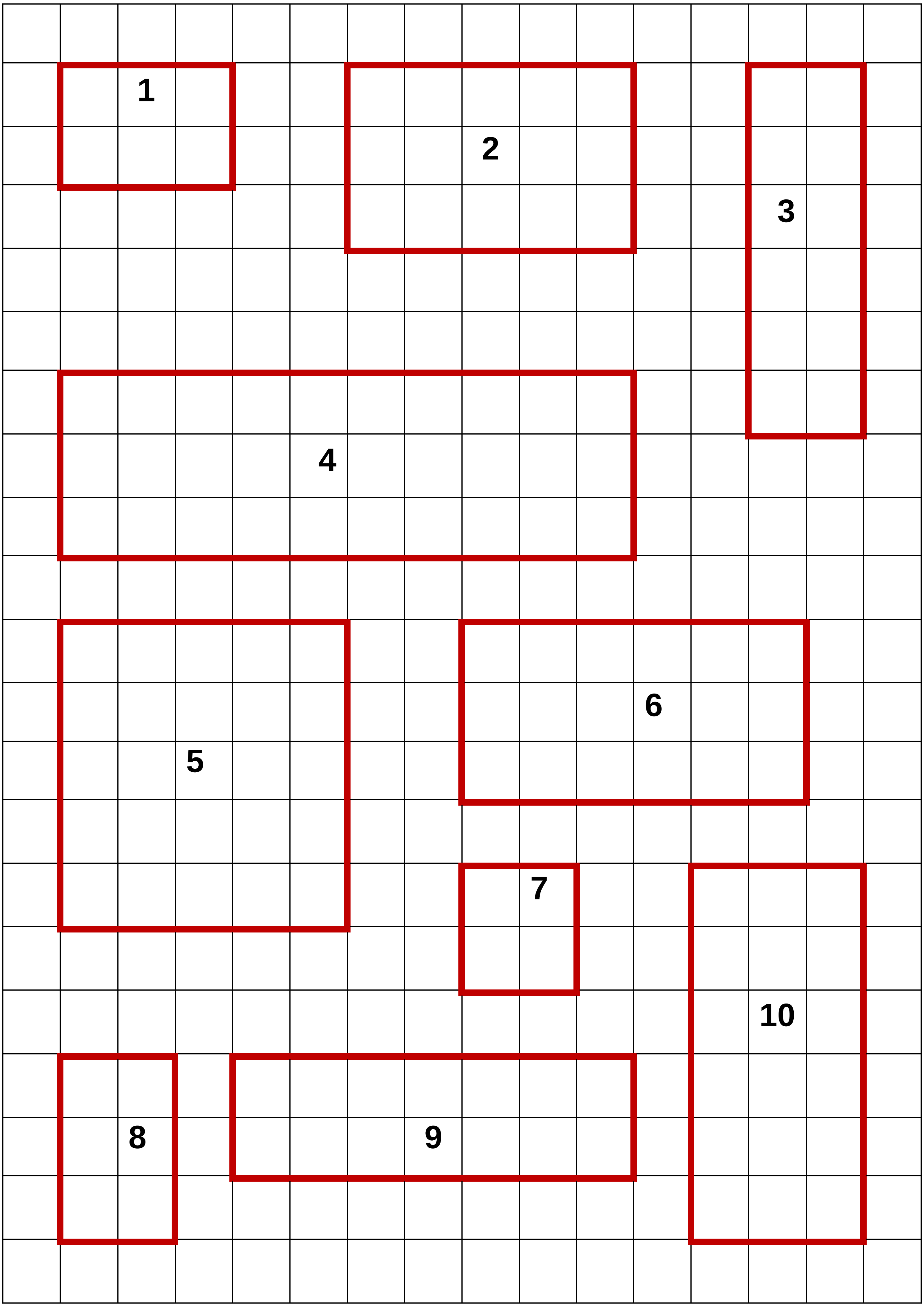
Registrou sua conclusão na ficha?

Sim	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Em parte	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Não	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )

Observação:

Fonte: adaptada de Barbosa, 2019

ANEXO D – FOLHA DE RETÂNGULOS



Fonte: adaptada de Miranda, 2021

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem