**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**CAMPUS FLORIANÓPOLIS**
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT**

Giliar Ferreira Pacheco

Orientadora: Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves

**PRODUTO EDUCACIONAL:**

# FIBONACCI: ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

Florianópolis

2021

**LISTA DE FIGURAS**

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Uma das sequências numéricas mais antigas, e também uma das mais conhecidas, é a *Sequência de Fibonacci*, a qual foi introduzida na matemática ocidental pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci, como um dos problemas propostos no seu livro "Liber Abaci", publicado em 1202, (DEVLIN, 2011).

O interesse na sequência de Fibonacci deve-se ao fato de possuir aplicações em diversas áreas da matemática, bem como em áreas inusitadas como arte, arquitetura e também por estar presente em vários padrões na natureza. A definição recursiva dessa sequência é muito conhecida. Ela pode ser encontrada em (ZAHN, 2011)(p.7), (MORGADO; CARVALHO, 2015)(p.68) ou (VOROBIEV, 2002)(p.3), por exemplo.

A presente apostila FIBONACCI: ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS, foi desenvolvida por Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado, intilutalda SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: História, Propriedades e Aplicações, a qual foi apresentada no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), campus Florianópolis, sob orientação da professora Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves.

Nessa apostila faremos uma reunião de atividades sobre números de Fibonacci. Com isso pretendemos auxiliar o professor de matemática da Educação Básica, especialmente, os docentes desse componente curricular do Ensino Fundamental - Anos Finais. As atividades visam ajudar a desenvolver algumas das habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a etapa Ensino Fundamental - Anos Finais.

Elas foram pensadas para situações onde os alunos viram previamente uma definição de sequência de forma recursiva e também iniciaram o uso de letras para representar números. Assim, devem contribuir para desenvolver principalmente habilidades relacionadas a unidade temática Álgebra, conforme a BNCC.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

# 2 FIBONACCI, ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS

As sequências são parte do currículo da educação básica, na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais. Ao abordarmos esse assunto surge a oportunidade de colocarmos os estudantes em contanto com a importante sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci possui diversas relações entre os seus números e, ainda, é possível encontrar relações entre seus números e outros resultados da matemática. Curiosamente seus números surgem na natureza. Ela também é aplicada áreas como, por exemplo, codificação de dados e na análise de preços no mercado de ações. Por tudo isso, preparamos esse material que tem por objetivo propor atividades relacionadas a sequência de Fibonacci para serem trabalhadas na etapa do Ensino Fundamental - Anos finais, da educação básica.

As atividades propostas nesse material foram pensadas para alunos que já tiveram uma introdução ao conceito de sequências numéricas recursivas e a forma de indicar seus elementos por meio do uso de uma letra do nosso alfabeto acompanhada de um subíndice para indicar sua posição na sequência.

Ao buscarmos evidenciar a contribuição para a efetivação do currículo proposto na BNCC, destacamos uma lista com habilidades trabalhadas nessas atividades. As habilidades e seus respectivos códigos, obtidos da BNCC, são:

- **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classifica-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

- **(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

- **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

- **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

---

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

- **(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
- **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

A primeira atividade proposta trabalha a identificação de regularidade de uma sequência numérica recursiva e assim contempla parte da habilidade EF08MA11.

**Atividade 1)** Observe o padrão na sequência abaixo e escreva os três próximos termos:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \cdots .$$

A resposta esperada para a **Atividade 1** é: $34,\ 55$ e $89$.

A próxima atividade oferece uma ilustração para sugerir o padrão. Assim pode ser aplicada aos alunos menos experientes ou com mais dificuldades. Ela também facilita a classificação da sequência como recursiva, além de trabalhar o uso da simbologia algébrica para expressar a regularidade de uma sequência numérica. Assim, ela abrange a habilidade EF07MA15 e parte da habilidade EF07MA14.

**Atividade 2)** A Figura 1 a seguir apresenta uma forma de obter os termos da sequência de números contidos nela.

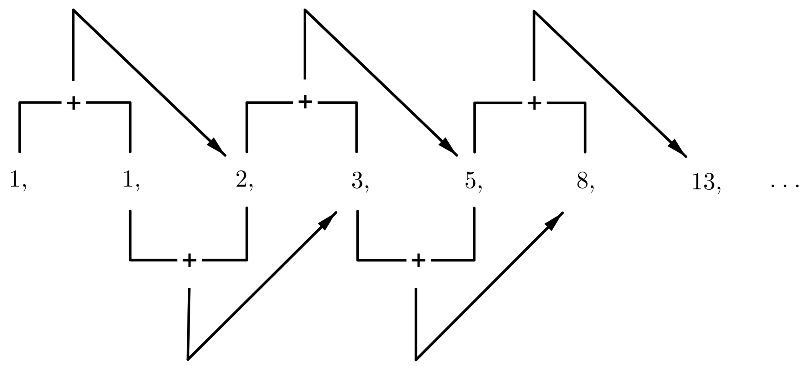



Figura 1: Esquema para obter os números de Fibonacci.

Com base na Figura 1, escreva uma expressão para definir de maneira recursiva a sequência de números sugeridos pela mesma.

---

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

Para a **Atividade 2** a resposta esperada deve conter: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para os termos após a segunda posição da sequência.

A próxima atividade trabalha a classificação de sequências em recursivas e não recursivas. Assim contempla parte da habilidade EF07MA14.

**Atividade 3)** A Figura 2 a seguir é composta por quadrados. A medida do lado de cada quadrado da está indicada no interior do mesmo.

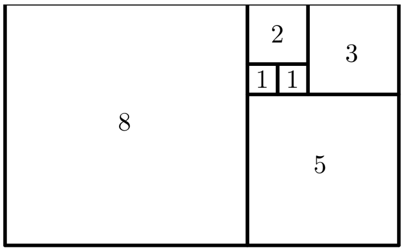



Figura 2: Retângulo de Fibonacci

As medidas dos lados dos quadrados da Figura 2 acima podem ser escritos por meio de uma sequência:

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \cdots).$$

a) Analise a figura e determine o termo da sétima e da oitava posição na sequência.

b) É possível definir essa sequência de maneira recursiva?

A resposta esperada para a **Atividade 3** é:

a) Na sétima posição teremos 13, pois $5+8=13$, e na oitava posição 21, pois $8+13=21$.

b) Sim.

Embora o item (b) da **Atividade 3** não peça para apresentar a definição recursiva da sequência de Fibonacci é interessante que seja discutida com a turma e, então, seja colocada no quadro a seguinte definição:

**Definição 1.** Seja $f_n$ o $n$-ésimo termo da *Sequência de Fibonacci.* Então $f_n$ satisfaz:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \forall\ n \geq 3,\ n\ \in\ \mathbb{N},$$

*onde* $f_1 = 1,\ f_2 = 1.$

A atividade seguinte colabora para o desenvolvimento da resolução de problemas que envolvem o cálculo do valor numérico de expressões algébricas. Portanto, essa atividade é uma possibilidade para desenvolver a habilidade EF08MA06.

**Atividade 4)** Os números 233 e 377 são dois números consecutivos na sequência de Fibonacci. Qual número antecede o 233, nesse sequência?
Lembre-se que:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall\ n \geq 3 \in\ \mathbb{N}.$$

A resposta para a **Atividade 4** pode ser obtida com o seguinte cálculo: $377-233 = 144$. Portanto, o número que antecede o 233, na sequência de Fibonacci é 144.

Ao buscar incorporar a sequência de Fibonacci na vida escolar de alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, a Atividade 5 trabalha a construção de um fluxograma para indicar os números seguintes dessa sequência. Portanto, ela trabalha parte da habilidade EF08MA11.

**Atividade 5)** A sequência de Fibonacci pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall\ n \geq 3 \in\ \mathbb{N},\ \text{com } f_1 = 1 \text{ e } f_2 = 1.$$

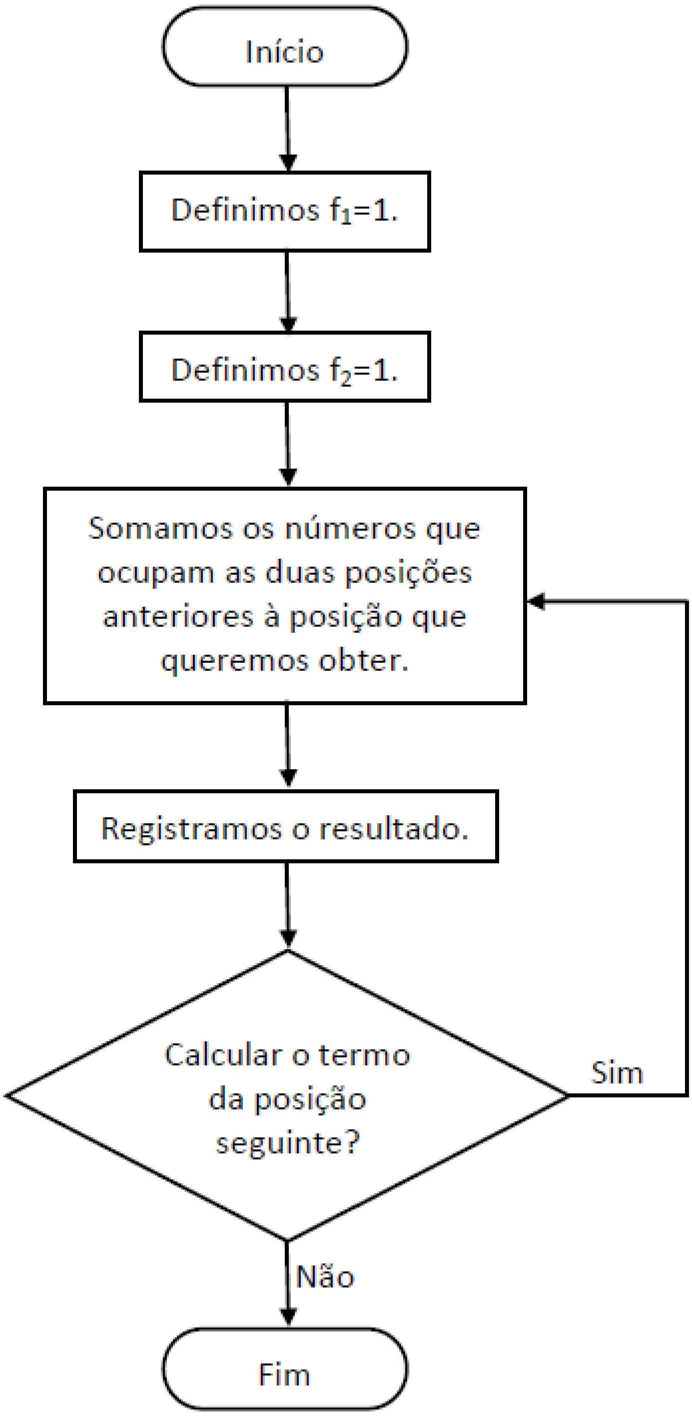
Faça um fluxograma para indicar como obter os números de Fibonacci.

Ao realizar a **Atividade 5** o estudante obterá um fluxograma como o da Figura 3, na página 11.

A estratégia de analisar casos pequenos (com poucos elementos ou com elementos de menor valor) foi fortemente incentivada pelo Professor Dr. Eduardo Tengan durante as aulas das disciplinas que ele ministrou para nós, discentes, durante esse curso. Ela se mostrou muito útil para a elaboração, bem como, para a eliminação de hipóteses.

A atividade a seguir trabalha a utilização da simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. Além disso, coloca o aluno em contato com uma forma de analisar padrões por meio da observação de casos pequenos. Oferecemos essa atividade como um meio para auxiliar o desenvolvimento da habilidade EF08MA11.

Figura 3: Fluxograma para obter a sequência de Fibonacci.




Fonte: Elaborado pelo autor.

**Atividade 6)** Considere a sequência de Fibonacci escrita abaixo, e faça o que se pede.

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).$$

a) Calcule:

   I) $f_1$.

   II) $f_1 + f_3$.

   III) $f_1 + f_3 + f_5$.

   IV) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7$.

   V) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9$.

b) O resultado de cada um dos cálculos dos itens I ao V são números da sequência de Fibonacci?

c) De acordo com o padrão observado nos resultados dos cálculos dos itens I ao V, responda: qual termo da sequência de Fibonacci será o resultado da soma abaixo?

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{97} + f_{99}$$

Para a **Atividade 6** as respostas esperadas são:

a) Os cálculos são:

   I) $f_1 = 1$.

   II) $f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$.

   III) $f_1 + f_3 + f_5 = 1 + 2 + 5 = 8$.

   IV) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 1 + 2 + 5 + 13 = 21$.

   V) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$.

b) Sim, pois 1, 3, 8, 21 e 55 são números da sequência de Fibonacci.

c) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{97} + f_{99} = f_{100}$.

A próxima atividade segue as mesmas características da anterior, agora porém, com o uso de outro padrão presente nos números de Fibonacci.

**Atividade 7)** Para a sequência de Fibonacci, encontre:

a) O resultado de:

I) $f_1 + f_2 + f_3$.

II) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$.

III) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$.

IV) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6$.

V) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$.

VI) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8$.

b) Encontre o termo da sequência de Fibonacci que está mais próximo do resultado obtido em cada um dos itens, I ao VI, e responda: qual a diferença entre o termo encontrado e a soma realizada?

c) De acordo com o padrão observado no resultados dos cálculos dos itens I ao VI, responda: qual termo da sequência de Fibonacci será o resultado da soma abaixo?

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n$$

Para a **Atividade 7** as respostas esperadas são:

a) O resultados para cada cálculo é:

I) $f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 1 + 2 = 4$.

II) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

III) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$.

IV) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$.

V) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$.

VI) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54$.

b) Os termo mais próximo de cada resultado obtido nos itens de I a VI é, respectivamente: 5, 8, 13, 21, 34 e 55. A diferença entre a soma obtida em cada item e o termo mais próximo é de uma unidade.

c) $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$

Seguiremos com uma atividade que promove uma investigação colaborativa de uma característica dos números de Fibonacci. Ela também retoma a habilidade de identificar características de triângulos, habilidade EF06MA19, e a habilidade de determinação de medida da abertura de ângulo, por meio do transferidor, habilidade EF06MA27. Por fim, além de interessante, ela trabalha a resolução de problemas que envolvem cálculo do valor numérico de expressões algébricas, ou seja, a habilidade EF08MA06.

**Atividade 8)** Escolha 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, ou seja, tome $f_n$, $f_{n+1}$, $f_{n+2}$ e $f_{n+3}$ (*Por conveniência escolha números menores do que 34*). Em seguida faça o que se pede:

a) Com o auxílio de um compasso e uma régua, construa um triângulo de forma que as medidas dos seus lados sejam obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= f_n \cdot f_{n+3} \\ b &= 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \\ c &= f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 \end{aligned}$$

b) Com um transferidor, meça o ângulo formado pelos lados de medidas $a$ e $b$.

c) Compare com a medidas obtidas por seus colegas. Elas são iguais?

d) O que podemos dizer sobre um triângulo cujas medidas dos lados são obtidas a partir de 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, como indicado no item (a)?

A recomendação de utilizar números de Fibonacci menores do que 34, na **Atividade 8** tem a finalidade de possibilitar o desenho em uma folha A4. Para números maiores as medidas obtidas são também maiores e isso pode tornar o trabalho mais difícil. Para realizar essa atividade o estudante inicia com a escolha dos 4 números de Fibonacci. Feita a escolha, ele deverá calcular as medidas de $a$, $b$ e $c$. Para obter o desenho com as medidas indicadas, utilizamos o software Geogebra[1], e nele, já indicamos o ângulo entre os lados $a$ e $b$. Com a medida desse ângulo, temos subsídio para responder ao item (b) e (c) dessa atividade. Obviamente, o aluno deverá realizar a medição com o transferidor.

Vejamos as medidas e as formas obtidas para cada uma das possibilidades de es-



[1]Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

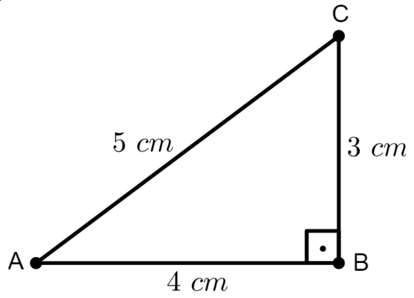
colha de 4 números de Fibonacci, ao seguirmos a recomendação dada no enunciado:

- Números de Fibonacci: $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2$ e $f_4 = 3$.

$$\begin{aligned} a &= f_1 \cdot f_4 = 1 \cdot 3 = 3, \\ b &= 2 \cdot f_2 \cdot f_3 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \\ c &= f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 2^2 = 5. \end{aligned}$$

Para $a = 3,\ b = 4$ e $c = 5$ sugerimos usar a unidade de medida centímetro na construção da figura. O triângulo obtido está na Figura 4.

Figura 4: Triângulo com lados de medidas $a = 3,\ b = 4$ e $c = 5$




Fonte: Elaborado pelo autor.

- Números de Fibonacci: $f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3$ e $f_5 = 5$.

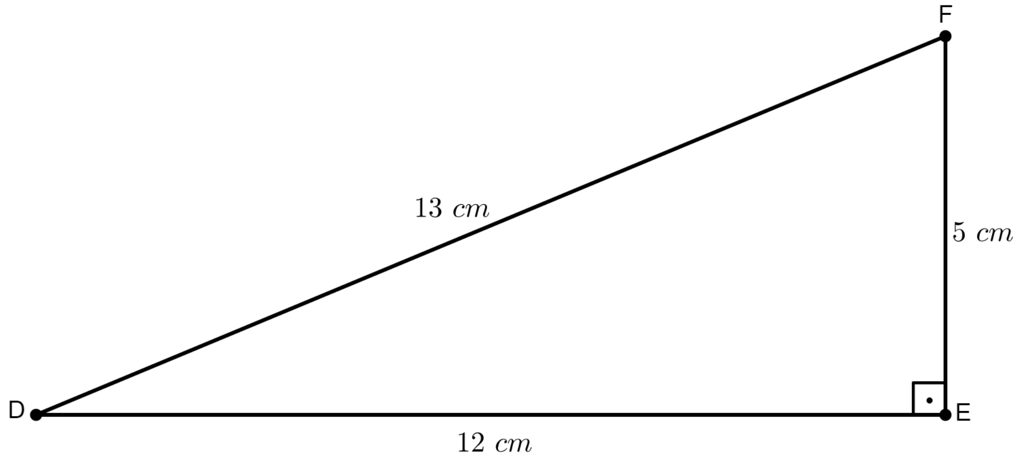
$$\begin{aligned} a &= f_2 \cdot f_5 = 1 \cdot 5 = 5, \\ b &= 2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \quad \text{e} \\ c &= f_3^2 + f_4^2 = 2^2 + 3^2 = 13. \end{aligned}$$

Para $a = 5,\ b = 12$ e $c = 13$ sugerimos usar a unidade de medida centímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 5.

- Números de Fibonacci: $f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5$ e $f_6 = 8$.

$$\begin{aligned} a &= f_3 \cdot f_6 = 2 \cdot 8 = 16, \\ b &= 2 \cdot f_4 \cdot f_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \quad \text{e} \\ c &= f_4^2 + f_5^2 = 3^2 + 5^2 = 34. \end{aligned}$$

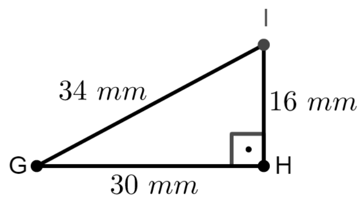
Figura 5: Triângulo com lados de medidas $a = 5,\ b = 12$ e $c = 13$




Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $a = 16,\ b = 30$ e $c = 34$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. Para utilizar a unidade de medida centímetro nessa e nas próximas figuras, será necessário um papel maior do que uma folha A4. O triângulo obtido está na Figura 6.

Figura 6: Triângulo com lados de medidas $a = 16,\ b = 30$ e $c = 34$




Fonte: Elaborado pelo autor.

- Números de Fibonacci: $f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8$ e $f_7 = 13$.

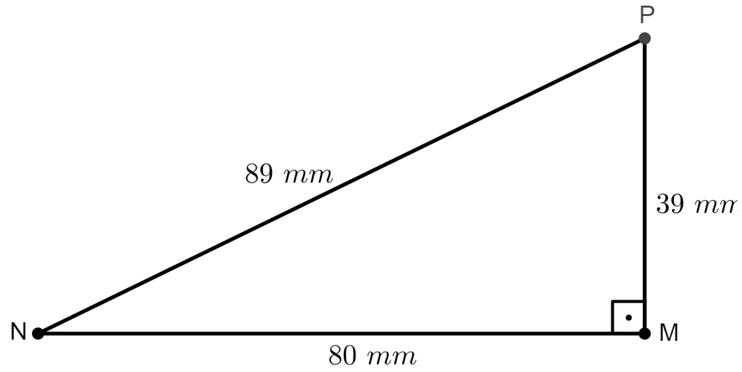
$$\begin{aligned} a &= f_4 \cdot f_7 = 3 \cdot 13 = 39, \\ b &= 2 \cdot f_5 \cdot f_6 = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80 \quad \text{e} \\ c &= f_5^2 + f_6^2 = 5^2 + 8^2 = 89. \end{aligned}$$

Para $a = 39,\ b = 80$ e $c = 89$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 7.

---

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.

Figura 7: Triângulo com lados de medidas $a = 39,\ b = 80$ e $c = 89$




Fonte: Elaborado pelo autor.

- Números de Fibonacci: $f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13$ e $f_8 = 21$.

$$\begin{aligned} a &= f_5 \cdot f_8 = 5 \cdot 21 = 105, \\ b &= 2 \cdot f_6 \cdot f_7 = 2 \cdot 8 \cdot 13 = 208 \quad \text{e} \\ c &= f_6^2 + f_7^2 = 8^2 + 13^2 = 233. \end{aligned}$$

Para $a = 105,\ b = 208$ e $c = 233$ sugerimos usar a unidade de medida milímetro para a medida dos lados. O triângulo obtido está na Figura 8.

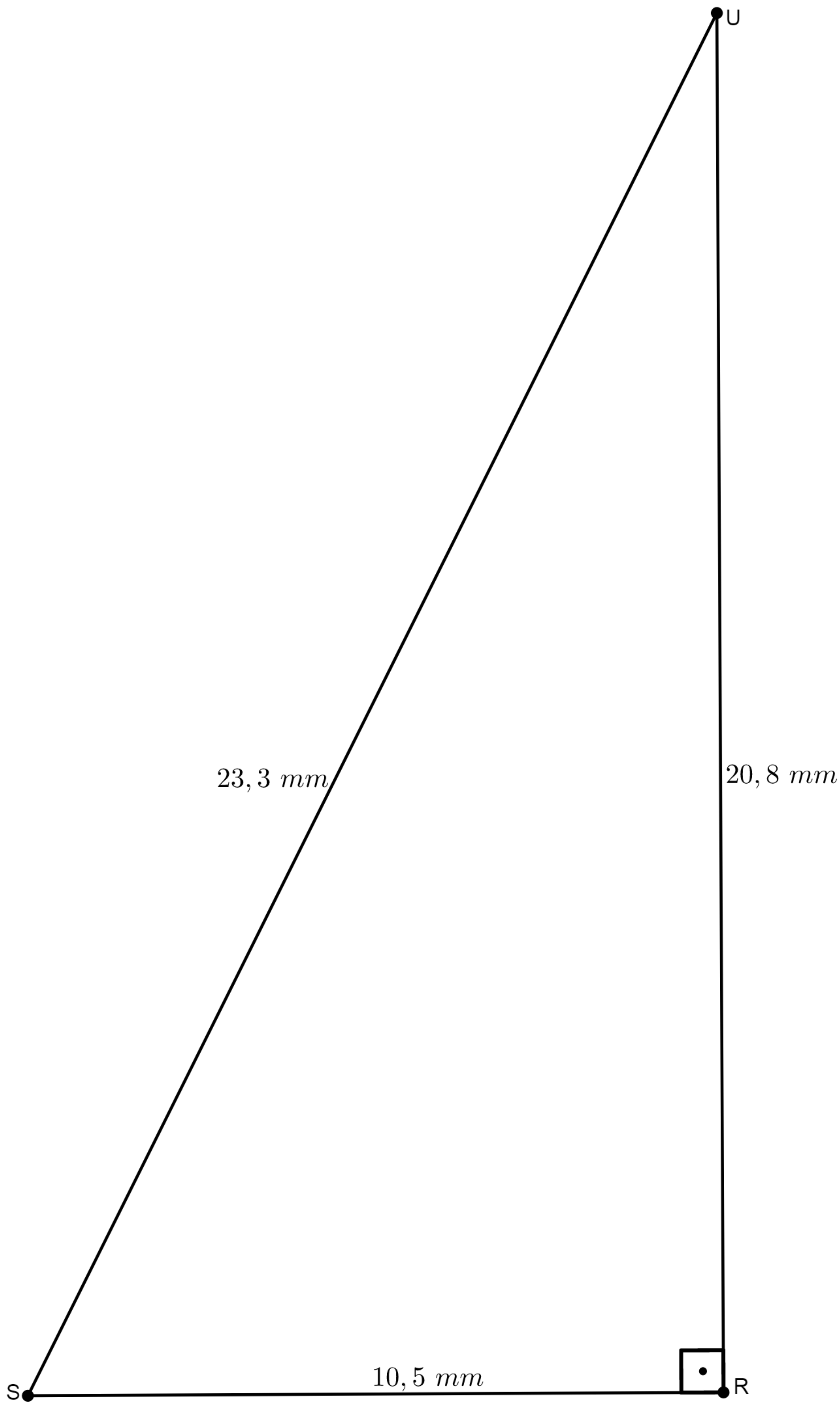
Depois de fazer o desenho do triângulo, conforme indicado no item (a), da **atividade 8**, o aluno poderá responder ao item (b). É importante disponibilizar transferidor para que cada um possa fazer a medida na figura que desenhou. As medidas obtidas, como nossas figuras já indicaram, serão 90º.

Ao responder o item (c) eles irão constatar que todos, salvo erros de construção, obtiveram a mesma medida, ou seja todos são triângulos retângulos.

Por fim, eles poderão escrever no item (d), que todos os triângulos obtidos a partir de 4 números consecutivos da sequência de Fibonacci, conforme indicado no item (a), são retângulos.

As atividades propostas nesse seção servem ainda para inspirar o professor de matemática na utilização da sequência de Fibonacci, assim como, das propriedades relativas aos seus números na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais.

Figura 8: Triângulo com lados de medidas $a = 105,\ b = 208$ e $c = 233$




Fonte: Elaborado pelo autor.

## REFERÊNCIAS

DEVLIN, k. *The Men of Numbers. Fibonacci's arithmetic revolution.* New York - NY: Walker Publishing Company, Inc., 2011.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2015.

VOROBIEV, N. N. *Fibonacci Numbers.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Rio de Janeiro - RJ: CIÊNCIA MODERNA, 2011.

Apostila desenvolvida pelo professor Giliar Ferreira Pacheco para a Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFSC em 2021.