



XXXV Semana da Matemática 2023 - IBILCE/UNESP

Minicurso: "**Aprendendo matemática com as abelhas**"

Michelle F. Z. Morgado (Depto. Matemática - IBILCE-UNESP)
parte da orientação da discente Amarilis P. B. Farias (PROFMAT)
Campus de São José do Rio Preto, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas



RESUMO

O objetivo deste minicurso é apresentar uma proposta de atividades de como trabalhar com alguns dos conceitos de Matemática através do tema que explora o formato e o encaixe dos alvéolos na construção do favo das abelhas.

INTRODUÇÃO

Quando observamos algumas espécies de plantas e animais na natureza, estes parecem adotar padrões, formas e comportamentos que sugerem uma relação direta com a Matemática. Assim, buscamos neste trabalho mostrar que a Matemática não está apenas dentro dos livros, muito pelo contrário, ela está em tudo que nos rodeia.

De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a escola precisa preparar o aluno para entender que a Matemática age de modo inter-relacionado com diferentes situações. O objetivo do ensino é que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática mostrando que ela não é apenas um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte do nosso dia a dia:

“A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.”
(BRASIL, 2017, p. 471)

Neste sentido, concentramos nosso estudo na relação das abelhas e a Matemática. Começamos com algumas informações sobre as abelhas, de acordo com [7] para entender um pouco do seu ambiente e hábitos.

Na maioria das espécies de abelhas, a forma de organização em sociedade é altamente concisa, havendo divisão de atividades entre elas, que possuem diferenciações anatômicas de acordo com a função que realizam.

As abelhas se destacam pela sua organização social e pela sua produção de mel. Elas formam colônias altamente organizadas, que são as colmeias. Assim, é importante compreender o que é uma colmeia: são locais onde as abelhas vivem, seja um espaço artificialmente construído ou natural, totalmente organizados e que oferecem proteção aos insetos. É na colmeia que as abelhas vivem, se reproduzem, armazenam mel, criam as larvas e realizam todas as atividades necessárias para a sobrevivência da colônia.

Dentro das colmeias temos uma estrutura feita de cera que é chamada de favo. Ele é composto por uma estrutura denominada alvéolo que serve depois de depósito para o mel que fabricam. Cada alvéolo é um berço para as larvas e suprimento de alimento para que elas possam se desenvolver.

Figura 1: Larvas nos alvéolos.



Fonte: <https://asknature.org/pt/estrat%C3%A9gia/estrutura-de-favo-de-mel-%C3%A9-eficiente-em-termos-de-espa%C3%A7o-e-forte/>

Nas colmeias existem três classes sociais: a da rainha, a dos zangões e a das operárias.

As abelhas operárias são fêmeas estéreis e de menor porte da família. As operárias são a maioria da população, num enxame há cerca de 50 a 80 mil dessas abelhas. Vivem em média 38 dias e são as responsáveis pelo trabalho pesado da colmeia como a construção, a limpeza, a alimentação da rainha, os cuidados com os ovos e as crias, nutrição das larvas, a coleta do pólen e néctar extraído das flores, o abastecimento de água, a defesa, a ventilação, a limpeza e a produção de mel, geleia real, própolis e cera para manutenção da colmeia.

Os zangões, machos das abelhas, são mais largos e fortes. A quantidade deles por enxame é de algumas centenas, isso varia de acordo com a quantidade de alimento disponível e

se é época de acasalamento ou não. Os machos não possuem ferrão, não coletam pólen e não produzem cera. A sua única função é fecundar a rainha. Seu período de vida é curto, logo após o ato sexual ele morre.

A abelha rainha, só existe uma por colmeia e é a única fêmea fértil, é mais alongada que as operárias e mais comprida que os zangões (Figura 2). Ela tem os movimentos lentos e solenes e está sempre rodeada por várias operárias que mantêm a rainha bem servida de geleia real. A rainha nasce de um ovo fertilizado, sendo a única abelha fêmea fecundada, os demais ovos dão origem às operárias e aos zangões.

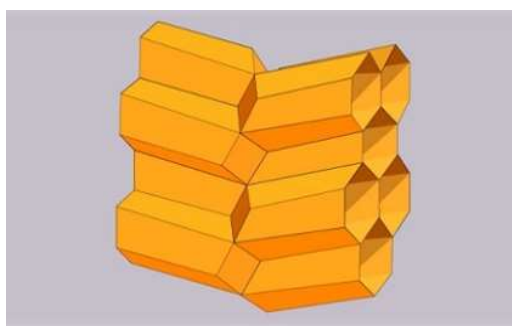
Figura 2: Estrutura das classes de abelhas (espécie *Apis mellifera*).



Fonte: Menezes, 2017.

As abelhas buscam locais para construir seu lar. Iniciam a construção dos favos, que são feitos de cera. Cada favo se forma por um conjunto de alvéolos, que são estruturas associadas a prismas regulares hexagonais de cera, construídas pelas próprias abelhas. Na formação do favo, os alvéolos estão encaixados com uma determinada inclinação, como na Figura 3. Os alvéolos servem para o desenvolvimento e reprodução da sua espécie e são locais para armazenar o mel produzido. Eles têm a maior capacidade de armazenamento para a menor porção de cera possível, um fenômeno recorrente na natureza.

Figura 3: Favo de mel.



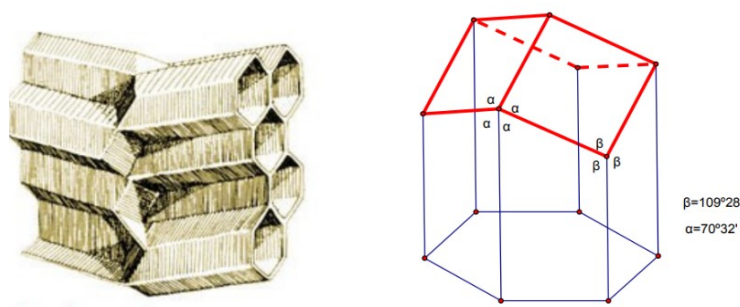
Fonte: <https://culturadefato.com.br/sorte-em-abundancia-ou-razao-em-escassez/>

Há muito tempo, os homens vêm tentando decifrar as abelhas. Baseado no trabalho de Thompson [11], vamos abordar um pouco da história de alguns matemáticos que tiveram como inspiração em seus trabalhos as abelhas e a estrutura de suas colmeias.

O primeiro a se interessar pelo fenômeno da construção dos alvéolos foi Pappus de Alexandria (290 – 350), geômetra grego importante, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Pappus mostrou que, dentre as formas que as abelhas poderiam ter empregado para fazer seus favos, a adotada é a que mais economiza cera. Vale ressaltar que a produção de cera exige muito esforço das abelhas, pois a cera usada na construção das paredes de cada favo é produzida com a matéria orgânica de seus corpos. Assim, economizar com esse trabalho parece ser bem natural. Pappus chegou a estudar os alvéolos como seções de prismas regulares hexagonal, triangular e quadrada. Ele concluiu que os prismas de bases hexagonais podiam armazenar mais mel que os outros dois.

Depois de Pappus de Alexandria, vieram estudiosos da Matemática de diversas nacionalidades estudar as colmeias das abelhas e a construção de seus alvéolos. Em 1619, Johannes Kepler, descreveu o formato de um alvéolo: se assemelha a um prisma reto hexagonal regular cujo fundo ou cobertura é uma união de 3 losangos congruentes entre si determinando um triedro que tem seus ângulos diedras iguais a 120° .

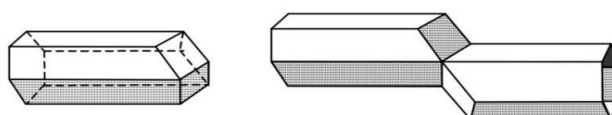
Figura 4: Alvéolos formando um favo e formato de um alvéolo com seus ângulos.



Fonte: https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina03_Elvia_Debora.pdf

O formato do fundo dos alvéolos permite que eles fiquem ligeiramente inclinados, evitando que o mel escorra.

Figura 5: Encaixe dos alvéolos.



Fonte: SARAIVA, 1999.

O físico francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683 – 1757) notou que o ângulo agudo era sempre o mesmo nos losangos que faziam o fechamento dos alvéolos. Réaumur se especializou em Geometria e passou a se interessar por Biologia. Especialista no estudo do desenvolvimento dos hábitos e comportamentos dos insetos, publicou seu livro “*Mémoires pour servir à l’histoire des insectes*” (1734-1742).

Depois de Réaumur, o astrônomo francês Jean-Dominique Maraldi (1709 – 1788) interessou-se pelo problema das abelhas e mediu com maior precisão esse ângulo para todos os alvéolos e ainda engrandeceu a simplicidade das abelhas por utilizarem apenas dois ângulos: um de $109^{\circ} 28'$ e outro, seu suplemento, de $70^{\circ} 32'$. Para Réaumur faltava saber se o ângulo escolhido pelas abelhas tinha a ver com a economia de material. Ele resolveu consultar Samuel Konig (1712 – 1757), um matemático alemão, propondo o seguinte problema:

Dada uma célula hexagonal terminada por três losangos iguais, qual a configuração que requer a menor quantidade de material para a construção de um alvéolo de um determinado volume fixo?

Konig resolveu o problema e achou valor de $70^{\circ} 34'$, uma diferença de apenas 2' do ângulo utilizado pelas abelhas.

Outro matemático, um britânico chamado Colin Maclaurin (1698 – 1746), estudou o problema e fechou a questão usando o Cálculo Diferencial. Segundo os cálculos de Maclaurin, o ângulo do losango para o alvéolo mais econômico deveria medir precisamente $70^{\circ} 32'$ e assim ele descobriu que Konig na verdade havia encontrado um resultado diferente porque tinha feito os cálculos com uma tábua de logaritmos que tinha um erro. Resumindo, chegou-se à constatação que as abelhas estavam certas.

Essa incrível obra da natureza que é a colmeia das abelhas é um assunto interessante e que tem sido explorado de diferentes formas no ensino de Matemática. Neste contexto, este minicurso busca explorar parte dos conceitos matemáticos descritos anteriormente, através de material concreto e o uso de tecnologia (Geogebra).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vamos admitir conhecidos os conceitos de Geometria Euclidiana Plana.

1. Ladrilhamento do plano

Definição 1.1. Um **ladrilhamento** do plano é uma divisão dele em regiões poligonais onde a interseção de duas destas regiões poligonais é vazia ou um número finito de pontos ou de segmentos de reta.

Observação: Os polígonos das regiões poligonais de um ladrilhamento do plano podem ser chamados de **ladrilhos** e ladrilhamento pode ser chamado de **pavimentação**.

Nomenclatura:

Ladrilhamento monoédrico é aquele formado por polígonos todos congruentes entre si;

Ladrilhamento lado-a-lado é aquele em que cada uma de suas arestas é lado de algum dos polígonos que o define;

Ladrilhamento regular é um ladrilhamento monoédrico e lado-a-lado, onde seus ladrilhos são todos regulares.

Definição 1.2. Chamamos de **nós** de um ladrilhamento os vértices dos polígonos deste ladrilhamento.

Estamos interessados em estudar apenas a existência de ladrilhamento do plano com regiões poligonais regulares de um só tipo. Vejamos um importante resultado.

Teorema 1.3. Se $F = \{P_i\}_{i \in I}$ é um ladrilhamento do plano, onde P_i é uma região poligonal regular de n lados, para todo i , então $n = 3, 4$ ou 6 .

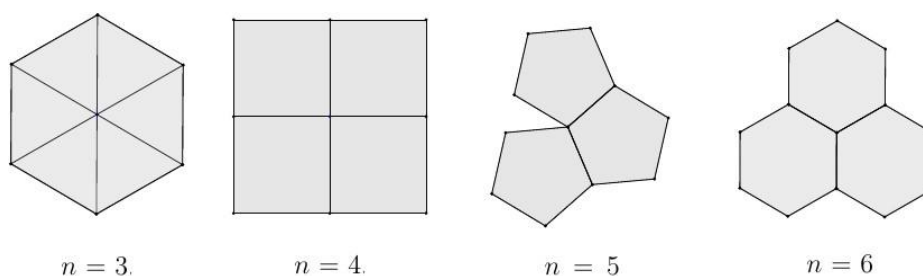
Demonstração.

Suponhamos que existe um ladrilhamento regular do plano formada por polígonos regulares de n lados. Se em um nó desse ladrilhamento aparecem m polígonos, então a soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice deve ser igual a 360 , ou seja, $m \frac{(n-2)180}{n} = 360$, onde $\frac{(n-2)180}{n}$ é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados. Dessa equação obtemos a seguinte igualdade $m = \frac{2n}{n-2}$. Como $m \geq 3$, obtemos $\frac{2n}{n-2} \geq 3$. Desenvolvendo chegamos que $n \leq 6$. ($n = 3, 4, 5, 6$).

- Para $n = 3$, obtemos $m = 6$. Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 6 triângulos equiláteros.

- Para $n = 4$, obtemos $m = 4$. Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 4 quadrados.
- Para $n = 5$, obtemos $m = \frac{10}{3}$. Como m deve ser um número inteiro, concluímos que não é possível ladrilhar o plano com regiões poligonais regulares com 5 lados.
- Para $n = 6$, obtemos $m = 3$. Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 3 hexágonos equiláteros.

Figura 6: Descrição das tentativas de ladrilhamento.



Fonte: Elaborado pela autora.

Concluímos que $n = 3, 4, 6$, ou seja, somente o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser utilizados para um ladrilhamento regular do plano.

2. Poliedros Especiais

Vamos considerar objetos especiais no espaço. Um poliedro é a extensão do conceito de polígono do plano para o espaço, mas que não vamos estudar de maneira geral e sim casos particulares.

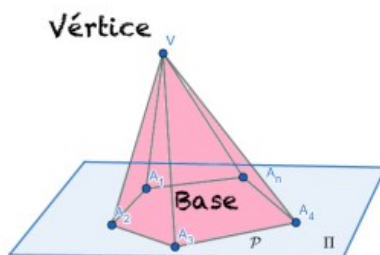
Definição 2.1. Um **poliedro** é uma reunião de um número finito de regiões poligonais convexas (planas) chamadas **faces** do poliedro que satisfazem as condições:

- a) cada lado aresta de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- b) a intersecção de dois polígonos ou é vazia, ou é um vértice comum ou é um lado comum aos dois polígonos.

Observação: O conceito de congruência de poliedros segue de maneira análoga a de polígonos congruentes. Assim como o conceito de interior dele.

Definição 2.2. Uma **pirâmide** é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: uma delas é um polígono $A_1A_2 \dots A_n$ pertencente a um plano π e as outras são regiões triangulares definidas por $VA_1A_2, \dots, VA_{n-1}A_n$ e VA_nA_1 , com $V \notin \pi$.

Figura 7: Pirâmide $VA_1A_2 \dots A_n$.

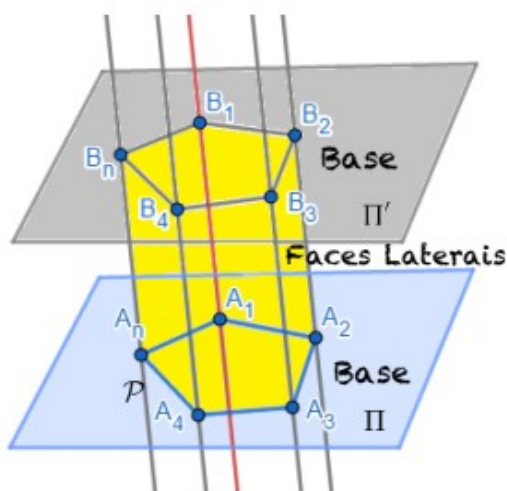


Fonte: Elaborado pela autora.

Definição 2.3. Um **prisma** é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: duas delas são definidas pelos polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ pertencente a um plano π e $B_1B_2 \dots B_n$ pertencente a um plano π' com π e π' planos paralelos entre si e as retas determinadas por $\overrightarrow{A_iB_i}$, com $i = 1, 2, \dots, n$, paralelas entre si. As demais regiões poligonais planas são determinadas pelos paralelogramos $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$.

Essas regiões poligonais determinadas por paralelogramos são chamadas de **faces laterais** do prisma e as regiões poligonais determinadas por $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ são chamadas de **bases** do prisma.

Figura 8: Prisma $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nomenclatura:

Cada pirâmide ou prisma é nomeado a partir do polígono que forma sua base: a pirâmide/o prisma diz-se **triangular**, se sua base for um triângulo, **quadrangular**, se sua base for um quadrilátero, **pentagonal**, se sua base for um pentágono e assim sucessivamente.

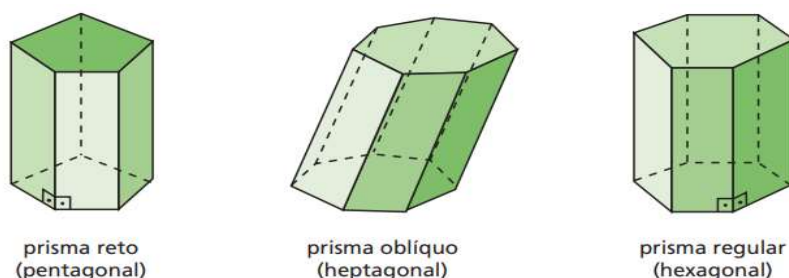
Uma pirâmide triangular é também chamada de **tetraedro**.

Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Figura 9: Prismas



Fonte: DOLCE; POMPEO, 2013.

A **altura** de um prisma regular é a medida de suas arestas.

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a reta que passa pelo vértice V e pelo centro do polígono O é perpendicular à base. O segmento \overline{VO} (ou a sua medida) é chamado de **altura** da pirâmide regular.

Observação. Pelo fato de as faces laterais de um prisma serem paralelogramos, temos que as bases de um prisma são polígonos congruentes e as medidas de suas arestas laterais são iguais.

Definição 2.4. A **área lateral** de um prisma é a soma das áreas dos paralelogramos. A **área total** (A_T) de um prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja,

$$A_T = 2A_b + \sum_{i=1}^n A_i,$$

onde n é o número de lados da base do prisma, A_b é a área da base (é a mesma para as duas bases pois elas são congruentes) e A_i a área das faces laterais, para $i = 1, 2, \dots, n$, que são paralelogramos.

O próximo conceito aparece de maneira axiomática, que estende o conceito de área do plano para o espaço. Ele vale para sólidos em geral, mas vamos particularizar para poliedros.

Axioma 2.5. A cada poliedro tem-se um número real positivo associado, chamado de **volume**, de forma que:

1º) poliedros congruentes têm volumes iguais;

2º) Se um poliedro S é a reunião de dois poliedros S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2 .

Notação: Dado um poliedro S , denotaremos por $V(S)$ o seu volume.

Em casos particulares de poliedros temos fórmulas para obter o seu volume. No trabalho, vamos utilizar somente a fórmula de um prisma, que é o próximo resultado.

Teorema 2.6. O volume de um prisma regular é o produto da área da base pela medida da altura e o volume de uma pirâmide regular é um terço o produto da área da base pela medida da altura.

A demonstração pode ser vista em [6, Corolário 10.4 e Proposição 10.7].

3. Estudo de variação das funções

Nesta seção descrevemos alguns conceitos de Cálculo Diferencial. O conceito de derivada de uma função é fundamental para o entendimento do seu gráfico, que é o objetivo deste trabalho considerando uma função especial. Vamos abordar os conceitos de maneira superficial, somente para fixar notação e descrever os resultados necessários para o estudo da função referida.

Definição 3.1. Uma **função** f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto A , exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto B . O conjunto A é chamado **domínio** e B de **contradomínio** da função. O número $f(x)$ é o valor de f em x . A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ obtidos quando x varia por todo o domínio.

Vamos considerar A e B subconjuntos dos números reais.

Definição 3.2. Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Um **intervalo aberto** é um conjunto dos números reais do tipo

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

No que segue vamos considerar f uma função definida em algum intervalo aberto com contradomínio os números reais.

Definição 3.3. Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite** de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definição 3.4. A **derivada** de f em um número a , denotada por $f'(a)$, é o limite

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Para tipos especiais de funções, temos regras de calcular sua derivada, já não tendo que passar pelo conceito de limite. O próximo resultado são essas regras para as funções que utilizaremos neste trabalho.

Proposição 3.5. Sejam f e g funções com derivada em todos os pontos de seus domínios. Então:

- a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
- d) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

A demonstração pode ser vista em [12, p. 170 e 180].

Proposição 3.6. A derivada das funções trigonométricas seno e cosseno são

$$(\text{sen})'(x) = \cos(x) \text{ e } (\text{cos})'(x) = -\text{sen}(x).$$

A demonstração pode ser vista em [12, p. 173].

As derivadas de uma função $f(x)$ nos dão informações importantes de como $f(x)$ se comporta no que se refere aos valores extremos, máximos e mínimos da função.

Definição 3.7. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um ponto de I . Chamamos de **vizinhança** de x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ onde δ é um número real positivo. Dizemos que x_0 é um **ponto de máximo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Nesse caso, o valor $f(x_0)$ é chamado **máximo local** de $f(x)$.

Analogamente, dizemos que x_0 é um **ponto de mínimo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Nesse caso, o valor $f(x_0)$ é chamado **mínimo local** de $f(x)$.

Observação: Podemos obter uma função através do conceito de derivada anterior, da seguinte maneira: suponha que f tem derivada em um ponto a . Definimos a função $d_a f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $d_a f(x) = f'(a) \cdot x$, chamada **função derivada** de f em a .

Definição 3.8. Dizemos que f **tem derivada de todas as ordens** em um ponto a se existe a derivada de f em a , a função derivada de f em a tem derivada em a , e assim sucessivamente.

Notação: $f''(a)$ é a derivada de $d_a f$ no ponto a , $f'''(a)$ é a derivada de $d_a^2 f$ no ponto a , onde $d_a^2 f$ é a função derivada de $d_a f$ em a , e assim sucessivamente.

O resultado que segue vale em um contexto mais geral, mas como não é o nosso objetivo aprofundar em ferramentas de Cálculo Diferencial, vamos particularizar.

Proposição 3.9. (Teste da Segunda Derivada) Suponha que f tem derivada de todas as ordens em um ponto a .

(a) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então f tem um mínimo local em a .

(b) Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então f tem um máximo local em a .

A demonstração pode ser vista em [12, p. 266].

4. Alvéolos dos favos de mel

As colmeias são estruturas onde as abelhas vivem e executam suas atividades. Dentro das colmeias, tem uma estrutura formada pela união de vários alvéolos, chamada de favos. Os alvéolos são construídos com um formato que apresenta uma extremidade aberta, cujo formato é hexagonal. Ao realizar um corte transversal na colmeia, obtemos um plano de hexágonos regulares, como mostra a Figura 10. A outra extremidade do alvéolo é fechada, com um **ápice triédrico**.

Figura 10: Corte transversal na colmeia das abelhas



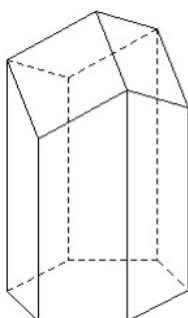
Fonte: <https://www.radioaguasclaras.com.br/culturas-de-inverno-aumentam-a-producao-de-mel-e-preservam-o-solo/>.

4.1. Construção dos alvéolos

Nesta seção, voltamos nosso olhar para o formato real dos alvéolos, passando pelo esclarecimento geométrico da sua construção.

Ele tem o formato semelhante ao de um prisma hexagonal com o fechamento num ápice triédrico, composto por três losangos congruentes entre si. As seis faces laterais do alvéolo são trapézios e a sua base é aberta, como podemos ver na figura a seguir.

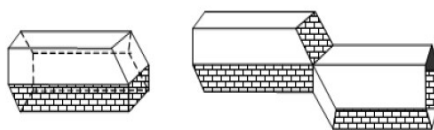
Figura 11: Alvéolo



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

O modelo visa um melhor encaixe entre os alvéolos.

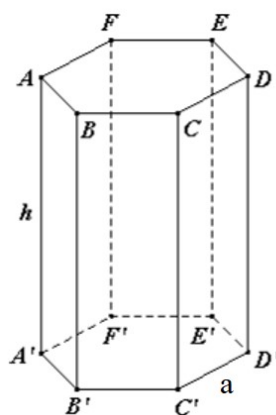
Figura 12: Encaixe dos alvéolos



Fonte: SARAIVA, 1999

Esse alvéolo pode ser construído começando com prisma reto de altura h e bases $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$, onde estes hexágonos são regulares de lados de medida a , conforme a Figura 13.

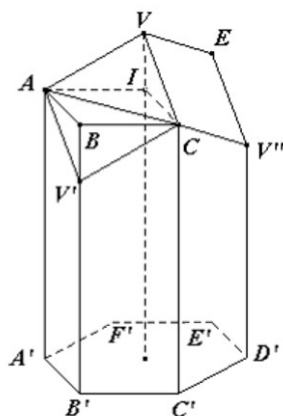
Figura 13: Prisma reto de base hexagonal



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Seja V' um ponto qualquer em $\overline{BB'}$. Considere o plano ABC e seja I o centro do hexágono $ABCDEF$. Traçando uma reta perpendicular ao plano ABC , passando por I , determinamos o ponto V que está no plano $AV'C$. Os vértices B , D e F são cortados por planos passando pelas retas \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CE} e \overrightarrow{AE} que se encontram num ponto V (**ápice**) e que intersectam $\overline{BB'}$ em V' , $\overline{DD'}$ em V'' e $\overline{FF'}$ em V''' , como mostra a Figura 14. Como $AV' = AV = VC = CV'$, temos que o quadrilátero $AV'CV$ é um losango. De modo análogo, temos que $CV''EV$ e $EV'''AV$ são losangos, obtendo os tetraedros $ABCV'$, $CDEV''$ e $EFAV'''$. A ideia é recortar e deslocar estes tetraedros tais que V' , V'' e V''' coincidam com o vértice V .

Figura 14: Formação do ápice triédrico.



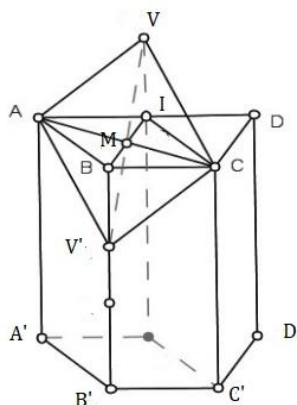
Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

4.2. Volume dos alvéolos

Nosso objetivo agora é mostrar que o volume de cada alvéolo tem o mesmo volume que de um prisma de base hexagonal.

Consideremos um prisma reto com base hexagonal regular (Figura 13). Como vimos, $AV'CV$ é um losango. Temos que $AA'B'V'$ e $V'B'C'C$ são trapézios com dois lados adjacentes, nos quais o losango $AV'CV$ está encaixado (Figura 15).

Figura 15: Prisma hexagonal com um dos cortes.



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Sendo I o centro do hexágono $ABCDEF$, os triângulos ABI, BCI, CDI, DEI, EFI e FAI são equiláteros de lados medindo a . Assim $AI = IC = AB = BC = a$ e, portanto, $ABCI$ é um losango, chamando de M a interseção de suas diagonais.

Considerando os triângulos AIC e ABC , observamos que, pelo caso LLL (ver [8, Teorema 2.8]), AIC é congruente a ABC ($AI = AB$; $IC = BC$ e \overline{AC} lado comum).

Consideremos agora os triângulos MBV' e VIM . Como $m(\widehat{BMV'}) = m(\widehat{IMV})$, pois são opostos pelo vértice; $\widehat{VIM} = \widehat{V'BM}$, pois são ângulos retos e $BM = MO$, visto que M é o ponto médio de BI , pois em um losango as diagonais se biseccionam, temos que os triângulos MBV' e VIM são congruentes pelo caso ALA (ver [8, Teorema 2.7]). Em particular $BV' = IV$.

Desta forma, como os triângulos AIC e ABC são congruentes e $BV' = IV$, que são as alturas dos tetraedros $AV'CB$ e $AVCI$ então

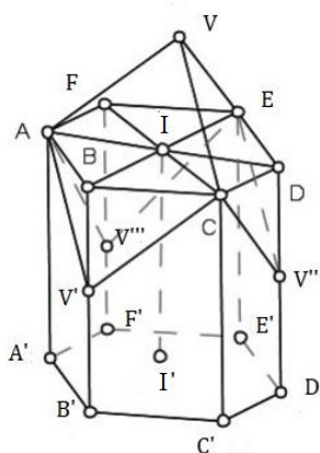
$$volume\ AV'CB = \frac{1}{3} \cdot \text{área}\ ABC \cdot BV' = \frac{1}{3} \cdot \text{área}\ AIC \cdot IV = volume\ AVCI,$$

ou seja, $AV'CB$ e $AVCI$ possuem o mesmo volume.

Excluindo o tetraedro $AV'CB$, temos um novo sólido, sendo que os sólidos $IABCI'A'B'C'$ e $VAV'A'B'C'I'$ apresentam volumes iguais.

Vale ressaltar que a Figura 15 apresenta apenas um corte, ocorrendo a partir do ponto V' . Com os pontos V'' e V''' acontece de forma análoga (Figura 16).

Figura 16: Prisma hexagonal com todas as marcações.



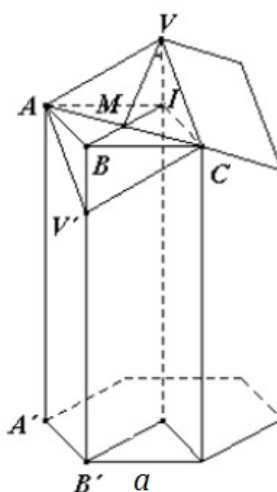
Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

4.3. Área da superfície dos alvéolos

O próximo passo é apresentar uma maneira de determinar uma função que calcula a área total do alvéolo em função da medida do ângulo do fechamento dos losangos no formato de ápice triédrico, que será chamada de α , que está relacionado com a medida do ângulo agudo de um dos losangos, que será chamada de θ .

Para calcular a área total do alvéolo, temos que primeiro calcular a área de cada losango que compõe o fechamento do alvéolo (A_I) e depois calcular a área dos trapézios congruentes da lateral (A_{II}). Considere o alvéolo conforme a figura:

Figura 17: Alvéolo usado para cálculo



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Seja θ a medida do ângulo agudo do losango que compõe o ápice triédrico.

Começemos calculando a área do losango $AV'CV$.

O ponto M , que é o ponto de interseção das diagonais do losango $ABCI$, também é a interseção de \overline{AC} com $\overline{VV'}$. Além disso, $IM = \frac{a}{2}$. Considere o triângulo equilátero BCI de lado a . Temos que CM é a altura de BCI e $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Como o triângulo IMV é retângulo em I (por construção, \overline{VI} é perpendicular às bases do prisma hexagonal inicial), sendo $\alpha = m(\widehat{MVI})$, obtemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{VM} \Rightarrow VM = \frac{a}{2 \cdot \text{sen } \alpha} (*)$$

Assim, podemos calcular a área do losango $AV'CV$ que é dada por:

$$A_{AV'CV} = \frac{VV' \cdot AC}{2} (**)$$

Como VV' é o dobro de VM , temos

$$VV' = 2 \cdot \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow VV' = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha},$$

e AC é o dobro de CM , temos

$$AC = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Voltando em (**), temos

$$A_{AV'CV} = \frac{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{AV'C} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

As seis faces laterais do alvéolo são trapézios congruentes. Tomemos o trapézio $AA'B'V'$. Temos que $A'B' = a$ e considere $AA' = h$.

Como $AA'B'B$ é um paralelogramo, então $BB' = AA' = h$. Assim,

$$B'V' = h - BV'.$$

Além disso, $BV' = VI$, por congruência dos triângulos VIM e $V'BM$, vista anteriormente.

No triângulo retângulo VIM , temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IM}{VI} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{BV'} \Rightarrow BV' = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow BV' = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

Assim,

$$B'V' = h - \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$A_{AA'B'V'} = \frac{(h + h - \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha) \cdot a}{2} = ah - \frac{a^2 \operatorname{cotg} \alpha}{4}.$$

A área da superfície do alvéolo é dada por 6 vezes a área do trapézio mais 3 vezes a área do losango. Assim, a área da superfície do alvéolo S_L escrita em função de α é

$$S_L(\alpha) = 3 \cdot A_I + 6 \cdot A_{II} = 3 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) + 6 \cdot \left(ah - \frac{a^2}{4} \cotg \alpha \right)$$

Logo, $S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2} \cdot \left(-\cotg \alpha + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$. Escrevendo $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$,

$$S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right).$$

Assim, para a e h dados, a área da superfície do alvéolo é uma função com variável α , assim,

$$S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2 \operatorname{sen} \alpha} (\sqrt{3} - \cos \alpha) (**).$$

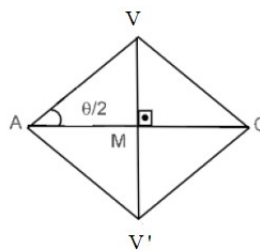
Existe uma relação entre α e θ .

Considere o triângulo ABC , que é isósceles, pois $AB = BC$ (lados do hexágono) e $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$. Aplicando a lei dos cossenos em ABC temos:

$$(AC)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cos 120^\circ \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Agora, considere o losango $AVCV'$ e $\theta = m(\widehat{VAV'})$.

Figura 18: Losango da cobertura dos alvéolos e suas diagonais.



Fonte: VAIANO; MARQUEZ; ARAÚJO, 2015.

Assim, $\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{VM}{AM}$. Como $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, temos $2 \cdot VM = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Logo, por (*) obtemos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right). \text{ Portanto, } \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha}.$$

Uma vez que a situação ideal é o máximo de aproveitamento de volume em uma área com uso mínimo de cera para sua composição, o próximo passo é descobrir o valor de θ ou α que minimiza a área da superfície do alvéolo.

Assim, para isso devemos derivar a função $S_L(\alpha)$ e depois igualar a zero, para achar o valor que pode ser de máximo ou de mínimo da função S_L . Depois derivamos S_L novamente e aplicamosno valor de encontrado para concluir, neste caso, que o valor encontrado é de mínimo. Aqui estamos usando o Teste da Segunda Derivada:

$$S_L'(\alpha) = \frac{3a^2}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{3} \cos \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cong 54,74^\circ$$

$$\text{Logo, } tg \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e assim } \theta = 2 \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 70,53^\circ$$

$$S_L''(\alpha) = \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3} \text{sen}^3 \alpha - (1 - \sqrt{3} \cos \alpha) 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\text{sen}^4 \alpha} \right).$$

$$S_L'' \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^4} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 > 0.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A.B.E.L.H.A., Associação Brasileira de Estudos das abelhas. Disponível em: abelha.org.br. Acesso em: 30/07/2023.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- [3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [4] GEOGEBRA. <https://www.geogebra.org/classroom/hj97qmc5>.
- [5] MENEZES, F. R. **A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos**. 2017. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- [6] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**, Coleção Profmat, ed SBM, ed. 2, 2022.
- [7] RAMBALDI, L. “**Como se forma uma colmeia**”. Super Interessante; Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-se-forma-uma-colmeia/>. Acesso em: 04 de janeiro de 2023.
- [8] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M.L.I. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**- 2ª ed. - Campinas. Editora da Unicamp. 2008.

- [9] SARAIVA, J. C. **A matemática das abelhas**. In: Revista Eureka!, n°6, p 18-22. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática SBM, 1999.
- [10] SILVA. R.N. **Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano**, PROFMAT- UNESP, 2014.
- [11] THOMPSON, D. W., **On Growthand Form**, Cambridge University Press, 1917.
- [12] STEWART, J. **Cálculo**, V.1. 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [13] VAIANO, A. Z; MÁRQUEZ, R. G; ARAÚJO, J. **Abelhas africanizadas e construções geométricas**. In: Congresso Scientiarum História VIII (In)certezas e (In)completudes, p. 5-9. Rio de Janeiro, 2015.

Minicurso baseado na dissertação de Mestrado do PROFMAT

Amarilis Paschoal Bianco Farias, Michelle Ferreira Zanchetta Morgado (orientadora), **Aprendendo matemática com as abelhas**, defesa 15 de setembro de 2023.

<https://repositorio.unesp.br/communities/b4295a67-f354-48db-9335-8612b2c128b2>