



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL-PROFMAT**

Juliano Kazapi

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

**PRODUTO EDUCACIONAL:**

**CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE  
GEOMETRIA: CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO E DO  
COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA PELO MÉTODO DE  
EXAUSTÃO**

Florianópolis

2023



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Segmento $\overline{OP}$ é menor do que o segmento $\overline{CD}$ .....	11
Figura 3	Figura construída no geogebra.....	12
Figura 2	Atividades de medida.....	14
Figura 4	Área de um triângulo.....	17
Figura 5	Área de um triângulo.....	17
Figura 6	Área de um triângulo.....	20
Figura 7	Área de um triângulo.....	20
Figura 8	Área e o perímetro do polígono regular de 3 lados.....	21
Figura 9	Área e o perímetro do polígono regular de 6 lados.....	24
Figura 10	Área e o perímetro do polígono regular de 12 lados.....	27
Figura 11	Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados.....	30
Figura 12	Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados.....	33
Figura 13	Área e o perímetro do polígono regular de 48 lados.....	36



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	5
<b>2 SUGESTÕES PARA O MÉTODO DA EXAUSTÃO</b> .....	9
2.1 ATIVIDADE: MÉTODO DA EXAUSTÃO .....	9
2.2 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA .....	11
2.3 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA COM OBJETOS DO DIA A DIA .....	14
2.4 ATIVIDADE: O MÉTODO DA EXAUSTÃO NO CÁLCULO DE UM TRIÂNGULO .....	16
2.5 ATIVIDADE: CÁLCULO DA ÁREA E DO COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 5 CM .....	20
2.5.1 Aproximação por polígono regular de 3 lados .....	21
2.5.2 Aproximação por polígono regular de 6 lados .....	24
2.5.3 Aproximação por polígono regular de 12 lados .....	27
2.5.4 Aproximação por polígono regular de 24 lados .....	30
2.6 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 24 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 9 CM .....	33
2.7 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 48 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 9 CM .....	36
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	39



## 1 INTRODUÇÃO

Com 10 anos de experiência profissional, trabalhando como professor efetivo de matemática na rede municipal e estadual de ensino básico, observo que as aulas, na maioria das vezes, são dadas através da aplicação de fórmulas, regras e algoritmos, inclusive muitas das minhas aulas são dadas dessa maneira.

Ao aplicarmos algoritmos conhecidos que consiga resolver uma determinada situação, não estamos necessariamente resolvendo um problema.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN, 1998), resolver um problema pressupõe que o aluno:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (como por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros alunos;
- valide seus procedimentos.

No meu entender, para usar a estratégia de ensino de resolução de problemas em uma sala de aula, tendo o professor como mediador, é necessário que os alunos saibam algumas técnicas de álgebra, aritmética e geometria, ferramentas fundamentais para atacar os problemas propostos com alguma possibilidade de sucesso (que é a resolução do problema), e que permitam à eles elaborar procedimentos, comparar e validar seus resultados.

Normalmente, na escola, essas técnicas são ensinadas através de algoritmos e receituários desconectados dos problemas que iremos propor aos alunos e também da história da matemática relacionada, o que causa a falta de sentido nos conteúdos ministrados e a consequente desmotivação por parte dos alunos para aprender.

Ensinar matemática é um grande desafio, onde muitas vezes o professor só conta com o apoio do livro didático, que segundo minha experiência profissional, não é suficiente. A contínua formação e capacitação do professor é que faz a diferença no ensino básico. Formação como essa do PROFMAT.

Pensando nisso tudo, vamos disponibilizar para a impressão, 5 atividades de estudo dirigido em geometria, nas quais o aluno possa compreender de forma histórica, a maneira que os antigos gregos usavam para calcular a área de um círculo e o comprimento de uma circunferência. Os alunos poderão realizar procedimentos, experimentos e descobertas de forma autônoma, com o auxílio de seu professor.

Situando o leitor em relação ao ensino básico (fundamental e médio), a Base Nacional Comum Curricular, BNCC, classifica o ensino de matemática em 5 unidades temáticas, são elas:

- Álgebra
- Geometria
- Grandezas e medidas
- Números
- Probabilidade e estatística

Diante desse quadro, nas unidades temáticas Geometria e Grandezas e medidas, podemos dizer que este material didático tem por objetivo discutir o princípio da exaustão, associado ao cálculo de áreas e comprimentos de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência, tornando possível o cálculo da área de um círculo e o comprimento de uma circunferência.

De acordo com a BNCC, esse assunto pode ser abordado a partir do sétimo e oitavo anos do ensino fundamental, dentro da unidade temática Grandezas e Medidas:

- (EF07MA33) Estabelecer o número  $\pi$  como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Também pode ser abordado a partir do sexto ano do ensino fundamental, dentro da unidade temática de Geometria:

- (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Realizamos também uma discussão do método da exaustão com o uso de limites, usando progressões geométricas e aritméticas, assunto abordado no ensino médio. Na BNCC, esse tema aparece da seguinte forma:

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Em relação ao ensino superior, esse trabalho também é útil para todos os alunos de graduação em matemática, e também aos alunos do PROFMAT que estejam fazendo a disciplina de geometria, pois aborda todas as proposições com suas respectivas demonstrações que concluem que a área do círculo é  $\pi r^2$  e que o comprimento da circunferência é  $2\pi r$ .

Esse trabalho conta com muitas figuras para apoiar o entendimento das proposições, e todas foram construídas por mim no Geogebra: software livre de geometria dinâmica, no Gimp: software livre de ilustração vetorial, no Librecad: software livre de desenho técnico e o uso do Tex Studio: software livre para editar textos matemáticos em  $\text{\LaTeX}$ .



## 2 SUGESTÕES PARA O MÉTODO DA EXAUSTÃO

Este recurso educacional apresenta atividades para serem aplicadas pelo professor em sala de aula. As propostas podem ser desenvolvidas com alunos do ensino fundamental, médio, superior e também na educação de jovens e adultos. Foram pensadas para que o professor atue como facilitador ou mediador do processo de ensino-aprendizagem. As atividades podem ser conduzidas sem uma ordem específica, adaptando-se à demanda e necessidade de cada turma, seja do ensino regular ou da educação de jovens e adultos. A ideia é que os alunos tenham liberdade para experimentar as ideias em pequenos grupos e, se possível, utilizando tecnologias como o Geogebra, um software de geometria dinâmica.

As aulas devem considerar a experimentação e o diálogo, criando um ambiente de amizade e descoberta. O nível de abstração de cada atividade é aumentado progressivamente. Para avaliar, o professor pode solicitar registros das medidas e cálculos dos alunos, além de considerar o envolvimento da turma. O objetivo é a aprendizagem do aluno, respeitando cada indivíduo, sem buscar promover classificações por notas, o que pode ser feito em outro momento.

### 2.1 ATIVIDADE: MÉTODO DA EXAUSTÃO

Roteiro para o professor.

O objetivo desta atividade é verificar na prática que o princípio da exaustão funciona. Os materiais necessários para essa atividade são régua, lápis, borracha e a folha modelo, que disponibilizamos ao professor no final dessa descrição. O segmento  $\overline{AB}$  tem 10 cm e o segmento  $\overline{CD}$  tem 2 cm. Os alunos deverão medir esses segmentos para constatar isso.

Depois os alunos devem medir o ponto  $E$  médio do segmento  $\overline{AB}$  e construir um novo segmento  $\overline{FG}$  com a metade do tamanho do segmento  $\overline{AB}$  ou um pouquinho menos do que sua metade. Medir o ponto  $H$  médio do segmento  $\overline{FG}$  e construir um novo segmento  $\overline{IJ}$  com a metade do tamanho do segmento  $\overline{FG}$  ou com um pouquinho menos do que a metade. Prosseguir até que o segmento obtido, seja menor do que o segmento pré-estabelecido  $\overline{CD}$ .

Em nosso exemplo, figura 1, o segmento  $\overline{OP}$  é menor do que o segmento  $\overline{CD}$ .

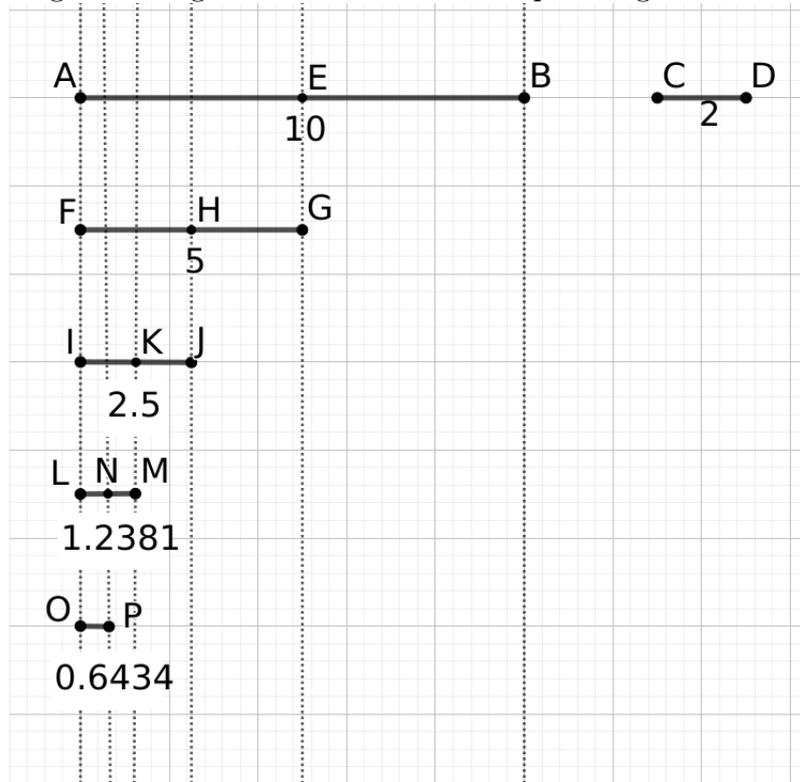
Um fato interessante é dicutir com os alunos, para o número de casas decimais para a aproximação.

# Atividade: princípio da exaustão

---

Instruções ao aluno: Divida o segmento maior pela metade diversas vezes, até constatar que o segmento obtido é menor do que o segmento menor dado.

Figura 1: Segmento  $\overline{OP}$  é menor do que o segmento  $\overline{CD}$



Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.2 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Roteiro para o professor.

O objetivo desta atividade é verificar que ao dividirmos o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, o resultado é  $\pi$ . Os materiais necessários para essa atividade são régua, lápis, borracha, calculadora, fita métrica e a folha modelo que disponibilizamos ao professor no final dessa descrição.

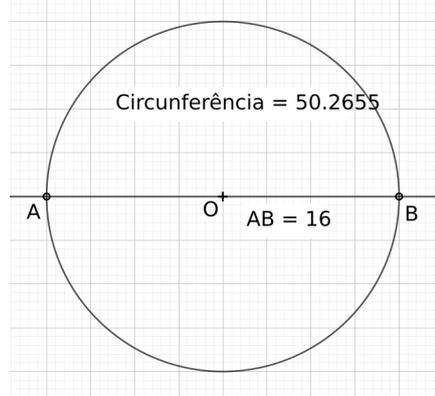
Os alunos devem medir o diâmetro da circunferência com a régua. Em seguida, usando a fita métrica devem medir o comprimento da circunferência, que será um desafio à parte. Pode ser feito medindo a semi-circunferência e depois multiplicado o valor do comprimento encontrado por 2, também pode-se dividir a circunferência em mais partes, e medir cada arco. Ao final das medições soma-se os valores dos arcos e teremos o comprimento da circunferência.

Ao se dividir a circunferência em vários arcos, estamos intuitivamente trabalhando com polígonos na circunferência, como mostra a figura 2.

Na figura construída no geogebra, o valor do comprimento é de 50,2655 cm e o

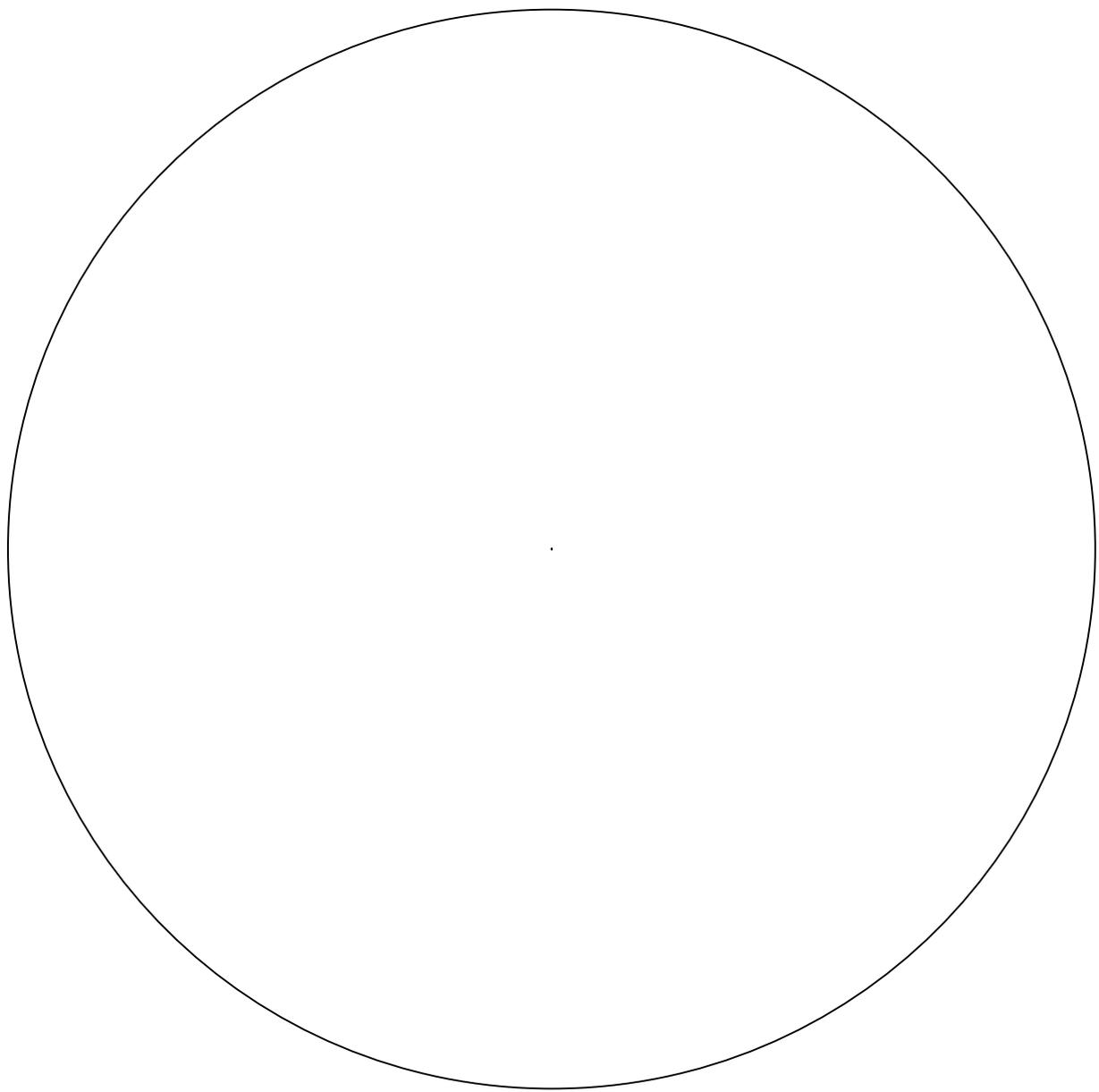
diâmetro é de 16 cm, calculando a razão do comprimento pelo diâmetro é de 3,14159375, como mostra a figura 3.

Figura 3: Figura construída no geogebra



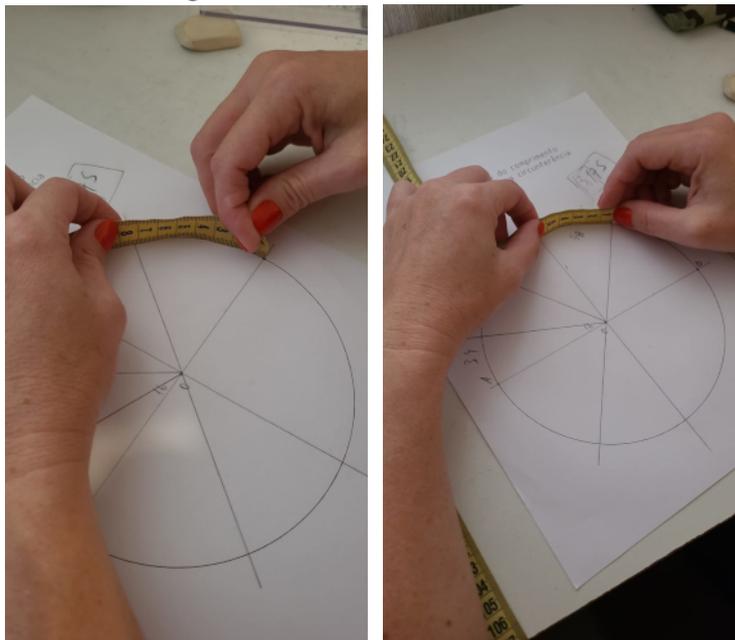
Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade: razão do comprimento  
pelo diâmetro de uma circunferência



Instruções ao aluno: Meça o comprimento e o diâmetro da circunferência.  
Calcule a razão do comprimento pelo diâmetro.

Figura 2: Atividades de medida



Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.3 ATIVIDADE: RAZÃO DO COMPRIMENTO PELO DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA COM OBJETOS DO DIA A DIA

Roteiro para o professor.

O objetivo dessa atividade é calcular a razão do comprimento pelo diâmetro de vários objetos circulares usados no dia a dia. Os materiais necessários para a atividade são: papel, lápis, borracha, calculadora, fita métrica, fita adesiva e pelo menos 10 objetos circulares de uso diário que podem ser revoados entre os grupos de alunos. A fita adesiva serve para fixar melhor a fita métrica se os alunos acharem conveniente.

Os estudantes devem medir o comprimento e o diâmetro de cada objeto e calcular sua razão para verificar uma aproximação para o valor de  $\pi$ . Colocar os dados obtidos em uma tabela para que depois possam comparar suas medidas. Os diversos valores encontrados são dados devido às medidas imprecisas que fazemos e não por causa da imprecisão da matemática.

Segue o quadro 1 com os dados obtidos de uma das medições que foram feitas, todas as medidas estão em centímetros.

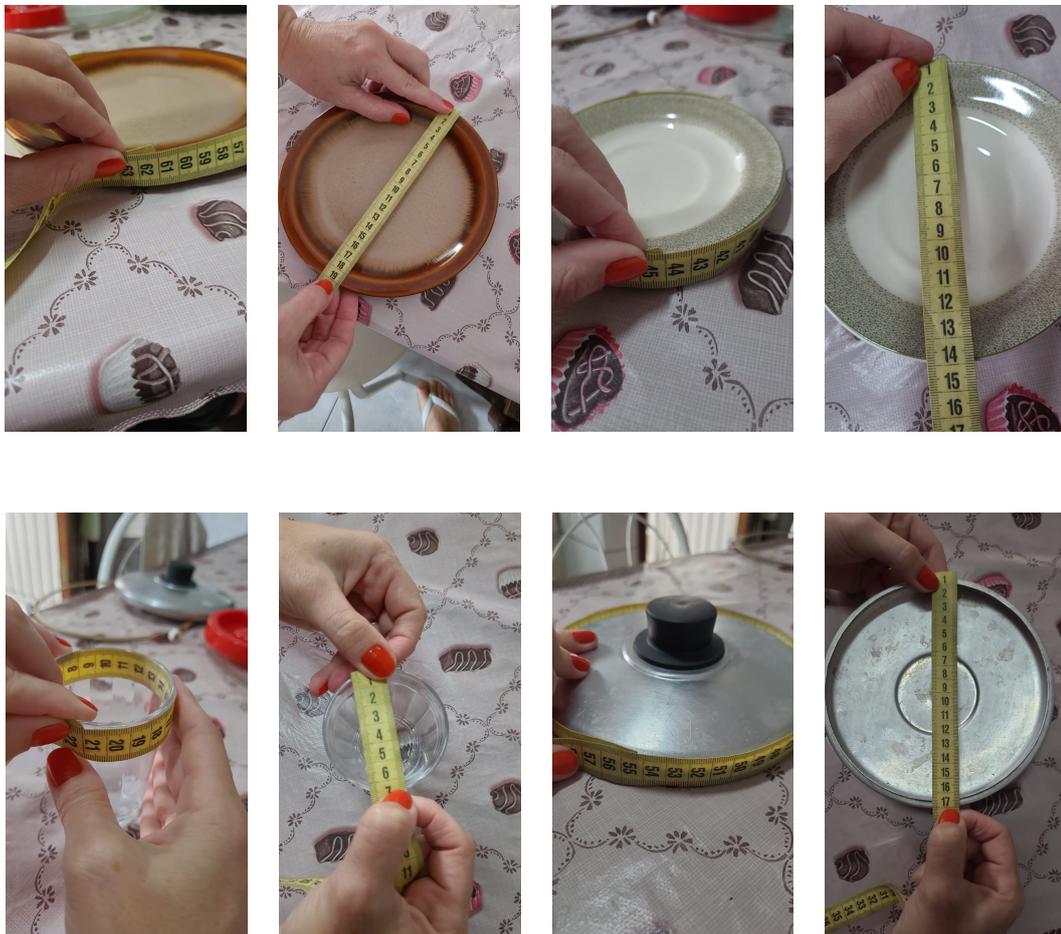
Quadro 1: Lista de atividades com as medidas

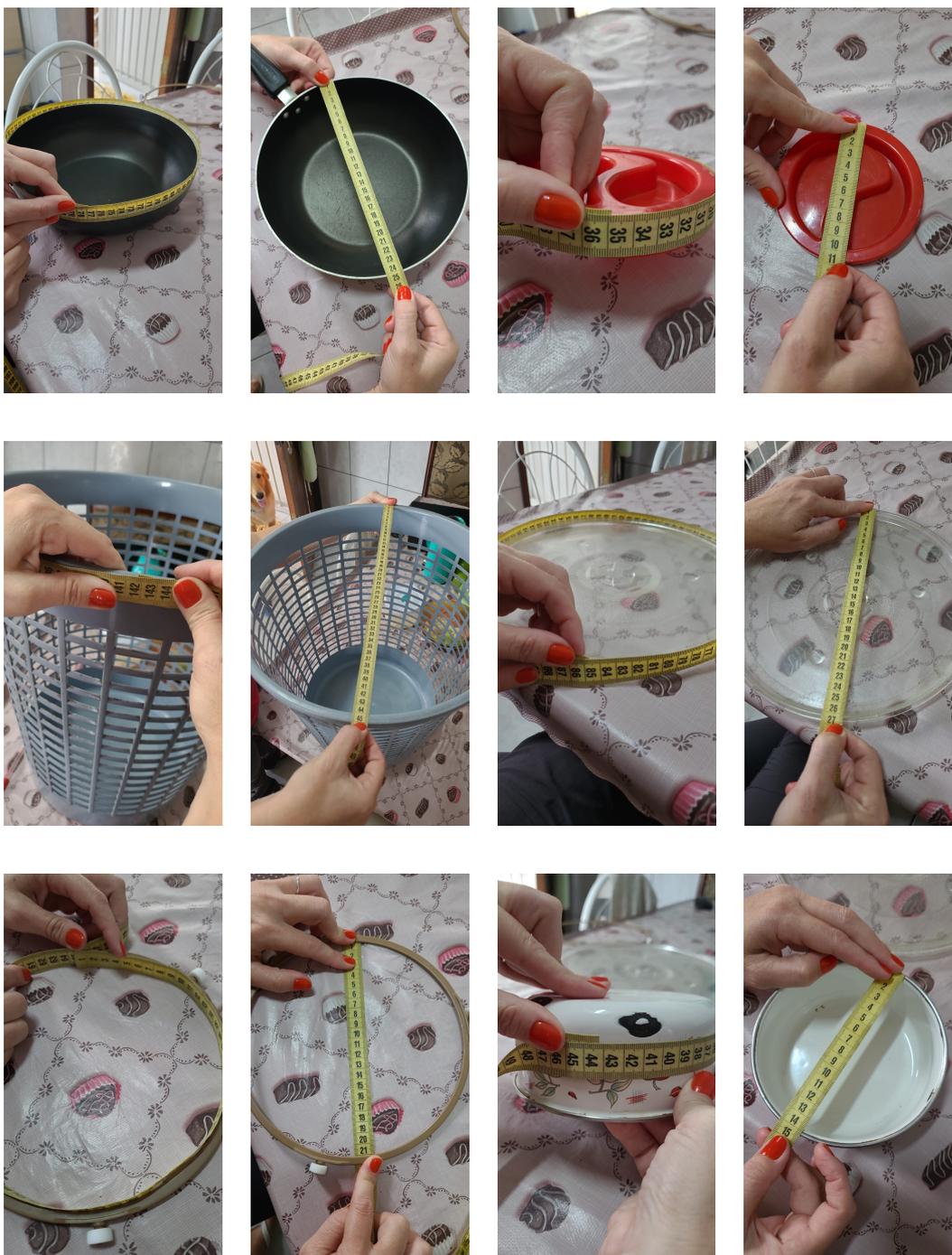
	Comprimento (C)	Diâmetro (D)	C/D
<b>Prato marrom</b>	61	19	3,2105
<b>Pires</b>	44	14	3,1428
<b>Copo vidro</b>	20,9	6,5	3,2153
<b>Tampa de panela</b>	54,3	17	3,1941
<b>Panela</b>	76,8	24,3	3,1604
<b>Tampa vermelha</b>	34,9	10,7	3,2616
<b>Cesto de roupa</b>	141,5	44,2	3,2013
<b>Prato microondas</b>	84,7	27	3,1370
<b>Suporte microondas</b>	64,7	21	3,0809
<b>Pote de metal</b>	43,3	14,4	3,0069

Fonte: Elaborado pelo autor

Segue na figura 3b, uma foto montagem feita pelo autor, da medição desses objetos.

Figura 3b: foto montagem feita pelo autor





Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.4 ATIVIDADE: O MÉTODO DA EXAUSTÃO NO CÁLCULO DE UM TRIÂNGULO

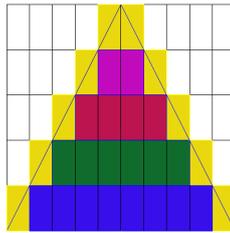
Roteiro para o professor.

O objetivo dessa atividade é constatar que ao aumentar a quantidade de retângulos, por dentro e por fora, que usamos para calcular a área de um triângulo a diferença entre os retângulo de dentro e de fora do triângulo, resulta em apenas ao comprimento de sua base. O cálculo da área do triângulo nessas condições já foi feita no capítulo 3. Os materiais

necessários para essa atividade são lápis, borracha, lápis de cor e a folha modelo que está no final da descrição dessa atividade.

A primeira página da atividade é necessário em pintar as áreas de dentro e de fora do triângulo, como mostra a figura 4.

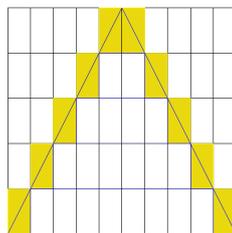
Figura 4: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Depois pintar somente a área que sobra da diferença entre os retângulos de fora e os de dentro do triângulo, como mostra a figura 5.

Figura 5: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando então os retângulos que sobrarem irão cair na base do triângulo.

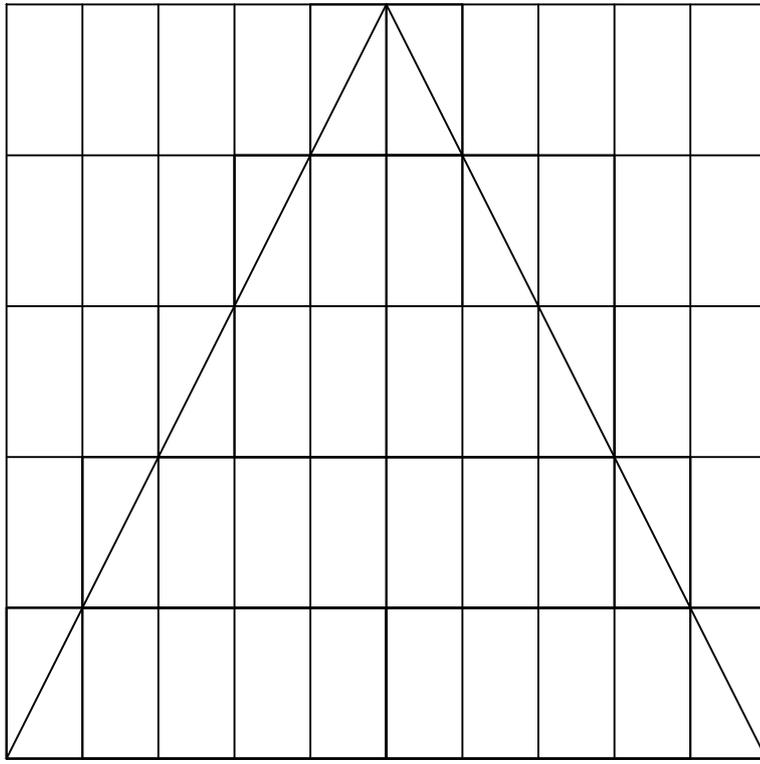
Para a segunda página da atividade, é necessário em pintar as áreas de dentro e de fora do triângulo, como mostra a figura 6.

Depois pintar somente a área que sobra da diferença entre os retângulos de fora e os de dentro do triângulo, como mostra a figura 7.

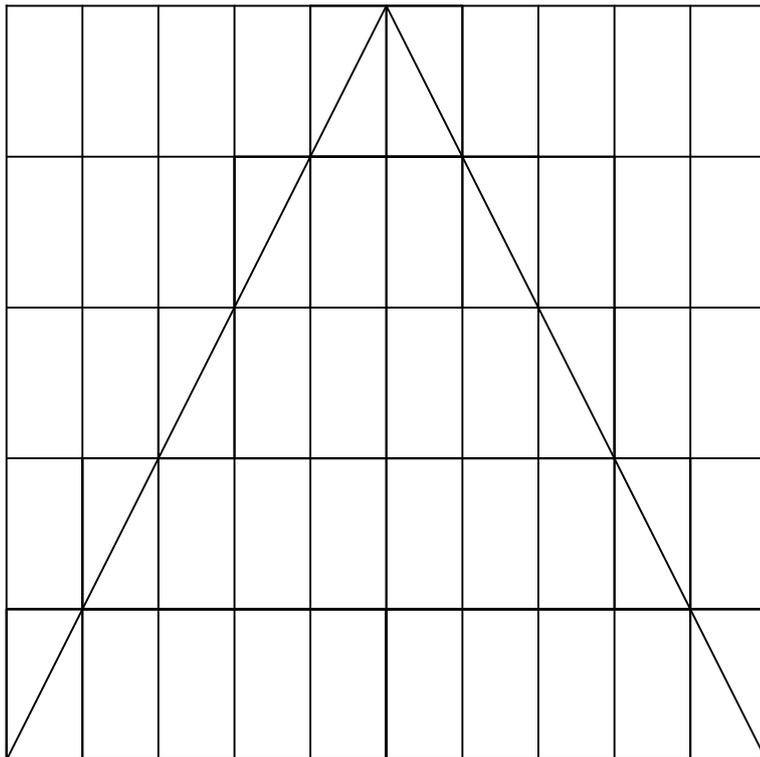
Quando então os retângulos que sobrarem irão cair na base do triângulo.

# Atividade: princípio da exaustão no triângulo

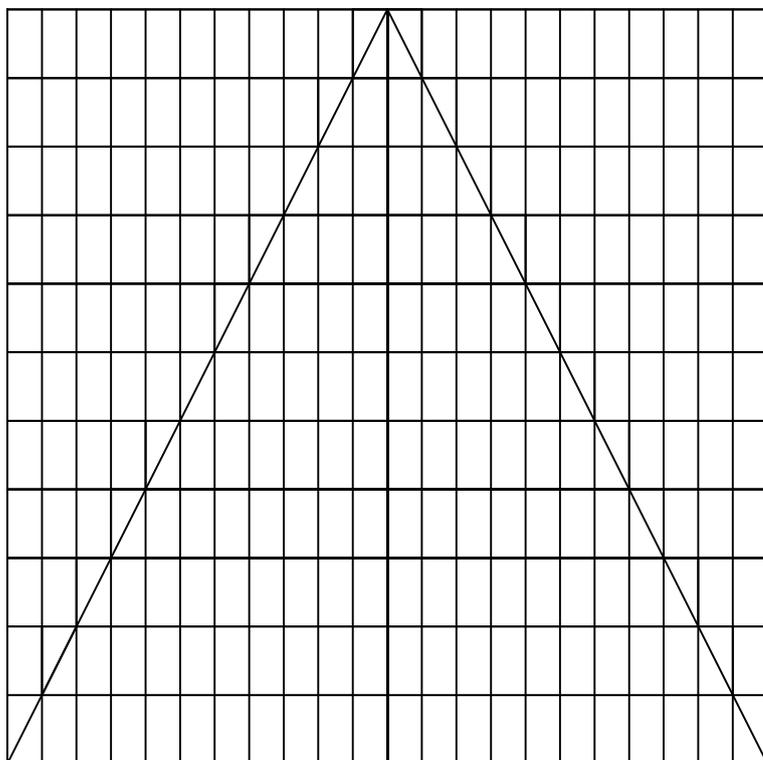
Instruções ao aluno: Pintar retângulos que cubram um andar do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar somente a região que sobra, da diferença entre os retângulos que estão fora e dentro do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar retângulos que cubram um andar do triângulo.



Instruções ao aluno: Pintar somente a região que sobra, da diferença entre os retângulos que estão fora e dentro do triângulo.

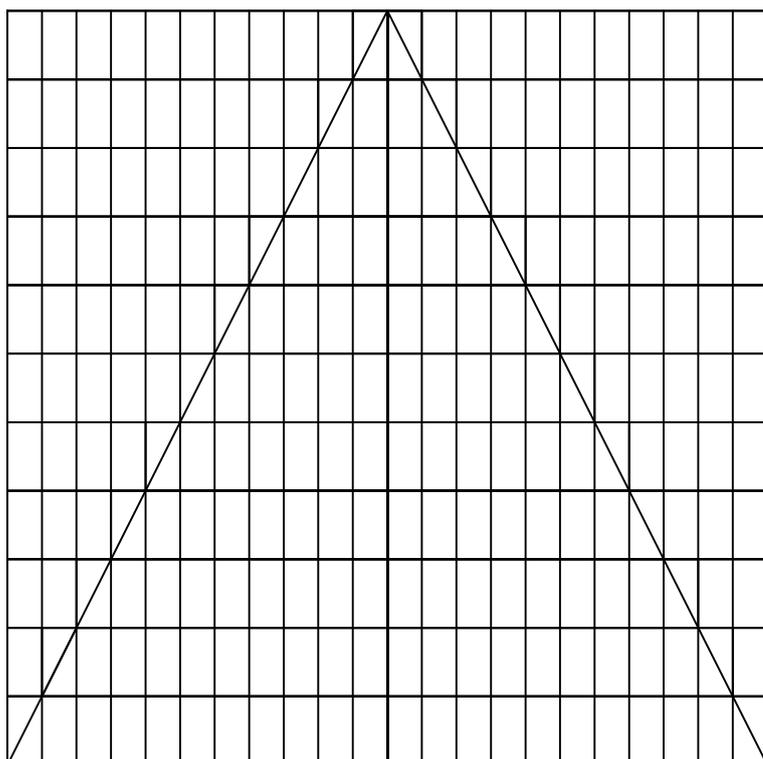
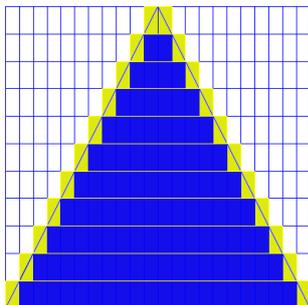
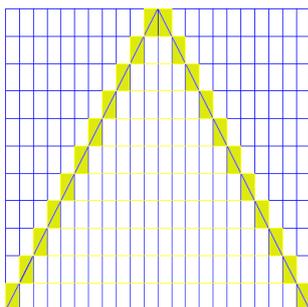


Figura 6: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7: Área de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

## 2.5 ATIVIDADE: CÁLCULO DA ÁREA E DO COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 5 CM

O objetivo da atividade é calcularmos o comprimento e a área de uma circunferência de raio 5 cm, por meio de polígonos regulares inscritos e circunscritos. A área de um círculo de raio 5 cm é de aproximadamente  $78,53 \text{ cm}^2$  e o comprimento é de 31,41 cm.

Para essa atividade vamos precisar de: lápis, régua, borracha, calculadora e as folhas que disponibilizamos ao final das descrições.

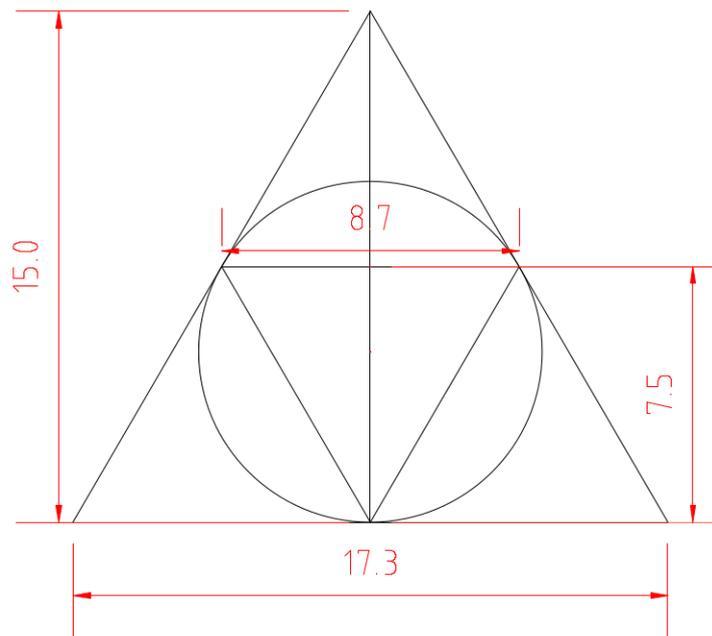
Uma discussão interessante a fazer com os alunos, é a ideia da precisão das medidas e de seu valor com um número de casas decimais suficientes para obter uma solução adequada. Na escola, temos apenas a régua com 1 casa decimal para a aproximar as medidas, talvez no máximo duas casas decimais.

### 2.5.1 Aproximação por polígono regular de 3 lados

Roteiro para o professor.

A primeira aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 3 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 8.

Figura 8: Área e o perímetro do polígono regular de 3 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

Chamando  $A_3$  a área do polígono regular circunscrito,  $P_3$  o perímetro do polígono regular circunscrito, de  $B_3$  a base do polígono regular circunscrito,  $H_3$  a altura do polígono regular circunscrito e  $a_3$  a área do polígono regular inscrito,  $p_3$  o perímetro do polígono regular inscrito,  $b_3$  a base do polígono regular inscrito e  $h_3$  a altura do polígono regular inscrito temos que:

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_3 = \frac{B_3 \cdot H_3}{2} = \frac{15 \cdot 17,3}{2} = 129,75 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_3 = B_3 \cdot 3 = 17,3 \cdot 3 = 51,9 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_3 = \frac{b_3 \cdot h_3}{2} = \frac{8,7 \cdot 7,5}{2} = 32,625 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_3 = b_3 \cdot 3 = 8,7 \cdot 3 = 26,1 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$32,625 \leq A_o \leq 129,75$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência  $C_o$  é:

$$26,1 \leq C_o \leq 51,9$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

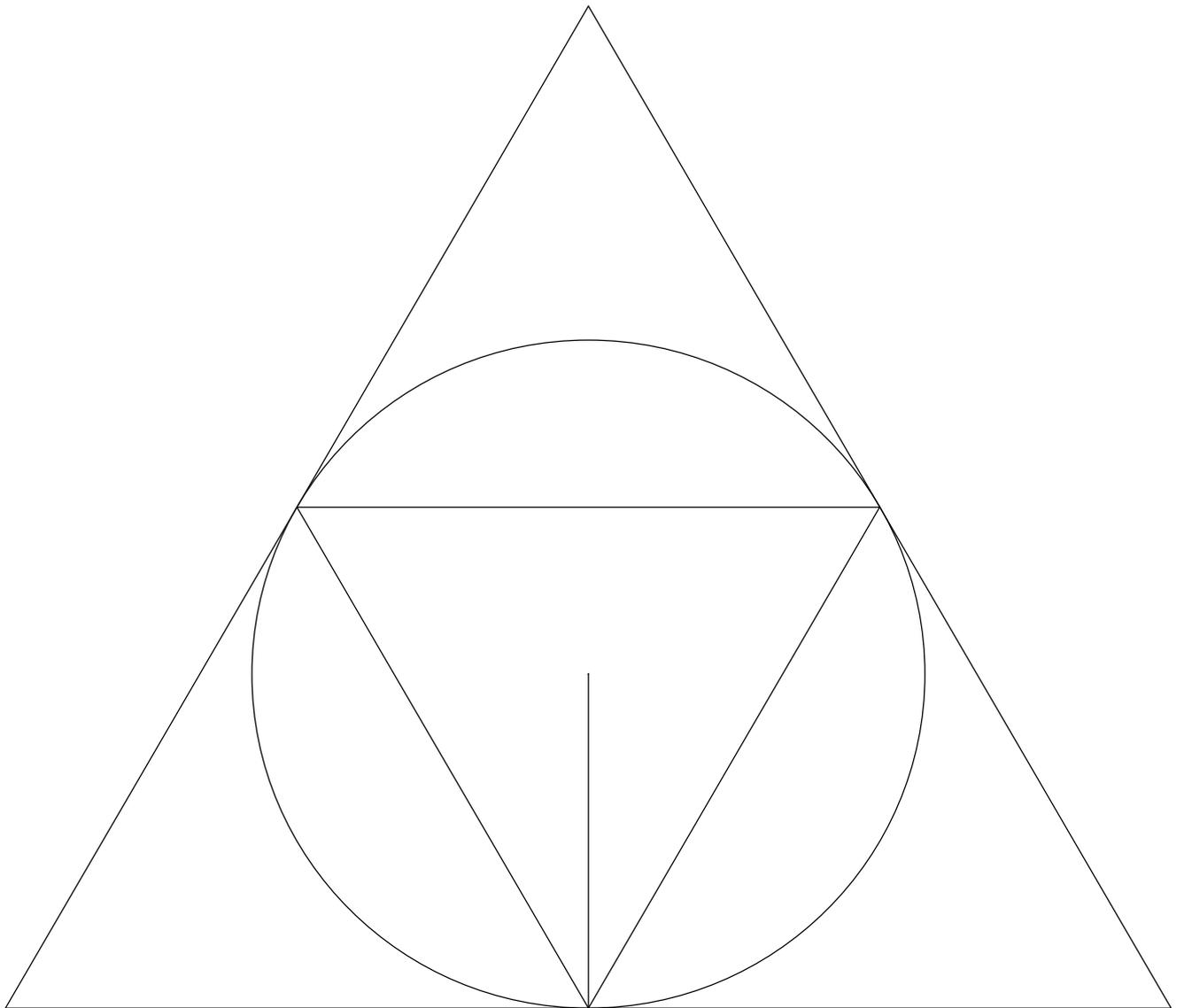
$$\frac{26,1}{10} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{51,9}{10}$$

Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$2,61 \leq \frac{C_o}{d} \leq 5,19$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

# Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



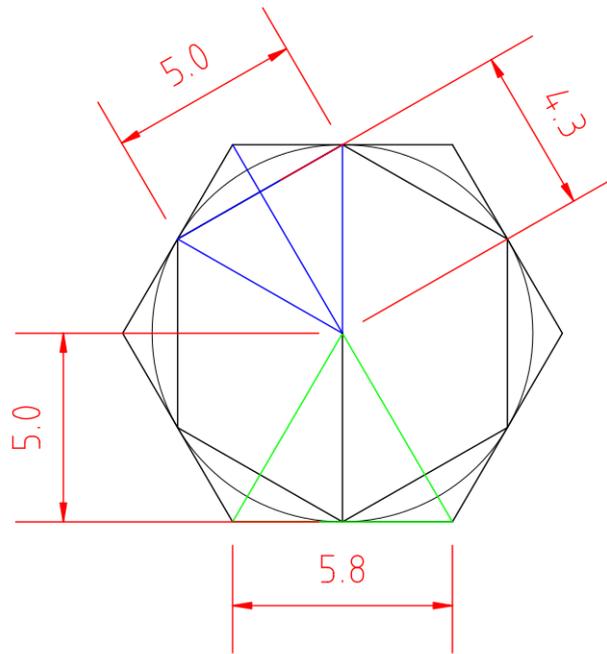
Instrução ao aluno: calcular a área do triângulo inscrito e circunscrito à circunferência.

### 2.5.2 Aproximação por polígono regular de 6 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 6 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 9.

Figura 9: Área e o perímetro do polígono regular de 6 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_6 = 6 \cdot \frac{B_6 \cdot H_6}{2} = 6 \cdot \frac{5,8 \cdot 5}{2} = 87 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_6 = B_6 \cdot 6 = 5,8 \cdot 6 = 34,8 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_6 = \frac{b_6 \cdot h_6}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 64,5 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_6 = b_6 \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$64,5 \leq A_o \leq 87$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência  $C_o$  é:

$$30 \leq C_o \leq 34,8$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

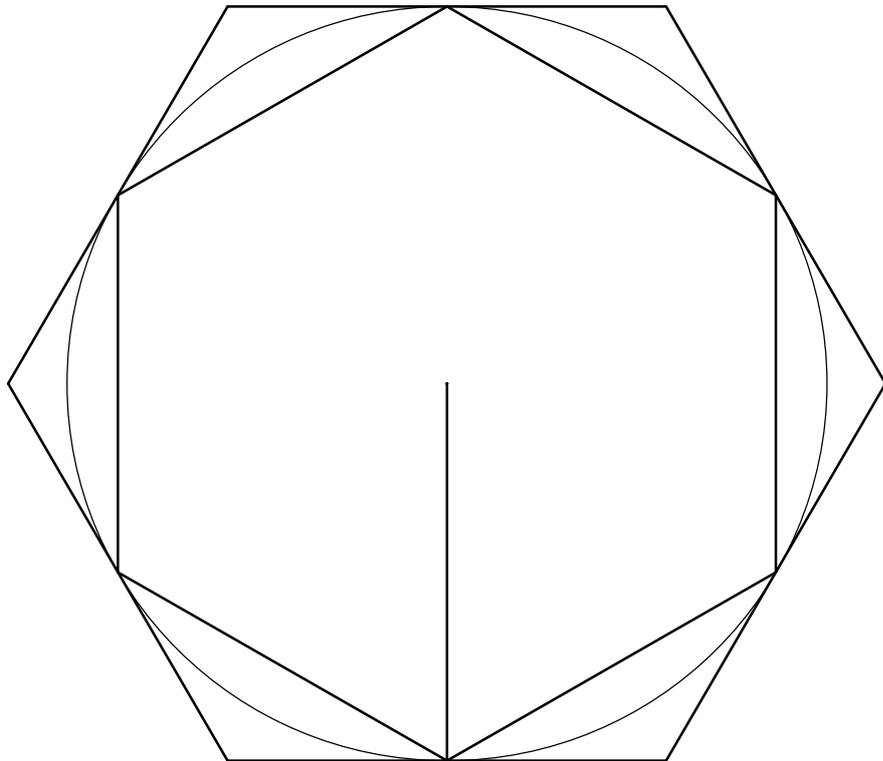
$$\frac{30}{10} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{34,8}{10}$$

Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$3 \leq \frac{C_o}{d} \leq 3,48$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

## Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



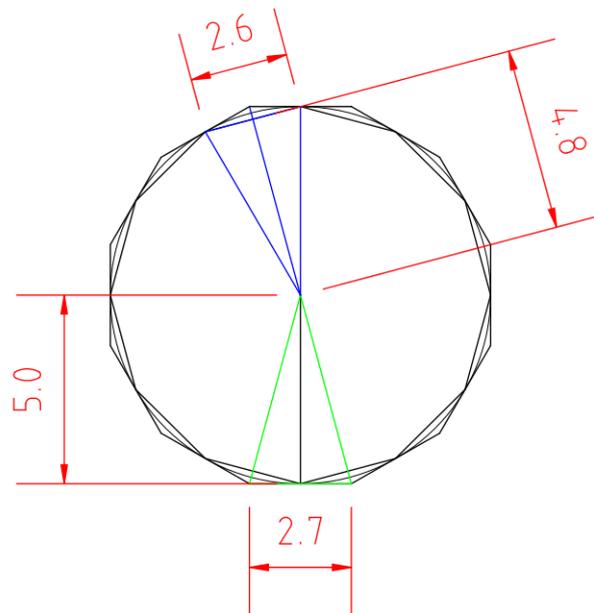
Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.

### 2.5.3 Aproximação por polígono regular de 12 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 12 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura 10.

Figura 10: Área e o perímetro do polígono regular de 12 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{12} = 12 \cdot \frac{B_{12} \cdot H_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{2,7 \cdot 5}{2} = 81 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{12} = B_{12} \cdot 12 = 2,7 \cdot 12 = 32,4 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{12} = \frac{b_{12} \cdot h_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{2,6 \cdot 4,8}{2} = 74,88 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{12} = b_{12} \cdot 12 = 2,6 \cdot 12 = 31,2 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$74,88 \leq A_o \leq 81$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência  $C_o$  é:

$$31,2 \leq C_o \leq 32,4$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

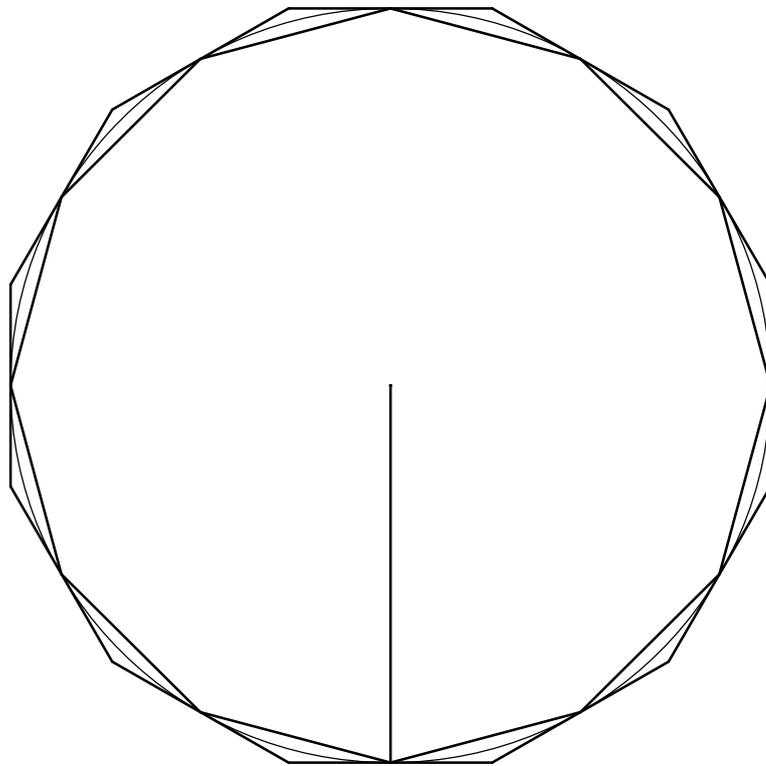
$$\frac{31,2}{10} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{32,4}{10}$$

Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$3,12 \leq \frac{C_o}{d} \leq 3,24$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

## Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.

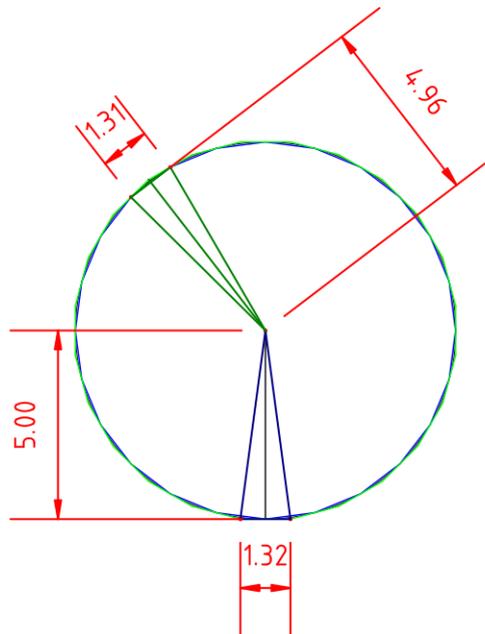
### 2.5.4 Aproximação por polígono regular de 24 lados

Roteiro para o professor.

A aproximação é feita calculando a área e o perímetro do polígono regular de 24 lados circunscrito à circunferência e calculando a área e o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência, as medidas obtidas podem ser vistas na figura a seguir. Os alunos terão dificuldades em obter as medidas apresentadas, porque nossos instrumentos de medida, réguas escolares, não tem a precisão necessária para essa finalidade. Uma solução possível é fazer um desenho maior, que será tema da próxima atividade.

Na figura 11, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Figura 11: Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{24} = 24 \cdot \frac{B_{24} \cdot H_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{1,32 \cdot 5}{2} = 79,2 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{24} = B_{24} \cdot 24 = 1,32 \cdot 24 = 31,68 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{24} = \frac{b_{24} \cdot h_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{1,31 \cdot 4,96}{2} = 77,97 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{24} = b_{24} \cdot 24 = 1,31 \cdot 24 = 31,44 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$77,97 \leq A_o \leq 79,2$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência  $C_o$  é:

$$31,44 \leq C_o \leq 31,68$$

Dividindo a desigualdade por 10 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

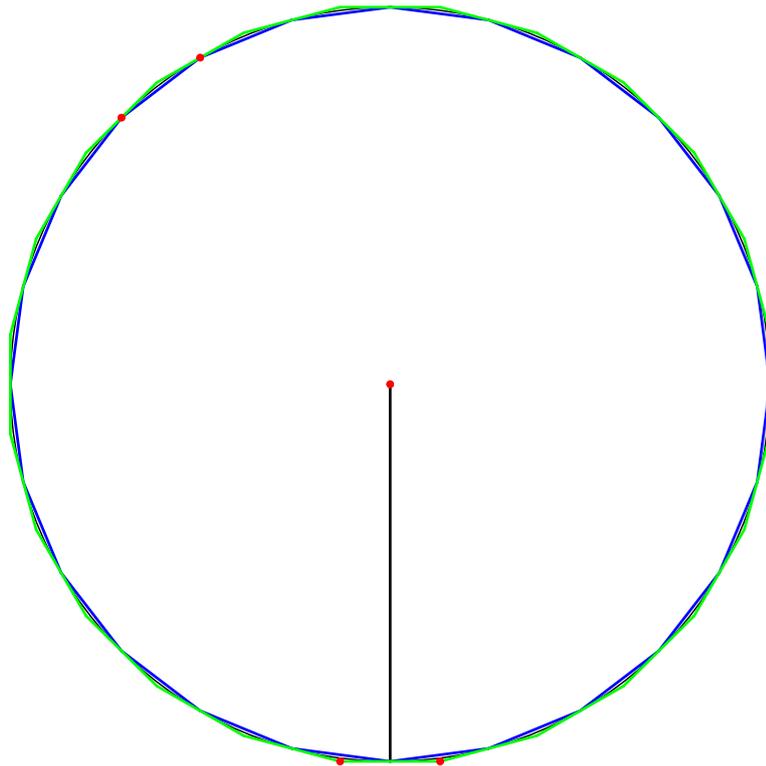
$$\frac{31,44}{10} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{31,68}{10}$$

Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$3,144 \leq \frac{C_o}{d} \leq 3,168$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

## Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência



Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência. Dica: use os pontinhos vermelhos.

## 2.6 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 24 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 9 CM

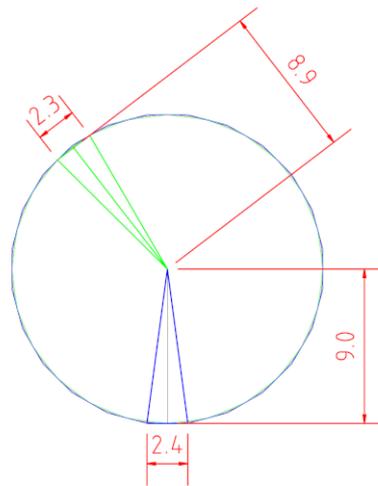
Roteiro para o professor.

Para complementar as atividades, vamos aumentar o raio da circunferência para 9 cm, a fim de facilitar a obtenção das medidas e do cálculo do valor de  $\pi$ .

A área do círculo de raio 9 cm é de 254,46 cm<sup>2</sup> e seu perímetro é de 56,58 cm.

Na figura 12, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Figura 12: Área e o perímetro do polígono regular de 24 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{24} = 24 \cdot \frac{B_{24} \cdot H_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{2,4 \cdot 9}{2} = 259,2 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{24} = B_{24} \cdot 24 = 2,4 \cdot 24 = 57,6 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{24} = \frac{b_{24} \cdot h_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{2,3 \cdot 8,9}{2} = 250,98 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{24} = b_{24} \cdot 24 = 2,3 \cdot 24 = 56,4 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$250,98 \leq A_o \leq 259,2$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência é:

$$56,4 \leq C_o \leq 57,6$$

Dividindo a desigualdade por 18 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

$$\frac{56,4}{18} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{57,6}{18}$$

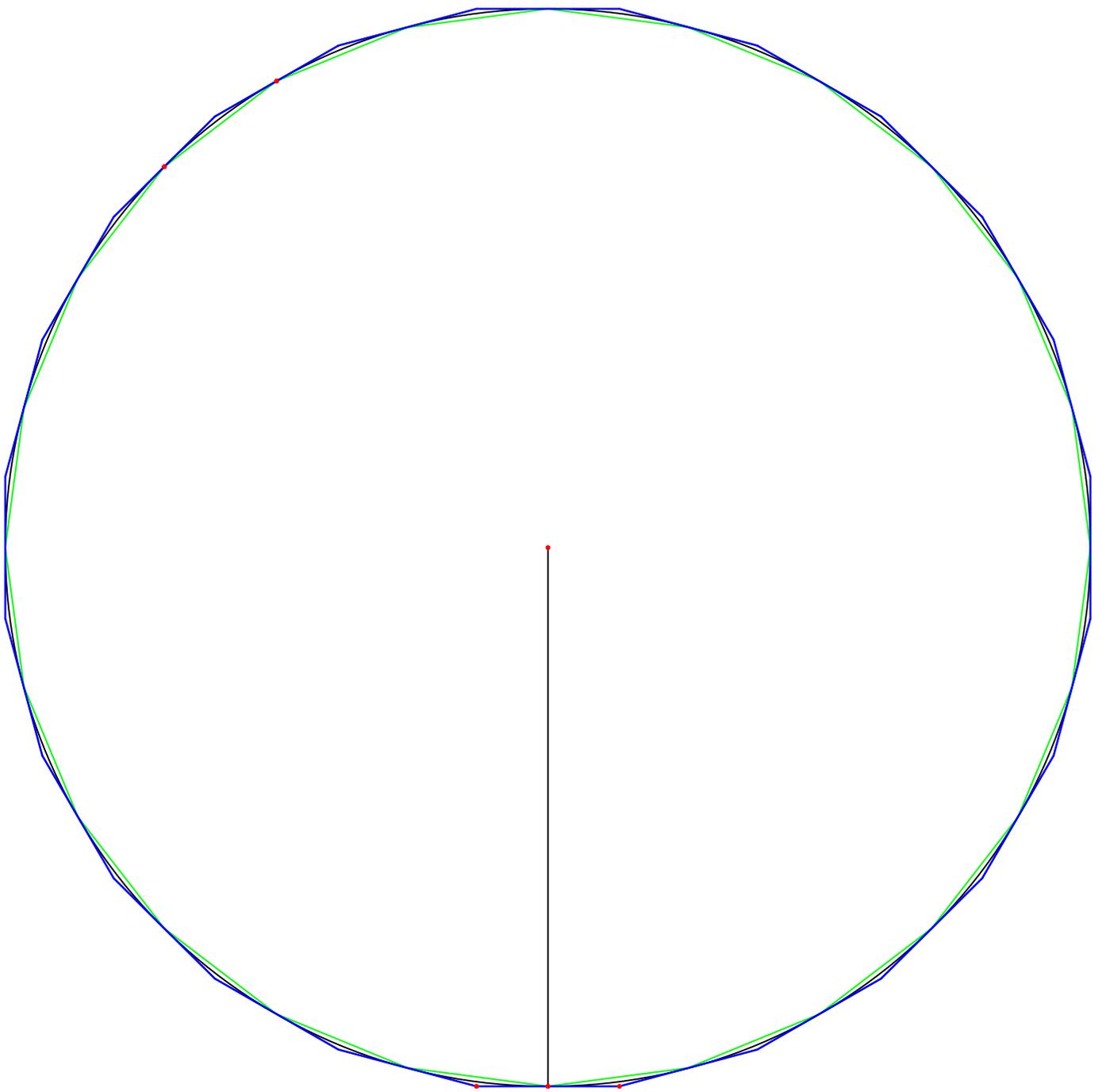
Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$3,13 \leq \frac{C_o}{d} \leq 3,2$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

## Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência

Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.  
Dica: use os pontinhos vermelhos.



## 2.7 APROXIMAÇÃO POR POLÍGONO REGULAR DE 48 LADOS USANDO UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIOS 9 CM

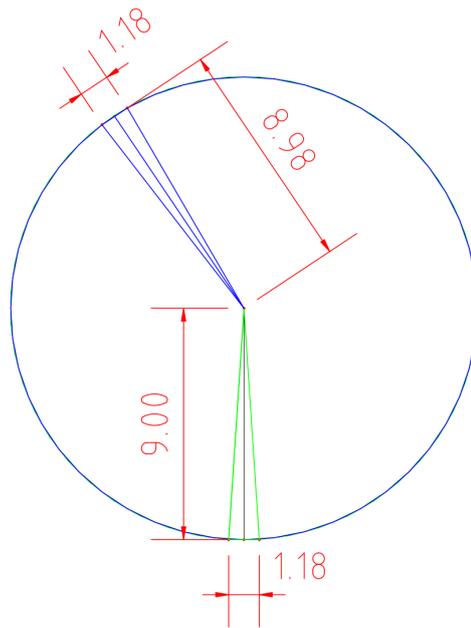
Roteiro para o professor.

A área do círculo de raio 9 cm é de 254,46 cm<sup>2</sup> e seu perímetro é de 56,58 cm.

Na figura 13, para as atividades dos alunos, existem pontos em vermelho para ajudar a obter os triângulos circunscritos e inscritos.

Novamente precisaremos de um desenho maior, porque nossos instrumentos não medem com precisão necessária essa circunferência. Agora, imagine no tempo de Arquimedes que ele fez isso, sem nenhum recurso tecnológico atual. E ainda por cima, fez com um polígono regular de 96 lados.

Figura 13: Área e o perímetro do polígono regular de 48 lados



Fonte: Elaborado pelo autor

A área do polígono regular circunscrito é:

$$A_{48} = 48 \cdot \frac{B_{48} \cdot H_{48}}{2} = 48 \cdot \frac{1,18 \cdot 9}{2} = 254,88 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular circunscrito é:

$$P_{48} = B_{48} \cdot 48 = 1,18 \cdot 48 = 56,64 \text{ cm}$$

A área do polígono regular inscrito é:

$$a_{48} = \frac{b_{48} \cdot h_{48}}{2} = 48 \cdot \frac{1,18 \cdot 8,98}{2} = 254,31 \text{ cm}^2$$

O perímetro do polígono regular inscrito é:

$$p_{48} = b_{48} \cdot 48 = 1,18 \cdot 48 = 56,64 \text{ cm}$$

Assim podemos concluir que a área do círculo  $A_o$  é:

$$254,31 \leq A_o \leq 254,88$$

E podemos concluir que o comprimento da circunferência  $C_o$  é:

$$56,64 \leq C_o \leq 56,64$$

Dividindo a desigualdade por 18 cm, estamos dividindo o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e calculando um valor aproximado para  $\pi$ , no caso é:

$$\frac{56,64}{18} \leq \frac{C_o}{d} \leq \frac{56,64}{18}$$

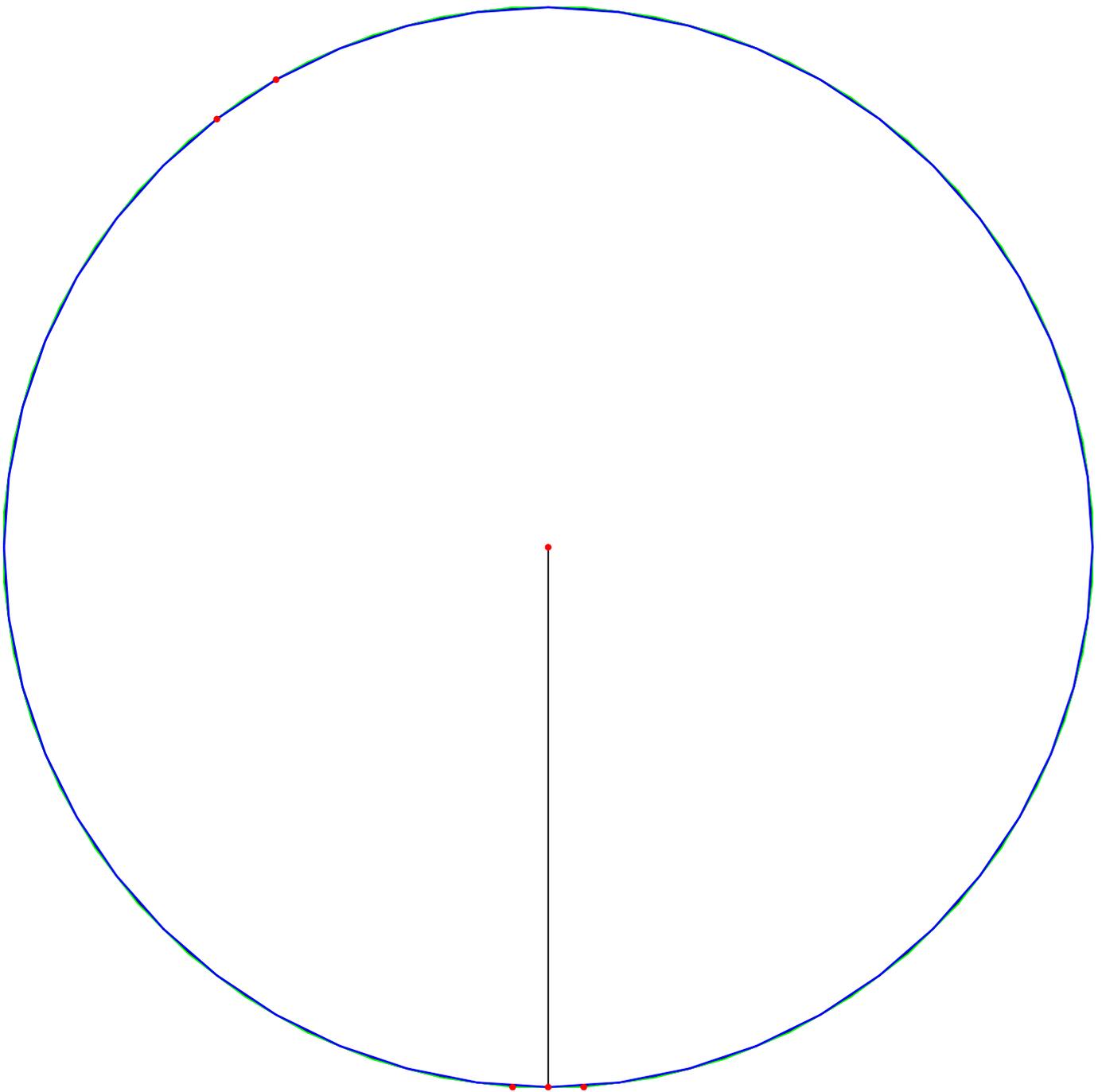
Resultando que  $\pi$  é um valor entre:

$$3,14666... \leq \frac{C_o}{d} \leq 3,14666...$$

A atividade descrita nessa sessão se encontra na próxima página.

## Atividade: Cálculo de área e comprimento de circunferência

Instrução ao aluno: calcular a área do polígono regular inscrito e circunscrito à circunferência.  
Dica: use os pontinhos vermelhos.



## REFERÊNCIAS

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [2] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. Formulação e Resolução de problemas de Matemática: Teoria e prática. São Paulo: Ática, 1<sup>a</sup> ed. 2010.
- [4] IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 3 (trigonometria), volume 9 (Geometria plana), volume 10 (Geometria espacial). Atual Editora, São Paulo.
- [5] LIMA, Elon Lages. Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança. Sociedade Brasileira de Matematica. Coleção do Professor de Matemática, 2009.
- [6] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. Progressões e matemática financeira. Sociedade Brasileira de Matematica. Coleção do Professor de Matemática, 2005.
- [7] PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [8] PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. Geometria I. UFSC, 2005, <https://mtm.grad.ufsc.br/livrosdigitais/>.