Aldine Bombonati Gonçalves

Fundamentos de Teoria de Permutações e Aplicações ao Jogo Puzzle 15

Rondonópolis

2023

Aldine Bombonati Gonçalves

Fundamentos de Teoria de Permutações e Aplicações ao Jogo Puzzle 15

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UFR
UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Aroldo José de Oliveira

Rondonópolis

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte
Ficha Catalográfica elaborada de forma automática com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

G635f Gonçalves, Aldine Bombonati.
Fundamentos de Teoria de Permutações e Aplicações ao Jogo Puzzle 15 [recurso eletrônico] / Aldine Bombonati Gonçalves. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 79 f., il. color., pdf). – 2023.

Orientador(a): Aroldo José de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Rondonópolis, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Metodologia ativa. 2. Grupo de permutações. 3. Aprendizagem significativa. 4. Jogo puzzle 15. I. Oliveira, Aroldo José de, *orientador*. II. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: FUNDAMENTOS DE TEORIA DE PERMUTAÇÕES E APLICAÇÕES AO JOGO PUZLLE 15.

AUTORA: MESTRANDA ALDINE BOMBONATI GONÇALVES

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT,

da Universidade Federal de Rondonópolis-UFR, vinculado ao curso de Matemática da UFR, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em **29** de SETEMBRO de **2023**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Prof. Dr. Aroldo José de Oliveira (Presidente da Banca /Orientador);

2. Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima (Membro externo titular - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS);

3. Prof. Dr. Marcus Vinícius de Andrade Neves (Membro Interno titular);

RONDONÓPOLIS-MT, 29/09/2023

Documento assinado eletronicamente por **Marcus Vinicius de Andrade Neves**, **Docente UFR**, em 23/10/2023, às 22:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Aroldo Jose de Oliveira**, **Docente UFR**, em 24/10/2023, às 08:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **LEANDRO BEZERRA DE LIMA**, **Usuário Externo**, em 25/10/2023, às 13:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufr.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0240887** e o código CRC **64A80999**.

Referência: Processo nº 23853.002021/2023-29 SEI nº 0240887

Dedicatória

Dedico esta dissertação a Deus, fonte de inspiração e força em todos os momentos da minha vida. Agradeço pelas bênçãos recebidas, pela sabedoria concedida e pela orientação divina que guiou meus passos durante todo este percurso acadêmico. Sem a Sua graça e cuidado, nada disso seria possível.

Dedico esta dissertação de mestrado à minha amada família, cujo amor, apoio incondicional e incentivo constante foram fundamentais para alcançar este marco em minha jornada acadêmica. Ao meu pai, Manuel Joaquim Mendonça Gonçalves, meus irmãos, André Bombonati Gonçalves e Andressa Bombonati Gonçalves, minha avó materna, Hermelinda Talpo Bombonati (in memorian), meus cachorros, Tico e Maya, em especial a minha mãe, Oneide Bombonati Gonçalves, minha inspiração de força e persistência, meu grande apoio e refúgio, minha luz. A vocês, que sempre estiveram ao meu lado, compartilhando das minhas alegrias e desafios, dedico todo o meu esforço e dedicação neste trabalho.

A Deus e a minha família, expresso minha profunda gratidão e reconhecimento por serem pilares essenciais em minha trajetória. Que este trabalho seja uma homenagem ao amor, apoio e fé que sempre me sustentaram. Que possamos compartilhar juntos as alegrias deste momento e celebrar as conquistas alcançadas.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que foram fundamentais para a conclusão desta dissertação de mestrado em Matemática.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria e inspiração, por me conceder força, orientação e fé ao longo dessa jornada acadêmica. Sua presença em minha vida é o alicerce sobre o qual construo meus estudos e aspirações.

À minha amada família, meus pais, Oneide Bombonati Gonçalves e Manuel Joaquim Mendonça Gonçalves, meus irmãos, André Bombonati Gonçalves e Andressa Bombonati Gonçalves, meu porto seguro e fonte inesgotável de amor e apoio, agradeço por estarem ao meu lado em cada etapa dessa caminhada. Seus incentivos, palavras de encorajamento e compreensão foram essenciais para meu sucesso. Sou profundamente grata pela confiança e pelo amor incondicional que recebo de vocês.

Aos meus amigos, que sempre estiveram presentes, seja para compartilhar momentos de descontração ou para me motivar nos momentos mais desafiadores, meu sincero agradecimento. Sua amizade e companheirismo tornaram essa jornada mais leve e significativa.

Aos meus professores, verdadeiros mentores e guias neste percurso acadêmico, expresso minha gratidão por compartilharem seu conhecimento, paciência e dedicação. Suas orientações e ensinamentos foram de valor inestimável para o meu crescimento intelectual e amadurecimento profissional.

Gostaria de expressar minha gratidão aos meus amigos de bar, que estiveram ao meu lado em momentos de descontração e diversão ao longo desta jornada de mestrado. Vocês foram uma parte essencial da minha vida durante esses estudos e sou imensamente grata pela amizade e apoio que compartilhamos.

Aqui, quero deixar registrada minha imensa gratidão a minha amiga da adolescência, Susana da Conceição, que sempre foi fonte de inspiração, força e apoio durante a minha jornada de mestrado. Ao longo desses anos, sua presença constante em minha vida foi um verdadeiro presente, e não tenho palavras para expressar o quanto sou grata por tudo que fez por mim. Recordo-me das nossas memórias compartilhadas desde os tempos mais remotos, quando éramos apenas jovens sonhadoras, até o momento presente, em que me tornei mestre em minha área de estudo. Em cada passo dessa caminhada acadêmica, você esteve ao meu lado, incentivando-me a perseverar, apoiando-me nos momentos de dúvidas e celebrando cada conquista como se fossem suas também. Ter alguém como você, tornou essa jornada de estudos muito mais leve e significativa. Sua sabedoria e perspicácia foram valiosas ao longo de minha dissertação de mestrado, e certamente contribuíram para o sucesso alcançado.

Rafaela Souza Maldonado, desde o primeiro encontro no ambiente de trabalho, percebi que nossa conexão ia além das atividades profissionais. Sua presença e amizade se tornaram um verdadeiro pilar de apoio e incentivo ao longo dessa caminhada desafiadora. Suas palavras encorajadoras e gestos de solidariedade foram uma luz durante os momentos mais difíceis da minha dissertação. Ao compartilharmos nossos anseios, sonhos e desafios, pude contar com seu apoio incondicional. Sua disponibilidade para ouvir, a compreensão que demonstrou e as palavras sábias que me ofereceu foram essenciais para que eu mantivesse a motivação e determinação para concluir esse importante capítulo em minha vida. Sua importância em minha trajetória acadêmica transcende o trabalho e se entrelaça com a amizade verdadeira que construímos. Sou profundamente grata por ter você ao meu lado, tornando cada etapa mais leve e significativa. Sua amizade foi um dos maiores presentes que recebi durante esse período, e sou verdadeiramente abençoada por tê-la em minha vida.

Minha profunda gratidão aos meus amigos da turma do mestrado, em especial a minha companheira Samantha Amurielly, que além de ser uma excelente amiga de estudos, também se tornou uma amiga próxima, com quem pude compartilhar minhas inseguranças e conquistas, sabendo que sempre encontraria um ombro amigo e palavras de encorajamento. Sua disposição em compartilhar conhecimentos, esclarecer dúvidas e trabalhar em conjunto foi essencial para enfrentarmos os desafios e superarmos os obstáculos que surgiram no caminho. Cada vez que você se dispôs a revisar meus trabalhos, a discutir ideias e a oferecer sugestões construtivas, percebi o verdadeiro significado da colaboração e do espírito acadêmico.

Durante esse período de estudos intensos, vocês foram mais do que colegas de classe, se tornaram uma verdadeira família acadêmica. Agradeço por compartilharmos não apenas o conhecimento e os desafios acadêmicos, mas também risadas, angústias e conquistas. Nossas discussões em grupo, debates acalorados e trocas de ideias enriqueceram meu aprendizado e ampliaram minha perspectiva sobre diversos assuntos. Vocês foram uma fonte constante de inspiração, motivação e apoio. Nas longas noites de estudo, nos momentos de dúvidas e incertezas, pude contar com a solidariedade e a ajuda de cada um de vocês. Compartilhamos materiais, conhecimentos e experiências, tornando essa jornada acadêmica muito mais leve e prazerosa. Agradeço pela amizade verdadeira que se formou entre nós. Pudemos celebrar nossas vitórias juntos, nos apoiar em momentos de dificuldade e encontrar conforto nas palavras e gestos de encorajamento. Vocês foram pilares essenciais em minha jornada de mestrado. Agradeço também pela troca de experiências e conhecimentos em sala de aula, nos grupos de estudo e em nossos encontros informais. Cada um de vocês contribuiu para o meu crescimento intelectual e me desafiou a ir além dos limites. Sou grata por cada momento de aprendizado compartilhado. Além disso, agradeço pelas lembranças e momentos especiais que criamos juntos. As festas, os passeios, as comemorações e até mesmo as pausas para o café foram essenciais para fortalecer nossos laços de amizade e criar memórias duradouras.

Aos meus amigos da turma do mestrado, Ailson, David, Fagner, Johonnwelber, Josilaine, Lucas, Paulo, Samantha e Sidney, saibam que vocês têm um lugar especial em meu coração. Obrigada por tudo o que compartilhamos e por terem tornado essa jornada de mestrado uma experiência memorável e enriquecedora. Que nossa amizade continue a crescer e florescer além dos corredores acadêmicos. Vocês são verdadeiros companheiros de jornada e sou grata por ter cada um de vocês ao meu lado.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à professora Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues, que mesmo diante dos desafios que enfrentou durante o período de orientação, pude perceber a dedicação e a paixão que possui pela profissão acadêmica. Sua expertise, conhecimento e comprometimento foram fundamentais para o meu crescimento intelectual e para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado. Agradeço imensamente pela perseverança e pelo esforço que a professora Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues demonstrou em sua luta pessoal, ao mesmo tempo em que me orientava e oferecia suporte. Seu comprometimento em cumprir seus compromissos acadêmicos mesmo diante das adversidades é algo que admiro profundamente. Meu profundo agradecimento por sua coragem, resiliência e pelo apoio que me proporcionou, mesmo enfrentando seus próprios desafios pessoais. Sua determinação em seguir em frente, apesar das adversidades, é um exemplo inspirador. Espero sinceramente que você possa encontrar cura, equilíbrio e bem-estar em sua jornada de recuperação. Que sua experiência pessoal seja um lembrete para todos nós sobre a importância de cuidarmos de nossa saúde e de oferecermos apoio e compreensão às pessoas ao nosso redor.

Minha profunda gratidão ao professor Dr. Aroldo José de Oliveira por ter aceitado me orientar durante este período. Desde o momento em que abordei o professor com a minha proposta de pesquisa, fiquei impressionada com sua prontidão em compreender meus desafios e sua disposição em me auxiliar. Apesar das circunstâncias adversas, você mostrou-se aberto e disposto a apoiar minha jornada acadêmica. Agradeço especialmente pela compreensão e empatia que demonstrou diante das dificuldades que enfrentei. Sua aceitação em me orientar, mesmo ciente das minhas limitações e obstáculos, foi um gesto de confiança e encorajamento que me impulsionou a persistir em busca dos meus objetivos. Durante nosso período de orientação, pude constatar seu comprometimento e dedicação ao meu progresso acadêmico. Sua orientação e conselhos foram inestimáveis para o desenvolvimento da minha pesquisa e aprimoramento do meu trabalho. Além disso, agradeço pela sua flexibilidade e disposição em se adaptar às minhas necessidades e limitações. Você sempre esteve disposto a encontrar soluções e alternativas para garantir o andamento do processo de orientação, mesmo diante dos obstáculos que surgiram. Sua paciência, motivação e capacidade de incentivar meu potencial foram essenciais para meu crescimento e superação das dificuldades enfrentadas. Sua orientação foi além do aspecto acadêmico, fornecendo apoio e encorajamento em momentos em que eu mais precisava. Que sua sabedoria e experiência continuem a inspirar e orientar muitos outros alunos, assim como fez comigo. Sou grata pela sua contribuição significativa em minha formação acadêmica e serei eternamente grata por sua orientação durante este período desafiador.

Por fim, não poderia deixar de agradecer a mim mesmo, por minha perseverança, determinação e comprometimento ao longo desses estudos. Cada desafio superado e cada conquista alcançada são frutos do meu empenho e dedicação.

A minha família, Deus, amigos e professores, meu mais profundo agradecimento por serem peças fundamentais nessa trajetória de aprendizado e crescimento. É com imensa gratidão que compartilho essa conquista com todos vocês.

"A verdadeira sabedoria está em reconhecer que ainda temos muito a aprender, e que a busca pelo conhecimento é um caminho contínuo e enriquecedor ao longo da vida".

Aristóteles

Resumo

Este estudo investiga a relação entre grupos e as permutações no jogo Puzzle 15. O Puzzle 15 é um quebra-cabeça deslizante composto por uma grade 4x4, com 15 peças numeradas e um espaço vazio. O objetivo é organizar as peças em ordem numérica, deslizando-as pelo tabuleiro. O foco principal desta dissertação é explorar como os grupos podem ser aplicados para entender as permutações que ocorrem durante as jogadas do Puzzle 15. Os grupos são estruturas matemáticas que descrevem transformações e simetrias em diferentes contextos. Neste estudo, eles são utilizados para analisar as permutações das peças do quebra-cabeça. Por meio de uma análise teórica detalhada, são estudadas as propriedades dos grupos e como eles podem ser relacionados com as permutações no Puzzle 15. São investigadas as diferentes configurações possíveis do jogo e como as peças podem ser permutadas entre si. São discutidas estratégias para resolver o quebra-cabeça de forma eficiente, levando em consideração as propriedades dos grupos . A proposta pedagógica desta dissertação contribui para o entendimento mais aprofundado da relação entre grupos e as permutações no jogo Puzzle 15. Eles demonstram como os grupos de permutações podem ser aplicados para analisar e compreender as transposições que ocorrem durante o jogo, e como esses conhecimentos podem ser utilizados para desenvolver estratégias eficientes de resolução. Por fim, este estudo expande o caminho para novos métodos e aplicações para uma aprendizagem significativa do conceito de permutação por meio de jogos e quebra-cabeças. Os resultados obtidos podem ser úteis para a criação de novos quebra-cabeças e jogos baseados em permutações, bem como para avanços na compreensão dos grupos e suas propriedades.

Palavras-chave: Metodologia Ativa, Grupo de Permutação, Aprendizagem significativa, Jogo Puzzle 15

Abstract

This study investigates the relationship between groups and permutations in the game Puzzle 15. Puzzle 15 is a sliding puzzle composed of a 4x4 grid, with 15 numbered pieces and an empty space. The objective is to arrange the pieces in numerical order, sliding them across the board. The main focus of this dissertation is to explore how groups can be applied to understand the permutations that occur during Puzzle 15 plays. Groups are mathematical structures that describe transformations and symmetries in different contexts. In this study, they are used to analyze permutations of puzzle pieces. Through a detailed theoretical analysis, the properties of groups are studied and how they can be related to the permutations in Puzzle 15. The different possible configurations of the game are investigated and how the pieces can be exchanged with each other. Strategies for solving the puzzle efficiently, taking into account the properties of groups, are discussed. The pedagogical proposal of this dissertation contributes to a deeper understanding of the relationship between groups and permutations in the game Puzzle 15. They demonstrate how groups of permutations can be applied to analyze and understand the transpositions that occur during the game, and how this knowledge can be used to develop efficient resolution strategies. Finally, this study expands the path to new methods and applications for meaningful learning of the permutation concept through games and puzzles. The results obtained can be useful for creating new puzzles and games based on permutations, as well as for advancing the understanding of groups and their properties.

Keywords: Active Methodology, Permutation Group, Cyclic Groups, Puzzle Game 15

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

A Álgebra Abstrata é uma área da matemática que estuda estruturas algébricas, como grupos, anéis e corpos. Esses conceitos podem ser bastante abstratos e não imediatamente aplicáveis as situações do cotidiano. No entanto, a álgebra abstrata é fundamental para o avanço em diversas áreas da Matemática Aplicada, como por exemplo criação de rede elétrica, jogos de estratégia, modelos econômicos de organização, distribuição de temperatura e equilíbrio, pesquisas de crescimento populacional por faixa etária, além da engenharia e computação.

No Ensino Superior, é comum que os cursos de álgebra abstrata sejam mais teóricos e focados em provas e demonstrações formais. Isto é desafiador para aqueles que estão acostumados com uma abordagem mais concreta e aplicada. A falta de exemplos práticos e conexões com a realidade pode fazer com que os conceitos pareçam distantes e irrelevantes.

Além disso, a falta de uma base sólida em álgebra abstrata no Ensino Superior pode influenciar os futuros licenciandos a tratar alguns conceitos de forma superficial no Ensino Fundamental e Médio. Neste sentido, é importante reconhecer o valor desta disciplina e buscar maneiras de torná-las mais concreta e aplicada para os discentes.

Embora a disciplina seja avançada para ser abordada no Ensino Médio, é possível introduzir alguns conceitos fundamentais de álgebra abstrata de forma acessível e relevante para os alunos nesta etapa de ensino.

A educação contemporânea está em constante evolução, exigindo abordagens pedagógicas inovadoras e eficazes que promovam o engajamento ativo dos alunos e estimulem o desenvolvimento de habilidades essenciais. Nesse contexto, a metodologia ativa tem ganhado destaque como uma estratégia de ensino que busca colocar o aluno no centro do processo de aprendizagem, estimulando sua participação ativa, a construção do conhecimento e a aplicação prática dos conceitos estudados.

A metodologia ativa no ensino de permutação utilizando o Puzzle 15 tem o potencial de envolver os alunos de forma ativa e motivadora, estimulando sua curiosidade, criatividade e pensamento crítico. Através do jogo, os estudantes podem experimentar, testar hipóteses, trabalhar em equipe e desenvolver estratégias de solução, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos abordados.

Esta dissertação tem como objetivo explorar os conceitos de metodologia ativa no ensino de permutação, utilizando o jogo Puzzle 15 como ferramenta pedagógica. O Puzzle 15, também conhecido como Jogo dos Quinze, consiste em um tabuleiro 4x4 com números de 1 a 15, onde o objetivo é rearranjar as peças para obter a sequência numérica correta. O jogo apresenta desafios que envolvem permutações, estratégias de solução e a compreensão da estrutura de grupos cíclicos.

A permutação é um conceito fundamental da Matemática que estuda a reorganização de elementos em uma ordem específica. Ao utilizar o Puzzle 15 como uma ferramenta de ensino, os alunos são desafiados a aplicar e compreender os conceitos de permutação, explorando diferentes estratégias para alcançar o objetivo do jogo. Além disso, o jogo oferece uma oportunidade única para introduzir a teoria de grupos cíclicos, que é uma área importante da álgebra abstrata, estabelecendo uma conexão entre o quebra-cabeça e os conceitos teóricos.

Um aspecto intrigante do Puzzle 15 é a questão da paridade. A paridade refere-se à propriedade de um estado ser par ou ímpar, dependendo do número de inversões necessárias para chegar à solução. Ao investigar a paridade dos estados no jogo, os estudantes podem explorar conceitos matemáticos mais avançados, como a teoria de grupos alternantes e sua relação com a solução do jogo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: o primeiro capítulo, apresentará os fundamentos teóricos relacionados à metodologia ativa no ensino de permutação e a devida importância de relacionar uma atividade lúdica, concreta e de fácil manuseio para os discentes com o ensino de permutações simples no Ensino Médio, o segundo capítulo descreverá a teoria de grupos, as definições de grupos finitos, subgrupos, subgrupos gerados, teoria de grupos cíclicos para melhor compreensão da resolução do jogo Puzzle-15; o capítulo 3 desenvolverá conceitos sobre os grupos de permutações de um conjunto, permutações compostas e permutações inversas, permutações pares e ímpares; o quarto capítulo abordará o jogo Puzzle 15 e suas relações com as permutações, analisando o movimento e as transposições das peças, a relação de paridade das transposições para obter a solução do jogo; e o capítulo 5 desempenha um papel fundamental na contribuição deste trabalho, pois apresenta a construção detalhada de uma sequência didática para trabalhar conceitos introdutórios da teria de grupos, voltada especialmente para alunos do ensino médio. Essa sequência didática é o ponto central que diferencia este estudo de outras abordagens sobre o tema, pois além de apresentar o jogo puzzle 15, propicia a introdução de alguns tópicos da teoria de grupos que são fundamentais na introdução do jogo. Nesta dissertação, exploraremos a teoria de grupos, investigando suas propriedades, estruturas e aplicações. Analisaremos diferentes exemplos de grupos cíclicos finitos e examinaremos como eles se relacionam com outros conceitos fundamentais da teoria de grupos. Será discutida sua aplicação no ensino de Matemática e apresentaremos a utilização do jogo Puzzle 15 como ferramenta pedagógica para o ensino de permutação, teoria de grupos cíclicos, paridade e solução do jogo; por fim, uma proposta pedagógica, descrita por meio de uma sequência didática de como aplicar e introduzir os conceitos de permutação no Ensino Médio utilizando como material didático e concreto o jogo Puzzle 15.

Ao final desta dissertação, espera-se que os leitores tenham adquirido uma compreensão aprofundada dos conceitos fundamentais abordados, bem como uma visão crítica sobre suas aplicações e implicações. Além disso, espera-se que este estudo seja útil para futuras pesquisas e discussões no campo, contribuindo para o avanço do conhecimento e o aprimoramento das práticas profissionais.

1 METODOLOGIA ATIVA NA ABORDAGEM DOS CONCEITOS DE PERMUTAÇÃO

Nesta seção abordaremos conceitos relacionados a metodologia ativa para o ensino da permutação. Aqui serão utilizadas as seguintes referências, [3], [4], [17], [18], [24] e [25].

A metodologia ativa na Educação Matemática procura envolver os alunos em seu próprio processo de aprendizagem, fomentando a participação, a colaboração e o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas. Em vez de apenas transmitir informações de forma passiva, essa metodologia estimula os alunos a explorar, aprender e construir seu próprio entendimento dos conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, a aplicação das metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem se apresenta como uma abordagem inovadora. Essas metodologias fundamentam-se em abordagens novas para promover a aprendizagem, incorporando situações reais ou simuladas. O objetivo é criar um ambiente que permita a resolução de desafios provenientes das atividades essenciais da prática social em diversos contextos (Berbel 2011).

Ressalta-se que a experiência demonstra que a aprendizagem adquire maior significado por meio das metodologias ativas (Ribeiro, 2005). Além disso, os estudantes imersos nessa abordagem desenvolvem uma confiança ampliada em suas escolhas e na aplicação do conhecimento em contextos práticos. Uma das principais características da metodologia ativa no ensino da Matemática é a ênfase na resolução de problemas. Os alunos são desafiados com situações problemas autênticas que requerem a aplicação de conceitos e habilidades matemáticas para encontrar soluções. Essa abordagem ajuda a desenvolver o pensamento crítico e a capacidade de análise dos estudantes, pois eles precisam identificar as informações relevantes, formular estratégias e justificar suas respostas.

Além de abordar a resolução de problemas, as metodologias ativas também abrangem a dinâmica de trabalho em grupo e a abordagem da aprendizagem baseada em projetos. A promoção da colaboração entre os alunos é encorajada, permitindo a troca de conhecimentos, a discussão de abordagens diversas e a construção coletiva de compreensão. Mediante projetos matemáticos, os estudantes têm a oportunidade de investigar temas de forma mais abrangentes, aplicar conceitos matemáticos em cenários do mundo real e aprimorar suas habilidades de pesquisa e comunicação. Um exemplo prático de metodologia ativa na matemática é a utilização de jogos educativos. Os jogos fornecem uma maneira divertida e engajadora de aprender conceitos matemáticos, além de promoverem a competição saudável e o trabalho em equipe. Os alunos, ao participarem de jogos que envolvam cálculos mentais, raciocínio lógico, geometria ou qualquer conceito matemático, desenvolvem habilidades enquanto se divertem. A implementação da metodologia ativa na Matemática requer um ambiente de sala de aula que estimule a participação ativa dos alunos. O papel do professor é o de facilitador, orientando e apoiando os estudantes em seu processo de aprendizagem. O professor fornece desafios, faz questionamentos, incentiva a reflexão construtiva, ajudando os alunos a desenvolverem suas habilidades matemáticas de forma autônoma.

Ao adotar a metodologia ativa no ensino da Matemática, os alunos se tornam protagonistas de sua própria aprendizagem, desenvolvendo competências fundamentais para sua formação acadêmica e para a vida. Eles se tornam mais engajados, motivados e confiantes em suas habilidades matemáticas, ao mesmo tempo em que desenvolvem um pensamento crítico e uma abordagem investigativa. Através dessa abordagem, a matemática deixa de ser vista como algo distante e abstrato, tornando-se uma disciplina prática, relevante e emocionante. A metodologia ativa na matemática é uma abordagem que tem ganhado destaque na educação, proporcionando aos alunos uma aprendizagem mais significativa e participativa. Diversos estudiosos e educadores reconhecem os benefícios dessa abordagem.

Freire (2011), destaca a importância da participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Ele defendeu a ideia de que os estudantes devem ser agentes ativos na construção do conhecimento, em vez de meros receptores de informações.

Piaget (1999), fornece suporte teórico à metodologia ativa ao enfatizar a necessidade de os alunos interagirem com seu ambiente para construir conhecimento. Piaget argumentava que o aprendizado é uma atividade construtiva, em que os alunos deveriam explorar, questionar e experimentar para internalizar conceitos.

Papert (1993), respalda a utilização de abordagens ativas. Ele desenvolveu a teoria da "aprendizagem através do fazer"e foi um defensor da utilização de tecnologia, como linguagens de programação, para permitir que os alunos explorassem conceitos matemáticos de maneira prática e envolvente.

Gardner (2008), contribui para a fundamentação das metodologias ativas na Matemática. Sua teoria permite a diversidade das habilidades cognitivas dos alunos e sugere que as abordagens pedagógicas devem ser adaptadas para atender a essa diversidade, o que é uma característica essencial das metodologias ativas.

Essas citações refletem a importância e os benefícios da metodologia ativa na matemática, que promove uma aprendizagem mais significativa, participativa e envolvente para os alunos, preparando-os para enfrentar desafios matemáticos e desenvolver habilidades importantes para o seu futuro.

Os jogos matemáticos são uma ferramenta poderosa quando se trata de implementar a metodologia ativa na sala de aula. Eles proporcionam uma experiência de aprendizado envolvente, desafiadora e divertida, permitindo que os alunos desenvolvam suas habilidades matemáticas de maneira ativa e significativa.

Ao incorporar jogos matemáticos na metodologia ativa, os alunos são incentivados a participar ativamente do processo de aprendizagem. Eles se envolvem em atividades práticas, resolvem problemas e tomam decisões, estimulando o pensamento crítico e o raciocínio lógico.

Além disso, os jogos matemáticos promovem a colaboração e o trabalho em equipe. Os jogos matemáticos também oferecem um ambiente de aprendizado seguro, onde os alunos podem experimentar, cometer erros e aprender com eles. Eles podem testar diferentes abordagens, aplicar conceitos matemáticos em situações concretas e desenvolver habilidades de resolução de problemas de maneira prática e contextualizada. Ao participar de jogos matemáticos, os alunos se tornam ativos em sua própria aprendizagem, envolvendo-se de forma entusiasmada e motivada. Eles veem a matemática como algo desafiador, porém divertido, e isso aumenta seu interesse e engajamento com a disciplina.

O objetivo deste estudo é analisar como a metodologia ativa pode ser eficaz no ensino de permutações simples, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e estimulando o pensamento crítico dos alunos. O ensino de permutações simples é uma parte fundamental do currículo de matemática, sendo um tema que pode apresentar desafios conceituais para os alunos. A metodologia tradicional de ensino muitas vezes se baseia em apresentar fórmulas e procedimentos, o que pode levar os alunos a uma compreensão superficial do assunto. Nesse contexto, a aplicação da metodologia ativa surge como uma abordagem pedagógica inovadora e promissora, que visa transformar o ensino de permutações simples em uma experiência mais envolvente e significativa para os alunos. Fica evidente que a metodologia ativa no ensino de permutações simples é uma abordagem eficaz para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e estimular o pensamento crítico dos alunos. Ao proporcionar uma experiência de aprendizagem participativa e significativa, os alunos se tornam protagonistas do seu próprio aprendizado.

O jogo Puzzle 15 tem sido utilizado como uma metodologia ativa para o ensino de permutação no ensino médio. Essa abordagem tem mostrado resultados positivos, uma vez que o jogo é uma ferramenta lúdica que desperta o interesse dos estudantes e os estimula a desenvolver habilidades de raciocínio lógico e matemático. Além disso, o jogo permite que os alunos aprendam de forma mais autônoma, já que eles precisam solucionar o desafio por conta própria, sem a necessidade de um professor para explicar o conceito. Dessa forma, o Puzzle 15 se torna uma alternativa inovadora e eficiente para o ensino de permutação, que pode ser aplicado em sala de aula de forma complementar aos métodos tradicionais. É importante ressaltar que a utilização de metodologias ativas como essa requer planejamento e acompanhamento do professor, para que sejam alcançados os objetivos pedagógicos propostos.

A permutação é um conceito importante na matemática, que se refere à possibilidade de rearranjar elementos de um conjunto em diferentes ordens. O Puzzle 15 é um jogo que consiste em uma grade de 4x4 com 15 peças numeradas e uma peça em branco. O objetivo do jogo é mover as peças para colocá-las em ordem numérica, deixando a peça em branco na última posição. Esse jogo é uma forma lúdica e interativa de trabalhar com permutação, pois os alunos precisam pensar em diferentes maneiras de rearranjar as peças para alcançar o objetivo. Além disso, o jogo pode ser adaptado para diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos sejam desafiados de acordo com seu nível de conhecimento. O uso do Puzzle 15 no ensino de matemática pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa e prazerosa, despertando o interesse dos alunos pelo estudo da permutação.

O Puzzle 15 desafia a mente e a habilidade de permutação dos jogadores. Para isso, é necessário aplicar técnicas de permutação, que consistem em trocar a posição de duas peças específicas. É importante lembrar que nem todas as permutações são válidas, pois algumas podem levar a configurações impossíveis de serem resolvidas. Por isso, é fundamental conhecer as regras do jogo e desenvolver estratégias para alcançar o objetivo final. O Puzzle 15 Matemático com Permutação é uma excelente ferramenta para estimular o raciocínio lógico e a capacidade de resolução de problemas, além de ser uma forma divertida de aprender matemática de uma maneira prática e interativa.

A metodologia ativa tem sido cada vez mais utilizada no ensino de matemática, buscando tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico e significativo para os estudantes. A permutação, que envolve a contagem de possibilidades de arranjos de elementos, pode ser trabalhada de forma mais concreta e visual por meio do jogo Puzzle 15 que envolve a manipulação de objetos ou a organização de sequências. Dessa forma, a utilização de metodologias ativas e jogos matemáticos pode contribuir para uma aprendizagem mais efetiva e significativa dos conceitos de permutação pelos estudantes.

Por meio dos jogos matemáticos, os alunos podem compreender conceitos abstratos de maneira mais concreta e visual, o que facilita a compreensão e a retenção do conhecimento. Em suma, os jogos matemáticos são uma ferramenta valiosa para tornar o ensino da matemática mais atrativo e efetivo, contribuindo para a formação de alunos mais críticos e preparados para enfrentar os desafios do mundo atual.

A integração de jogos matemáticos na metodologia ativa proporciona uma abordagem pedagógica eficaz. Os jogos estimulam o pensamento crítico, a colaboração, a resolução de problemas e o engajamento ativo dos alunos. Eles ajudam a tornar a matemática mais acessível, significativa e prazerosa, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais e preparando os alunos para a vida real.

2 NOÇÕES BÁSICAS DE GRUPOS

A teoria de grupos é um dos pilares fundamentais da álgebra moderna, fornecendo ferramentas e conceitos essenciais para o estudo das estruturas algébricas. Ao investigar as propriedades e relações entre elementos e operações, a teoria de grupos permite uma compreensão profunda e abstrata de diferentes áreas da matemática. Também exploraremos a história de teoria de grupo, destacando suas origens e evolução ao longo do tempo. Para isso, utilizamos as seguintes referências: [14], [15], [19], [28] e [30].

No intervalo de 1500 e 1515, o matemático italiano Scipione del Ferro $(1456-1526)$ descobriu um procedimento para resolver equação cúbica $x^3+px = q(p, q > 0)$ (em notação atual). Esse procedimento se verifica na seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}$$

Del Ferro demonstrou, mediante este feito, a viabilidade de expressar as raízes cúbicas em consideração por meio dos coeficientes que as acompanham. Ele conseguiu, utilizando exclusivamente operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz. Em termos contemporâneos, podemos afirmar que a equação em questão é solucionável por meio de radicais.

Há alguns séculos, já se tinha conhecimento de que as equações de primeiro e segundo grau também podem ser resolvidas por radicais (no caso das últimas, é relevante mencionar a conhecida fórmula de Bháskara). A solução encontrada por Del Ferro lançou um desafio intrigante aos estudiosos da álgebra: será que todas as equações algébricas podem ser resolvidas por meio de radicais? A busca por respostas a essa indagação se prolongou por mais de duzentos e cinquenta anos, desencorajando alguns dos maiores matemáticos da época e desempenhando um papel crucial na formulação do conceito de "grupo".

Efetivamente, a problemática acerca da solubilidade das equações algébricas começou a ser abordada de forma abrangente somente na segunda metade do século XVIII. Em sua obra intitulada "Réflexions sur la résolution algébrique des équations"(Reflexões sobre a resolução algébrica de equações) (1770-1771), o matemático ítalo-francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) trouxe esclarecimentos significativos. Ele foi possivelmente o primeiro a perceber claramente a abordagem a ser seguida para enfrentar esse problema. Lagrange destacou a relevância das "teorias de permutação"para a resolução de equações, fazendo referência a permutações que envolvem as raízes das equações.

Em 1824, Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês, demonstrou algo que havia sido fortemente suspeitado por Lagrange: a inexistência de uma fórmula geral usando radicais para resolver equações de grau igual ou superior a 5.

No entanto, uma incógnita permanecia: embora as equações de grau 5 ou superior não pudessem, em geral, ser solucionadas por radicais, certos tipos de tais equações ainda permitiam solução, como já era conhecido antes das contribuições de Abel. O que, matematicamente, caracterizava esse conjunto especial? Essa pergunta encontraria sua resposta nas obras do matemático francês Évariste Galois (1881 - 1832), onde o conceito de grupo foi esboçado pela primeira vez, com essa nomenclatura incluída. De forma concisa, a abordagem de Galois para responder a essa indagação envolveu a associação de um grupo de permutações das raízes de uma equação, vinculando a solubilidade por radicais a uma propriedade desse grupo.

Para equações de grau igual ou inferior a 4, o grupo de permutações associado possuía essa propriedade, enquanto para $n > 4$, sempre existiam equações cujo grupo não compartilhava dessa característica. Com isso, a questão sobre a resolução por radicais foi finalmente esclarecida.

O estudo da Teoria de Grupos, como conhecemos hoje, ocorreu entre o final do século XVIII e o início do século XIX. No entanto, foi somente durante o século XIX que a noção de grupo abstrato foi introduzida e emergiu como um ramo da Matemática "Pura", relacionado ao problema de encontrar raízes de equações algébricas por meio de radicais, graças a Evariste Galois e outros matemáticos.

Galois foi praticamente pioneiro ao empregar a concepção de grupos para explorar a resolubilidade de equações. Uma equação é considerada solúvel por radicais quando é possível determinar suas raízes utilizando exclusivamente operações aritméticas convencionais, além da extração de raízes. Por essa razão, equações algébricas com grau até quatro podem ser resolvidas por radicais. Entretanto, essa propriedade não se mantém de maneira geral para equações algébricas de grau $n \geq 5$. Mediante a utilização do conceito de grupos, entre outras abordagens, demonstrou-se que, em linhas gerais, equações algébricas de quinto grau não podem ser solucionadas por radicais, ou seja, não existem fórmulas que permitam a determinação das raízes de uma equação arbitrária desse grau.

A trajetória de Evariste Galois foi breve e trágica, marcada por eventos que tiveram um impacto profundo. Nascido nas proximidades de Paris em 1811, ele sempre manifestou uma natureza rebelde, enfrentando dificuldades acadêmicas e se envolvendo em conflitos com seus professores. Sua paixão pela matemática foi interrompida de maneira prematura, uma vez que sua vida foi encerrada aos 21 anos. Nos últimos tempos de sua existência, ele se viu imerso nos tumultos políticos da Revolução de 1830 e acabou detido por ter ameaçado a vida do rei Luís Felipe, renomado por suas convicções conservadoras.

Após sua detenção, Galois se envolveu em um duelo fatal que teve origem em um amor não correspondido. Apesar da brevidade de sua vida, ele realizou notáveis descobertas em diversas áreas da matemática. Em um manuscrito intitulado "Memória sobre as condições para a resolução de equações por meio de radicais", redigido em uma noite anterior ao seu fatídico duelo, ele apresentou soluções avançadas para a questão em aberto na teoria das equações algébricas. Seu trabalho introduziu o conceito de um grupo de permutações das raízes, conhecido atualmente como o Grupo de Galois. A partir dessa inovação, a teoria dos grupos prosperou. As conclusões de Galois estabeleceram que equações de grau arbitrário n, onde $n \geq 5$, não podem ser resolvidas por meio de radicais.

Com o tempo, verificou-se que a ideia de grupo era um instrumento da mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática. Em nível mais elementar, um exemplo é a teoria das simetrias, muito importante para a cristalografia e a química, por exemplo. Essencialmente, os grupos podem ser usados para retratar simetrias geométricas: a cada figura associa-se um grupo, grupo esse que caracteriza e retrata a simetria da figura.

Nesta dissertação, exploraremos os conceitos-chave da teoria de grupos e grupos de permutações, analisando suas propriedades estruturais, operações fundamentais, exemplos representativos e aplicações práticas, associando-os ao Jogo Puzzle 15, com o objetivo de destacar sua importância e relevância na compreensão e resolução de problemas matemáticos.

2.1 Grupos

Antes de aprofundarmos a teoria de grupos, é fundamental reconhecer as fontes essenciais que embasaram este capítulo, as seguintes obras foram fundamentais para nossa compreensão deste campo matemático. São elas: [14], [19] e [30].

A ideia de grupo faz parte de uma coleção de objetos matemáticos que possuem características semelhantes. Em outras palavras, a função desse agrupamento é organizar esses objetos em classes de forma que todos eles satisfaçam as mesmas propriedades. A teoria dos grupos aparece em diversas áreas da matemática e possui inúmeras aplicações em outras ciências. Grupos estão presentes em muitas estruturas algébricas, como corpos e espaços vetoriais, e são uma ferramenta muito útil para o estudo de simetrias. Por essas razões e outras, a teoria de grupos é uma área importante da matemática moderna.

Definição 2.1.1: Seja G um conjunto não vazio, onde está definida uma operação em G, denotada por $*$, ou seja,

$$\begin{aligned} * : \mathrm{G}\times\mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\ (\mathrm{a},\mathrm{b}) &\longrightarrow \mathrm{a} * \mathrm{b} \end{aligned}$$

Dizemos que (G, $*$) é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:

G_1) $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall\ x, y, z \in$ G (Associatividade).

G_2) $\exists\ e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$, $\forall\ x \in G$ (Elemento neutro).

G_3) $\forall\ x \in G$, $\exists\ y \in G$ tal que $x * y = y * x = e$ (Elemento simétrico).

Se em um grupo $(G, *)$ verifica-se a propriedade

G_4) $x * z = z * x$ ($\forall\ x, z \in G$), então dizemos que $(G, *)$ é um grupo abeliano. [1]

Observações:

1) Em geral, denotaremos um grupo $(G, *)$, simplesmente por G, ficando a operação subentendida.

2) Quando a operação for aditiva, então o simétrico e dito oposto e quando a operação for multiplicativa, então o simétrico é dito inverso.

Propriedades:

1) O elemento neutro de G é único. De fato, se e e $e_1 \in$ G são elementos neutros de G, então: $e = e * e_1$ e $e_1 = e_1 * e$.

Logo,

$$e = e * e_1 = e_1 * e = e_1$$

2) O elemento simétrico de G é único. De fato, seja $x \in G$ e sejam y_1, $y_2 \in G$ dois elementos simétricos de x, temos:

$$x * y_1 = y_1 * x = e \text{ (Por } G_3) \text{ e}$$
$$x * y_2 = y_2 * x = e \text{ (Por } G_3)$$

Como y_1 e y_2 são elementos de G, então vale:

$$y_1 = y_1 * e \text{ (Por } G_2) \ y_2 = y_2 * e \text{ (Por } G_2)$$

Logo concluímos que:

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2.$$

3) Sejam $g_1, g_2, ..., g_n \in G$. Então, $(g_1 * g_2 * ... * g_n)^{-1} = g_n^{-1} * g_{n-1}^{-1} * ... * g_1^{-1}$.

[1] **Notas históricas:**
Grupos comutativos são chamados abelianos em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 - 1829), que fez contribuições significativas para a teoria de grupos e outras áreas da matemática.

Demonstração:

Vamos provar por indução sobre n. A informação é valida para $n = 2$.

$$(g_1 * g_2) * (g_2^{-1} * g_1^{-1}) = g_1 * (g_2 * g_2^{-1}) * g_1^{-1} = g_1 * e * g_1^{-1} = (g_1 * e) * g_1^{-1} = g_1 * g_1^{-1} = e.$$

Suponhamos que seja válida para n elementos, ou seja,

$$(g_1, g_2, ..., g_n) * (g_n^{-1} * g_{n-1} * gn - 1^{-1} * ... * g_1^{-1}) = e$$

Provaremos que é válido para $n + 1$. Assim

$$(g_1 * g_2 * ... * g_n * g_{n+1}) * (g_{n+1}^{-1} * g_n^{-1} * g_{n-1}^{-1} * ... * g_1^{-1}) =$$
$$g_1 * g_2 * ... * g_n * (g_{n+1} * g_{n+1}^{-1}) * g_n^{-1} * g_{n-1}^{-1} * ... * g_1^{-1} =$$
$$(g_1 * g_2 * ... * g_n) * e * (g_n^{-1} * g_{n-1}^{-1} * ... * g_1^{-1}) = (g_1 * g_2 * ... * g_n) * (g_n^{-1} * g_{n-1}^{-1} * ... * g_1^{-1}) = e$$

Na sequência apresentaremos alguns exemplos de grupos importantes.

a) Grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$.

- a soma de 2 inteiros é um inteiro (fechamento).
- a soma é associativa, pois

  $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, \in \mathbb{Z}$;
- o elemento neutro é 0, pois

  $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$;
- o inverso de x é $-x$, pois

  $x + (-x) = (-x) + x = 0, \forall x \in Z$.

  Além disto $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano, pois

  $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

b) Analogamente, $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ são grupos aditivos abelianos.

c) Grupo aditivo dos complexos $(\mathbb{C}, +)$.

A soma de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ é definida por $z + y = (a + b) + (c + d)i$. É fácil verificar que essa operação é associativa. Mais ainda verificar que $0 = 0 + 0$. i é o elemento neutro dessa operação. Por fim, para todo complexo $z = a + bi$, o número complexo $-z = (-a) + (-bi)$ é seu oposto.

d) Grupo aditivo das matrizes $(M_{m\times n}, +)$ em $\mathbb{Z}$ (abeliano).

Nas considerações a serem feitas aqui indicaremos por K, indistintamente, um dos seguintes conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e por $M_{m\times n}(K)$ o conjunto das matrizes sobre K com m linhas e n colunas. Isso posto mostraremos que $M_{m\times n}(K)$ é um grupo aditivo. Para isso, lembremos primeiro que a adição de matrizes em $M_{m\times n}(K)$ é definida da seguinte maneira:

Se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

então:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

e, portanto, trata-se de uma operação sobre o conjunto $M_{m\times n}(K)$.

Essa adição cumpre os axiomas exigidos pela definição 2.1.1:

Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Comutatividade: $A + B = B + A$

Existência de elemento neutro: é a matriz

$$\mathbf{O_{m\times n}} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Existência de opostos: qualquer que seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tomando-se

$$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & ... & -a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ -a_{m1} & ... & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

que também é uma matriz de $M_{m\times n}(K)$, então:

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & ... & a_{1n} - a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} - a_{m1} & ... & a_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} = O_{m\times n}$$

Portanto, $M_{m\times n}(K)$ é um grupo aditivo comutativo.

e) Grupo multiplicativo dos racionais $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

Sistema formado pelo conjunto dos racionais não nulos e a multiplicação usual sobre esse conjunto. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ é fechado em relação à multiplicação, ou seja, o produto de dois números racionais não nulos também é diferente de zero. A multiplicação usual é associativa em $\mathbb{Q}^*$ porque o é em $\mathbb{Q}$; o número 1, elemento neutro da multiplicação, obviamente é diferente de zero; e se $a \neq 0$, o mesmo acontece com seu inverso a^{-1}. Também nesse caso admitimos como pré-requisito o conhecimento das propriedades da multiplicação de números racionais.

f) Grupo multiplicativo dos reais $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Sistema formado por $\mathbb{R}^*$ e a multiplicação usual sobre esse conjunto. O porquê é o mesmo do exemplo anterior.

g) Grupo multiplicativo dos complexos $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Sistema formado pelo conjunto $\mathbb{C}^*$ e a multiplicação usual de números complexos. O produto de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di)$ é definido por $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Se os números dados são diferentes de 0, o mesmo acontece com o produto, como se pode verificar. Essa operação é associativa e comutativa, e a verificação disso é apenas questão de cálculos algébricos; o elemento neutro é $1 = 1 + 0i$ e o inverso de um elemento $z = a + bi$, não nulo, é $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i$, também um número complexo não nulo, considerando-se que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Na sequência apresentaremos alguns conjuntos com uma operação binária que não satisfazem todas as propriedades de um grupo:

a) $(\mathbb{N}, +)$ não é grupo. O conjunto dos números naturais em relação a adição não forma um grupo pois não possui elemento neutro (identidade aditiva). O elemento neutro seria o zero, porém este não é um número natural. Além disso, nem todo elemento possui inverso aditivo dentro dos números naturais, uma vez que a subtração entre números naturais podem levar a números negativos que não estão dentro deste conjunto.

b) $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ não é grupo, pois $2 \in \mathbb{Z}^*$, porém $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^*$.

c) O conjunto $M_2(\mathbb{R})$, conjunto de todas as matrizes de ordem e em $\mathbb{R}$ com operação multiplicação, não é um grupos, pois

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

não admite inverso.

d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ não é grupo, pois $0 \in \mathbb{Q}$, no entanto não admite inverso.

Os exemplos anteriores ilustram situações que falta alguma propriedade específica, como o elemento neutro ou inverso. É importante destacar que esses são apenas alguns exemplos de conjuntos que não formam grupos sob uma operação binária específica.

A proposição a seguir, oferece uma condição para verificar se o grupo é abeliano.

Proposição 2.1.2: Seja G um grupo no qual o quadrado de todo elemento é a identidade. Então G é abeliano.

Demonstração:

Sejam $a, b \in G$. Então $a * b \in G$. Assim, $a = a^{-1}, b = b^{-1}$ e $a * b = (a * b)^{-1}$.

Daí, temos:

$$a * b = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = b * a$$

O que mostra que G é abeliano.

2.2 Grupo Finito

Um grupo finito é caracterizado pelas mesmas propriedades fundamentais de um grupo em geral: fechamento, associatividade, elemento identidade e inverso. No entanto, a diferença é que o conjunto de elementos do grupo é finito, o que significa que há um número limitado de elementos que podem ser combinados usando a operação binária.

Definição 2.2.1: Um grupo $(G, *)$ em que o conjunto G é finito, chama-se grupo finito, caso contrário, denota-se infinito.

Um exemplo de grupo finito, o grupo aditivo dos números inteiros módulo n, denotado por $\mathbb{Z}_n$. Esse grupo consiste nos elementos $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$. A operação de adição satisfaz todas as propriedades de um grupo, e o conjunto de elementos é finito, pois há apenas n elementos.

O número de elementos de G é chamado ordem do grupo (notação o(G)). Quando o grupo é finito, é possível construir a tábua de Cayley [2] , também conhecida como tábua

[2] Arthur Cayley foi um matemático britânico. Professor Sadleiriano de Matemática Pura na Universidade de Cambridge, de 1863 a 1895. Primeiro matemático a usar tábuas para representar grupos. Suas contribuições incluem a multiplicação de matrizes e o teorema de Cayley.

de multiplicação ou tábua de operação que consiste em uma representação organizada das operações de um grupo em formato tabular, que também é denominada por tábua do grupo.

Exemplo 2.2.2: O grupo multiplicativo $G = (G, \cdot)$ possui $O(G) = 2$. Sua tábua de operação é dada por:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Exemplo 2.2.3: O grupo $(\mathbb{Z}_3, +)$ possui $O(G) = 3$. Sua tábua é dada por:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

2.3 Subgrupos

Na teoria de grupos, um dos conceitos fundamentais e extremamente importantes é o de subgrupo. Um subgrupo é um conjunto não vazio de um grupo maior que, quando submetido a uma mesma operação binária do grupo original, forma por si só um grupo. Em outras palavras, um subgrupo compartilha as mesmas características do grupo original.

Definição 2.3.1: Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotado por $H \leq G$) quando, com a operação de G, H é um grupo.

Em outras palavras, se G é um grupo e H é um subconjunto de G, então H é um subgrupo de G se H satisfazer as propriedades de grupo, ou seja:

Propriedades:

1) Associatividade em H é sempre satisfeita pois a igualdade $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ é válida para todos os elementos de G.

2) O elemento neutro e_h de H é necessariamente igual ao elemento neutro de G. De fato, tomando $a \in H$, temos $e_h * a = a$, como $a \in G$, então $e * a = a$, pela unicidade do elemento neutro, temos $e_h = e$.

3) Dado $h \in H$, o inverso de h está em H é necessariamente igual ao inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $h * k = k * h = e_h$, logo $h * k = k * h = e$ pois $e_h = e$, e portanto k é o inverso de h em G, o qual é denotado por h^{-1}.

A proposição a seguir, apresenta uma condição necessária e suficiente para verificar se um subconjunto H de G é um subgrupo de G.

Proposição 2.3.2: Seja H um subconjunto não vazio de G. Então H é um subgrupo de G se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\forall\ h_1, h_2 \in H$, temos $h_1 * h_2 \in H$;

ii) $\forall\ h \in H$, temos $h^{-1} \in H$.

Demonstração:

Suponhamos que H seja um subgrupo de G. A condição i) é satisfeita. Agora, seja $h \in H$ e por H ser grupo, h possui um inverso em H; mas pela propriedade (3) acima, tal inverso é necessariamente igual ao inverso de h em G, isto é, a condição ii) é satisfeita. Reciprocamente. suponhamos que as duas condições i) e ii) sejam satisfeitas. Vimos, pela proposição 1, que G_1 é sempre satisfeita. Para ver se G_2 é satisfeita, basta ver que $e \in H$, isto de fato acontece pois, tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição ii). Logo $e = hh^{-1} \in H$ pela condição i) finalmente, temos que G_3 é simplesmente a condição ii).

A seguir, mostraremos alguns exemplos de subgrupos.

Exemplo 2.3.3: Temos a seguinte sequência de subgrupos:

- $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$.
- $(\mathbb{Q}^*, +) \leq (\mathbb{R}^*, +) \leq (\mathbb{C}^*, +)$.

Exemplo 2.3.4: Verifique, em cada um dos itens abaixo, se H é subgrupo de G.

a) $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}, (G, *) = (\mathbb{Z}_{15}, +)$.

b) $H = \{z \in \mathbb{Z};$ z é um número ímpar $\}$, $G = \mathbb{Z}; a * b = a + b + 1, a, b \in G$.

Solução:

a) $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}, (G, *) = (\mathbb{Z}_{15}, +)$.

Temos que o conjunto $H \neq \emptyset$.

Observemos a tabela da operação de adição em H.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\bar{12}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$

- $G_1 : \forall a, b \in H$ temos que $a + b \in H$.
- G_2 : Sabemos que o elemento neutro de $\mathbb{Z}_{15} = G$ é $e_G = 0 \in H$.
- $G_3 : \forall a \in H$ temos $a^{-1} \in H$.

Logo H é um subgrupo de $(G, *) = (\mathbb{Z}_{15}, +)$.

b) $H = \{z \in \mathbb{Z};$ z é um número ímpar $\}$, $G = \mathbb{Z}; a * b = a + b + 1, a, b \in G$.

Temos que o conjunto $H \neq \emptyset$.

- G_1 : H é fechado, pois para

  $a, b \in H$, então $a = 2n + 1$ e $b = 2k + 1$ com $n, k \in \mathbb{Z}$. Portanto

  $a*b = (2n+1)*(2k+1) = (2n+1)+(2k+1)+1 = 2n+2k+2+1 = 2(n+k+1)+1 \in H$.
- G_2 : O elemento neutro é (-1) pertencem a H pois $a * (-1) = a, \forall a \in H$.
- G_3 : Se $a \in H$, e $a * a^{-1} = e$ temos que

  $(2n + 1) * a^{-1} = -1$

  $2n + 1 + a^{-} + 1 = -1$

  $a^{-1} = (-2n - 2) - 1 \Rightarrow a^{-1} \in H$.

  Logo H é um subgrupo de $G = \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.3.5: Seja $G = GL_2(\mathbb{R})$ o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 sobre $(\mathbb{R})$ e H o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, com determinante igual a 1. H é um subgrupo de G. De fato, se $A, B \in H$, então $det(A) = 1$ e $det(B) = 1$. Como $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) = 1 \cdot 1$, temos $A \cdot B \in H$.

A matriz

$$\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

pois $det(I_2) = 1$

Se $B \in H$ então $det(B) = 1$, logo existe B^{-1} tal que $B^{-1} \cdot B = I_2$, pois $det(I_2) = det(B^{-1} \cdot B) = det(B) \cdot det(B^{-1})$ temos $det(B^{-1}) = 1$ e $B^{-1} \in H$. Pela proposição 2.3.2, H é um subgrupo de G.

Proposição 2.3.6: Seja G um grupo. Dado $a \in G$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $a^{-m} = (a^m)^{-1}$

Proposição 2.3.7: Dado um grupo multiplicativo G se $a \in G$, então o subconjunto $H = \{a^m/m \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de G.

Demonstração:

Sejam $x = a^{m_1}$ e $y = a^{m_2}$ elementos de H $(m_1, m_2 \in \mathbb{Z})$.

i) $x \cdot y = a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2} \in H$.

ii) $x^{-1} = (a^{m_1})^{-1} = a^{-m_1} \in H$.

2.4 Grupos Cíclicos

Nesta seção destacaremos a classe dos grupos cíclicos. Essa classe de grupos são essenciais para o estudo de grupos, em particular, para o desenvolvimento de estratégias no contexto do jogo Puzzle-15. Antes disso, destacamos o conceito e alguns resultados relacionados a ideia de subgrupos gerados.

O conceito de subgrupo gerado é fundamental no estudo dos grupos cíclicos. Um subgrupo gerado é um subconjunto de um grupo que contém todos os elementos que podem ser obtidos através de combinações das operações do grupo. O estudo dos subgrupos gerados, permite uma compreensão mais profunda das propriedades e estabelece uma conexão importante entre os elementos do grupo e os subconjuntos que eles formam.

Se S é um subconjunto qualquer do grupo G, o conjunto $\{a_1 a_2 ... a_n / n \in \mathbb{N}, a_i \in S$ ou $a_i^{-1} \in S\}$ será denotado por $< S >$ e chamado conjunto gerado por S. Quando o conjunto é finito, digamos $S = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, utilizaremos a notação $< a_1, a_2, ..., a_r >$ para designar $< \{a_1, a_2, ..., a_r\} >$.

A próxima proposição mostra que o conjunto gerado por S é um subgrupo de G. É importante ressaltar que o subgrupo gerado é o menor subgrupo de G que contém S, ou seja, não é possível encontrar um subgrupo menor ainda que inclui esses elementos.

Proposição 2.4.1: Seja S um subconjunto do grupo G. Então $< S >$ é um subgrupo de G, chamado subgrupo de G gerado pela subconjunto S.

Demonstração:

Basta provarmos que $\forall\ x, y \in < S >$, temos que $x \cdot y \ \in < S >$ e $x^{-1} \in < S >$. Sejam $x, y \in < S >$. Então, $x = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ com $a_i \in S$ ou $a_i \in S^{-1}$ e $y = b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$ com $b_i \in S$ ou $b_i \in S^{-1}$. Assim, $x \cdot y = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$ e $x^{-1} = a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot a_1^{-1}$. O que mostra que $x \cdot y$ e x^{-1} estão em $< S >$.

O subgrupo H apresentado na proposição 2.3.7, isto é,

$H = \{a^m/m \in \mathbb{Z}\}$.

Chama-se subgrupo cíclico gerado por a. Diz - se também que a é gerador de H. Em símbolos,

$$H =< a >= \{a^m/m \in \mathbb{Z}\}.$$

Isto nos leva a definição:

Definição 2.4.2: Um grupo G é cíclico quando existir um elemento $a \in G$ de maneira que gere todos os elementos de G, ou seja, $G =< a >$. Na sequência apresentamos alguns exemplos e resultados sobre grupos cíclicos.

Observação 2.4.3: Para um grupo cíclico $G =< a >$ há duas possibilidades:

a) $a^m = e$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, G tem ordem finita.

a) $a^m \neq e$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, todas potencias de a são distintas e G tem ordem infinita.

Exemplo 2.4.4: O grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ é cíclico uma vez que $\{(-1)^m/m \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\} = G$.

Exemplo 2.4.5: Todo grupo cíclico é abeliano, pois $a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^n \cdot a^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.4.6: A recíproca não é verdadeira, pois $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, com a operação de adição não é cíclico.

De fato, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é dado por $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$.

Vamos determinar todos os subgrupos gerados por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Seja $B_1 = (\bar{0}, \bar{1})$,

$$2B_1 = B_1 + B_1 = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e.$$

Assim,

$$< B_1 >=< (\bar{0}, \bar{1}) >= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}.$$

Agora, seja $B_2 = (\bar{1}, \bar{0})$,

$$2B_2 = B_2 + B_2 = (\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e.$$

Assim,

$$< B_2 >=< (\bar{1}, \bar{0}) >= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}.$$

De forma similar, para $B_3 = (\bar{1}, \bar{1})$, tem-se:

$$< B_3 >=< (\bar{1}, \bar{1}) >= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}.$$

Observamos que não existe elemento em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que gera todos os elementos, isto é, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ não é cíclico.

Observe que se $g \in G$, então $< g >= \{..., (g^{-1})^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$; com frequência, quando $r \in \mathbb{N}$, escrevemos g^{-r} para denotar o elemento $(g^{-1})^r$. Com estas notações, temos $< g >= \{g^t/t \in \mathbb{Z}\}$.

Definição 2.4.7: A ordem do elemento $g \in G$ (a qual denotamos por $o(g)$) é a ordem do subgrupo gerado por g, isto é: $o(g) = | < g > |$.

A ordem de g é finita se existe o menor inteiro positivo m, tal que $g^m = e$. Neste caso, denotamos $o(g) = m$. Caso contrário, a ordem de g infinita é denotada por $o(g) = \infty$.

Exemplo 2.4.8: Considere o grupo aditivo $(\mathbb{Z}_6, +)$. Vamos determinar a ordem se seus elementos. Veja a seguir a tábua de composição do $(\mathbb{Z}_6, +)$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Como:

$< \bar{0} >= \{\bar{0}\}$

$< \bar{1} >= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} = \mathbb{Z}_6$

$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$< \bar{3} >= \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$< \bar{4} >= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$< \bar{5} >= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} = \mathbb{Z}_6$

Segue da definição 2.4.7:

$o(\bar{0}) = 1$; $o(\bar{1}) = 6$; $0(\bar{2}) = 3$; $o(\bar{3}) = 2$; $o(\bar{4}) = 3$; $o(\bar{5}) = 6$

Observe pelo exemplo anterior que $\bar{1}$ e $\bar{5}$ são geradores de $(\mathbb{Z}_6, +)$, ou seja, um grupo cíclico pode conter mais de um gerador.

Exemplo 2.4.9: Se G é um grupo aditivo gerado por a, então $G = \{m \cdot a / m \in \mathbb{Z}\}$.

Proposição 2.4.10: Seja a um elemento de um grupo multiplicativo G. Se a ordem de a é $m > 0$, então $< a >$ é um grupo finito de ordem m dado por $< a >= \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$.

Demonstração:

Mostraremos que o conjunto $\{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$ tem exatamente m elementos. De fato, suponha que existem $a^i, a^j \in \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$ tais que $a^i = a^j$,com $0 \leq i < j < m$, então $0 < j - i < m$ e $a^{j-i} = e$, o que é um absurdo, pois $O(a) = m$. Mostraremos que $< a >= \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$. Seja $x \in < a >$, existe $n \in \mathbb{Z}$ de maneira que $x = a^n$. Usando o algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$ com relação aos elementos m e n temos que existem $q, r \in \mathbb{Z}$

tal que $n = m \cdot q + r$ onde $0 \leq r < m$. Daí,

$$x = a^n = a^{m \cdot q + r} = a^{m \cdot q} \cdot a^r = e^q \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r.$$

Como $0 \leq r < m$, segue que $x \in \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$.

Proposição 2.4.11: Seja $G =< a >$ de ordem n. Então a^t é um gerador de G se, e somente se, $mdc(t, n) = 1$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se a^t é um gerador de G, então existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^t)^r = a$. Então $a^{t \cdot r - 1} = e$. Como $O(a) = n$, daí $n \setminus t \cdot r - 1 \Rightarrow t \cdot r - 1 = q \cdot n \Rightarrow t \cdot r - q \cdot n = 1 \Rightarrow mdc(t, n) = 1$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $mdc(t, n) = 1$. Então existem inteiro r e t tais que:

$1 = r \cdot t + q \cdot n$. Logo

$a^{r \cdot t + q \cdot n} = a \Rightarrow a^{t \cdot r} = a$.

Como $G =< a >$, segue que $\forall g \in G$, temos $g = a^i$, para $i \in \mathbb{Z}$. Logo $g = (a^t)^{r \cdot i}$, portanto $G =< a^t >$.

2.5 Teorema de Lagrange

O Teorema de Lagrange é um resultado fundamental na teoria de grupos que estabelece uma relação importante entre a ordem de um grupo e a ordem de seus subgrupos. De acordo com o Teorema de Lagrange, se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G, então a ordem de H divide a ordem de G. O Teorema de Lagrange permite classificar os subgrupos de um grupo, em particular, os grupos cíclicos, com base nas dimensões das suas ordens. Isso é crucial para entender melhor sua estrutura.

Antes de enunciar e provar teorema de Lagrange, é crucial estabelecer alguns resultados e conceitos. Vejamos a seguir

Proposição 2.5.1: Dados $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \equiv g_2 \; modH \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$ define uma relação de equivalência no conjunto G.

Demonstração:

i) $g_1 \equiv g_1 \; modH$, pois $e = g_1 g_1^{-1} \in H$, $\forall \; g_1 \in H$.

ii) $g_1 \equiv g_2 \; modH \Rightarrow g_2 \equiv g_1 \; modH$, pois se $g_1 \cdot g_2^{-1} \in H$ temos: $g_2 \cdot g_1^{-1} = (g_1 \cdot g_2^{-1})^{-1} \in H$.

iii) $g_1 \equiv g_2 \; modH$ e $g_2 \equiv g_3 \; modH \Rightarrow g_1 \equiv g_3 \; modH$, pois $g_1 g_2^{-1} \in H$ e $g_2 g_3^{-1} \in H \Rightarrow (g_1 g_2^{-1}) \cdot (g_2 g_3^{-1}) \in H \Rightarrow g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot g_2) \cdot g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1 g_3^{-1} \in H$.

Consideremos a classe de equivalência $\bar{g_1} = \{g_2 \in G / g_2 \equiv g_1 \; modH\}$. Assim $g_2 \in \bar{g_1}, \Leftrightarrow g_2 \equiv g_1 (modH) \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} = h \in H$, para algum $h \in H \Leftrightarrow g_2 = h \cdot g_1$ para algum $h \in H$. Denotaremos $Hg_1 = \{h \cdot g_1; h \in H\} = g_1$, que é chamado classe lateral à direita de H em G.

Representamos o conjunto quociente $\{\bar{g}/g \in G\}$ por G/H, ou seja, $G/H = \{H \cdot g/g \in G\}$.

De modo análogo podemos definir uma classe lateral à esquerda de H em G, denotada por gH, através da relação $g_2 \equiv g_1 \; modH \;\; \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H, \forall g_1, g_2 \in G$.

Lema 2.5.2: Seja H um subgrupo do grupo finito G e $g \in G$, então $\#(Hg) = \#(H)$.

Definimos a função:

$$\varphi : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{Hg}$$
$$\mathrm{h} \longmapsto \mathrm{hg}$$

φ é bem definida e injetora.

Dados $h_1, h_2 \in H$, $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ se. e somente se, $h_1 g = h_2 g$. Portanto $h_1 = h_2$. φ é evidentemente sobrejetora, pois $hg = \varphi(h), h \in H$.

Portanto φ é bijetora. Logo: $\#H = \#Hg$.

Vamos supor que G/H possua exatamente n classes laterais, i e, $G/H = \{Hg_1, Hg_2, ..., Hg_n\}$, onde $g_1, g_2, ..., g_n \in G$. Como $\{Hg_1, Hg_2, ..., Hg_n\}$ é uma partição de G, temos $Hg_i \cap Hg_j = \emptyset$, se $Hg_1 \dot{\cup} Hg_2 \dot{\cup} Hg_3 \dot{\cup} ... \dot{\cup} Hg_n$. (União disjunta)

Teorema 2.5.3: (Teorema de Lagrange) Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G, então a ordem de H divide a ordem de G.

Vimos que H determina uma relação de equivalência em G e como G é um grupo finito, então o conjunto G/H das classes laterais à direita de G é finito. Façamos:

$|G/H| = n$ e $G/H = \{Hg_1, Hg_2, ..., Hg_n\}$.

Assim $G = Hg_1 \dot{\cup} Hg_2 \dot{\cup} Hg_3 \dot{\cup} ... \dot{\cup} Hg_n$, daí $|G| = |Hg_1| + |Hg_2| + |Hg_3| + ... + |Hg_n|$, e como $|Hg_i| = |H|$ (lema anterior), segue que $|G| = |H| + |H| + |H| + ... + |H| = |G| = n \cdot |H|$.

O teorema de Lagrange é de fundamental importância porque introduz relações aritméticas na teoria de grupos.

Devemos notar que a reciproca do teorema é falsa, pois, um grupo finito $(G, *)$ não tem necessariamente um subgrupo de ordem r divisor da ordem de G, assim por exemplo, o grupo alternado $(A_4, \circ)$, o qual estudaremos melhor no próximo capítulo, é de ordem 12 e não possui subgrupos de ordem 6.

Corolário 2.5.4: Todo grupo finito de ordem prima é cíclico (em particular é abeliano). Este corolário facilita na determinação de alguns grupos cíclicos.

Demonstração:

Seja G um grupo e $|G| = p$, onde p é um número primo. Se $g \in G$, $g \neq e$, então $< g >$ é um subgrupo de G contendo o conjunto $\{e, g\}$. Logo, pelo Teorema de Lagrange $| < g > |$ é divisor de $|G| = p$ e $| < g > | > 1$. Portanto $| < g > | = p$ e isso nos diz que $G =< g >$.

Corolário 2.5.5: Se G é um grupo tal que $|G| \leq 5$, então G é abeliano.

Demonstração:

Se $|G| = 1$, então $G = \{e\}$ e se $|G| = 2, \quad 3$ *ou* 5, então pelo corolário 2.5.4, G é cíclico e portanto G é abeliano. Suponha que $|G| = 4$. Se existe $g \in G$ tal que $< g >= G$, então G é cíclico e portanto abeliano. Se não existe $g \in G, g \neq e$ tal que $< g >\neq G$ então pelo Teorema de Lagrange, temos que $O(g) = 2$. Logo, $g^2 = e; \forall g \in G$. Pela proposição 2.5.1, G é abeliano.

No exemplo a seguir, mostraremos que $(\mathbb{Z}_6, +)$ é um grupo cíclico. Os elementos de $\mathbb{Z}_6$ são: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exemplo 2.5.6: Observe alguns subgrupos gerados pelos elementos de $\mathbb{Z}_6$.

a) Subgrupo trivial: $< \bar{0} >= \{\bar{0}\}$. Sua ordem é 1, que de fato divide a ordem de $\mathbb{Z}_6$ (que possui ordem 6).

b) Subgrupo gerado por 2: $< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Sua ordem é 3 que também divide a ordem de $\mathbb{Z}_6$.

c) Subgrupo completo: $< \bar{1} >= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Sua ordem é 6 que também divide a ordem de $\mathbb{Z}_6$.

3 GRUPO DE PERMUTAÇÕES

A teoria de grupos de permutações é um ramo essencial da teoria de grupos, que se concentra no estudo das propriedades nas estruturas que podem ser formadas por meio de suas composições. As permutações simples é um dos agrupamentos estudados na Análise Combinatória. Trata-se de todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com os elementos de um conjunto. Ao explorar os grupos de permutações, podemos investigar propriedades fundamentais, como a decomposição em ciclos, a ordem das permutações e a existência de elementos inversos. Além disso, a teoria de grupos de permutações encontra aplicações em diversas áreas, como criptografia, algoritmos de ordenação e teoria de números. Nesta seção, examinaremos em detalhes os conceitos e propriedades da teoria de grupos de permutações, explorando suas aplicações e destacando sua importância no estudo das permutações e estruturas relacionadas. Nesta seção usaremos as seguintes referências: [1], [14], [19], [20], [22] e [28].

3.1 Permutações de um conjunto

Uma permutação simples é uma reorganização dos elementos de um conjunto sem repetição em uma ordem específica. Em uma permutação simples todos os elementos devem ser utilizados e não podem ser repetidos.

Por exemplo, considere o conjunto $\{1, 2, 3\}$. As permutações simples desse conjunto são:

$\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 3, 1), (3, 2, 1)(3, 1, 2)\}$.

Observe que cada permutação representa uma ordem diferente dos elementos do conjunto original, com a ressalva de que a permutação identidade (que não altera a ordem dos elementos) é incluída. Veremos, a seguir, uma definição mais formal e elegante deste conceito que nos ajudará no estudo de grupo de permutações.

Definição 3.3.1: Seja X um conjunto não vazio. Chamamos de permutação dos elementos de X, toda função bijetora $f : X \longrightarrow X$.

A aplicação idêntica de X, isto é, $I_X : X \longrightarrow X$ definida por $I_X(x) = x$ para todo $x \in X$, é denominada permutação idêntica de X.

Seja $X = \{1, 2, 3\}$, indicaremos uma permutação γ de X pela notação matricial:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \gamma(1) & \gamma(2) & \gamma(3) \end{pmatrix}$$

onde na primeira linha estão os elementos de $X = \{1, 2, 3\}$, e na segunda linha, a respectiva imagem $\gamma(i), i \in X$.

Com esta representação, a permutação idêntica de X, I_X, pode ser representada por

$$I_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Denota-se por S_X o conjunto de todas as permutações de X, ou seja,

$$S_X = \{f : X \longrightarrow X | f \text{ é bijetora}\}.$$

Veremos na próxima seção que o conjunto S_X sob a operação de composição de funções é um grupo.

Estamos particularmente interessados no caso em que o conjunto X é um conjunto finito de n elementos. Neste caso, S_X será denotado por S_n e também conhecido como grupo simétrico de ordem n. O grupo S_n possui uma série de propriedades e estruturas interessantes, que o tornam um objeto de estudo relevante na matemática. No exemplo anterior, $X = \{1, 2, 3\}$. Assim, as permutações de S_3 são: (2×3)

$$\gamma_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{\mathbf{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{\mathbf{6}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que apresentamos todas as permutações dos elementos de S_3. O próximo resultado apresenta uma fórmula para obter o número de elementos de S_n.

Proposição 3.1.2: A ordem do grupo simétrico de S_n, é igual a $n!$.

A prova está fundamentada no Princípio Fundamental da Contagem. Como a permutação é uma função bijetora, para o primeiro elemento do grupo teremos n possibilidades, para o segundo elemento do grupo teremos $(n-1)$ possibilidades, e assim por diante, até termos duas possibilidades para o $(n-1)$-ésimo elemento e apenas uma para o n-ésimo elemento. Assim, o número total de permutações de um conjunto finito com n elementos é igual ao produto dos n primeiros inteiros positivos, isto é: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot n = n!$

3.2 Permutação Inversa

Seja $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ e γ uma permutação em X. Então, existe a permutação inversa de γ que denotamos por γ^{-1}. Escrevendo ambas em formato matricial, temos :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \gamma(1) & \gamma(2) & \gamma(3) & ... & \gamma(n) \end{pmatrix} \quad e \quad \gamma^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \gamma(1) & \gamma(2) & \gamma(3) & ... & \gamma(n) \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$$

Observe que a permutação inversa é obtida trocando a primeira linha com a segunda linha. Após o reordenamento, podemos escrever:

$$\gamma^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \gamma^{-1}(1) & \gamma^{-1}(2) & \gamma^{-1}(3) & ... & \gamma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

A permutação inversa também possui propriedades interessantes. Por exemplo, a permutação inversa de uma permutação que consiste apenas de ciclos disjuntos é igual à permutação original. Isso ocorre porque inverter a ordem de um ciclo não altera seus elementos, apenas sua ordem.

Seja $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, e γ uma permutação de X. Então a inversa de γ, denotada por γ^{-1} será a permutação:

$$\gamma^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \gamma(1) & \gamma(2) & \gamma(3) & ... & \gamma(n) \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \gamma^{-1}(1) & \gamma^{-1}(2) & \gamma^{-1}(3) & ... & \gamma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.2.1: Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere uma permutação ϕ de X, dada por:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$$

A permutação inversa de φ é a aplicação bijetora:

$$\varphi^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

A permutação identidade de X é

$$I_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

É claro que a inversa de I_X é ela mesma, ou seja, $I_X = I_X^{-1}$, mas isto pode ocorrer para outras permutações como por exemplo, a permutação φ a seguir:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \varphi^{-1}$$

3.3 Permutação Composta

Sejam, $\varphi : X \longrightarrow X$ e $\psi : X \longrightarrow X$ duas permutações de X. É fácil ver que as composições $(\varphi \circ \psi)$ e $(\psi \circ \varphi)$ são bijetoras e, por isso, também são permutações.

Exemplo 3.3.1: S Considere as permutações φ e ψ de S_4.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} e \ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Agora vamos obter a permutação composta $(\varphi \circ \psi)$ é:

$(\varphi \circ \psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(3) = 1$

$(\varphi \circ \psi)(2) = \varphi(\psi(2)) = \varphi(4) = 4$

$(\varphi \circ \psi)(3) = \varphi(\psi(3)) = \varphi(1) = 2$

$(\varphi \circ \psi)(4) = \varphi(\psi(4)) = \varphi(2) = 3$

Na notação matricial, a permutação composta será:

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Da mesma mesma forma, obtém-se:

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observe que $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$. Ou seja, a operação de composição não é comutativa.

3.4 Grupo das permutações de um conjunto

Inicialmente, como mencionamos anteriormente, provaremos que $(S_X, \circ)$ é um grupo.

Proposição 3.4.1: Seja X um conjunto não vazio e $S_X = \{\tau : X \longrightarrow X / \tau \text{ é bijetora }\}$.

Vamos mostrar que S_X sob a composições de funções é um grupo. É claro que $S_X \neq \emptyset$, pois

$$id_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x$$

é uma bijeção.

Mostraremos primeiramente que S_X é fechado sob a operação de composição "$\circ$". Consideremos $f, g \in S_X$. Daí,

$$f : X \longrightarrow X \text{ e } g : X \longrightarrow X$$

Dados $x, y \in X$,

Ora,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y) &\Rightarrow f(g(x)) = f(g(y)) \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow x = y\end{aligned}$$

ou seja, $f \circ g$ é f injetora. Agora, dado $z \in X$, então como f é sobrejetora, existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = z$. Por outro lado, como $x_1 \in X$ e g é sobrejetora existe $x_2 \in X$ com $g(x_2) = x_1$. Por isso,

$$(f)(x_1) = z \Rightarrow f(g(x_2)) = z \Rightarrow (f \circ g)(x_2) = z$$

Daí, $f \circ g$ é sobrejetora e portanto é bijetora. Isso mostra que a operação composição, é uma operação sobre S_X.

Sabemos que "$\circ$" é associativa, também

$$id_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x$$

É tal que

$$(f \circ id_X)(x) = f(id_X(x)) = f(x), \quad \forall f \in S_X \quad e \quad \forall x \in X$$

Da mesma forma,

$$(id_X \circ f)(x) = id_X(f(x)) = f(x), \quad \forall f \in S_X \quad e \quad \forall x \in X$$

Portanto, id_X é o elemento neutro da operação.

Sabe-se que uma função é bijetora se, e somente se, admite inversa. Como cada $f \in S_X$ é uma bijeção, tem-se que existe $f^{-1} \in S_X$ tal que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_X$$

Portanto, $(S_X, \circ)$ é um grupo, o qual chama-se ***grupo de permutações*** de X.

Proposição 3.4.2: Se $\#(X) > 2$, então $(S_X, \circ)$ não é abeliano.

Demonstração:

Se o conjunto B em mais de dois elementos, o grupo $(S_X, \circ)$ não é abeliano. Como $\#(X) > 2$, façamos $X = \{b_1, b_2, b_3\} \cup X'$. Considere as permutações τ e $\rho \in S_X$, assim definidas:

$\tau(x_1) = x_2, \tau(x_2) = x_3, \tau(x_3) = x_1, t(x) = x, \forall\ x \in X - X'$

$\rho(x_1) = x_2, \rho(x_2) = x_1, \rho(x_3) = x_3, \rho(x) = x\ \forall\ x \in X - X'$

Temos:

$(\tau_0\rho)(x_1) = \tau(\rho(x_1)) = \tau(x_2) = x_3$

$(\rho_0\tau)(x_1) = \rho(\tau(x_1)) = \rho(x_2) = x_1$

Portanto, $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$, isto mostra que o grupo $(S_X, \circ)$ não é abeliano.

Para designar a permutação assim definida, usaremos a notação $(a_1\ a_2\ a_3 ...\ a_r)$ para representar um r-ciclo, ou ciclo de comprimento r. Um 2-ciclo é chamado de transposição, e o 1-ciclo é a identidade.

Exemplo 3.4.3: Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $\alpha \in S_5$, tal que:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Como $\alpha(1) = 4, \alpha(4) = 2, \alpha(2) = 1, \alpha(3) = 3$ e $\alpha(5) = 5$, então α é um 3-ciclo. Portanto, podemos escrever

$\alpha = (142)(3)(5)$ ou simplesmente $\alpha = (142)$. Em geral, não consideraremos o 1-ciclo na representação de uma permutação.

Da mesma forma, considere

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

A permutação β é um 2-ciclo, ou uma transposição, $\beta = (14)$, pois $B(1) = 4, B(4) = 1, B(2) = 2, B(3) = 3$ e $B(5) = 5$.

Definição 3.4.4: Dois ciclos $\alpha = (m_1\ m_2\ ...\ m_r)$ e $\beta = (n_1\ n_2\ ...\ n_s)$ são disjuntos, se $\{m_1\ m_2\ ...\ m_r\} \cap \{n_1\ n_2\ ...\ n_s\} = \emptyset$. Isto é, se nenhum elemento de S_n é movimentado simultaneamente pelos cilos α e β. Ciclos disjuntos permutam entre si.

Por exemplo, em S_5 os ciclos (1 3 4) e (2 5) são disjuntos e os ciclos (1 3 5) e (2 5), não são disjuntos, pois o elemento 5 pertencem a ambos os ciclos.

Observação 3.4.5: Um mesmo r-ciclo pode ser representado de várias formas diferentes, pela rotação dos elementos no ciclo, por exemplo, em um 5-ciclo, denotado por (1 2 3 4 5), poderá ser também denotado por (2 3 4 5 1), ou (4 5 1 2 3), ou (5 1 2 3 4) ou (3 4 5 1 2), pois cada ciclo pode ser obtido a partir de uma rotação.

Proposição 3.4.6: Toda permutação $\alpha \in S_n$ é um produto de ciclos disjuntos. Além disso, o produto é único a menos da permutação identidade e da ordem dos fatores.

Demonstração: A demonstração será omitida, mas pode ser vista em [12].

Exemplo 3.4.7: Represente a permutação $\alpha \in S_7$, na forma de ciclo disjuntos.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Iniciamos no número um, e procuramos o ciclo que ele determina, da seguinte maneira:

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1.$

Fechamos o ciclo (1 2 5);

Agora vamos para o próximo inteiro menor, que não apareceu no ciclo anterior, que é 3, e determinamos seu ciclo, da mesma maneira:

$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3.$

Logo, fechamos o outro ciclo (3 6 7 4).

Portanto, $\alpha = (1\ 2\ 5)\ (3\ 6\ 7\ 4)$.

Os ciclos mais simples depois da identidade são os 2-ciclos e esses são denominados transposição.

Proposição 3.4.8: Se $n > 1$, toda permutação de S_n pode ser escrito como um produto de transposições.

Demonstração: Pela proposição 3.4.6, basta mostrar que todo ciclo $(a_1 a_2 ... a_r)$ é um produto de transposições. De fato, para provar isto, observaremos que todo ciclo de comprimento r, pode ser escrito

$$(a_1a_2...a_r) = (a_1a_r)(a_1a_{r-1})...(a_1a_3)(a_1a_2).$$

Exemplo 3.4.9: Decompor em transposição a seguinte permutação α de S_7:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

De acordo com a proposição 3.4.8, temos:

$$\alpha = (125)(476)$$

Agora, basta aplicar o resultado utilizado na proposição 5 para cada ciclo, isto é,

$$\alpha = (15)(12)(46)(47).$$

3.5 Estudo do S_3

Em S_3 temos os seguintes elementos:

a) um único elemento de comprimento 1 : e = (1);

b) Três transposições: (1 2), (1 3) e (2 3);

c) Dois ciclos de comprimento 3: (1 2 3), (1 3 2).7

Sejam $\phi =$ (1 2 3) e $\rho =$ (1 2) elementos de S_3. Logo:

$\phi\rho =$ (1 3 2) (1 2) = (2 3)]

$\rho\phi =$ (1 2) (1 3 2) = (1 3)

$\phi^2 = \phi\phi =$ (1 3 2) (1 3 2) = (1 2 3)

$\rho^2 = \rho\rho =$ (1 2) (1 2) = (1) = I_X.

Portanto $S_3 = \{I_X, \phi^2, \rho^2, \phi\rho, \rho\phi\}$. Concluímos então que $S_3 =< \phi, \rho >$ e pela proposição 2.2.1, S_3 não é abeliano.

A seguir construiremos a tabela de S_3 e a partir dela determinaremos todos os seus subgrupos.

Tabela de S_3

$\circ$	I_B	ϕ	ρ	ϕ^2	$\phi\rho$	$\rho\phi$
I_B	I_B	ϕ	ρ	ϕ^2	$\phi\rho$	$\rho\phi$
ϕ	ϕ	ϕ^2	$\phi\rho$	I_B	$\rho\phi$	ρ
ρ	ρ	$\rho\phi$	I_B	$\phi\rho$	ϕ^2	ϕ
ϕ^2	ϕ^2	I_B	$\phi\rho$	ϕ	ρ	$\phi\rho$
$\phi\rho$	$\phi\rho$	ρ	ϕ	$\rho\phi$	I_B	ϕ^2
$\rho\phi$	$\rho\phi$	$\phi\rho$	ϕ^2	ρ	ϕ	I_B

Os subgrupos de S_3 são: $\{I_B\}; \{I_B, \rho\}; \{I_B, \phi\rho\}; \{I_B, \rho\phi\}; \{I_B, \phi, \rho\}; S_3$.

Os subgrupos $\{I_B, \rho\}; \{I_B, \phi\rho\}$ e $\{I_B, \rho\phi\}$ possuem ordem 2, portanto são grupos abelianos. O subgrupo $\{I_B, \phi, \rho\}$ tem ordem 3, portanto é cíclico.

3.6 Permutações Pares e Ímpares

De acordo com a proposição 3.4.8, podemos decompor uma permutação em transposições. No entanto, a decomposição não é única. Para isto, observe que como (a b) (b a) é o elemento neutro de S_n. Desta forma, num produto de transposições podem-se inserir tantas expressões desse tipo quando desejarmos, sem alterar o resultado. Para ver isto, basta mostrar no exemplo anterior, onde escrevemos a permutação $\alpha = (1\ 2\ 5)\ (4\ 7\ 6)$. Note que o ciclo, (4 7 6) pode ser escrito

$$(4\ 7\ 6) = (4\ 6)\ (4\ 7) = (1\ 2)\ (2\ 1)\ (4\ 6)\ (4\ 7).$$

Entretanto, pode-se provar que todas as decomposições de um mesmo ciclo em transposições compartilham a mesma paridade, isto é, que a paridade do número de transposições em uma decomposição é bem definida. Para provar tal resultado, é necessário definir o conceito de assinatura de uma permutação.

Definição 3.6.1: A assinatura de uma permutação

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$$

é o número real, aqui denotado por sng σ, e definido por:

$$\prod_{(i,j), i>j} \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}$$

Exemplo 3.6.2: Obtenha a assinatura das permutações abaixo:

a)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $sgn(\alpha) = \dfrac{2-1}{2-1} \cdot \dfrac{3-1}{3-1} \cdot \dfrac{3-2}{3-2} = (1) \cdot (1) \cdot (1) = 1.$

b) $sgn(\beta) = \dfrac{2-1}{1-2} \cdot \dfrac{3-1}{3-2} \cdot \dfrac{3-2}{3-1} = (-1) \cdot (2) \cdot (\dfrac{1}{2}) = -1.$

O exemplo (a) mostra que a assinatura da permutação idêntica é sempre 1, independentemente do tamanho do conjunto. Isso ocorre porque a permutação identidade não envolve nenhuma troca de elementos e, portanto, não possui inversões. O exemplo (b) mostra que o sinal de uma transposição é sempre -1, pois para retornar a permutação identidade, precisamos fazer apenas uma inversão, no caso, trocar o 2 por 1. O próximo resultado aborda este fato.

Proposição 3.6.3: A assinatura de uma transposição é -1.

Demonstração: Seja $\tau \in S_n$ uma transposição.

Podemos representar τ da seguinte maneira:

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$$

Se (r, s) é um par de índices da primeira linha da transposição τ e $1 \leq r < s \leq n$, então os casos possíveis são as seguintes:

a) (r, s) = (1, 2) cujo fator correspondente em sgn τ é $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1 - a_2} = -1.$

b) $r = 1$ e $s > 2$, caso em que o fator correspondente de (r, s) em que sgn τ é $\dfrac{a_s - a_1}{a_s - a_2}$.

c) $r = 2$ e $s > 2$, caso em que o fator correspondente de (r, s) em sgn τ é $\dfrac{a_s - a_2}{a_s - a_1}$.

d) $r > 2$ e, neste caso, o fator correspondente de (r, s) em sgn τ é $\dfrac{a_s - a_r}{a_s - a_r} = 1.$

Como os fatores de b) e c) aparecem em pares cujo produto é 1, então:

$$\text{sgn } \tau = \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_2} = -1.$$

Uma observação relevante é que o sinal de uma composição de duas permutações é igual ao produto de sinais de cada permutação. Este resultado será discutido na próxima proposição e desempenha um papel fundamental no estudo do sinal de uma permutação.

Proposição 3.6.4: Para quaisquer permutações $\sigma, \varphi \in S_n$, sgn $(\varphi \circ \sigma) =$ (sgn φ)(sgn σ).

Demonstração: Permutando convenientemente as colunas de φ, podemos descrever:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix} e \quad \varphi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}$$

$$(\text{sgn } \varphi)(\text{sgn } \sigma) = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \varphi) = \prod \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j} \prod \frac{b_i - b_j}{c_i - c_j} = \prod \tfrac{a_i - a_j}{c_i - c_j} = \text{sgn } (\varphi \circ \sigma).$$

Os resultados apresentados nas duas últimas proposições nos fornecem uma consequência importante no estudo do sinal das permutações, a qual será enunciada no corolário a seguir.

Corolário 3.6.5: Se $\sigma \in S_n$, então sgn $\sigma = \pm 1$.

Toda permutação pode ser expressa como um produto de transposições. Portanto:

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r$$

Utilizando transposições convenientes $\tau_1, \tau_2, ..., \tau, \in S_n$. Então, usando-se a generalização natural da proposição anterior para r fatores e considerando-se que a assinatura de uma transposição é igual a -1:

sgn $\sigma =$ sgn $(\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r) =$ (sgn τ_1) (sgn τ_2) ... (sgn τ_r) $= (-1)(-1)...(-1) = (-1)^r = \pm 1$.

Corolário 3.6.6: Qualquer que seja a permutação $\sigma \in S_n$, sgn $\sigma^{-1} =$ (sgn $\sigma)^{-1}$.

Demonstração: Como (1 2) $\circ$ (1 2) indica a identidade de S_n, então $\sigma^{-1} \circ \sigma =$ (1 2) $\circ$ (1 2). Portanto:

sgn (σ^{-1})(sgn σ) = sgn $(\sigma^{-1} \circ \sigma)$ = sgn[(1 2) $\circ$ (1 2)] = [sgn (1 2)][sgn (1 2)] = (-1)(-1) = 1

De onde, sgn $\sigma^{-1} =$ (sgn $\sigma)^{-1}$.

Proposição 3.6.7: Seja dada uma permutação $\sigma \in S_n$ e consideremos duas composições de σ em transposições:

$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r$ e $\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ ... \circ \rho_s$

Então os inteiros r e s tem a mesma paridade.

Demonstração:

Devido ao corolário 3.6.5, sgn $\sigma = (-1)^r = (-1)^s$. Se r for par, então $(-1)^r = 1$; daí $(-1)^s = 1$ e, portanto, s também é par. O raciocínio é análogo no caso em que r for ímpar.

Definição 3.6.8: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada par ou ímpar conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. Em outras palavras, conforme sua assinatura seja +1 ou -1. O conjunto das permutações pares de S_n será indicado por A_n, $A_n \neq \emptyset$ pois $id = (1\ 2)(2\ 1)$ é par.

Proposição 3.6.9: Para todo $n > 1$, o conjunto A_n é um subgrupo de ordem $\dfrac{n!}{2}$ de S_n. **O** subgrupo A_n será denominado por grupo alternado de grau n.

Demonstração: Sejam $\sigma, \varphi \in A_n$. Então sgn $(\sigma) = 1$ e sgn $(\varphi) = 1$. Como, sgn $(\sigma \circ \varphi^{-1})$ = (sgn σ) (sgn $\varphi)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$, então $\sigma \circ \varphi^{-1} \in A_n$. Logo, A_n é um subgrupo de S_n.

Sejam r as permutações pares e s as permutações ímpares de S_n, que denotaremos respectivamente por $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ e $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s$. Multiplicando as permutações pares por uma transposição τ, obtemos as permutações:

$$\tau \circ \sigma_1, \tau \circ \sigma_2, ..., \tau \circ \sigma_r$$

Mas, como o produto de uma permutação ímpar (a transposição τ) por uma par, todos esses produtos são ímpares. Logo, $r \leq s$.

Analogamente, se multiplicarmos as permutações ímpares por τ, obteremos as s permutações pares:

$$\tau \circ \varphi_1, \tau \circ \varphi_2, ..., \tau \circ \varphi_s$$

Portanto, $s \leq r$. De onde, $r = s$, e como $r + s = n!$, então o$(A_n) = \frac{n!}{2}$ e, por conseguinte, $(S_n : A_n) = 2$.

Faremos um breve comentário sobre grupos alternados. Demonstramos que se uma permutação pode ser escrita como o produto de um número par de transposições, então qualquer outra decomposição desta permutação em produto de transposição tem um número par de fatores. Neste caso a permutação é dita par.

Exemplo 3.6.10: Vamos examinar os casos $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, do grupo alternado A_n.

Para $n = 2$, os elementos de S_2 são (1) e (1 2). Logo, o par $A_2 = (\{(1)\}, \circ)$ é o grupo alternado de ordem 2.

Para $n = 3$, os elementos de S_3 são: (1); (1 2); (1 3); (2 3); (1 2 3); (1 3 2). Como (1 2 3) = (1 2) (1 3) e (1 3 2) = (1 3) (1 2), então as permutações pares de S_3 são (1); (1

2 3) e (1 3 2) logo, o par $A_3 = (\{(1);(123);(132)\},\circ)$ é o grupo alternado de ordem 3, cuja tabela é:

$\circ$	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)

Para $n = 4$, as permutações pares são:

$\phi_1 = (1); \phi_2 =$ (1 2 3); $\phi_3 =$ (1 4 3); $\phi_4 =$ (2 3 4); $\phi_5 =$ (1 4 3); $\phi_6 =$ (1 2 3); $\phi_7 =$ (2 4 3); $\phi_8 =$ (1 2 4); $\phi_9 =$ (1 2 3); $\phi_{10} =$ (1 2) (3 4); $\phi_{11} =$ (1 3) (2 4) e $\phi_{12} =$ (1 4) (2 3). Logo, o par $A_4 = (\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{12}\}, \circ)$ é o grupo alternado de ordem 12.

Este grupo não é abeliano, pois: $\phi_2\phi_3 = (2\ 3\ 4) \neq (1\ 2\ 3) = \phi_3\phi_2$.

Note que o grupo A_4 é formado pela permutação idêntica (1) de S_4, oito ciclos do tipo (a b c) de comprimento 3 e três elementos da forma (a b) (c d), de modo que o grupo $(A_4, \circ)$ tem ordem $12 = \dfrac{4!}{2}$.

4 O JOGO PUZZLE 15

Neste capítulo vamos tratar de um puzzle permutacional: Puzzle-15. Aqui, descreveremos os movimentos do puzzle por meio de permutações e usaremos resultados básicos da Teoria de Grupos para obter as configurações do Puzzle-15. Nesta seção as referências utilizadas são: [1], [5], [9], [17] e [29].

O jogo Puzzle 15, também conhecido como Jogo do 15, é um quebra-cabeça deslizante que consiste em uma grade 4x4 com 15 peças numeradas e um espaço vazio. O objetivo do jogo é organizar as peças em ordem numérica, deslizando-as pelo tabuleiro, deixando o espaço vazio na posição correta.

Embora seja um jogo simples, o Puzzle 15 tem uma história interessante. Inventado pelo famoso inventor e cientista Noyes Palmer Chapman, Chapman era um engenheiro ferroviário americano que criou o jogo originalmente como um brinquedo para seus filhos. Ele o chamou de "Puzzle do 15"devido ao número máximo de peças e ao objetivo de organizá-las em ordem crescente.

O jogo ganhou popularidade rapidamente e se espalhou por todo o mundo. Logo, as versões do jogo começaram a ser produzidas em grande escala por várias empresas e se tornaram um sucesso entre as pessoas de todas as idades.

Uma curiosidade interessante é que o Puzzle 15 pode ser considerado uma versão simplificada de um quebra-cabeça maior e mais antigo chamado "Square Root Puzzle"(Puzzle da Raiz Quadrada). Esse quebra-cabeça consistia em uma grade 8x8 com 64 peças e também tinha o objetivo de organizar as peças em ordem numérica. O Puzzle 15 foi uma versão reduzida e mais acessível desse conceito.

Desde sua criação, o Puzzle 15 tem sido um desafio popular implementado em diferentes formas e variações. Além disso, o jogo também serviu de inspiração para outros quebra-cabeças deslizantes e jogos similares ao longo dos anos.

Atualmente, o Puzzle 15 pode ser encontrado em diversas plataformas, incluindo aplicativos, jogos de computador e até mesmo em versões físicas como brinquedos. Ele continua a ser apreciado como um jogo divertido e desafiador, proporcionando entretenimento para pessoas de todas as idades ao redor do mundo.

No contexto do jogo Puzzle 15, os grupos cíclicos desempenham um papel fundamental na compreensão das propriedades e estratégias de solução. Ao explorar as possíveis permutações das peças no Puzzle 15, percebe-se que existem padrões recorrentes que se repetem ao longo das diferentes soluções. Esses padrões podem ser representados por grupos cíclicos. Cada ação de deslizar uma peça em uma direção específica pode ser vista como uma permutação, e a repetição dessas permutações leva a um ciclo de movimentos.

Os grupos cíclicos no jogo Puzzle 15 podem ser entendidos como sequências de movimentos que levam o tabuleiro de volta a uma configuração anterior, formando um ciclo. Por exemplo, o movimento de deslizar uma peça da posição 1 para a posição 2, seguido pelo movimento de deslizar a peça da posição 2 para a posição 1, forma um grupo cíclico de ordem 2. Esse ciclo de movimento de ordem 2 pode ser repetido várias vezes para criar estratégias de soluções.

O Puzzle-15 é composto por uma placa 4×4 com 15 peças móveis (deslizantes), numeradas de 1 a 15 e um espaço vazio, como na Figura 1 a seguir:

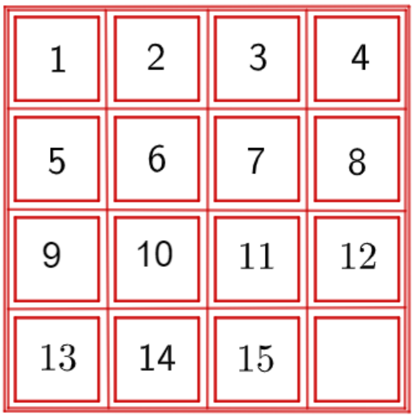

Figura 1 – Puzzle-15, posição original.

Cada movimento do puzzle consiste em deslizar uma peça numerada para o espaço vazio adjacente em movimentos horizontais e verticais. Na posição inicial (Figura 1), pode-se mover apenas a peça 12 para baixo e a peça 15 para direita, e assim por diante. Após mover as peças aleatoriamente, o objetivo do puzzle é tentar voltar à sua posição de origem (Figura 1).

No começo da década de 1890, Samuel Loyd (1841- 1911), nascido nos Estados Unidos, um grande inventor de puzzles, ofereceu um prêmio de 1000 dólares para quem conseguisse resolver o puzzle na configuração original com apenas duas peças trocadas, a peça 14 e a 15 (puzzle 14-15), conforme a Figura 2.

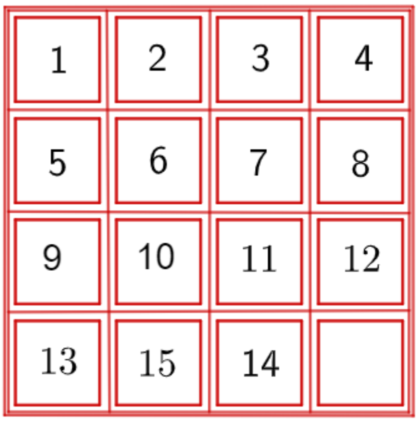

Figura 2 – Puzzle 14-15.

O objetivo era trocar apenas as peças 14 e 15 de lugar e retornar a posição original (Figura 1). Várias pessoas afirmavam ter solucionado o problema, entretanto não apresentaram publicamente a resolução, e por fim, o prêmio proposto nunca foi entregue. O puzzle 14-15, da forma como foi apresentado, não possui solução, e por isso, o prêmio não foi entregue a ninguém. Samuel Loyd defendeu ser autor e criador do puzzle 15 até sua morte, em 1914. Após sua morte, seu filho e colaborador publicou o livro "Cyclopedia of Puzzles", onde aparece o Puzzle 14-15, que pode ser encontrado na íntegra em http:www.mathpuzzle.com/loyd/.

Demonstramos que para além de mera recreação, um jogo tem a capacidade de nos proporcionar oportunidades para a construção de conceitos fundamentais, alinhando-se com as metodologias ativas estudadas neste trabalho para assimilação dos conceitos significativos de permutação simples. Como resultado final de nossa investigação, fundamentamos a inviabilidade de resolver o quebra-cabeça 15-puzzle conforme a concepção inicial de seu criador, Samuel Loyd. Nossa abordagem buscou uma justificativa fundamentada em bases matemáticas, porém, não negligenciamos a apresentação de um conteúdo didático acessível, direcionado especialmente a estudantes que estão nos estágios iniciais do estudo da álgebra. Este estudo estabelece os alicerces para um possível desenvolvimento futuro, uma sequência didática voltada ao 15-puzzle poderá ser elaborada tendo como foco a exploração dos grupos de permutações através das fases do jogo. Tal empreendimento visa a contribuir significativamente com o ensino da Álgebra e com o avanço das pesquisas nesse campo específico.

A análise sobre a impossibilidade da solução para a versão apresentada puzzle 14-15, será objeto de estudo da seção 4.2.

4.1 Puzzle-15 e as permutações

Cada peça do quebra-cabeça puzzle 15 é numerada de 1 a 15, com espaço vazio representado pelo número 16. Isso significa que podemos considerar uma configuração do puzzle 15 como uma permutação de S_{16}, o que nos permite aplicar os conceitos matemáticos da teoria de grupos e permutações, para analisar suas propriedades. Para ilustrar essa ideia, na figura 3, apresentamos uma representação gráfica de uma configuração típica do puzzle 15, destacando o espaço vazio com o número 16 (vermelho).

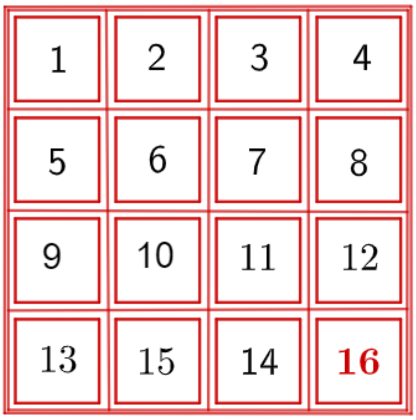

Figura 3 – Puzzle-15, espaço vazio como a peça 16.

Na Figura 1, o puzzle está no estado resolvido, nenhuma peça foi movida. Representamos na forma matricial esta permutação:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

A permutação acima representa a identidade de S_{16}.

Exemplo 4.1.1: Considere o Puzzle na Figura 4. Observe que, a peça 1 foi movida para a caixa 10, a peça 2 foi movida para a posição da caixa 3, a peça 3 foi movida para a caixa 2, a peça 4 movida para a caixa 14, a peça 6 movida pra a caixa 15, a peça 8 movida para caixa 12, peça 9 movida para a caixa 11, peça 10 para a caixa 8, peça 11 movida para caixa 9, peça 12 movida para a caixa 1, peça 14 movida para a caixa 4, peça 15 movida para a caixa 16 e a peça 16 que representa a casa vazia, posicionada na caixa 6. Dessa forma, construímos a permutação α correspondente à permutação que descreve as posições da Figura 4:

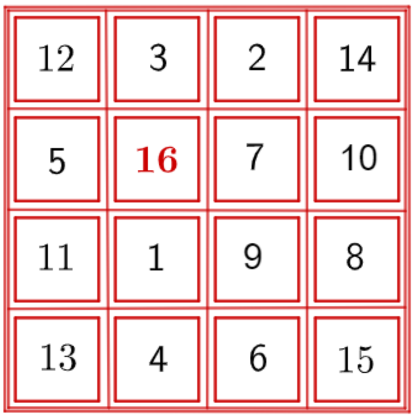

Figura 4 – Exemplo Puzzle-15 embaralhado.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 12 & 3 & 2 & 14 & 5 & 16 & 7 & 10 & 11 & 1 & 9 & 8 & 13 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (1\ 12\ 8\ 10\ )(2\ 3)(4\ 14)(6\ 16\ 15)(9\ 11).$$

No capítulo 3, vimos que se $n > 1$, toda permutação de S_n pode ser escrita como um produto de transposições. Sendo assim, podemos escrever uma sequência de movimentos como uma composição de transposições, movendo a peça i para a caixa vazia, denominada de casa 16, fixando as demais peças. Essa movimentação será denotada por v_i, com $1 \leq i \leq 15$.

Observe que, uma sequência de movimentos do Puzzle-15 é uma composição de várias transposições envolvendo o 16. Por exemplo, começando na posição da Figura 1, podemos fazer uma rotação no sentido horário das peças 11, 12, 15 e 16 como na Figura 5 a seguir:

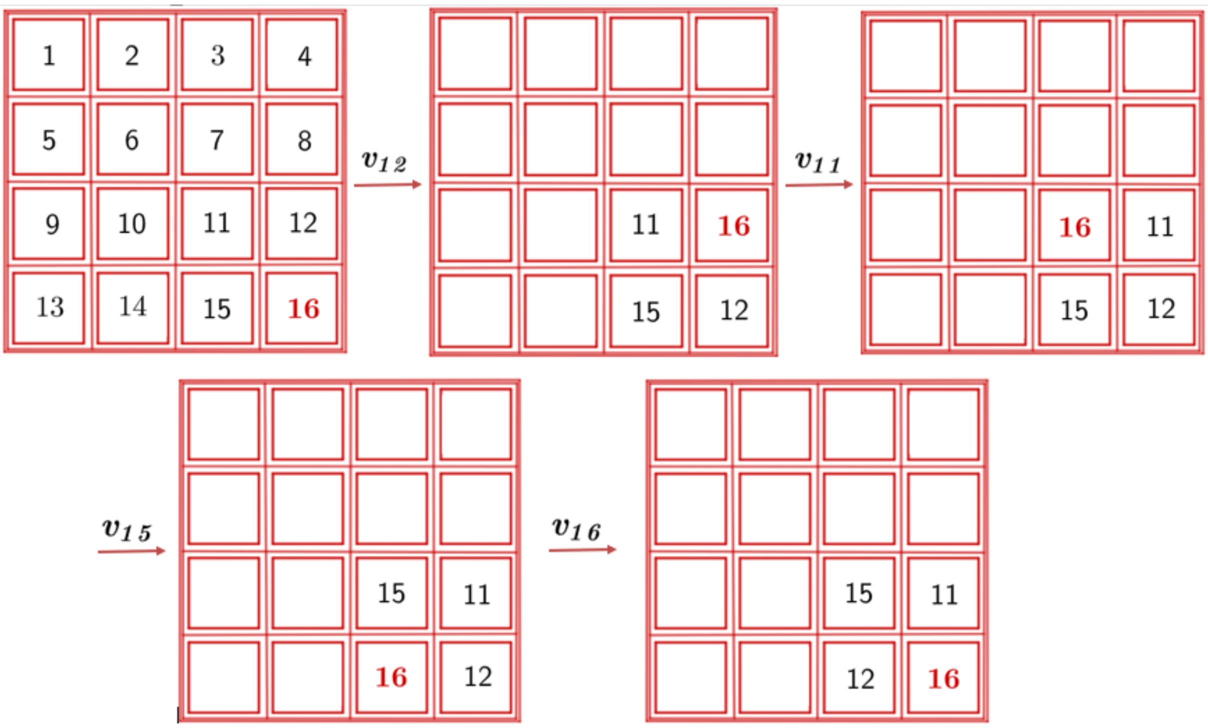

Figura 5 – Sequência de movimentos do Puzzle-15.

Esta sequência de movimentos corresponde ao seguinte produto de transposições:

$$v_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 16 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$v_{12} = (12 \quad 16) \Rightarrow sgn(12 \quad 16) = -1.$

$$\alpha = v_{11} \circ v_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 16 & 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$\alpha = (11 \quad 16 \quad 12) \Rightarrow sgn[(11 \quad 12) \cdot (11 \quad 16)] = sgn(11 \quad 12) \cdot sgn(11 \quad 16) = (-1) \cdot (-1) = 1.$

$$\beta = v_{15} \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 15 & 11 & 13 & 14 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

$\beta = (11 \quad 15 \quad 16 \quad 12) \Rightarrow sgn[(11 \quad 12) \cdot (11 \quad 16) \cdot (11 \quad 15)] = sgn(11 \quad 12) \cdot sgn(11 \quad 16) \cdot sgn(11 \quad 15) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$

Portanto, chegamos à conclusão de que é possível expressar todos os movimentos legais do quebra-cabeça de 15 peças como permutações. Esse método nos permite discernir claramente a assinatura de cada movimento. Além disso, ao organizar as colunas de maneira adequada, torna-se viável rastrear de maneira eficiente o percurso percorrido desde o início até o desfecho dos movimentos.

4.2 Impossibilidade de solução do puzzle 14-15

Como mencionado anteriormente, consideraremos o problema proposto por Samuel Loyd, o Puzzle 14 - 15 (Figura 6), e nesta seção, nos dedicaremos a demonstrar que essa configuração específica não possui uma solução viável. A demonstração desses resultados foi fundamentada nas seguintes referências, [1] e [5]

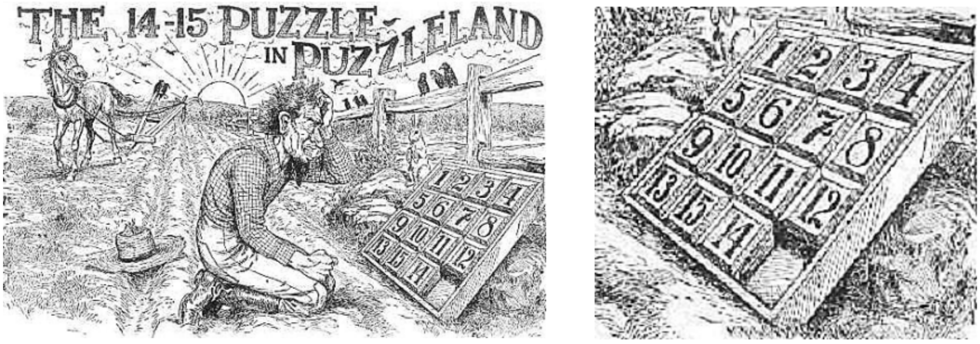

Figura 6 – Gravura retirada do Cyclopedia of Puzzles 14-15

Teorema 4.2.1: Se as peças numeradas 14 e 15 no "Puzzle 15"estão trocadas de lugar em relação à configuração inicial, então essa configuração específica não tem solução.

Demonstração: Como discutido anteriormente, cada movimento no "Puzzle 15"pode ser representado como uma transposição, onde o espaço vazio (representado pelo número 16) interage com as peças numeradas de 1 a 15. Se considerarmos a configuração desejada, representada pela transposição (1 2), e tentarmos alcançá-la a partir da configuração inicial (Figura 1), usando um produto de transposições, podemos escrever:

$(14\ 15) = (a_1\ 16)(a_2\ 16)...(a_i\ 16)$, onde $1 \leq a_i \leq 15$

Na proposição 3.5.1, estabelecemos que a transposição tem sinal -1. Portanto, o sinal da transposição (14 15) no primeiro membro da igualdade acima é -1.

Agora, consideremos a quantidade de movimentos necessários para que o espaço vazio (representado pelo número 16) retorne à sua posição inicial. Essa quantidade de movimentos é sempre par. Se o número 16 se moveu a vezes para a esquerda e b vezes para cima para retornar à sua posição original, ele também deve se mover a vezes para a direita e b vezes para baixo. Esses movimentos podem ocorrer em qualquer ordem, como b vezes para baixo e a vezes para a direita. Em resumo, o número total de movimentos m que respeita essa condição é dado por $m = 2(a + b)$, que é sempre um número par.

Aqui reside a contradição essencial: a transposição (14 15) no primeiro membro da igualdade tem sinal -1, enquanto a quantidade total de movimentos é sempre par. Conforme a teoria das permutações, a paridade de uma permutação é uma característica invariante, o que significa que não pode ser alterada por meio de movimentos válidos.

Portanto, a discrepância entre os sinais das permutações no primeiro e segundo membros da equação demonstra que a configuração dada não pode ser alcançada a partir da configuração inicial por meio de transposições válidas. Isso, por sua vez, prova a impossibilidade de solução para essa configuração específica do quebra-cabeça.

4.3 Possíveis posições do Puzzle-15

A solubilidade do jogo "Puzzle 15"é uma questão intrigante que tem sido investigada há décadas. Nesta seção, se concentra na análise das configurações solúveis do jogo, destacando como o grupo alternado A_{15} pode ser aplicado para determinar quais configurações podem ser resolvidas.

Como vimos no capítulo anterior, o grupo alternado A_n é um subgrupo do grupo simétrico S_n que contém todas as permutações com paridade par. Isso significa que A_{15} consiste em permutações que podem ser representadas como uma composição de um número par de transposições.

A solubilidade de uma configuração no jogo "Puzzle 15"está diretamente relacionada à paridade de sua permutação associada. Configurações solúveis pertencem ao grupo alternado A_{15} e, portanto, têm paridade par. Isso significa que é possível retornar à configuração inicial através de um número par de movimentos.

Exemplo 4.3.1: Observe a permutação realizada entre as peças do puzzle, conforme a figura 7. O número de transposições caracteriza uma permutação par.

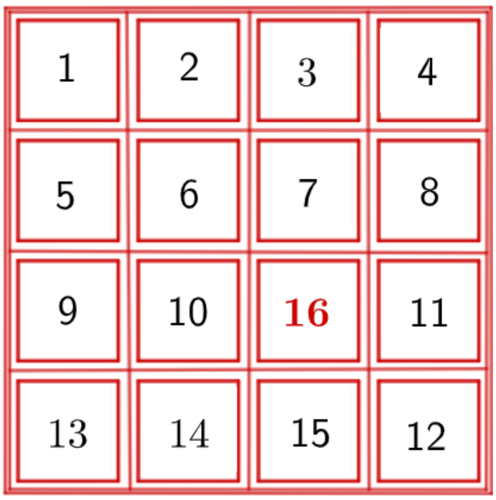

Figura 7 – Exemplo permutação par

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 16 & 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$\alpha = (11 \quad 16 \quad 12) \Rightarrow sgn[(11 \quad 12) \cdot (11 \quad 16)] = sgn(11 \quad 12) \cdot sgn(11 \quad 16) = (-1) \cdot (-1) = 1.$

Por outro lado, configurações insolúveis têm paridade ímpar e, portanto, não pertencem ao grupo alternado A_{15}.

Exemplo 4.3.2: Observe a permutação realizada entre as peças do puzzle. O número de transposições caracteriza uma permutação ímpar.

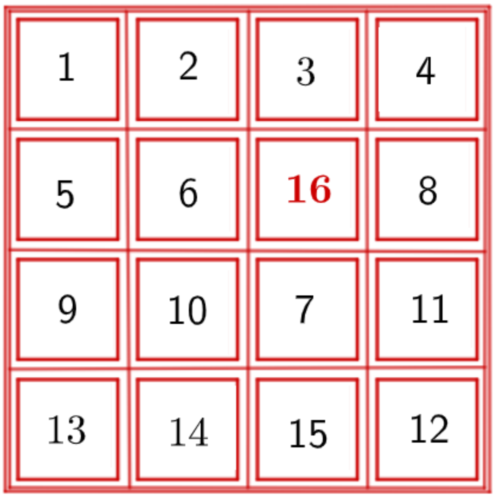

Figura 8 – Exemplo permutação ímpar

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 16 & 8 & 9 & 10 & 7 & 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$\delta = (7 \quad 16 \quad 12 \quad 11) \Rightarrow sgn[(7 \quad 11) \cdot (7 \quad 12) \cdot (7 \quad 16)] = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$

Podemos observar como a análise anterior que o grupo alternado A_{15} desempenha um papel crítico na determinação da solubilidade. Configurações solúveis, com paridade par, podem ser resolvidas, enquanto as insolúveis, com paridade ímpar, não têm solução dentro das regras do jogo. Isso demonstra a aplicação prática da teoria de grupos na resolução de problemas do mundo real, como o "Puzzle 15". A compreensão das propriedades matemáticas subjacentes a esse quebra-cabeça clássico pode ajudar a desenvolver estratégias mais eficazes para sua resolução.

O próximo capítulo apresenta um conteúdo significativo, mas podemos torná-lo muito mais eficaz e envolvente ao incorporar exemplos de3 atividades práticas e ilustrações.

Além disso, destacaremos que estas atividades podem servir como uma oportunidade para introduzir conceitos da álgebra abstrata.

O grupo de permutações é um ramo essencial da teoria de grupos, que se concentra no estudo das propriedades e estruturas que podem ser formadas por meio de suas composições.

A permutação simples é um dos agrupamentos estudados, que trata de todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com os elementos de um conjunto. Ao explorar os grupos de permutações, podemos investigar propriedades fundamentais, como a decomposição em ciclos, a ordem das permutações e a existência de elementos inversos.

5 PROPOSTA PEDAGÓGICA: SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO PUZZLE 15

Nesta seção abordaremos a sequência didática para o ensino e aplicação das teorias envolvidas no jogo Puzzle 15. As referências utilizadas aqui são: [10], [13], [16], [17], [18], [21], [23], [24], [25] [26] e [31].

A sequência didática é uma estratégia pedagógica fundamental no processo de ensino-aprendizagem, cuja importância é ressaltada por especialistas da área da educação, como Zabala (1998). Essa abordagem consiste em organizar e estruturar as atividades de ensino de forma sequencial e articulada, visando promover a construção do conhecimento de maneira mais eficaz e significativa para os alunos.

Zabala (1998), destacado pedagogo espanhol, ressalta a importância da sequência didática ao considerar a necessidade de superar uma educação fragmentada e centrada na mera transmissão de informações. Ele defende que uma abordagem sequencial, envolvendo diferentes etapas, contribui para a internalização dos conteúdos pelos alunos, permitindo que eles se apropriem do conhecimento de forma ativa e autônoma. No contexto da sala de aula, a sequência didática envolve a concepção de um percurso de ensino que compreende desde a introdução do tema até a realização de atividades que promovem a reflexão, o debate, a experimentação e a aplicação prática dos conceitos pensados. Esse processo se intensificou em momentos de exploração, problematização, construção, aplicação e avaliação, proporcionando uma aprendizagem mais integrada e contextualizada.

No ensino de Matemática, vemos tal sequência sendo apresentada por Lima (1999), possibilitando refletir que a conceituação, a manipulação e a aplicação são processos fundamentais no fazer pedagógico do docente em uma atividade sobre matemática. Diante do exposto, estruturar os conceitos apresentando-os aos alunos sequencialmente do menor para o maior grau de complexidade visando a construção de um arcabouço cognitivo onde diferentes ramificações conceituais matemáticas possam ancorar, consolida uma assimilação mais efetiva, além de possibilitar a análise e avaliação de cada etapa apresentada, retomando processos de ensino-aprendizagem se houver necessidade. O desenvolvimento cognitivo matemático, ou seja, a capacidade de processar informações e transformá-las em conhecimento ocorrerá concomitantemente às etapas sequenciais seguintes, a manipulação e a aplicação. A manipulação possibilita ao aluno transpor a abstração e vivenciar os conceitos matemáticos em sua concretude e a aplicação consolida a aprendizagem, pois exige uma elaboração mental onde o conhecimento propicia a compreensão dos fenômenos e fatos do cotidiano e sobre eles inferir, atuar e solucionar problemas.

A importância da sequência didática reside no fato de que ela contribui para a construção de saberes de maneira mais profunda e duradoura. Ao permitir a conexão entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos conteúdos, essa abordagem favorece a compreensão global dos temas e incentiva a participação ativa dos alunos no processo educativo. Além disso, a sequência didática favorece a interdisciplinaridade, permitindo a integração de diferentes áreas de conhecimento e a compreensão das relações entre elas em cada etapa, ao longo do processo. Ver uma pequena peça, analisar sua aplicabilidade e sua utilidade em diferentes engrenagens, ressignifica sua importância como um todo e em um motor. A interdisciplinaridade pode ser vista nesse contexto, cada etapa de uma sequência é uma peça que se for vista apenas no todo perde-se a percepção do quanto ela pode integrar-se a outros saberes e contribuir para a amplitude de sua compreensão.

No entanto, é importante ressaltar que a elaboração de uma sequência didática demanda planejamento e reflexão eficaz por parte dos educadores. É necessário considerar as características dos alunos, os objetivos de aprendizagem, os recursos disponíveis e as estratégias pedagógicas mais adaptadas para cada etapa da sequência.

Frente ao exposto, Da Gama e Cabral (2017), realça a flexibilidade da sequência didática, que deve ser adaptável às diferentes necessidades dos alunos e enriquecida por uma variedade de recursos e estratégias. Ele propõe uma abordagem holística, onde a sequência se ajusta ao desenvolvimento dos estudantes. Já Moreira (2011), conecta a sequência didática com a efetivação dos objetivos educacionais. Ele argumenta que essa ferramenta permite a harmonização entre os conteúdos vistos, o contexto cultural e social dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais contextualizada e envolvente. Nesse contexto, os trabalhos de Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), concentram-se na aplicação da sequência didática ao ensino da escrita, propondo uma abordagem baseada em gêneros textuais. Através dessa perspectiva, a sequência é projetada para desenvolver as habilidades de escrita dos alunos, capacitando-os a se comunicar efetivamente em situações do mundo real.

Em síntese, esses autores apoiam uma visão unificada da sequência didática como um elemento vital na prática pedagógica. Ela serve como um guia seguro que estimula a aprendizagem ativa e contextualizada, enquanto facilita a aquisição de competências específicas, como a escrita. A sequência didática emerge como um instrumento valioso, permitindo aos educadores alcançar resultados de aprendizagem mais profundos e satisfatórios às necessidades dos alunos. Assim, a sequência didática, conforme destacado por Zabala (1998), é uma ferramenta valiosa no processo educativo, pois proporciona uma abordagem mais estruturada, integrada e significativa, favorecendo a construção do conhecimento de maneira mais profunda e o protagonismo dos alunos.

5.1 Sequência didática para o estudo da permutação a partir do Puzzle 15

Desde 2015 a 1ª, 2ª e 3ª Série do Ensino Médio recebem diretrizes, quanto a grade curricular das diversas matérias, da Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Neste documento normativo estão especificados os conteúdos e objetivos para cada nível de ensino. Observa-se que nos objetivos de aprendizagem da Matemática com relação à Números e Operações, indícios da Análise combinatória houveram alterações nas três versões publicadas. A 1ª edição explicitava como objetivos de aprendizagem "resolver e elaborar problemas de combinatória, envolvendo estratégias básicas de contagem" e a 2ª edição "resolver e elaborar problemas de contagem de possibilidades pelo princípio multiplicativo, incluindo aplicações da unidade probabilidade e estatística". Na 3ª e atual edição, lançada no final de 2018, houveram alterações significativas, até então a divisão era realizada por matéria e passou a ser por área de conhecimento e suas competências específicas e os objetivos passaram a ser tratados como habilidades.

Com relação a área de Matemática, no que se refere à Análise Combinatória, como anteriormente mencionado, é perceptível uma evolução pequena, porém contínua, como é observado nas habilidades da Competência Específica 3 de Matemática e suas Tecnologias: (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore e (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. As habilidades mencionadas oferecem subsídios que possibilitarão a introdução dos conteúdos conceituais de permutação.

Observa-se que ao longo da história mudaram a perspectiva e suas formas de abordagem em relação ao ensino e a aprendizagem, muitas vezes na tentativa de aproximar o conteúdo ministrado nas salas de aula da sua vivência real. No Ensino Médio, a exploração de matemáticos que avançam em conhecimento, investem em abordagens pedagógicas intuitivas para promover o entendimento profundo e a aplicação prática. A sequência didática, uma estratégia estruturada de ensino e em consonância com a proposta didática da BNCC, revela-se uma ferramenta poderosa para a introdução e exploração de conceitos complexos, como permutação, através da integração do cativante jogo Puzzle 15.

Antecedendo a aplicação do jogo Puzzle 15 como metodologia ativa para o ensino e aprendizagem dos conceitos de permutação, recomenda-se a seguinte sequência didática:

1. Apresentação da Teoria da Permutação Nesta primeira etapa os alunos deverão compreender como a permutação envolve a disposição ordenada de elementos e serão expostos às fórmulas básicas para calcular o número de permutações em diferentes situações. O fatorial também será aplicada como uma ferramenta essencial para resolver problemas de permutação. Em seguida, será feita a introdução de permutação simples com situação problema, com o objetivo de despertar o raciocínio dos estudantes, para que reflitam e discutam possibilidades para solucionar determinada situação. Com isso, o discente fará assimilação dos critérios utilizados para resolução do exemplo com o raciocínio lógico da questão, associando o raciocínio apresentado ao cálculo de permutação simples, que são possibilidades existentes que temos para reorganizar de maneira distinta uma fila indiana, senhas bancárias, anagramas com algarismos e letras demonstrando para seus alunos que determinada situação problema poderia também ser desenvolvida por uma permutação simples, já que não existe nestes primeiros exemplos repetição de letras, e introduzir o conceito formal e a fórmula geral utilizada para determinar permutações simples. Serão desenvolvidos exemplos de construção de anagramas com letras, usufruindo dos conceitos explicados de simplificação de expressões numéricas com a operação fatorial. Para finalizar a aula expositiva, o discente poderá propor uma atividade, para ser desenvolvida em grupo, com o objetivo de verificar a assimilação dos conceitos dos estudantes.

Após a apresentação teórica, os alunos terão a oportunidade de explorar exemplos concretos de permutação. Eles resolverão exercícios que envolvam arranjos de letras em palavras, compreendendo como aplicar as fórmulas de permutação para calcular o número de ordens possíveis. Além disso, serão desafiados a resolver problemas que lidam com a permutação de elementos repetidos e não repetidos.

A seguir, serão apresentados exemplos de atividades que poderão ser aplicadas aos alunos para introduzir o conceito de permutação.

Atividade 1: Permutação de Cores: Imagine um conjunto de três cores: vermelho, verde e azul. Quantas permutações podemos formar?

Figura 9 – Permutações das cores: vermelho, azul e verde

Atividade 2: Permutação de Números: Considere os números de 1 a 3. Quantas permutações podemos formar sem repetir o algarismo?

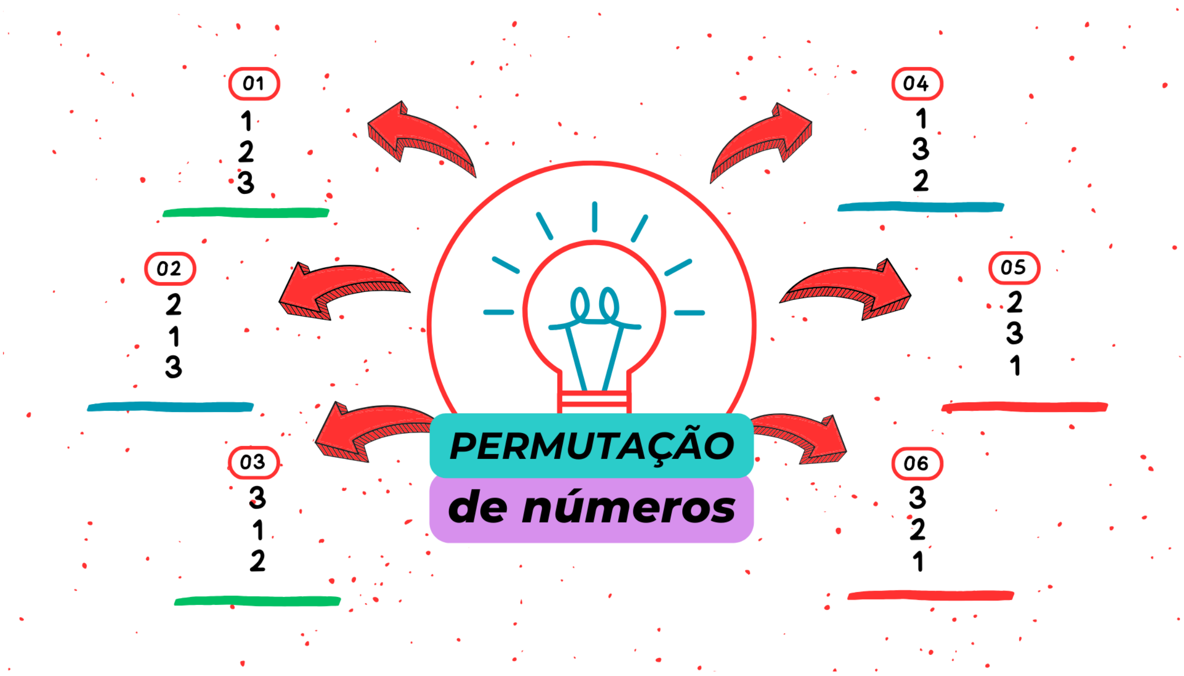

Figura 10 – Permutações dos números: 1, 2 e 3

Atividade 3: Permutação de Letras: Considere as letras A, B e C. Quantas permutações podemos formar sem repetir as letras?

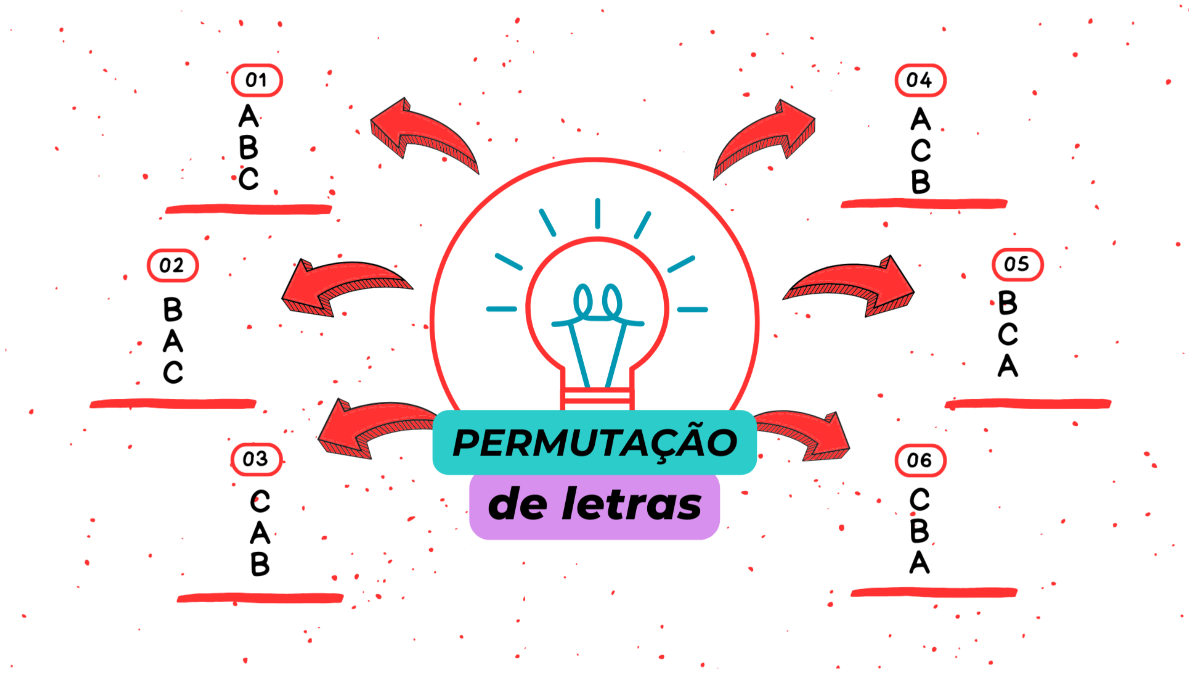

Figura 11 – Permutações das letras: A, B e C

Atividade 4: Permutação de Frutas: Imagine que você tenha três frutas distintas: uma maçã, uma banana e uma laranja. Quantas permutações com estas frutas conseguiremos formar?

Figura 12 – Permutações de objetos: Maçã, laranja e banana

Com estes exemplos o aluno será capaz de verificar que o número de permutações de um conjunto é dado por $n!$, onde n é o número de elementos do conjunto.

2. Apresentação do Puzzle 15 e Suas Relações com Permutação: Tornar uma aula de permutação prática com o jogo Puzzle 15 é uma maneira divertida e eficaz de ensinar conceitos de permutação e desenvolver habilidades de resolução de problemas. Aqui estão algumas etapas para criar uma aula prática com o Puzzle 15:

Materiais necessários:

Um tabuleiro de Puzzle 15 (você pode usar uma versão física ou criar uma versão digital). Um quadro ou tela para projetar o tabuleiro para toda a turma ver. Marcadores para escrever no quadro.

Passos para a aula prática:

Introdução aos conceitos de permutação: Comece a aula explicando o que é uma permutação. Explique que uma permutação é uma reorganização dos elementos em uma ordem específica. Mostre alguns exemplos simples, como permutar as letras de uma palavra.

Apresentação do Puzzle 15: Apresente o Puzzle 15 à turma e explique as regras do jogo. Mostre como as peças podem ser movidas e que o objetivo é colocá-las em ordem numérica.

Demonstração inicial: Realize uma demonstração inicial na frente da turma, mostrando como resolver um quebra-cabeça simples do Puzzle 15. Explique os movimentos e estratégias básicas para resolver o quebra-cabeça.

Atividade prática em grupo: Divida a turma em grupos pequenos e distribua tabuleiros do Puzzle 15 para cada grupo. Peça aos alunos que resolvam o quebra-cabeça em grupo, incentivando a colaboração e a discussão sobre as permutações envolvidas.

Desafio: Após algum tempo de prática, desafie os grupos a encontrar maneiras diferentes de resolver o quebra-cabeça. Isso os ajudará a compreender melhor a variedade de permutações possíveis.

Discussão em sala de aula: Reúna a turma e promova uma discussão sobre as estratégias que os grupos usaram para resolver o Puzzle 15. Peça aos alunos que compartilhem suas observações sobre as permutações envolvidas e as dificuldades encontradas.

Aplicação dos conceitos de permutação: Após a discussão, relacione o que aprenderam com o jogo à teoria das permutações. Explique como as permutações são usadas em matemática, ciência da computação e em várias áreas da vida cotidiana.

Desafio individual: Como tarefa de casa ou atividade individual, os alunos podem ser convidados a resolver um Puzzle 15 mais complexo por conta própria. Isso testará ainda mais suas habilidades de permutação.

Revisão e avaliação: No final da aula, revise os conceitos de permutação e peça aos alunos que escrevam ou discutam como a experiência com o Puzzle 15 os ajudou a compreender melhor esse tópico.

Esta abordagem prática envolve os alunos de forma ativa, tornando o aprendizado dos conceitos de permutação mais envolvente e tangível. Além disso, o jogo Puzzle 15 é uma maneira divertida de aplicar esses conceitos na prática.

Nesta fase, o Puzzle 15 será apresentado como um exemplo prático de permutação. Os alunos aprenderão a mecânica do jogo, entendendo que cada movimento corresponde a uma permutação de peças. Eles perceberão como as peças numeradas podem ser reorganizadas em uma ordem específica, análoga aos conceitos associados à permutação construídos nas etapas anteriores.

Como sugestão de aplicação para os alunos, seria pertinente levar o jogo físico para que os estudantes o manuseiem e comecem a se familiarizar com o Puzzle 15 e suas regras. Segue abaixo algumas imagens dessa atividade com os alunos do Ensino Médio.

Os alunos serão desafiados a resolver o Puzzle 15 em grupos e ou individualmente. Aqui, eles aplicarão diretamente os conceitos de permutação que aprenderam até agora, explicando seus movimentos com base na manipulação ordenada das peças. Ao resolver o quebra-cabeça, eles essencialmente realizam permutações sequenciais para alcançar o estado de ordem desejado.

A imagem apresentada abaixo, captura o momento em que os alunos são introduzidos ao desafiante jogo do Puzzle 15. É nesse instante que eles iniciam sua interação com o tabuleiro, as peças, os movimentos possíveis e as regras fundamentais do jogo.

O reconhecimento do tabuleiro é o primeiro passo, onde os estudantes observam e absorvem a estrutura do jogo, composta por uma grade de quadrados numerados e um espaço vazio. A análise das peças segue em seguida, entendendo sua disposição inicial e o objetivo de ordená-las sequencialmente.

Os movimentos possíveis, compreendendo deslizamentos horizontais e verticais das peças adjacentes ao espaço vazio, são explorados e experimentados. Os alunos começam a perceber a lógica e a estratégia necessárias para alcançar a configuração correta.

Além disso, durante essa fase introdutória, as regras do jogo são explicadas e discutidas, esclarecendo como avançar no desafio e alcançar o objetivo final de organizar as peças em ordem numérica crescente.

Essa interação inicial com o Puzzle 15 não apenas desperta o interesse dos alunos, mas também inicia a construção de habilidades cognitivas e estratégicas que serão fundamentais para o progresso no jogo e para a aplicação desses aprendizados em outras atividades matemáticas e de resolução de problemas.

Figura 13 – Alunos manuseando o Puzzle 15 - Acervo pessoal

3. Desafios de Permutação Inseridos no Contexto do Puzzle 15: Os alunos enfrentarão desafios específicos de permutação relacionados ao Puzzle 15, com a finalidade de reforçar seu entendimento.

Exemplos de perguntas incluem:

Quantas configurações iniciais únicas são possíveis? Eles investigarão quantas configurações iniciais distintas do Puzzle 15 existem. Isso os levará a calcular o número de permutações possíveis para as peças.

Quantos movimentos, em média, são necessários para resolver o Puzzle 15 a partir de uma configuração de partida aleatória? Isso incentivará os alunos a explorarem padrões e estratégias de resolução. Dado um arranjo específico do Puzzle 15, quantas soluções únicas podem ser alcançadas? Isso promoverá a compreensão de que diferentes permutações levam a resultados distintos.

4. Discussões e Reflexões em Sala de Aula:

Atividade 1: Após a resolução do Puzzle 15 e exploração dos desafios de permutação associados, haverá discussões em sala de aula. Os alunos compartilharão suas estratégias, observações, soluções e resultados que obtiverem, fortalecendo a compreensão coletiva do conceito de permutação.

Atividade 2: Agora, introduziremos o conceito de paridade, que é fundamental na álgebra abstrata, mas também tem aplicações práticas em várias áreas da ciência e tecnologia. Sequência de números, de trocas de elementos, em que o número de trocas é um número par (Paridade Par): Começamos com a sequência de números $3, 1, 2$, que vamos definir como configuração inicial. Agora, vamos efetuar duas trocas :

Trocar o 3 com o 1: $1, 3, 2$

Trocar o 3 com o 2: $1, 2, 3$

Agora a sequência está em ordem crescente e fizemos um número par de trocas, o que significa que a configuração de paridade é par. Portanto, esta é uma sequência com paridade par.

Sequência de números com trocas ímpares (Paridade Ímpar): Começamos com a sequência de números $1, 3, 2, 4, 7, 6, 5, 9, 8$ que vamos definir como configuração inicial. Agora, vamos efetuar duas trocas :

Trocar o 3 com o 2: $1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 9, 8$

Trocar o 7 com o 5: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 8$

Trocar o 8 com o 9: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Agora a sequência está em ordem crescente e fizemos um número ímpar de trocas, o que significa que a configuração de paridade é ímpar. Portanto, esta é uma sequência com paridade ímpar.

Atividade 3: Explorar o conceito de Paridade no jogo Puzzle 15

A paridade dos elementos no jogo Puzzle 15 é de extrema importância para determinar se uma determinada configuração do quebra-cabeça é solucionável ou não. Ela ajuda a garantir que um estado específico possa ser resolvido usando movimentos válidos dentro das regras do jogo. A solucionabilidade do Puzzle 15 está diretamente relacionada à paridade do número de inversões na configuração inicial do quebra-cabeça. Dois cenários principais surgem com base na paridade:

Paridade Par: Se a configuração inicial tiver um número par de inversões, é possível resolver o quebra-cabeça. Isso significa que a configuração é solucionável, logo retornaremos na posição inicial.

Paridade Ímpar: Se a configuração inicial tiver um número ímpar de inversões,

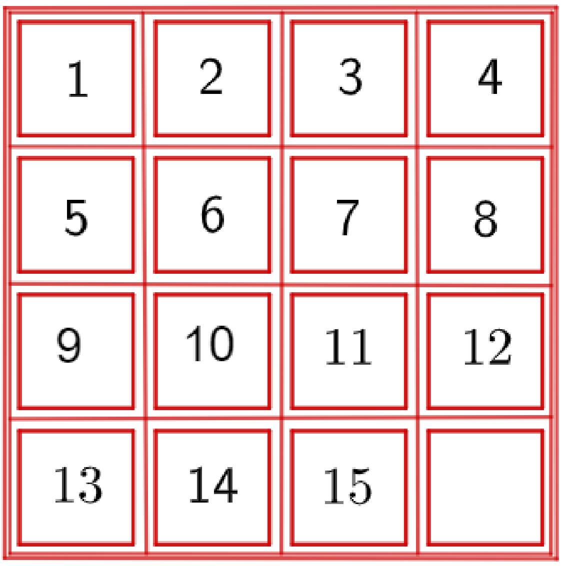

Figura 14 – Puzzle-15, posição original.

não será possível resolver o quebra-cabeça dentro das regras do Puzzle 15 padrão. Neste caso, obteremos a configuração do tabuleiro proposto por Samuel Loyd, o criador do quebra-cabeça, que instigava os adversários na resolução de um desafio que não possui solução.

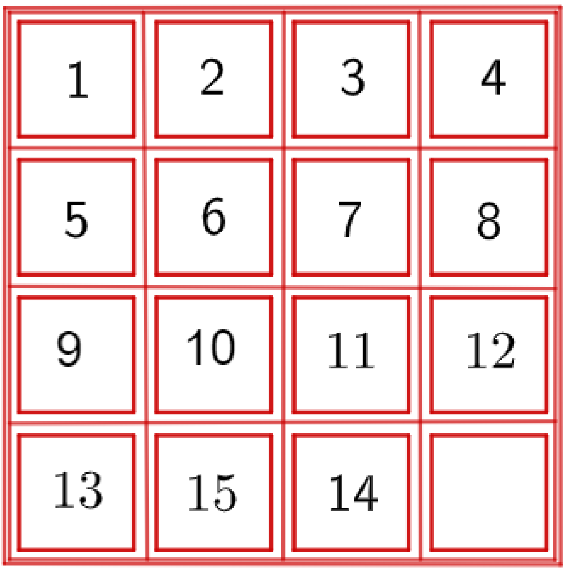

Figura 15 – Puzzle 14-15.

Entender a paridade é crucial ao resolver o Puzzle 15, pois ajuda a evitar movimentos inúteis e a determinar se uma configuração pode ser resolvida. Se a configuração inicial tiver uma paridade compatível com a solução, o jogador pode ter a confiança de que o quebra-cabeça pode ser resolvido por meio de uma sequência de movimentos válidos.

5. Projeto de Criação de Quebra-Cabeças Personalizados: Como etapa final do sequenciamento didático, os alunos criarão seus próprios comandos de quebra-cabeças, estabelecendo desafios específicos de permutação para seus colegas resolverem. Essa atividade encorajará a aplicação criativa do conhecimento adquirido e aprofundará consideravelmente a compreensão de permutações.

A interligação entre a sequência didática, o ensino de permutação e o jogo Puzzle 15 enriquece a experiência educacional. Os alunos não apenas desenvolvem uma compreensão sólida da teoria da permutação, mas também aplicam esses conceitos em um contexto lúdico, prático e cativante. A escolha de uma metodologia ativa envolvendo essas abordagens integradas estimulam o pensamento analítico, a resolução de problemas e a percepção das relações matemáticas em situações do mundo real, preparando-os para desafios matemáticos mais avançados e enriquecendo seu repertório de habilidades cognitivas.

5.2 Cronograma da sequência didática do Puzzle 15

O quadro abaixo dará norte para a sequência didática.

A presente proposta pedagógica tem como propósito central a utilização do jogo Puzzle 15 como uma sequência didática enriquecedora para o ensino do conceito de permutação no âmbito do Ensino Médio. Com ênfase na criação de um ambiente de aprendizado interativo e cativante, esta abordagem visa compreender a compreensão dos alunos sobre permutação, fomentando o desenvolvimento do pensamento lógico, habilidades de resolução de problemas e aplicação concreta do conteúdo matemático.

Duração: O planejamento dessa proposta se estende ao longo de três semanas, divididas em seis aulas, com duas aulas semanais dedicadas a essa exploração.

Semana 1: Introdução ao Conceito de Permutação

Aula 1: Introdução aos Fundamentos da Permutação: Na primeira semana, o foco está na apresentação inicial do conceito de permutação. Através de exemplos práticos e fundamentados, como a rearrumação de elementos em uma sequência numérica ou a troca de letras em uma palavra, os alunos serão imersos na natureza intrínseca da permutação. Esta aula também destacará a importância da ordem precisa dos elementos, bem como da unicidade desses elementos em uma permutação.

Aula 2: Representações e Aplicações: A segunda aula da semana está reservada para uma revisão do conceito de permutação inferior. Aprofundando o conhecimento, os alunos serão expostos a diferentes métodos de representar permutações, como a notação de ciclos e a representação matricial. Além disso, os exercícios práticos em sala de aula serão atendidos, permitindo que os alunos apliquem o conceito em cenários do cotidiano.

Semana 2: Exploração do Jogo Puzzle 15 e Análise de Permutações

Aula 3: Desvendando o Puzzle 15: A terceira aula inicia com a introdução do jogo Puzzle 15. Os alunos serão instruídos sobre as regras do jogo, seus objetivos e o mecanismo de movimentação das peças. Durante essa aula, os alunos serão guiados em uma demonstração prática, permitindo que compreendam as ações necessárias para alcançar a sequência correta.

Aula 4: Aplicando a Teoria de Permutação: Na quarta aula, os alunos serão incentivados a jogar o Puzzle 15, sejam eles individuais ou em grupos. Enquanto jogam, serão solicitados a observar e registrar as permutações ocorridas à medida que manipulam as peças. Em seguida, uma discussão em grupo permitirá que compartilhem suas observações sobre as permutações e as estratégias empregadas durante o jogo.

Semana 3: Exploração e Consolidação do Conhecimento

Aula 5: Explorando Permutações no Contexto do Puzzle 15: A quinta aula da sequência se concentrará na exploração das permutações observadas durante o jogo Puzzle 15. Os alunos serão guiados na análise dessas permutações e suas relações com as ações executadas no jogo. Propriedades cruciais das permutações, como a paridade e a constituição em ciclos, serão válidas. Além disso, exercícios práticos que envolvem permutações, usando o Puzzle 15 como ponto de referência, serão atendidos.

Aula 6: Aplicação em Desafios e Discussão Final: A última aula dessa sequência didática lida com problemas desafiadores, que demandarão a aplicação dos conceitos de permutação para a resolução de situações-problema. A sequência será concluída com uma reunião em grupo, permitindo que os alunos compartilhem suas soluções e estratégias, proporcionando uma visão abrangente dos conceitos aplicados.

Através dessa abordagem interdisciplinar, que une permutação, raciocínio lógico e jogo Puzzle 15, os alunos serão envolvidos em uma jornada de aprendizado que transcende a teoria pura. A proposta visa equipar os alunos não apenas com o conhecimento do conceito de permutação, mas também com a habilidade de aplicá-lo de maneira prática, nutrindo uma compreensão profunda e duradoura.

PUZZLE 15 E PERMUTAÇÃO, uma combinação possível				
Objetivo: Promover a compreensão do conceito de permutação a partir do jogo Puzzle 15				
Etapas	Aulas	Materiais e métodos	Conceituação	Atividade proposta
1	2	Exposição de conceitos introdutórios sobre permutação utilizando a lousa, marcadores ou giz	Revisão dos Fundamentos do fatorial de um número natural e Permutação	Exercícios de fixação
2	1	Apresentação do jogo Puzzle, utilizando um tabuleiro por grupo de 3 alunos	Regras do Puzzle	Jogar para familiarização
3	2	Jogar observando as permutações que estão ocorrendo	Permutações possíveis	Registro das permutações
4	1	Exposição dialogada das permutações observadas com apresentação na lousa	Permutações como a paridade e a decomposição em ciclos	Registro de conceitos
5	1	Resolução de exercícios práticos, usando o Puzzle como referência	Problemas práticos	Exercícios de fixação e discussão sobre as atividades propostas

A sequência didática descrita representa uma proposta ou sugestão de plano de aula para o ensino de permutação, no entanto, até o momento, não foi aplicada. É um esboço planejado e estruturado com atividades sequenciais destinadas a abordar o tema da permutação no contexto educacional. A aplicação dessa proposta de ensino ainda está pendente, e a descrição oferecida é uma representação teórica do que poderia ser realizado durante a aula.

Referências

[1] ADORNO, T. P. B. DIAS. I. R. M. **Puzzle-15: uma aplicação da teoria de grupos**. Revista da Olimpíada - IME - UFG. 2016.

[2] BABINSKI, A. L. **Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática**. Dissertação - (Mestrado) - Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop - MT, 2017.

[3] BERBEL, N.A.N. **Metodologia da problematização: fundamentos e aplicações**. Londrina: UEL; Comped; Inep, 1999.

[4] BERBEL, N.A.N. **As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes**. Ciências Sociais e Humanas, Londrina: v. 32, n. 1, p. 25-40, jan./jun. 2011.

[5] BORGES. L. S. **15 – Puzzle e o grupo de permutações: uma análise à luz da teoria de Anna Sfard**. Encontro Nacional de Educação Matemática. 2019.

[6] BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. 3.ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

[7] BROSSEAU, G., **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas – Conteúdos e Métodos de Ensino**. São Paulo, Ed. Ática, (2007). DEMO, P. 1996. Educar pela Pesquisa. Autores Associados, Campinas.

[8] BURIASCO, R.L.C. **Algumas considerações sobre educação matemática**. Londrina: Eduel, 2005.

[9] COSTA, L.Q. **Um jogo em grupos co- operativos - alternativa para a construção do conceito de números inteiros e para a abordagem dos conteúdos: procedimentos, condutas e normas**. Tese de Doutorado. Programa de Pós- Graduação da Faculdade de Educação da Unicamp. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

[10] DA GAMA, Paulo Ferreira; CABRAL, Natanael Freitas. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Progressão Geométrica**. In: VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática.2017.

[11] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Matemática Ensino e Educação: uma proposta global. SBEM, São Paulo, 1991.**

[12] DEMO, Pedro. **Aprendizagem no Brasil: ainda muito por fazer**. Porto Alegre; Mediação, 2004.

[13] DOLZ, Joaquim et al. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação**

de um procedimento. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, p. 95-128, 2004.

[14] DOMINGUES, H., e IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. Gel- aon Iezzi. – 2. ed. São Paulo : Atual, 1982.

[15] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[16] FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. rev. e atual. Rio de Janeiro: Paz e Terra, p. 95-101, 2011.

[17] GANDRO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese. Doutorado. Universidade de Campinas. Campinas: Unicamp, 2000.

[18] GARDNER, H. **Inteligências múltiplas: Novos horizontes na teoria e na prática**. Livros básicos, 2008.

[19] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. IMPA, 2017, 6ª edição, RJ.

[20] JOSEPH, N. A. Y. **algebra II**. Universidade Federal da Bahia. Licenciatura em Matemática. Instituto de Matemática e Estatística. 2012.

[21] LIMA , Elon Lages. **Conceituação, manipulação e aplicações**. Revista do Professor de Matemática, v. 41, p. 1-6, 1999.

[22] LIRA, A. F. de B.. **Grupos Alternados**. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[23] MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente**. Aprendizagem Significativa em Revista, v.1, n.3, p 25-46, 2011.

[24] PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era do computador**. Nova Iorque , 1993.

[25] PIAGET, J. **A linguagem e o pensamento da criança** . Martins Fontes, 1999.

[26] RIBEIRO, L. R. de C. **A aprendizagem baseada em problemas (PBL): uma implementação na educação em engenharia**. 2005. 236 p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos / SP, 2005.

[27] ROCHA, R. **O Método da Problematização: Prevenção às Drogas na Escola e o Combate a Violência**. Londrina, PR: PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL – PDE, 2008.

[28] RODRIGUES, E, C. P. **Grupos Finitos e Teorema de Cayley**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Goiás. Goiás, 1999.

[29] SANTOS, Carlos Pereira. NETO, João Pedro. SILVA, Jorge Nuno. **A teoria de grupos + o Puzzle do 15**. Edimpresa. Julho de 2007.

[30] SOUZA, R. L. **Uma breve introdução a teoria de grupos**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.

[31] ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/552-4.pdf. Acesso em: 03/06/2023.