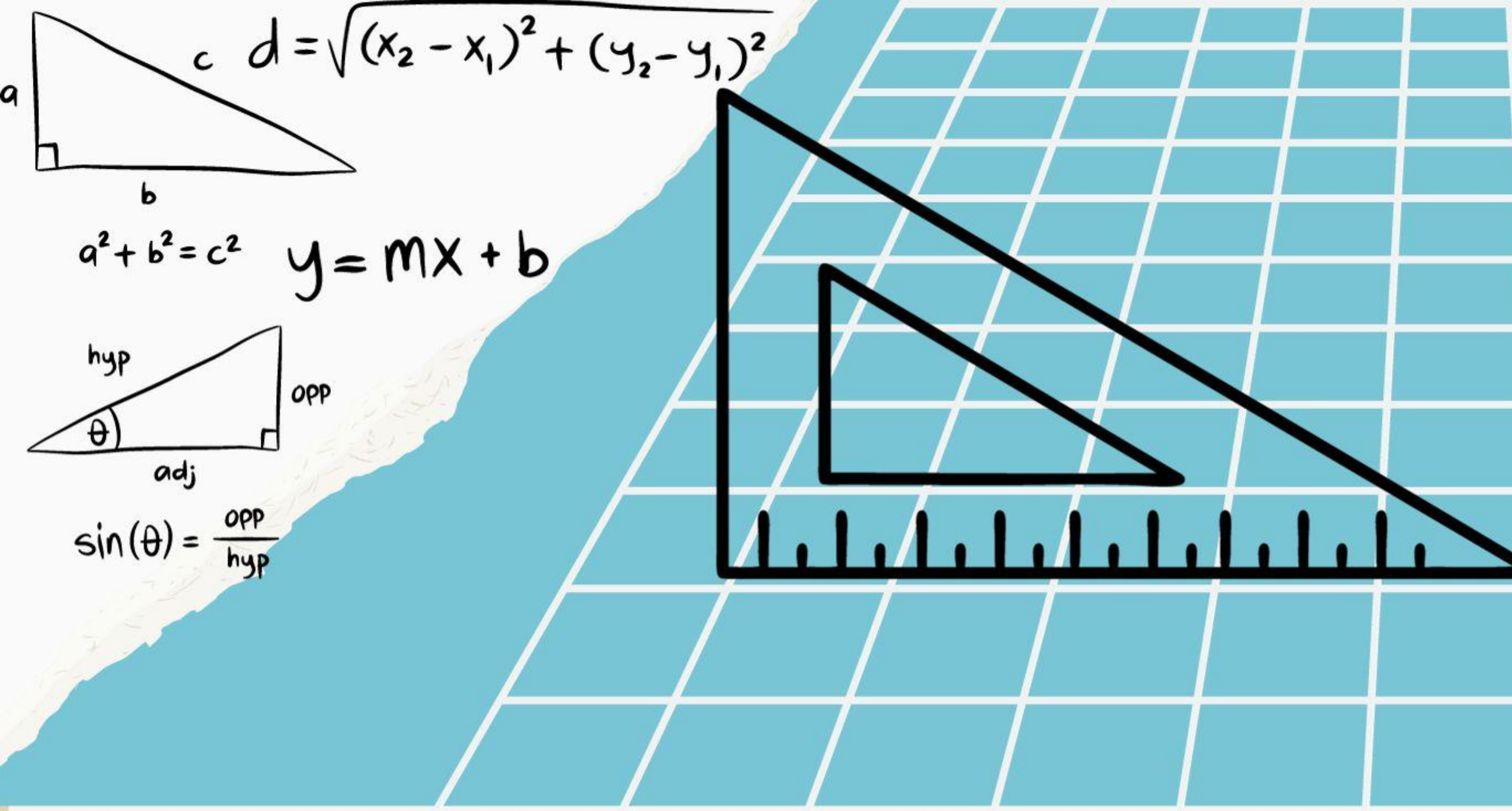
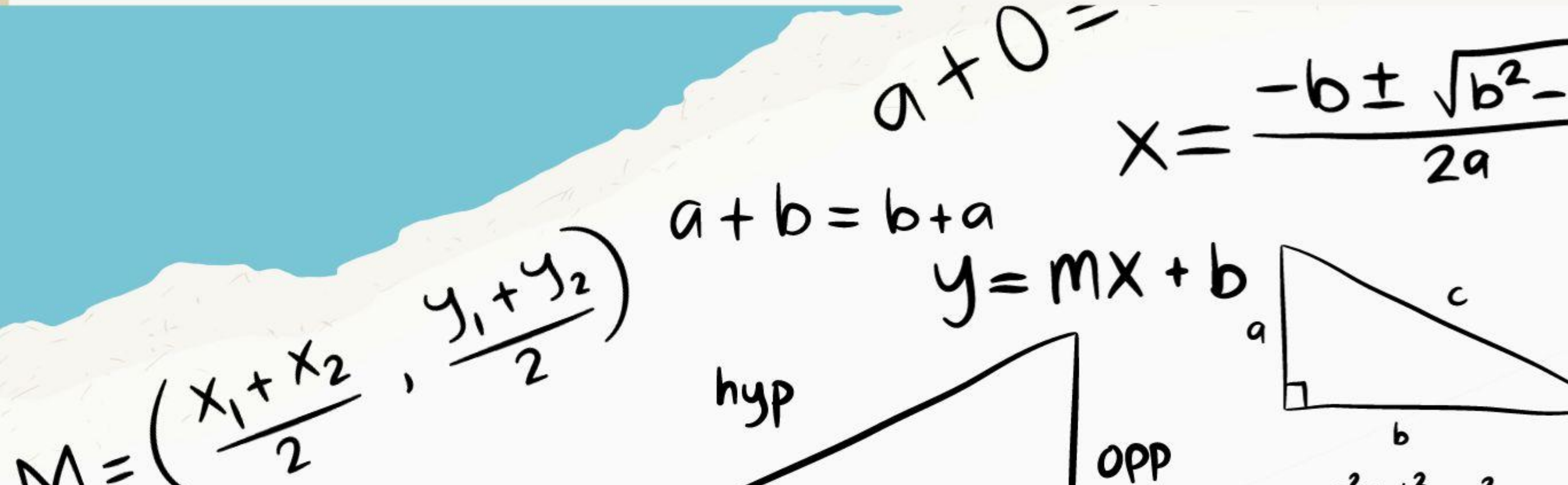


RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

PRODUTO EDUCACIONAL

JESSIE HEVENY SARAIVA LIMA
MIGUEL CHAQUIAM

2023



Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Lima, Jessie Heveny Saraiva

Trigonometria e seu Ensino: Recortes históricos para sala de aula/ Jessie Heveny Saraiva Lima; orientador Miguel Chaquiam, Belém, 2023.

Produto educacional vinculado à dissertação “Trigonometria e seu ensino-recortes históricos para sala de aula” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023. ISBN: 978-65-84998-61-2

1.Trigonometria - Estudo e ensino. 2. Ensino de matemática. 3.Prática de ensino I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD. 23º ed 512

XXXXXXXXXXXXXX

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"TRIGONOMETRIA E SEU ENSINO - RECORTES HISTÓRICOS PARA SALA DE AULA".**

Mestranda: **JESSIE HEVENY SARAIVA LIMA**

Data da avaliação**: 27/10/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

(X) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

( ) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

(X) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______________________

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: ______________________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:*	( ) Sim	( ) Não	(X) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:*	(X) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Grupo focal de professores da educação básica.

( ) Não, justifique: ____________________

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Instituição de Ensino Fundamental.

( ) Não, justifique: ____________________

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Grupo focal de professores

( ) Não, justifique: ____________________

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(X) outro: Grupo focal de professores em decorrência da pandemia.

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____________________

( ) outros membros da comunidade, tais como ____________________

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: IFPA

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

A partir da conclusão do texto dissertativo intitulado: “TRIGONOMETRIA E SEU ENSINO: RECORTES HISTÓRICOS PARA SALA DE AULA[1]”, tendo como objetivo oferecer uma ferramenta didática no ensino de matemática, foi elaborado este Produto Educacional no qual aborda tópicos da História da Trigonometria para serem usados durante o processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

Embora a Matemática seja considerada como uma das disciplinas mais importantes da educação básica, em qualquer sociedade, o seu ensino deve ser muito delicado para que não se torne rapidamente abstrata para a maioria das crianças, fazendo-o perder rapidamente significado, sabor e sem contato cultural (história da sociedade) pelas crianças conhecidas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o entendimento matemático é imprescindível para todos os alunos da Educação Básica, devido sua grande aplicação na sociedade moderna e pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. Além disso, a BNCC (2017) destaca que apesar de a Matemática ser uma ciência hipotético-dedutiva – pois suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados – é importante considerar o seu papel de investigação de fatos das experimentações no processo de aprendizagem da Matemática.

Muitos são os estudos que apontam a importância da História da Matemática para o processo de ensino, como o de Oliveira (2010) no qual diz que esse recurso metodológico na formação do aluno, pode contribuir para o seu maior conhecimento matemático e amenizar as dúvidas e as dificuldades que apresentam em sala de aula. Nesse sentido, a História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode possibilitar uma nova forma de ver e entender a matemática como uma ciência mais atrativa, mais interdisciplinar e mais criativa.

Para melhor organizar o material didático deste Produto Educacional, utilizou-se o Digrama metodológico proposto por Chaquiam (2022), que instrui a construção de um texto grande no qual incorpora uma abordagem multicontextual da história da matemática em relação ao conceito de Trigonometria. A partir desse texto, Chaquiam (2022) sugere a seleção de recortes históricos e a proposta de atividades

[1] Link da Dissertação

para contribuir no processo de ensino do conteúdo de trigonometria na educação básica.

Sendo assim, foi construído o texto grande intitulado *História da Trigonometria*, que conta com momentos importantes e personagens que contribuíram para o desenvolvimento deste conteúdo em questão e, a partir desse texto, foram elaborados os recortes históricos e suas respectivas atividades que compõe este Produto Educacional, são eles:

- Recorte I – Introdução ao Ensino de Trigonometria;
- Recorte II – A ideia de seno, cosseno e tangente;
- Recorte III – Razões Trigonométricas à circunferência da terra.

Para validação deste Produto Educacional foi feito um levantamento via *Google Forms*, no qual os professores puderam avaliar o Texto Histórico e os recortes decorrentes com suas respectivas atividades. A participação dos avaliadores nesse processo foi essencial, pois suas opiniões contribuíram para aprimorar ainda mais este produto.

Vale ressaltar que o a proposta dos recortes históricos é flexível adaptável, permitindo que cada professor selecione e recorte a História de acordo com seus interesses e preferências. Essa abordagem personalizada possibilita uma maior conexão com os alunos e uma abordagem mais adequada às necessidades de cada região escolar.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os tópicos básicos de trigonometria que são abordados durante o processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental são de suma importância para que o estudante desenvolva algumas habilidades para a resolução de problemas futuros no ensino médio e até mesmo em outras disciplinas, por exemplo, na física, geometria e entre outros que envolvem o referido assunto.

De acordo com Mendes (2022), é preocupante a forma de aprendizagem “mecânica” da trigonometria, geralmente abordada nos livros didáticos e na prática do professor, que acarreta um desconhecimento total dos seus elementos-chave como seno, cosseno e tangente de um ângulo, além de outros tópicos básicos no desenvolvimento da trigonometria. Ainda de acordo com o autor, para que o aluno possa compreender o significado matemático desses termos e sua importância para o desenvolvimento da trigonometria, é necessário investigar o processo histórico da construção desse conteúdo em questão.

Há muita reclamação referente à forma como a trigonometria é mostrada nos livros didáticos, de acordo com Costa, Pequeno e Pereira (2019), muitos livros apresentam uma linguagem muito rebuscada e com vários termos técnicos, o que prejudica ainda mais o entendimento dos alunos. Segundo Silva (2013), é muito comum encontrar livros que abordem a trigonometria de uma maneira muito superficial, seguindo a ordem: Definição; Apresentação da tabela de valores trigonométricos; Exercícios para calcular as medidas dos lados de um triângulo retângulo utilizando tabela de valores trigonométricos anterior; Abordagem de conceitos básicos sobre: arcos, ângulos, unidades de medida na circunferência, comprimento de arco, circunferência trigonométrica, congruência de arcos, funções trigonométricas, equações e inequações trigonométricas e resoluções de triângulo quaisquer.

Para Vazquez (2010, apud Bortoli, 2016, p. 15), nossa prática pedagógica em sala de aula deve ser refletida, tendo em vista as dificuldades que muitos alunos têm de aprender os conceitos de trigonometria, revertendo os resultados negativos gerados pela simples memorização de fórmulas. A maneira como o aluno aprende, suas dificuldades e suas necessidades devem ser analisadas e investigadas com o intuito de identificar meios de relacionar o conteúdo com a prática.

Para Nacarato, Bredariol e Passos (2010, apud Bortoli, 2016, p.18) a Trigonometria tem grande importância para a Matemática e para outras áreas do conhecimento e, é por isso, que está presente nos currículos de matemática (ensino fundamental e médio). No entanto, ao chegar no ensino superior os alunos apresentam um conhecimento muito superficial sobre os conceitos trigonométricos e, muitas das vezes, não sabem como utilizar e aplicar suas teorias e fórmulas, tornando-os até mesmo universitários frustrados por acharem que nunca mais viriam esse conteúdo depois do ensino básico.

Durante as aulas de Matemática, em sua maioria, essa disciplina ainda é apresentada aos alunos sem fazer nenhuma referência histórica, utilizando-se ainda de procedimentos mais tradicionais e arcaicos, tornando as aulas mecânicas e levando ao desinteresse dos alunos por não existir um incentivo que desperte um novo olhar dos mesmos para essa disciplina. Nesse sentido, a História da Matemática pode ser utilizada visando inovar a prática pedagógica e proporcionar melhores rendimentos no processo educativo.

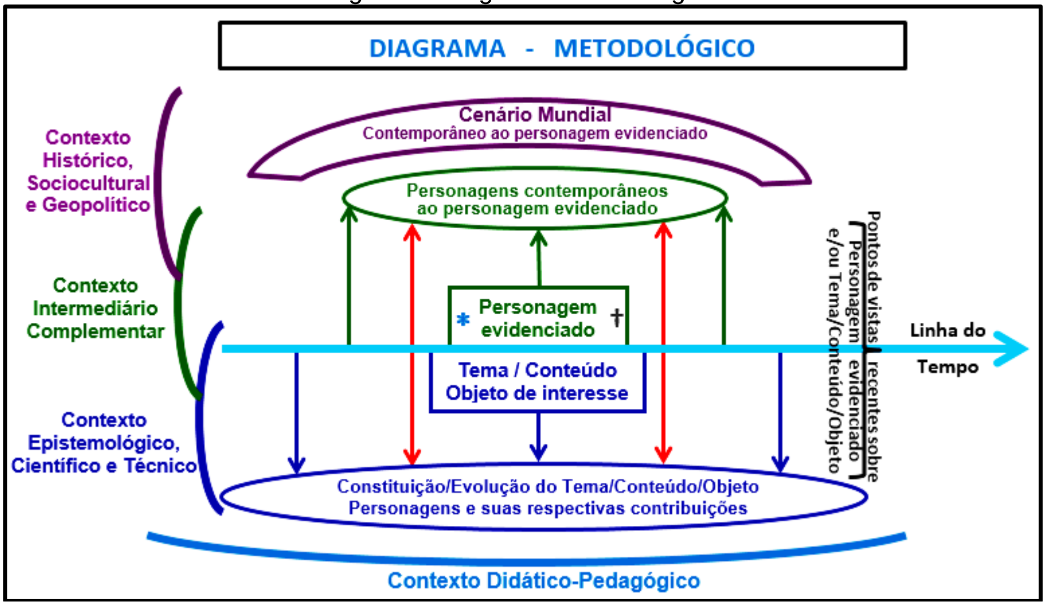
De acordo com Chaquiam (2017) pesquisas recentes apontam que inserir fatos históricos, para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, pode ser uma dinâmica bastante interessante, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que se originou a partir de buscas por soluções para resolver problemas do cotidiano como contar, dividir, calcular alturas e distâncias, além de, através da história, estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Diante das propostas, dos fatos e da importância deste produto, segundo Chaquiam (2022, p. 09), é "imprescindível ter em mente que escrever uma história é "recompor" um passado, circunscrevê-lo, efetuar recortes cronológicos e organizar materiais heterogêneos dos fatos para construir no presente uma razão". Perante deste fato tem-se como objetivo científico e oficial realizar uma interação da História da Matemática com o ensino de Trigonometria, tomando como base o Diagrama Metodológico, em sua versão (2022).

Com o intuito de contribuir à associação da História no Ensino de Matemática em sala de aula, o professor Miguel Chaquiam, a partir do ano de 2013, começou a elaborar um diagrama metodológico cujo objetivo principal foi possibilitar a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação de tempo e espaço na história da humanidade, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na Educação Básica e formação de professores.

A proposta mais recente do diagrama metodológico foi apresentada durante o minicurso "História e Matemática dos Contextos às Atividades" X Bienal de Matemática. Nesse novo modelo, de acordo com Chaquiam (2022), alguns contextos foram alterados por alguma razão, como mostra a figura a seguir:

Figura 1: Diagrama Metodológico



Fonte: Elaborado por Chaquiam (2022)

Os elementos que compõe o diagrama proposto pelo professor Dr. Miguel Chaquiam são:

Tema/conteúdo: esse deve ser o primeiro passo a ser tomado à elaboração do texto. Escolher um tema/conteúdo matemático que seja ensinado, preferencialmente, na Educação Básica.

Evolução do tema/conteúdo: a partir do tema/conteúdo escolhido, devem-se identificar os elementos necessários para compor a sua evolução. Os caminhos traçados, os personagens que se encontram envolvido no desenvolvimento desse tema/conteúdo, as mudanças que sofreu ao longo do tempo. Todas as informações devem ser apresentadas, preferencialmente, em ordem cronológica.

Personagens que contribuíram para a evolução do tema/conteúdo: durante a constituição da evolução do tema/conteúdo podem surgir muitos personagens/matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Selecione os mais relevantes para incluir na sua pesquisa.

Personagem em destaque: é aquele que mais contribuiu para o desenvolvimento do seu tema/conteúdo escolhido. Você irá elegê-lo como personagem principal da sua pesquisa.

Personagens contemporâneos: são os personagens que viveram na mesma época que o seu personagem principal, mas que pode ter contribuído para outros temas/conteúdos ou até mesmo para outras áreas como física, química, biologia e outros. Esse elemento proporciona uma visão Contextual Intermediária Complementar

História da humanidade/cenário mundial: neste componente você irá contar o que acontecia na história da humanidade no período em que o seu personagem principal vivia. Devem ser pontuados os acontecimentos mais importantes, revoluções, descobertas, guerras (se houver), e entre outros. . Esse elemento proporciona uma visão Contextual Histórica, Sociocultural e Geopolítica.

Pontos de vista sobre o personagem em destaque ou tema: tendo em vista o seu tema/conteúdo ou o seu personagem principal, você irá buscar outras pesquisas que abordem sobre e irá apresentar outros pontos de vista, com o intuito de enriquecer o seu trabalho. Esse elemento proporciona uma visão Contextual Epistemológica, Científica e Técnica

3. UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Assim como na Matemática, as origens da Trigonometria também são incertas. Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. Entretanto, embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos para resolverem problemas, foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.

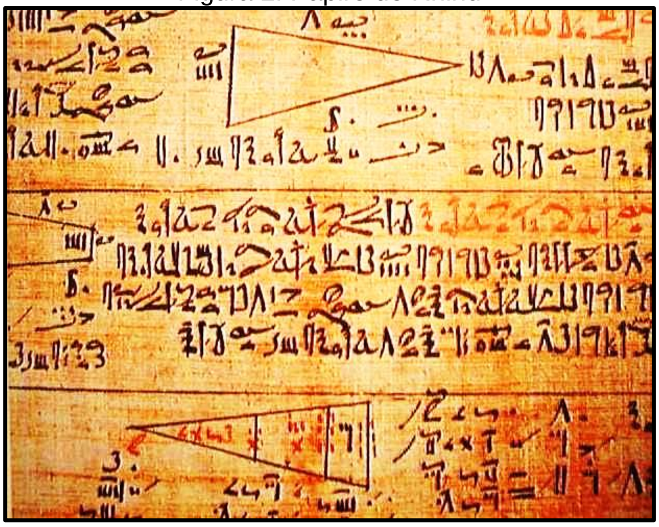
Neste capítulo apresentamos recortes sobre a evolução da trigonometria, desde o século XVI a.C. até o século XIX d. C., abordando personagens que viveram nesses períodos e mostrando as suas contribuições à trigonometria, as transformações que ocorreram e a evolução que tivera até chegar nos dias atuais.

3.1. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XVII A.C. AO SÉCULO XVI A.C.

De acordo com Oliveira (2010), com o passar do tempo, mais especificamente na Babilônia e no Egito, surgiu à necessidade de utilizar mais ainda a Trigonometria para a resolução de problemas sobre a Astronomia, a cronologia do tempo e a agricultura. Nessa investigação mais a fundo para melhor compreender o universo, a Trigonometria foi uma ferramenta importante nas mãos, não só dos babilônios e dos egípcios como também nas dos gregos, hindus e árabes.

Muitos povos contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, segundo Leite (2016), prova disso foi a descoberta de um papiro datado em 1650 a.C. e denominado Papiro de Rhind, em homenagem ao arqueólogo Henry Rhind do século XIX a.C. De acordo com Eves (2011) o Papiro em questão é uma fonte primária e rica sobre a matemática egípcia. Atualmente esse Papiro, juntamente com toda a coleção egípcia que pertence a Rhind, faz parte do acervo do Museu Britânico em Londres.

Figura 2: Papiro de Rhind

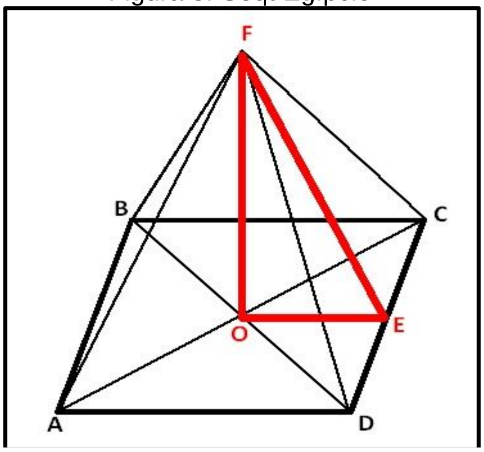


Fonte: Google Imagens

O Papiro de Rhind traz uma série de 84 problemas matemáticos e que fazem menção a uma razão trigonométrica chamada *seqt* – o que chamamos hoje de *cotangente* – que para os egípcios era utilizada para manter constantes as inclinações das faces das pirâmides. Leite (2016), em outras palavras, diz que os egípcios conceberam o significado de *seqt* como a razão entre o afastamento horizontal em relação à elevação vertical e a medida da altura que determinava como deveria ser a inclinação de uma pirâmide.

Segue um exemplo:

Figura 3: Seqt Egípcio



Fonte: Elaborado pela autora

Tomemos a média de OE = 100 e a medida de OF = 50.

Seja OE o afastamento horizontal em relação à elevação vertical e OF a altura da pirâmide, temos a seguinte razão:

$$seqt\frac{OE}{OF} = \frac{100}{50}$$

Isto é,

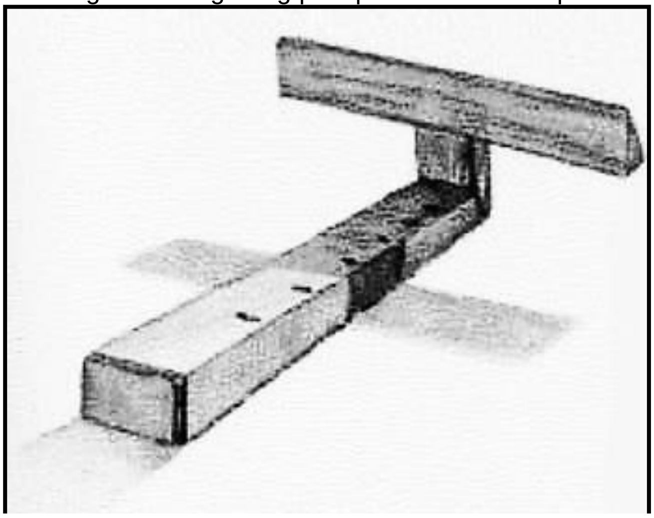
$$seqt\frac{OE}{OF} = 2$$

Além da trigonometria ter grande importância na medição das pirâmides, em aproximadamente 1500 a.C. os egípcios começaram a associar sombras projetadas por Gnômon (uma vara vertical), a números, resultando ao que seria o primeiro relógio de Sol, além de estar anunciando a primeira chegada de algumas funções trigonométricas, como afirma Costa (2003) em seus estudos.

> [...] no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias. COSTA (2003, p. 2-3)

O mais antigo relógio de sol existente está exposto no Museu de Berlim, acredita-se, de acordo com Corrêa (2009), que pertenceu ao faraó Tutmés III do Egito (1504 – 1450 a.C.), e foi denominado régua egípcia. Este era uma pedra, na forma de um T (como mostra a figura 9), com uns 30 cm, suportando outra peça de mesmo comprimento e perpendicular. As linhas de hora eram marcadas na pedra a intervalos regulares. O T era voltado para o Leste na parte da manhã e a Oeste na tarde. A posição da sombra da parte superior do T indicava a hora.

Figura 4: Régua egípcia para medir o tempo



Fonte: Google Imagens

Primitivamente, conforme diz a história, e de acordo com Corrêa (2009), o primeiro relógio construído e usado pelo homem foi o *gnômon*, que consistia em uma coluna que, iluminado pelo sol ou pela lua, projetava sua sombra, que se movia com o passar das horas e entre o seu ponto inicial e seu ponto final havia um espaço que o homem fracionou criando a divisão do tempo. Enquanto os gregos antigos achavam que as horas eram divindades mitológicas, simbolizando as partes do dia, os babilônios e os chineses foram os primeiros que dividiram o dia em horas.

Como bem já foi mencionado, os primeiros vestígios da Trigonometria não surgiram apenas no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios demonstravam grande interesse pela astronomia, tanto por questões religiosas, quanto pelas vinculações com o calendário e as épocas de plantio. De acordo com Costa (2003) é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidade de medidas e uma escala. Os babilônios foram extraordinários astrônomos e influenciaram os povos posteriores.

A matemática teve um grande desenvolvimento na Grécia, e a partir de então a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as demais nações. Segundo Costa (2003) o historiador Heródoto (490 – 420 a.C.) aponta que foram os gregos que deram o nome *gnômon* ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C.

3.2. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO VI A.C.

Os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos estavam na Grécia, são eles: Tales de Mileto (625 – 546 a.C.) e seu discípulo Pitágoras (570 – 495 a.C.); ambos foram um dos primeiros a contribuírem com o surgimento da trigonometria, Tales com seus estudos de semelhança de triângulos que embasam a trigonometria e Pitágoras ao demonstrar o teorema que leva seu nome: "*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"*. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

Apesar de Tales de Mileto não ter deixado nenhuma obra que lhe atribui a muitas descobertas, de acordo com muitos historiadores da matemática antiga – que se baseiam em antigas referências gregas – a geometria demonstrativa iniciou-se com ele. Atribuiu-se a Tales o cálculo da altura das pirâmides, assim como o cálculo da distância até os navios no mar, por triangulação e entre outros fatos geométricos que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, como:

- A demonstração de que os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais;
- A demonstração do teorema "*se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais"*;
- A demonstração de que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;
- A demonstração de que ao unir-se qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtêm-se um triângulo retângulo em C. (provavelmente, para demonstrar esse teorema, tales usou também o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos); e entre outras contribuições.

Tales de Mileto nasceu na cidade de Mileto, por volta de 620 a.C., e morreu aos 78 anos, durante a 58ª Olimpíada, que ocorreu entre 548 e 545 a.C.. De acordo com o historiador Heródoto, ele previu o eclipse de 28 de maio de 585 a.C.. Na geometria há dois teoremas com o nome de Tales, ambos sobre triângulos. Suas contribuições marcaram a evolução da matemática do particular para o geral, do concreto para o abstrato, que se iniciara antes, mas alcançou a maturidade na Grécia.

Segundo Viana (2019) o primeiro uso da palavra trigonometria está no livro "*trigonometria: tratado breve e claro da resolução de triângulos"* (em tradução livre do latim), publicado em 1595 pelo astrônomo e teólogo alemão BartholomaeusPitiscus (1561 – 1613). Entretanto, o uso das ideias da trigonometria é muito anterior: Hiparco de Rhodes (190 a.C. – 120 a.C.), em 180 a.C., publicou um livro no qual apresentava tabelas da primeira função trigonométrica, chamada de "corda" e relacionada com a função seno.

A partir dos ensinamentos deixados por Tales de Mileto, Pitágoras, filho de Mnesarcose Pártenis,continuou seus estudos. De acordo com Kamers (2008), o pai de Pitágoras investiu muito em sua educação, contratou grandes homens da época, como Ferecídio – discípulo de Tales – tendo sido, posteriormente, aluno do próprio Tales em Mileto. Após aprender rapidamente sobre matemática e filosofia deixou para trás seus mestres, seguindo seu caminho e se dedicando cada vez mais por essas áreas de conhecimento.

O ano de nascimento de Pitágoras parece ser inserta, pois as literaturas apontam anos diferentes, como por exemplo, de acordo com Contador (2006) Pitágoras nasceu no ano de 582 a.C., já de acordo com Andrade (2009) nasceu por volta de 569 a.C. e outros estudos apontam que Pitágoras nasceu no ano de 586 a.C. apesar do ano de nascimento ser incerto, sabe-se, de acordo com Andrade (2009), que Pitágoras nasceu em uma extensa e sinuosa ilha Égea chamada Samos, de frente a costa da Ásia Menor.

Com mais ou menos dezenove anos de idade, aconselhado por Tales, Contador (2006) aponta em seus estudos que Pitágoras iniciou uma viagem em direção ao oriente, dirigiu-se primeiro à Babilônia, em seguida à Índia, depois para o Egito e por fim quando regressou à Grécia já estava com cinquenta e três anos e tornou-se líder de um movimento religioso, movimento este que tinha como base o misticismo, ritos de abstinência, pureza e meditações. A escola pitagórica durou cerca de 150 anos, e a visão mística dos pitagóricos não os impediu de fundarem a Aritmética, ou a ciência dos números.

A sociedade pitagórica, de acordo com Andrade (2009), foi fundada na Itália e para se tornar um discípulo de Pitágoras era preciso se submeter a um período de iniciação de pelo menos cinco anos, onde deveria se manter em silêncio absoluto. Após os cinco anos de silêncio e ser admitido na sociedade, o silêncio sobre os ensinamentos do mestre ainda era obrigatório. Desse modo, aquele que se tornasse discípulo de Pitágoras teria que se dedicar exclusivamente para esta missão, abandonando os negócios – pois não podia se envolver com o comércio – além de não poder se defender no tribunal e não podia sacrificar animais, se alimentando de mel e cevada.

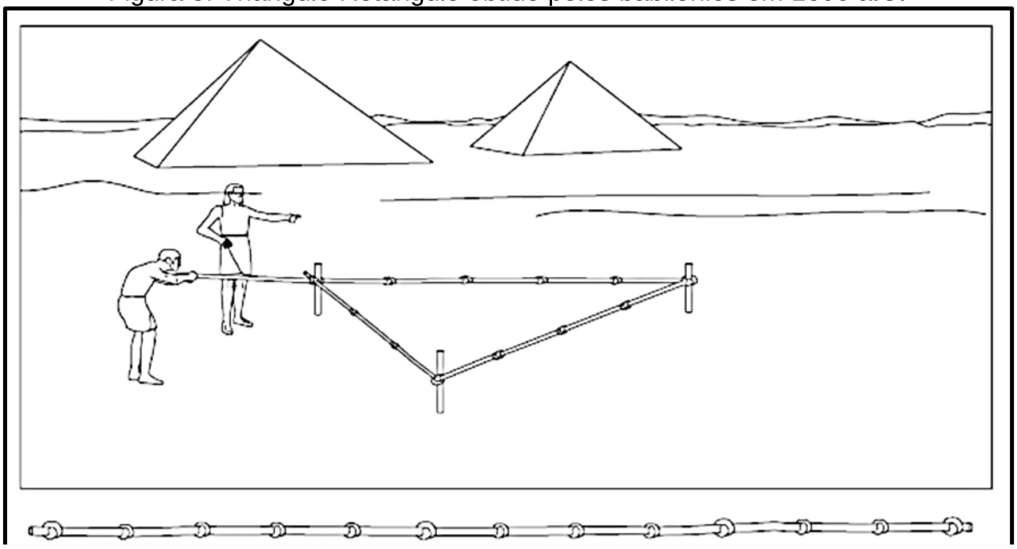
Segundo Andrade (2009) a sociedade era de caráter religioso e filosófico, que apresentavam aspectos políticos. O termo mais correto para descrever essa sociedade é bomakoeion, ou seja, um lugar onde as pessoas podiam reunir e ouvir os discursos de Pitágoras. Desde o começo, Pitágoras era o líder da escola, sua divinização estabeleceu sua absoluta autoridade no interior da sociedade. Ainda de acordo com Andrade (2009), os membros contribuíram para o desenvolvimento da filosofia com suas ideias originais, mas todas as inovações continuavam sendo atribuídas a Pitágoras.

Pitágoras, como astrônomo, de acordo com Contador (2006), foi o primeiro a afirmar que a terra era redonda e estava suspensa no espaço, assim como os planetas giravam em torno de uma chama central à qual dava o nome de Héstia, que não era o sol; a terra por sua vez recebia a luz de Héstia e a refletia. De acordo com Pitágoras, o movimento dos planetas produzia sons que nós não ouvíamos, porque estávamos acostumados com eles. Com essa forma de pensar o seu sistema foi o melhor que se conheceu até Copérnico.

Os estudos de Kamers (2008) apontam que na época em que Pitágoras visitou o Egito ficou impressionado com a maneira que as pirâmides eram construídas e, a partir de então, depois de muitos estudos, desenvolveu o conhecido “Teorema de Pitágoras”. O Teorema de Pitágoras aborda a relação entre os lados e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Segundo Contador (2006) Pitágoras foi o primeiro homem não a criar, mas a conceituar e deduzir este teorema. Embora os babilônios não tenham nos deixados deduções, esta relação já era conhecida por eles.

Para o que hoje utilizamos o chamado Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$, onde a representa a hipotenusa e os catetos são representados por b e c) os babilônios utilizavam um instrumento muito simples e prático para construir ângulos retos: uma corda. De acordo com Kamers (2008), na corda eles iam fazendo nós com distâncias sempre iguais e depois marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si. Depois juntavam o primeiro ao último nó. Quando esticavam a corda, fixando-a nos três nós marcados, se tinha um triângulo retângulo.

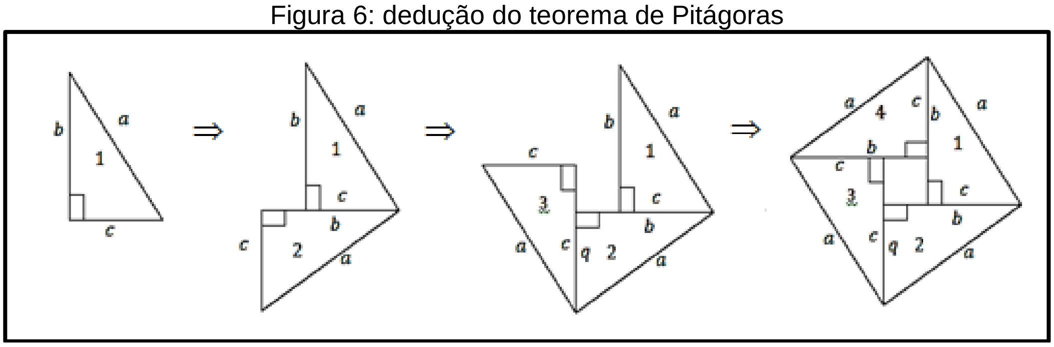
Figura 5: Triângulo Retângulo obtido pelos babilônios em 1600 a.C.



Fonte: Kamers (2008)

Diante das várias deduções existentes, Contador (2006) mostra em seus estudos uma simples dedução que comprova esse teorema. Seja um triângulo retângulo de lados *b, c* e hipotenusa*a*, a partir dele, é possível montar um quadrado cujo lado seja a hipotenusa desse triângulo, como mostra a figura a seguir:

Figura 6: dedução do teorema de Pitágoras



Fonte: Contador (2006)

Notemos que o mesmo triângulo repetido quatro vezes forma um quadrado de lado a e área denominada de S, note que ganhamos no centro, um pequeno quadrado de lado $b - c$e área que chamaremos de S', então se chamarmos de S_1, S_2, S_3 e S_4 as áreas dos triângulos 1, 2, 3 e 4 temos:

a = hipotenusa;

b= cateto maior;

c= cateto menor;

S= área do quadrado grande;

S'= área do quadrado pequeno.

$$S=a^2$$

$$S'=(b-c)^2$$

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S'$$

$$S=\frac{b\cdot c}{2}+\frac{b\cdot c}{2}+\frac{b\cdot c}{2}+\frac{b\cdot c}{2}+(b-c)^2$$

$$S=2\cdot b\cdot c+b^2-2\cdot b\cdot c+c^2$$

Logo: $a^2=b^2+c^2$

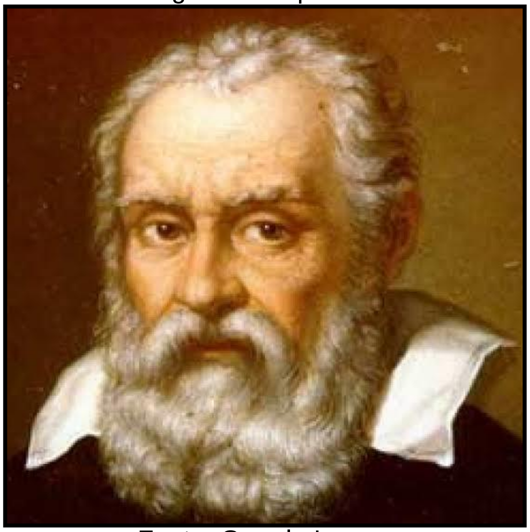
Esta fórmula, de acordo com Contador (2006), que é válida para todo e qualquer triângulo retângulo e imortalizou o nome de Pitágoras, atualmente é uma dedução simples, mas com certeza está entre as mais importantes da matemática e levou milhares de anos para ser demonstrada com prova concreta. O homem Pitágoras morreu, mas seus ensinamentos continuaram e seu trabalho foi escrito por Filolau de Tebas cerca de cem anos depois de sua morte.

3.3. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO III A.C. AO SÉCULO II A.C.

Os personagens que viveram nesse período e que contribuíram para a trigonometria foram Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio (personagens do século III a.C.) e Hiparco de Níceia (personagem do século II a.C.). Que além de terem sido importantes para o desenvolvimento da trigonometria, contribuíram significativamente para a construção do que viria a ser considerada a primeira tabela trigonométrica.

Arquimedes (287 – 212 a.C.) foi um importante estudioso da mecânica teórica. Seus textos eram semelhantes aos *Elementos* de Euclides, eram escritas de maneira formal, partindo de definições e postulados simples. Uma de suas obras mais importantes é chamada *Sobre Corpos Flutuantes,* estruturada de forma matemática e abordava postulados sobre pressão e fluidos, hoje conhecido como *Princípio hidrostático*.

Figura 7: Arquimedes



Fonte: Google Imagens

Embora Arquimedes seja mais conhecido pelo princípio da Hidrostática, importante descoberta para os estudos das ciências físicas, também teve grande contribuição na matemática ao estudar sobre a medida do círculo. De acordo com Mol (2013), Arquimedes consagrou-se a Matemática quando conseguiu avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Ao estudar um hexágono regular inscrito e um hexágono circunscrito, duplicou progressivamente o número de lados até obter o polígono de 96 lados. Como resultado de seus cálculos, conseguiu encontrar um valor próximo para π da forma $\mathbf{3}\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{71}} < \pi < \mathbf{3}\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{70}}$, ou seja, $\frac{3\,.\,71+10}{71} < \boldsymbol{\pi} < \frac{3\,.\,70+10}{70}$, logo, $3{,}1408 < \boldsymbol{\pi} < 3{,}1428$ (comparando com o valor $\boldsymbol{\pi}$ = 3,14159...).

Mol (2013) aponta em seu estudo que Arquimedes tinha um tratado que foi descoberto no início do século XX chamado *O Método.* Nesta obra, Arquimedes aborda alguns aspectos do seu processo de criação matemática. Para ele, as demonstrações poderiam ser facilitadas a partir da existência de indicações sobre a validade de um resultado, e essas indicações, Arquimedes obtinha por investigações “mecânicas”, após as quais uma prova rigorosa deveria ser construída pelo método geométrico tradicional. Esse tratado continha uma série de cartas escrita por Arquimedes ao matemático Erastóstenes, queé outro destaque do século III a.C.

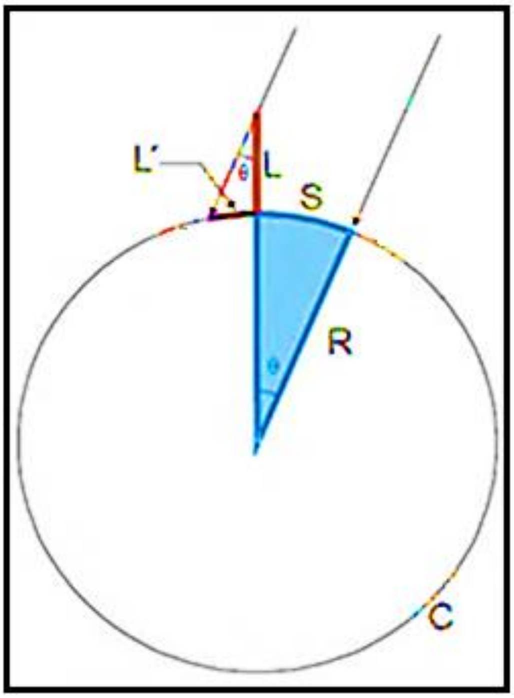
Mesmo estudando círculos e retas e aplicando esses resultados na Astronomia, Arquimedes não conseguiu chegar a uma trigonometria sistemática. Porém, seus estudos e suas cartas ajudaram o Erastóstenes a produzir, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais notável medida da circunferência da terra na Antiguidade.

Erastóstenes (276 – 194 a.C.) Por volta de ± 240 a.C. fez uma medida surpreendentemente correta da circunferência da terra, não foi a primeira medição feita, porém a de maior precisão para a época e, para isso, ele comparou as sombras ao meio-dia entre Alexandria e Siena. Segundo Vinagre (2002) ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus, depois dividiu 360 por 7,2 o que dá 50, e assim soube que eram necessárias 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da terra.

Abaixo, tem uma análise mais detalhada da ideia de Erastóstenes.

Iremos partir do esquema apresentado na figura 12, e definir as grandezas envolvidas no problema:

Figura 8: Esquema da Ideia de Erastóstenes



Fonte: (Vinagre 2002)

- S é a distância entre Siena e Alexandria;
- $\boldsymbol{\theta}$é o ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria;
- C é a circunferência da terra;
- D é o diâmetro da terra;
- R é o raio da terra;

- L é o comprimento do poste;
- L' é o comprimento da sombra do poste;

Para calcular a circunferência da terra, de acordo com Vinagre (2002), Erastóstenes utilizou a seguinte razão trigonométrica: $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{2\pi}}$. Ou seja, a razão entre a distância de Alexandria e Siena e a circunferência igual a razão do ângulo formado a partir da distância entre as cidades e o ângulo total da circunferência terrestre (2π). Isolando C, teremos:$C = \left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot \boldsymbol{s}$. E a partir dessa relação Eratóstenes fez seus cálculos, substituiu os valores que ele encontrou para $\boldsymbol{\theta}(0{,}02\,.\,2\pi)$ e o valor de S (5.000 estádios) que era obtido pelo número de passos dados de Siena até Alexandria pelos Bematistas do Rei multiplicado pelo comprimento de cada passo que supostamente tinha o mesmo tamanho. E obteve a seguinte equação:

$$C = \left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{0{,}02\,.2\pi}}\right) \cdot 5000;\ C = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0{,}02}}\right) \cdot 5000;\ C = 50.5000;\ C\ =\ 250.000\ est\acute{a}dios$$

E para obter o resultado em quilômetros multiplicamos o resultando obtido em C por 0,157 Km, o que resulta: $C = 39.250\ Km$. A partir desse valor encontrado poderemos também calcular o valor do Raio da terra utilizando a relação $C = 2\pi R$ e por consequência o valor do Diâmetro (o dobro do Raio).

Como podemos observar, para realizar tal aproximação de medida utilizou semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relaçõesmais sistemáticas entre ângulos e cordas. Em seus estudos foi determinante na época oconhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo.

Após os estudos feitos por Erastóstenes para calcular a circunferência da terra, surge às contribuições de Apolônio (262-190 a.C.) à trigonometria,Segundo Oliveira (2010), ao tentar calcular um melhor conjunto de cordas, fato que o levou a perceber a necessidade de estabelecer relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Por volta de 180 a.C.,Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o dia em 360 partes. Mais tarde, Hiparco de Nicéia(180 -125 a.C.) utilizou-se das ideias de Apolônio e Hipsícles e criou a primeira tabela trigonométrica, com valores de cordas de vários ângulos de 0º a 180º.

A maioria das informações sobre as contribuições de Hiparco de Nicéia não puderam ser obtidas com segurança, no geral não se sabe as datas e a ordem de redação dos seus livros. Porém, há muitos relatos em *O comentário de Arato* escrito pelo próprio Hiparco e há mais suposições de suas obras em Almagesto, escrito por Ptolomeu. Tendo isso em vista, tomaremos por base essas obras para discorrer sobre as contribuições de Hiparco para a astronomia e, consequentemente, à trigonometria.

Segundo Moreira (2005), Hiparco é considerado o pai da trigonometria pelo fato de o mesmo ter introduzido as medidas sexagionais em Astronomia e elaborado um tratado de doze livros sobre a construção de tábuas de cordas: primeira tabela trigonométrica.

A tabela trigonométrica de Hiparco, segundo Gillispie (2007), foi baseada em um círculo, cuja circunferência era dividida em 360 graus de 60 minutos e o raio R expresso em minutos era dado por R = 360. 60'/ 2.π, que seria aproximadamente 3438'. Essa tabela das cordas sobreviveu apenas em relação aos senos com R = 3438' e valores calculados a intervalo de 3-3/4º.

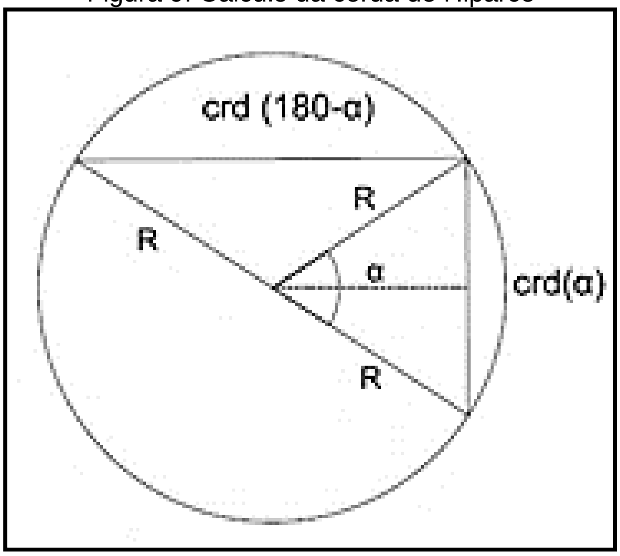
Para realizar os cálculos da tabela de cordas, Hiparco iniciou com o ângulo de 60º, de acordo com Oliveira (2010). Em seguida observou que a corda de 60º era igual ao raio da circunferência em um triângulo equilátero, ou seja, Crd (60) = 3430'. Para o ângulo de 90º ele obteve a corda igual a:

$$R\cdot \sqrt{2} = 3438' \cdot 1{,}414 \approx 4862' = 81{,}2 = 81\cdot 60 + 2.$$

Para completar a tabela e calcular o valor as outras cordas, Hiparco utilizou dois resultados geométricos, a primeira é uma aplicação trivial do teorema de Pitágoras, e a segunda já era conhecida por Arquimedes.

Primeiro resultado: Aplicando o Teorema de Pitágoras na Figura 13, tem-se:

Figura 9: Cálculo da corda de Hiparco



Fonte: Oliveira (2010)

$$(\mathbf{R}+\mathbf{R})^2 = \mathbf{crd}^2(\mathbf{180}-\boldsymbol{a}) + \mathbf{crd}^2(\boldsymbol{a})$$
$$\mathbf{crd}^2(\mathbf{180}-\boldsymbol{a}) = (\mathbf{2R})^2 - \mathbf{crd}^2(\boldsymbol{a})$$
$$\mathbf{crd}(\mathbf{180}-\boldsymbol{a}) = \sqrt{(\mathbf{2R})^2-\mathbf{crd}^2(\boldsymbol{a})}$$

Segundo resultado: Hiparco deduziu uma fórmula para a corda do arco-metade, $\mathbf{crd}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{R}\,(\mathbf{2R}-\mathbf{crd}(\mathbf{180}-\boldsymbol{a}))}$. Foi dessa forma que Hiparco calculou sua tabela de corda de 0º a 180º com intervalos de $\mathbf{7\frac{1}{2}}^{\circ}$ em $\mathbf{7\frac{1}{2}}^{\circ}$, tendo em vista que $\mathbf{7\frac{1}{2}}^{\circ}$ = 15º/2 e 15º = 30º/2.

Segundo Oliveira (2010) não há relatos que comprovem como Hiparco fez sua tabela, pois muitos de seus estudos e registros se perderam. Porém, quando Téon de Alexandria comentou sobre as tabelas de Ptolomeu, fez referência ao tratado de doze livros de Hiparco sobre cordas em um círculo, então provavelmente os métodos de Hiparco sejam parecidos com os de Ptolomeu.

Diante disso, concluímos que as teorias de Hiparco contribuíram significativamente para a realização da mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade, o *Almagesto* de Claudio Ptolomeu.

3.4. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO II

Cláudio Ptolomeu (100 - 168) foi astrônomo, geógrafo e matemático, onde de acordo com Mol (2013) escreveu um dos textos científicos de maior influência de todos os tempos, tal obra é intitulado de *Síntese Matemática*no qual aborda um tratado astronômico e matemático sobre o movimento estelar e planetário que celebraria o modelo geocêntrico do universo. Composto por 13 livros, seu tratado ficou conhecido como *Almagesto*, onde Ptolomeu também deu contribuições significativas à trigonometria na antiguidade.

Segundo Oliveira (2010) o nome *Almagesto*– proveniente de *Al magiste* – tem origem árabe, pois foram eles os primeiros a traduzi-lo diversas vezes por considerarem esta como a maior obra em relação aos trabalhos astronômicos de Aristarco, Hiparco e outros. O primeiro dos 13 livros traz informações sobre matemáticas preliminares, indispensáveis na época para compreender os fenômenos celestes, por exemplo, as proposições sobre geometria esférica já estudada por seu predecessor Menelau de Alexandria. Os demais livros foram dedicados à astronomia.

Apesar de Hiparco ter contribuído significativamente à trigonometria com a primeira tabela de cordas, de acordo com Oliveira (2010) o *Almagesto* contém uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco, onde mostra os métodos para calcular o comprimento das cordas, as construções da tábua de cordas, entre outros. Hiparcode Nicéia foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande Cláudio Ptolomeu que estendeu os trabalhos de Hiparco, criando um procedimento para o cálculo de cordas subentendida por arcos de um círculo.

De acordo com Mol (2013) a separação de um círculo em 360 graus foi celebrizada por Ptolomeu. Empregou o sistema sexagesimal para obter os comprimentos das cordas cuja unidade de medida denotou por parte, após dividir o círculo em 360 partes, dividiu o diâmetro em 120 partes e utilizou $\frac{377}{120}$como uma aproximação para π, que no sistema decimal isso equivale a$\pi \approx$3,1416. Dessa forma, segundo Oliveira (2010), Ptolomeu conseguiu calcular o comprimento das cordas correspondentes aos ângulos centrais de 0º a 180º em intervalos de$\frac{1º}{2}$.

Segundo Mol (2013) a tabela de cordas de Ptolomeu seria referência para os astrônomos por mais de mil anos. A construção da tabela equivalia a construir uma tabela de senos de $\frac{1º}{4}$ a 90º e, uma vez que $cos\theta = sen(90º - \theta)$, indiretamente também fornecia uma tabela de cossenos. De acordo com Costa (2013) na verdade, não existe no *Almagesto* nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, mas sim a função corda do arco x ou crd x, embora naturalmente estes termos não apareçam.

Ainda de acordo com Costa (2013) a função corda do arco x era determinada como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listrando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de crd x correspondente a um acréscimo de um minuto em x. A terceira coluna era usada para interpolações, isto é, para achar o valor de crd x se x estivesse entre duas entradas na coluna de arcos.

Quadro 1: Cordas de Ptolomeu

$\propto$em graus	Crd ($\propto$)	$\propto$em graus	Crd ($\propto$)
$\frac{1^{\circ}}{2}$	0; 31, 25	40º	41; 2, 33
1º	1; 2, 50	60º	60; 0, 0
$1^{\circ}\frac{1}{2}$	1; 34, 15	70º	68; 49, 45
2	2; 5, 40	90º	84; 51,57
$2^{\circ}\frac{1}{2}$	2; 37, 4	100º	91; 55, 32
3º	3; 8, 28	120º	103; 55, 23
5º	5; 14, 4	135º	110; 51, 57
10º	10; 27, 32	140º	112; 45, 28
20º	20; 50, 16	160º	118; 10, 37
30º	31; 3, 30	180º	120; 0, 0

Fonte: Oliveira (2010)

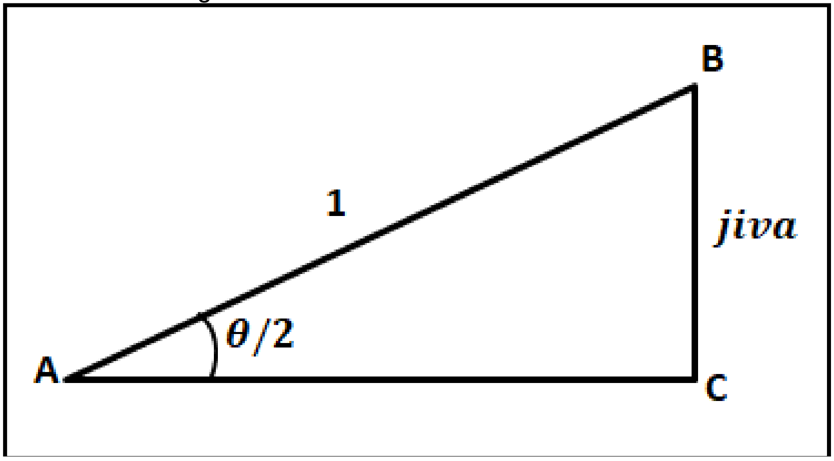
Dessa forma, Ptolomeu deu sua grande contribuição à trigonometria a partir de estudos já feitos, como é o caso de Hiparco, onde ele só aprimorou seus estudos e lançando mão das fórmulas da diferença da corda de um arco, o arco metade, a soma de dois arcos e a relação entre arcos (maior e menor), Ptolomeu também obteve sua tabela de cordas, como mostra o quadro seguir.

3.5. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO IX AO SÉCULO XIV

De acordo com Costa (2003) pode-se dizer que os árabes começaram a ser influentes a partir da fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al-Battani, ou Albategnius, nas traduções latinas. Na matemática, em especial na trigonometria, de acordo com Júnior e Oliveira (2017), deixou grandes e importantes contribuições, tendo o mérito de ter empregado pela primeira vez, depois dos hindus, os senos ao invés de cordas.

Costa (2003) aponta que os estudos de Al-Battani ficaram entre o *Almagesto* e *Siddhanta* e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes. Al- Battani foi influência principalmente após sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

Figura 10: A ideia do raio 1 de Al-Battani

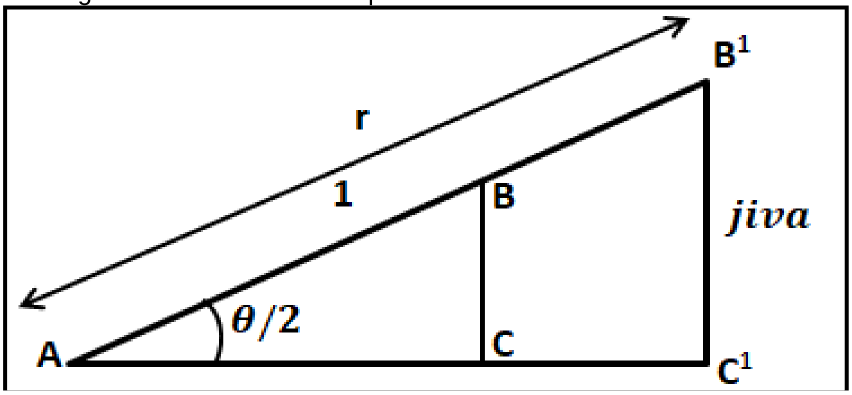


Fonte: Costa (2003) – adaptado pelos autores

$$jiva = \frac{cateto\ \ oposto}{1} = \frac{BC}{1}, \text{ ou seja, } sen\frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1}$$

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que seja as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, pode-se afirmar que: $\Delta\,\mathrm{ABC} \approx \Delta\mathrm{AB^1C^1}$. No Δ ABC temos $\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{jiva}}{1}$. Aplicando o teorema de Tales, temos: $\frac{\mathrm{jiva}}{1} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$, logo $\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{B^1C^1}}{\mathrm{AB^1}} = \frac{\mathrm{jiva}}{1}$.

Figura 11: Fórmula usada para construir a tabela de Al-Battani



Fonte: Costa (2003) – adaptado pelos autores.

De acordo com Costa (2003), a partir desta fórmula pode-se construir uma tábua de 1/4 a 90º, variando de 1/4 em 1/4 de graus, ou seja, uma tabela de senos, a pesar deste nome não ter sido usado para designá-la. Segundo Costa (2003) Al-Battani tinha interesse em calcular a altitude do sol, e para isso foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas mais precisas que as existentes na época, sendo assim, fez a primeira aparição do termo seno e o teorema dos senos aplicado por ele: $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{senA}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{senB}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{SenC}}$.

BhaskaraAkaria (1114 – 1185) – algumas vezes referido como Bhaskara II (por já ter existido um matemático anterior com o mesmo nome) de acordo com Katz (2010) tornou-se conhecido por ter criado a fórmula matemática aplicada na equação do segundo grau, embora haja controvérsias quanto a esse fato.

Embora Bhaskara tenha trabalhado com a questão da raiz quadrada em equações, sabendo que existiam duas raízes na resolução da equação de segundo grau, não há registros que confirmem que a conhecida fórmula de Bhaskaraseja realmente dele. Porém, as seguintes equações referentes ao estudo de seno e cosseno foram concebidas por ele:

$$sen(a+b) = sena.cosb + senb.\frac{cosa}{sen(a-b)}$$

$$sen(a+b) = sena.cosb - senb.cosa$$

Bhaskara determinou um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo. Segundo Katz (2010)curiosamente, embora o matemático Bhaskara tratasse principalmente de problemas algébricos, as necessidades da astronomia sempre exigiram dele familiarização com as ideias da trigonometria. Foi a partir do estudo contínuo destas noções que os matemáticos indianos do século XIV ao XVI, em Kerala, no sul da Índia, desenvolveram ideias sobre formas de representar trigonométricas por séries. Nenhum texto astronômico indiano até o tempo de Bhaskara continha uma tabela de senos para arcos inferiores a $3\frac{3}{4}$º. Em vez disso, os indianos desenvolveram métodos de aproximação.

Fibonacci (1170-1250),de acordo com Gillispie (2007) foi o primeiro matemático do Ocidente cristão. Os números de Fibonacci se relacionam com outras áreas da matemática, em especial trataremos da relação de Fibonacci com a Trigonometria. De acordo com Almeida (2014) a partir de algumas identidades trigonométricas e a fórmula de Binet, é possível determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci, tal fórmula foi estabelecida por W. Hop e Jones em 192. Para determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci, de acordo com Almeida (2014), iremos considerar as identidades trigonométricas:

1. $sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$

2. $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1$

3. $cos3\theta = \cos(2\theta + \theta) = cos2\theta cos\theta - sin2\theta sin\theta$

A partir das identidades obtemos:

$$cos3\theta = cos\theta(2cos^2\theta - 1) - (2sin\theta cos\theta)sin\theta$$
$$= 2cos^3\theta - cos\theta - 2cos\theta sin^2\theta$$
$$= 2cos^3\theta - cos\theta - 2cos\theta(1 - cos^2\theta)$$
$$= 2cos^3\theta - cos\theta + 2cos^3\theta - 2cos\theta$$
$$= 4cos^3\theta - 3cos\theta$$

Agora, iremos considerar $\theta = \pi/10$. Temos: $\frac{\pi}{2} = 5\theta = 2\theta + 3\theta$.

Daí, temos que 2θ e 3θ são ângulos complementares e, $sin2\theta = cos3\theta$.

$$2sin\theta cos\theta = sin2\theta = cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta.$$

Dividindo por $cos\theta$ (com $cos\theta \neq 0$), obtemos:$2sin\theta = 4cos^2\theta - 3$

$$2sin\theta = 4(1 - sin^2\theta) - 3$$
$$2sin\theta = -4sin^2\theta + 1\text{e,}$$

$4sin^2\theta + 2sin\theta - 1 = 0$,uma equação do segundo grau em $sin\theta$.

Resolvendo a equação obtida, encontramos as raízes:

$$sin\theta = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como $\theta = \pi/10$ um arco do primeiro quadrante, temos que o $sin\theta > 0$, temos que:

$\sin\frac{\pi}{10} = sin\theta = \frac{(-1+\sqrt{5})}{4} = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\beta = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2\alpha}$, desde que

$$\alpha\beta = -1.$$

Calculamos agora o $cos2\theta$. Como $\theta = \left(\frac{\pi}{10}\right), \left(\frac{\pi}{5}\right) = 20$ e $cos\frac{\pi}{5} = cos2\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow cos\frac{\pi}{5} = cos^2\theta - sin^2\theta \Rightarrow cos\frac{\pi}{5} = 1 - 2sin^2\theta \Rightarrow cos\frac{\pi}{5} = 1 - 2\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{1}{2\alpha^2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{5} = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

Multiplicando ambos os termos por β^2, obtemos $\alpha/2$ que é igual a$\cos(\pi/5)$., ou seja, $\alpha/2 = \ cos(\pi/5)$. Calculando $cos 3\pi/5$ iremos obter como resultado:

$\frac{1}{2}\alpha(\alpha^2 - 3)$. Como $\alpha^2 + \beta^2 = 3 \rightarrow \alpha^2 - 3 = \beta^2$, temos que: $COS\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\beta$

Já encontramos que $\cos(\pi/5) = \alpha/2$, então $\alpha = 2\cos(\pi/5)$ e $\cos(3\pi/5) = (1/2)\beta$. Logo, $\beta = 2\cos(3\pi/5)$.

Substituindo as relações encontradas na fórmula e Binet, podemos determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci:

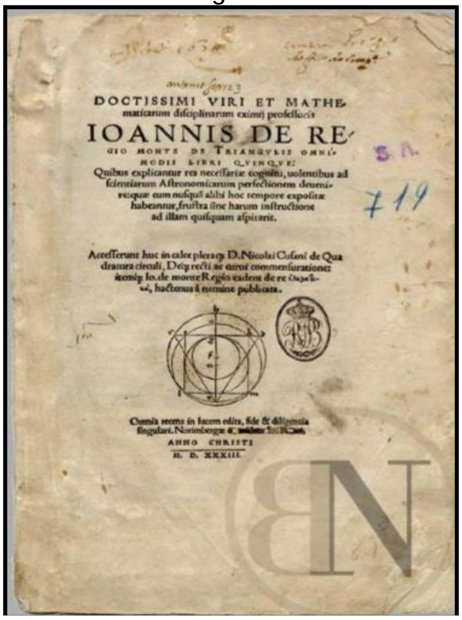
$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{(\cos(\pi/5))^n - (2\cos(3\pi/5))^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2^n)\left[cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right], n \geq 0.$$

Se tratando de trigonometria, Nicole d'Oresme (1320-1382)introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis, que auxiliaria o conceito de função que, mais tarde seria utilizado nos conceitos trigonométricos. Em paralelo ao desenvolvimento da trigonometria ocorreu o desenvolvimento das funções com Nicole d'Oresme, onde com seu "*TreatiseontheconfigurationofQualitiesandMotions*", introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso velocidade por tempo).

3.6. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XV AO SÉCULO XVI

Johannes Muller (1436-1476) contribuiu significativamente para o desenvolvimento da trigonometria. De acordo com Pereira (2011), a principal obra que contribuiu para esse desenvolvimento é *De TrianguluisOmnimodisLibriQuinque* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos) iniciada em Viena e terminada parcialmente em Veneza, em 1463, que apresentava uma primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, uma tentativa importante de tratamento da Trigonometria de modo independente a Astronomia.

Figura 12: Capa da obra de TrianguluisOmnimodisLibriQuinque, 1533



Fonte: Pereira (2011)

Em 1462, Johannes Muller sentiu a necessidade de escrever regras sobre Triângulos que seriam úteis aos leitores do Epítome. Segundo Pereira (2011), esse trabalho se constituiu um marco no estabelecimento da Trigonometria como um ramo da Matemática independente da Astronomia. Infelizmente, é uma obra inacabada: o Livro V, com suas aplicações de Leis de Cossenos, apresentadas ali pela primeira vez, é apenas um fragmento. Este trabalho, dedicado por Muller a Bessarion – cardeal da época – foi publicado por Schoner em 1533.

Johannes Muller, primeiramente, completou os livros sobre Trigonometria Esférica, que mais tarde formaria os livros III e IV. Como no Epítome, o *De Triangulis* contém a Lei de Seno que relaciona os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele escreveu no livro II um tratamento para triângulos planos, embora apareça esse tratamento também no livro I. Johannes Muller começou este trabalho em 1462, de acordo com pinheiro (2011), e deve ter escrito o livro IV ainda na Itália.

A obra *De TrianguluisOmnimodisLibriQuinque*poderia servir como base para cálculos geométricos e astronômicos como ele havia originalmente planejado e deveria ser usado para calcular diariamente as coisas do céu e o tamanho e distância de cometas. A verdadeira ferramenta útil aqui era a trigonometria. No livro I existiam 23 definições, 7 axiomas e 57 teoremas, nos livros II, III, IV e V não haviam nem definições e nem axiomas, apenas teoremas, 33, 56, 34 e 15 respectivamente, em cada livro.

De acordo com Pereira (2011) Johannes Muller se baseou apenas nas regras iniciadas no Epítome para dar continuidade à Trigonometria Esférica. Ele já estava familiarizado com os trabalhos de Menelaus, Theodosius e Gebber, como revelado em suas cartas para Bianchini, porém, nenhum deles foram mencionados no *De Trianguluis.* Ou seja, Muller omite suas fontes, embora não tenha declarado os teoremas como sendo dele próprio, porém, sabe-se que o livro e as tábuas de seno são fruto do seu trabalho. Logo, podemos atribuir a ele a Lei dos senos e a solução de muitos triângulos.

De acordo com Costa (2013) Nicolau Copérnico (1473-1543) contribuiu à trigonometria ao completar, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu *De LateribusetAngulisTriangulorum*, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus em 1542, onde contempla a construção de tabelas trigonométricas que parte desde o século II a.C. com Hiparco de Nicéia até a construção da tabela feita por Copérnico no século XVI.

Segundo Mendes (2010) para sustentar sua teoria do universo, Copérnico necessitava de alguns desenvolvimentos em trigonometria, como por exemplo, a tabela de senos, encontrada em sua obra *De revolutionibusorbiumcoelestium*, que passou a ser modelo à astronomia e posteriormente tomou o lugar da tabela de Ptolomeu, um dos autores mais importantes relacionadas à construção das tabelas trigonométricas com sua obra *Almagesto*.

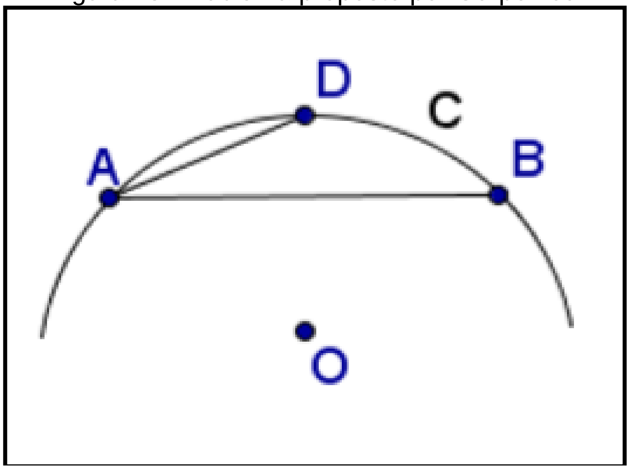
Com a construção de uma tabela de senos para usar em sua teoria do universo, Nicolau Copérnico, de acordo com Mendes (2010) relacionou tal tabela com linhas retas e círculos, com triângulos planos e esféricos. Copérnico parte então do consenso unânime dos matemáticos e divide o círculo em 360º, adotou uma divisão do diâmetro em 200 mil unidades que entende ser suficiente para excluir qualquer erro apreciável, considerando que quando acontecer das quantidades não corresponderem umas às outras, como número inteiro a outro número inteiro, basta usar uma aproximação.

Copérnico explica a partir de seis teoremas e um problema os seus procedimentos para a construção de sua tabela de senos, postos a seguir de acordo com Mendes (2010):

1º teorema: Dado o diâmetro de um círculo também são dados os lados do triângulo, do quadrado, do pentágono, do hexágono e do decágono inscritos num círculo.
2º teorema: Se um quadrilátero estiver inscrito num círculo, o retângulo formado pelas suas diagonais é igual ao retângulo formado pelos lados opostos.
3º teorema: Sendo dadas as cordas que subtendem a arcos desiguais de um semicírculo, também é dada a corda que subtende a diferença entre os dois arcos.
4º teorema: Dada a corda que subtende um arco, é igualmente dada a corda que subtende a corda correspondente a metade desse arco.
5º teorema: Se são dadas as cordas subtendidas por dois arcos, é dada também a corda correspondente ao arco resultante da soma dos dois.
6º teorema: A razão entre dois arcos é maior do que a razão entre a corda do maior e a do menor.
Problema: Um arco é sempre maior do que a corda por si subtendida, porque uma linha reta é a linha mais curta entre dois pontos. Mas esta desigualdade tende para a igualdade quando se passa das secções maiores de um círculo para as mais pequenas. Assim, finalmente, quando a corda tocar o círculo, unem-se numa só a linha reta e a curva.

De acordo com Mendes (2010) Copérnico exemplifica da seguinte forma:
Seja $C\ (O, r);\ \forall\ A\ \in C, AO = r$

Figura 13: Problema proposto por Corpénico



Fonte: Mendes (2010)

- AB: arco 3º
- AD: arco 1 ½º
- crd AB = 5235 unidades

- crd AD = 2618 unidades
- 2r = 200.000 unidades
- Arco AB = 2 .arco AD, mas crd AB < 2 . crd AD

Se AB: arco 1 ½º e AD: arco ¾º,

crd AB = 2618 unidades e

crd AD = 1309 unidades

arco AB = 2 . arco AD, mas crd AB = 2 . crd AD.

Dessa forma a desigualdade desaparece, como se a curva e a reta se formassem em uma única linha, Copérnico então conclui que as cordas dos arcos frações de 1º estão em proporção com as 1309 unidades da corda do arco de 3/3º. Sendo assim, encontra:

- crd ¼º = $\frac{\text{crd } 3/4º}{3} = \frac{1309}{3} = 436{,}333 \ldots \Longrightarrow \text{crd} \frac{1}{4}º \cong 436{,}25$
- Corda de 1º

  1º = ¾º + ¼º $\Longrightarrow$ aplica o 5º teorema:

  $(\text{crd } 1º)^2 = (2r)^2 - (\text{crd } 179º)^2$

  crd 179º = $\frac{\text{crd}\left(180 - \frac{3}{4}º\right) . \ \text{crd}\left(180º - \frac{1}{4}º\right) - \text{crd}\frac{3}{4}º \ . \ \text{crd}\frac{1}{4}º}{2\pi}$

  crd 179º = 199992,3847

  crd 1º = 1745,2971 $\Longrightarrow$ crd 1º $\cong$ 1745

Copérnico determina a corda correspondente a ½º utilizando o 4º teorema, ou seja, pelo arco metade: $\left(\text{crd } \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\text{r} . \left[\text{r} - \frac{1}{2}\text{crd } (180º - \alpha)\right]$:

$$(\text{crd } 1/2º)^2 = 200000 . \left[100000 - \frac{1}{2}\text{crd}179º\right]$$

mas:

$$(\text{crd}179º)^2 \cong 199992 \ \Rightarrow \text{crd } 1/2º \ \cong 872{,}5$$

Em seguida Copérnico encontra a corda correspondente a 1/3º, com o mesmo procedimento utilizado para o cálculo de ¼, isto é, considerando que as cordas dos arcos frações de 1º estão em proporção, então

$$\text{crd}\frac{1}{3}º = \frac{\text{crd}1º}{3} = \frac{1745}{3} = 681{,}666 \ldots \Longrightarrow \text{crd}\frac{1}{3}º \cong 582$$

Ainda utilizando o 4º teorema, encontra a corda correspondente ao arco de 1/6º

$$\mathrm{Crd}\ 1/6º \cong 291$$

Copérnico inicia sua tabela de cordas com a medida de 1/6º, a partir daí e em escala ascendente apresenta as medidas de outras cordas, as quais podem ser encontradas utilizando os 6 teoremas comentados.

Copérnico constrói então uma tabela na escala ascendente de 1/6 e com três colunas: na primeira estão os graus ou pares de um arco e sextas pares de um grau; a segunda tem o valor numérico da metade da corda correspondente ao dobro do arco; a terceira contém as diferenças destes valores numéricos relativos a cada grau. Estas diferenças permitem a interpolação de quantidades proporcionais correspondentes a cada minuto de grau.

Sete anos após o falecimento de Nicolau Copérnico nasce John Napier(1550-1617), oitavo proprietário de Merchiston, filho de Archibald Napier com sua primeira esposa Janet Bothwell. De acordo com Gillispie (2007) com treze anos de idade, Napier, foi para o St. Salvator'sCollege de St. Andrews, onde morou com John Rutherford, o diretor da faculdade. Pouco se sabe sobre a vida de Napier durante esse período.

Apesar de Napier ser conhecido na história da matemática como o inventor dos logaritmos, ele também fez uso frequente de teoremas trigonométricos, e deu contribuições ao desenvolvimento e à sistematização da trigonometria esférica, que foi considerada excelente. Segundo Gillispie (2007) as regras de Napier para o triângulo retângulo esférico foram publicadas em *Descriptio,* onde ele usou expressões logarítmicas e exibiu o caráter delas em relação ao pentágono estrelado com cinco ângulos retos.

Em um período de sua vida, após retomada dos processos de aprendizagem na Europa Ocidental, de acordo com Gillispie (2007), alguns dos primeiros progressos foram na trigonometria, que se desenvolveu como um campo de estudo independente, aplicado principalmente à astronomia, mas também à agrimensura, à cartografia e à navegação. Levou muito tempo para realizar o cálculo de detalhadas tabelas de senos e tangentes.

De acordo com Costa (2013) a invenção posterior dos logaritmos e alguns teoremas demonstrados por Napier mostram que a trigonometria de Regiomontanus

– um dos maiores matemáticos do século XV que estabeleceu a trigonometria como uma ciência independente da astronomia – não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No *tratado*, Napier calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de seno de Purbach – mestre de Regiomontanus – e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na trigonometria plana e esférica.

Muitas relações trigonométricas que conhecemos hoje foram deduções feitas por François Viète(1540-1603), tais como a transformação de soma e produto, arco duplo e arco triplo. Além da trigonometria, Viète teve grande destaque no desenvolvimento da Álgebra. O mais famoso trabalho é a sua obra *In artem*, ao qual contribuiu de forma singular ao apresentar uma nova nomenclatura para equações algébricas, introduzindo na Álgebra o emprego sistemático das letras para representar valores numéricos, que tomou possível a noção de fórmula geral.

3.7. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XVII AO SÉCULO XIX

Viète era profundo conhecedor de trigonometria. Em sua obra *Canon mathematicus seu ad triangula* tratava-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Obteve expressão para $\cos(n\theta)$ como função de $\cos\theta$ para n = 1, 2, 3, ..., 9 e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas.

Gilles Personne de Roberval(1602 – 1675) deu sua contribuição para a trigonometria ao desenvolver um método de computar tangentes enquanto trabalhava em cicloide algum tempo antes de 1636. No início ele manteve essa descoberta em segredo, mas decidiu revelar seu método entre 1639 e 1644. Para realizar os desenhos tangentes, considerou uma curva descrita por um ponto móvel cujo movimento é a resultante de vários movimentos mais simples. Além disso, também descobriu um método de derivar uma curva a partir de outra curva. Para essas curvas, que também foram aplicadas a algum efeito quadraturas, o Evangelista Torricelli deu o nome de “linhas Robervallian”. Além disso, foi capaz de desenvolver habilidade e conhecimento suficientes para integrar o sen (x) e computar a extensão do arco de uma espiral.

De acordo com Costa (2003) Isaac Newton (1643 – 1727),também deu sua contribuição à trigonometria, pois, em conjunto com seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido arcsen x em séries e, por reversão, deduzido a série para sen x. Além disso, passou a fórmula geral para Leibniz para sen (nx) e cos (nx), tendo assim, aberto a perspectiva para sen x e o cos x surgirem como números e não grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Leonhard Euler (1707 – 1783) fez grandiosas descobertas para áreas como teoria dos números, análise e mecânica, seus esforços eram sempre voltados para as ciências matemáticas.As descobertas de Euler ajudaram também para a trigonometria, ele ofereceu duas maneiras diferentes para a exposição analítica do sistema da trigonometria esférica. Mostrou que a trigonometria das superfícies esferóides podia ser aplicada à geodésia superior em 1755. Gillispie (2007) diz em seus estudos que em 1763 Euler fez o primeiro avanço substancial no estudo da curvatura das superfícies.

Em 1770, em uma nota escrita, porém, só publicada em 1862, Leonhard Euler descobriu a condição necessária para a aplicação das superfícies, que foi independentemente determina por Gauss em 1828. Além disso, criou uma fórmula matemática que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial.

Joseph Fourier (1768 – 1830) teve duas grandes importantes contribuições para a matemática: a série de Fourier e a transformada de Fourier. Falaremos sobre as séries de Fourier, que é onde ele traz grandes contribuições para a trigonometria, pois diz respeito à representação de sinais como uma combinação linear de sinais básicos como senos e cossenos, ou exponenciais complexas.

Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717-1738) já haviam estudado sobre as séries infinitas para resolverem problemas diversos da física, porém, Fourier foi o primeiro a fazer um estudo sistemático das séries infinitas para resolver a equação da propagação do calor na física, na publicação *"Mémoiresurlathéorie de lachaleur"*, embora ele não tenha expresso os seus resultados com grande formalismo. Somente uns anos mais tarde que dois matemáticos: o alemão Johann Peter Gustav LejeuneDirichlet (1805-1859), expressaram os resultados de Fourier com mais rigor e precisão.

De acordo com Santos (2004) nas séries trigonométricas de Fourier para sinais contínuos, ele considerou um sinal periódico contínuo x(t) pertencente ao conjunto dos números reais, para todo t. onde o sinal x(t) pode ser expresso da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

onde os coeficientes $a_{o,} a_n, b_n$, são chamados *Coeficientes de* Fourier, com n pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos sem o zero ($n \in \mathbb{Z}_*^+$). Como x(t) possui período fundamental T, sua frequência fundamental é $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, sendo assim, reescrevemos a série da seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 x) + b_n sen(n\omega_0 x)$$

Onde:

T = Período fundamental do sinal x(t);

ω_0= Frequência fundamental do sinal x(t);

$$a_k = \frac{2}{T}\int \mathrm{x(t)}.cos\left(\frac{2\pi}{T}.kt\right)dt = \frac{2}{T}\int \mathrm{x(t)}.cos(\omega_0.kt)dt, \text{ com K = 0,1,2,...}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int \mathrm{x(t)}.sen\left(\frac{2\pi}{T}.kt\right)dt = \frac{2}{T}\int \mathrm{x(t)}.sen(\omega_0.kt)dt, \text{ com K = 1,2,3,...}$$

observe que temos que as integrais acima são tomadas ao longo do intervalo do período T do sinal periódico x(t), além de existir a_0 na série a_k, porém, não existir $b_0$na série b_k, e, por fim, a_0 pode ser reescrito de forma mais simplificada pois como: $cos\left(\frac{2\pi}{T}.kt\right) = cos(\omega_0.kt)$, com K = 0, então, $a_0 = \frac{2}{T}\int \mathrm{x(t)}.dt$ ou seja, a_0 de certa forma representa um valor médio do sinal x(t) no intervalo de um período T.

Esta série é conhecida como Série Trigonométrica de Fourier, pois contém termos com senos e cossenos, onde a equação de x(t) é conhecida como "*equação de síntese"* e as de a_ke $b_k$são conhecidas como *"equação de análise"*.

4. RECORTE DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIAPARA O ENSINO

Os recortes apresentados nesse capítulo foram pensados de maneira que possam ser utilizados durante as aulas de Trigonometria. O primeiro recorte traz um texto que pode ajudar a introduzir o conteúdo de Trigonometria contando um pouco do seu surgimento. O segundo recorte faz menção ao primeiro cálculo da circunferência da terra, no qual foi utilizado a trigonometria como fator importante para a realização desse cálculo. O terceiro recorte traz, com o uso da história, o surgimento das ideias de seno, cosseno e tangente. Além disso, apresento sugestões de atividades para serem trabalhadas em sala de aula a partir do texto base.

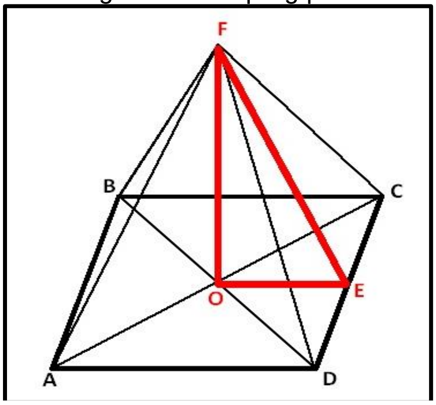
4.1. INTRODUÇÃO AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Assim como na Matemática, as origens da Trigonometria também são incertas. Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. Entretanto, embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos para resolverem problemas, foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.

De acordo com Oliveira (2010), com o passar do tempo, mais especificamente na Babilônia e no Egito, surgiu à necessidade de utilizar mais ainda a Trigonometria para a resolução de problemas sobre a Astronomia, a cronologia do tempo e a agricultura. Nessa investigação mais a fundo para melhor compreender o universo, a Trigonometria foi uma ferramenta importante nas mãos, não só dos babilônios e dos egípcios como também nas dos gregos, hindus e árabes.

A trigonometria teve grande importância nas medições das pirâmides, no qual foi utilizada uma razão trigonométrica chamada *seqt* – o que hoje chamamos de cotangente, e vocês irão estudar esse tópico no conteúdo de trigonometria.

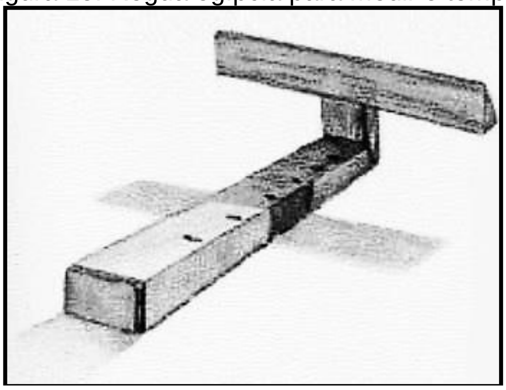
Figura 14: Seqt Egípcio



Fonte: Elaborado pela autora

Teve contribuição, também, no surgimento do primeiro relógio de sol, chamado *gnômon,* construído e utilizado pelo homem, que consistia em uma coluna que, iluminado pelo sol ou pela lua, projetava sua sombra, que se movia com o passar das horas e entre o seu ponto inicial e seu ponto final havia um espaço que o homem fracionou criando a divisão do tempo. Enquanto os gregos antigos achavam que as horas eram divindades mitológicas, simbolizando as partes do dia, os babilônios e os chineses foram os primeiros que dividiram o dia em horas.

Figura 15: Régua egípcia para medir o tempo

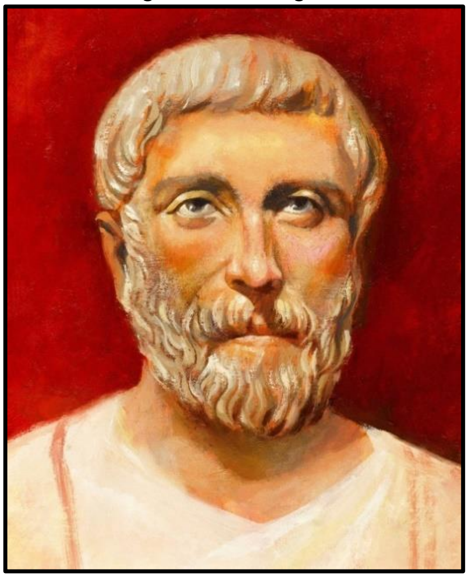


Fonte: Google Imagens

Como bem já foi mencionado, os primeiros vestígios da Trigonometria não surgiram apenas no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios demonstravam grande interesse pela astronomia, tanto por questões religiosas, quanto pelas vinculações com o calendário e as épocas de plantio. De acordo com Costa (2003) é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidade de medidas e uma escala. Os babilônios foram extraordinários astrônomos e influenciaram os povos posteriores.

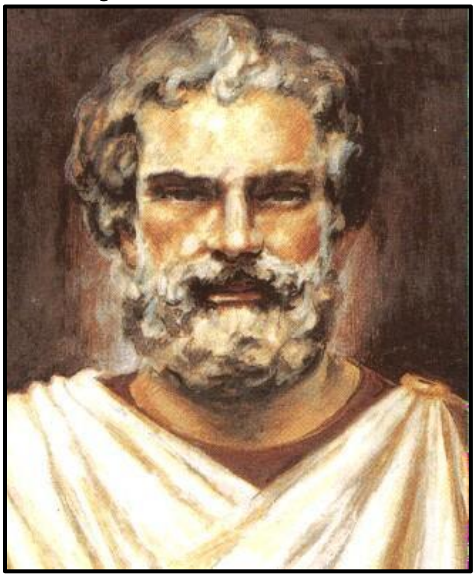
Os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos estavam na Grécia, são eles: Tales de Mileto (625 – 546 a.C.) e seu discípulo Pitágoras (570 – 495 a.C.); ambos foram um dos primeiros a contribuírem com o surgimento da trigonometria, Tales com seus estudos de semelhança de triângulos que embasam a trigonometria e Pitágoras ao demonstrar o teorema que leva seu nome: "*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"*. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

Figura 16: Pitágoras



Fonte: Google Imagens

Figura 17: Tales de Mileto



Fonte: Google Imagens

ATIVIDADE PROPOSTA

01. Embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações trigonométricas existentes entre lados e ângulos dos triângulos para resolverem problemas, o que de fato impulsionou a evolução desse conteúdo?

02. Quais foram os primeiros acontecimentos que precisaram utilizar cálculos trigonométricos?

03. Após a explicação de todos os tópicos de Trigonometria, responda: Quais conhecimentos atuais estão relacionados ao que antes foi chamado de *seqte gnômon?*

04. De acordo com o texto, quais foram os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos e que contribuíram com o surgimento da trigonometria?

4.2. A IDEIA DE SENO, COSSENO E TANGENTE

Hiparco de Nicéia (190 a.C. – 120 a.C.), um importante matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da trigonometria, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros, no que pode ter vindo ser a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. A partir de então começaram a surgir às ideias de seno, uma vez que conhecido o comprimento da corda podia-se calcular o seno da metade do arco.

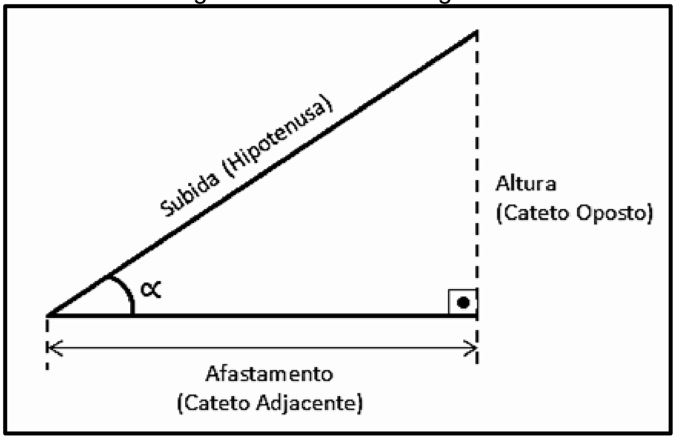
Figura 18: Hiparco de Nicéia

Fonte: Google Imagens

Já a palavra cosseno surgiu apenas no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Tais conceitos, seno e cosseno, foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, já o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

A ideia de tangente, em muitos livros didáticos, é apresentada como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo e, outros livros, apontam a tangente como a associação da medida do ângulo de subida com o índice na mesma subida.

Figura 19: Ideia de tangente



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ou seja,

$$tg \propto = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \text{índice de subida}$$

De outro lado, a ideia de seno é apresentada como a razão entre a altura e o comprimento da subida, ou seja, cateto oposto pela hipotenusa, enquanto o cosseno é a razão entre o afastamento e o comprimento da subida, cateto adjacente pela hipotenusa. Sedo assim,

$$sen \propto = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } cos \propto = \frac{\text{afastameto}}{\text{percurso}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

No entanto, antes de surgir tais fórmulas que temos hoje e que encontramos facilmente em livros didáticos, apostilas e internet, houveram muitos caminhos traçados para poder chegar a tais formulações, assim como personagens de diferentes áreas de conhecimento que contribuíram para o desenvolvimento dessas ideias.

De acordo com Costa (2008), Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.) foi um dos primeiros estudiosos gregos a aplicarem matemática na astronomia, apesar de Hiparco ser conhecido como o “pai da trigonometria”, foi Aristarco que forneceu os primeiros passos da trigonometria e, por mais que esses escritos não tenham chegado até nós, eles foram relatados em seu tratado sobre tamanhos e distâncias do sol e lua, o qual ele usou o equivalente, em linguagem atual, a:

$$\frac{sen\ a}{sen\ b} < \frac{a}{b} < \frac{tg\ a}{tg\ b}$$

Onde $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$.

Outro grande personagem que contribuiu para o desenvolvimento do conteúdo em questão foi Cláudio Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C.), considerado o maior astrônomo da antiguidade, no entanto, pouco se sabe sobre ele. Sua obra, *SyntaxisMathematica,* é popularmente conhecida como Almagento – “O grande tratado” ou “O Maior”. Um trabalho basicamente de matemática e astronomia, que foi dividida em treze livros e, dentre esses livros, Ptolomeu se dedicou às cordas trigonométricas nos capítulos dez e onze do primeiro livro.

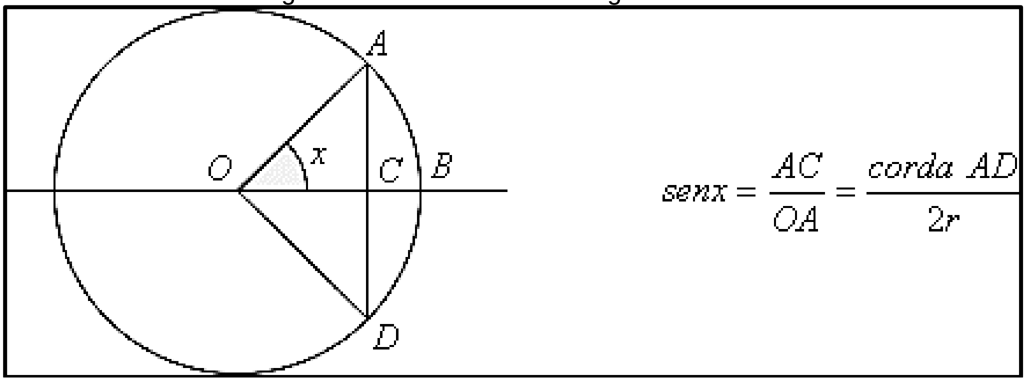
De acordo com Costa (2008), o capítulo onze consiste numa tabela de cordas, já o capítulo dez explica com a tabela pode ser calculada. No Almagesto não existe nenhuma tabela que contenha as funções seno e cosseno, mas, sim, a função *cordadoarcox*,ou*crdx,* que significa comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é igual a 60.

Na teoria de Ptolomeu, segundo Aaboe (1964 apud Costa, 2008), a circunferência foi dividida em 360 partes – o que chamamos hoje de graus – o diâmetro foi dividido em 120 partes e cada uma dessas partes foram dividas em 60 outras partes (minutos) e essas são divididas novamente em mais 60 partes (segundos).

Dessa forma, de acordo com Costa (2008) na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira, listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e, a terceira, que dava o aumento médio de *crd x* correspondente a um acréscimo de um minuto em *x* – valor da corda correspondente a um arco de corda já conhecida acrescido de um minuto de grau. Essa coluna era usada para interpolações, ou seja, para achar o valor de entradas na coluna de arcos.*crd*se *x* estivesse entre duas. (COSTA, 2008, p. 6)

A figura a seguir ilustra o processo feito por Hiparco e aperfeiçoado por Ptolomeu, na qual evidencia que uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos:

Figura 20: Tábua de senos trigonométricos



Fonte: Costa (2008)

Pois,

$$Sen \propto = \frac{AC}{OA} = \frac{AD}{diâmetro\ do\ círculo} = \frac{crd\ 2 \propto}{120}$$

A tábua de Ptolomeu fornece a medidas das cordas dos ângulos centrais de meio em meio grau até 180º. Sendo assim, a tábua, na realidade, oferece os senos dos ângulos por intervalos de quarto de grau de 0º a 90º.

Quadro 2: Cordas de Ptolomeu

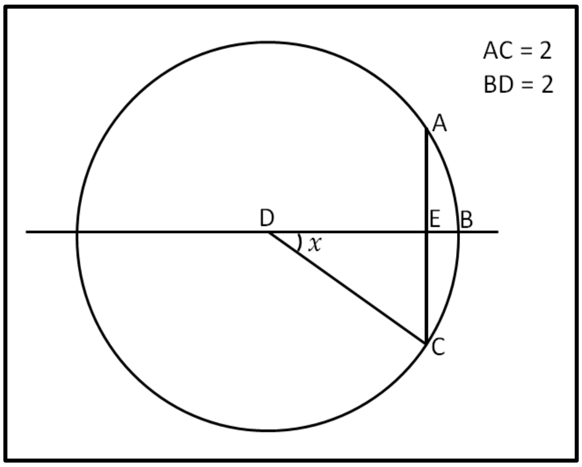
∝em graus	Crd (∝)	∝em graus	Crd (∝)
$\frac{1º}{2}$	0; 31; 25	40º	41; 2; 33
1º	1; 2; 50	60º	60; 0; 0
$1º\frac{1}{2}$	1; 34; 15	70º	68; 49; 45
2	2; 5; 40	90º	84; 51; 57
$2º\frac{1}{2}$	2; 37; 4	100º	91; 55; 32
3º	3; 8; 28	120º	103; 55; 23
5º	5; 14; 4	135º	110; 51; 57
10º	10; 27; 32	140º	112; 45; 28
20º	20; 50; 16	160º	118; 10; 37
30º	31; 3; 30	180º	120; 0; 0

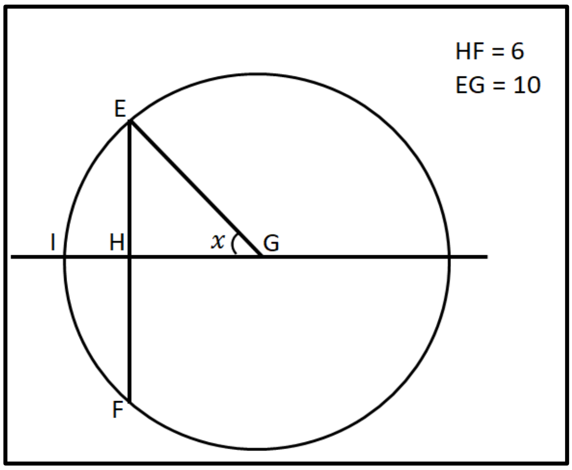
Fonte: Oliveira (2010)

ATIVIDADES PROPOSTA:

1 – De acordo com o texto, quem foi um dos primeiros estudiosos gregos que forneceu os primeiros passos para o cálculo do que hoje chamamos de tabela trigonométrica?

2 – Calcule o seno do ângulo *x* de cada figura a seguir, usando o mesmo processo feito por Hiparco e aperfeiçoado por Ptolomeu. Em seguida consulte uma tabela trigonométrica para saber quantos graus, aproximadamente, equivale ao valor de x.





3 – Com uma tabela de razões trigonométricas atual e a Tábua de Cordas de Ptolomeu, análise suas diferenças e semelhanças e registre aqui a sua percepção.

4.3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS À CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA

Apesar da origem da Trigonometria ser considerada como incerta, sabe-se que, durante a sua evolução, houve muitos personagens que, através de seus conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida, contribuíram para que essa evolução chegasse no que temos hoje, e cada um desses personagens serviu de ponte para que o próximo continuasse seus cálculos e avançasse um passo a mais a frente.

Como exemplo dessa ponte, podemos citar três personagens que foram muito importantes para o desenvolvimento, não só da trigonometria, mas também para outras áreas do conhecimento, como a física e a astronomia. O primeiro deles é Arquimedes (287 – 212 a.C.), que, de acordo com Mol (2013), consagrou-se a matemática quando conseguiu avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo e com seus cálculos ele conseguiu encontrar um valor próximo para π, da seguinte maneira:

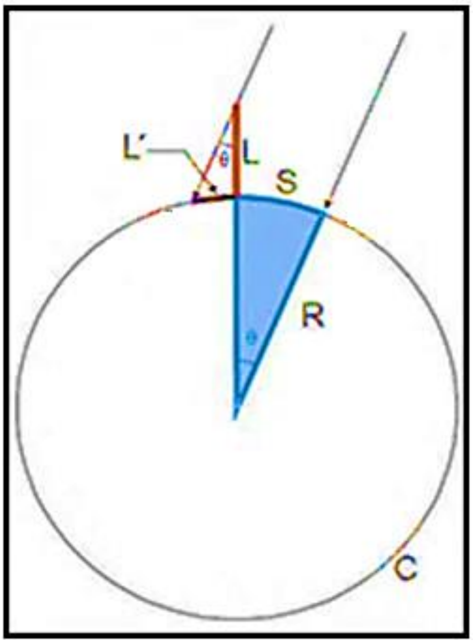
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}, \text{ ou seja,} \frac{3\,.\,71+10}{71} < \pi < \frac{3\,.\,70+10}{70}$$

Logo, 3,1408 < $\boldsymbol{\pi}$< 3,1428 (comparando com o valor $\boldsymbol{\pi}$ = 3,14159...)

Mesmo estudando círculos e retas e aplicando esses resultados na Astronomia, Arquimedes não conseguiu chegar a uma trigonometria sistemática. Porém, seus estudos e suas cartas serviram de ponte para que Erastóstenes (276 – 194 a.C.) começasse a produzir, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais notável medida da circunferência da terra na Antiguidade.

Por volta de ± 240 a.C., Erastóstenes fez uma medida surpreendentemente correta da circunferência da terra, para isso ele comparou as sombras ao meio-dia entre Alexandria e Siena. Abaixo tem uma análise mais detalhada da ideia de Erastóstenes feita por Vinagre (2002). A partir do esquema, iremos definir as grandezas envolvidas:

Figura 21: Esquema da Ideia de Eratóstenes



Fonte: (Vinagre 2002)

- S é a distância entre Siena e Alexandria;
- $\boldsymbol{\theta}$é o ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria;
- C é a circunferência da terra;
- D é o diâmetro da terra;
- R é o raio da terra;

- L é o comprimento do poste;
- L’ é o comprimento da sombra do poste;

Para calcular a circunferência da terra, de acordo com Vinagre (2002), Erastóstenes utilizou a seguinte razão trigonométrica: $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{2\pi}}$. Ou seja, a razão entre a distância de Alexandria e Siena e a circunferência igual a razão do ângulo formado a partir da distância entre as cidades e o ângulo total da circunferência terrestre (2π). Isolando C, teremos:$C = \left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot \boldsymbol{S}.$ E a partir dessa relação Eratóstenes fez seus cálculos, substituiu os valores que ele encontrou para$\boldsymbol{\theta}$= $(0{,}02\,.\,2\pi)$ e o valor de $\boldsymbol{S}$= (5.000 estádios) - que era obtido pelo número de passos dados de Siena até Alexandria pelos Bematistas do Rei, multiplicado pelo comprimento de cada passo que supostamente tinha o mesmo tamanho - E obteve a seguinte equação:

$$C = \left(\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{0{,}02\,.2\pi}}\right) \cdot 5000;\ C = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0{,}02}}\right) \cdot 5000;\ C = 50.5000;\ C\ =\ 250.000\ est\acute{a}dios$$

E para obter o resultado em quilômetros multiplicamos o resultando obtido em C por 0,157 Km, o que resulta: C=39.250 Km. A partir desse valor encontrado poderemos também calcular o valor do Raio da terra utilizando a relação C=2πR e por consequência o valor do Diâmetro (o dobro do Raio).

ATIVIDADES PROPOSTAS:

1. Observando o esquema da ideia de Erastóstenes, que foi apresentado no texto, diga qual foi a relação trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) utilizada por ele para descobrir o valor do ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria?

2. Supondo que você deseja calcular a distância entre duas cidades, e toma como base a mesma ideia que foi apresentada por Erastóstenes, e utiliza um poste que mede 15m e que, o comprimento de sua sombra, em determinado momento do dia, seja igual ao seu tamanho real, então qual será o valor do ângulo, em graus e em radianos, formado entre essas duas cidades?

3. Sabendo que hoje em dia, com a ajuda dos cálculos apresentados por Erastóstenes, temos que a medida da circunferência da terra mede 40.075km. Sendo assim, calcule qual será a distância entre duas cidades que formam o ângulo (em radianos) que você obteve no item anterior, utilizando a fórmula apresentada por Erastóstenes.

5. ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES

Associar a História da Matemática com o Ensino de Trigonometria pode fazer com que os alunos percebam os caminhos traçados por muitos matemáticos para conseguir chegar à matemática que temos hoje, pode levar o aluno a percepção de que a matemática não nasceu pronta e acabada, sofreu inúmeros processos e alterações.

Sendo assim, o aluno pode se tornar um aluno curioso, fazendo indagações e buscando suas respostas a partir da história da matemática. No entanto, sabe-se das dificuldades e da escassez de recursos didáticos que façam um levantamento histórico a cerca dos conteúdos matemáticos.

O professor precisa estar preparado para ministrar uma aula fazendo uso da História da Matemática, tendo em vista que muitas perguntas podem surgir, muitos "por quês?" e muitos "como surgiu?" podem aparecer durante as aulas. No entanto, vale ressaltar que, caso, o professor não saiba responder de imediato as indagações feitas pelos alunos – o que é normal acontecer – diga aos mesmos que irá pesquisar a melhor resposta, evitando respostas equivocadas aos alunos.

O primeiro passo para o professor começar a ministrar aula usando a história da matemática é se familiarizar com o texto. Estudar o material fornecido e compreender as diferentes teorias, conceitos e contribuições matemáticas ao longo do tempo é de suma importância, pois isso ajudará a contextualização do ensino de trigonometria em sala de aula.

Adapte o material à sua realidade, considere o conhecimento prévio dos alunos, faça adaptações das atividades, dos exemplos e se necessário a forma de apresentação do material. Faça slides, vídeos animados, experimente jogos interativos, convide os alunos para saírem de sua zona de conforto (sala de aula), experimente trabalhos em equipe, peça para os seus alunos pensarem como os matemáticos de antigamente foram capazes de pensar, e sugira que os mesmos encontrem outras maneiras de realizar cálculos trigonométricos.

Avalie o aprendizado utilizando diferentes estratégias de avaliação para verificar o progresso dos seus alunos. Inclua projetos, discussões em grupos, proponha grupos de leitura sobre a história da matemática. Estimule cada vez mais o pensamento crítico dos seus alunos, incentive-os a refletir a cerca do conhecimento obtido em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, A. O. **Pitágoras.** I Seemat - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. Vitória da Conquista – Bahia - Brasil, 2009

BORTOLI, G. **Uma abordagem histórica no ensino da trigonometria** / GlabisBortoli, Miriam Ines Marchi, Ieda Maria Giongo. – 1. Ed. – Curitiba: Appris, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, 1998.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos:** história e matemática em sala de aula – SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. **História e Matemática dos Contextos às Atividades.** X BIENAL de Matemática. Belém, 2022.

CHAQUIAM, M. **História e Matemática integradas por meio de um diagrama Metodológico.** Revista Paradigma. Vol. XLI, Nº Extra 1; Abril de 2020/ 197 – 211.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história** – V. 2. São Paulo: Editora da Física, 2006.

COSTA, B. P; PEQUENO, P. I. E; PEREIRA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem da trigonometria.** VI Congresso Nacional Educação. Fortaleza – CE, 2019.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** São Paulo – PUCSP, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.**5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GILLISPIE, C, C. **Dicionário de biografias científicas**. Vol II. Rio de Janeiro: Contraponto: 2007.

JÚNIOR, D. O. A; OLIVEIRA, M. A. P. **Trigonometría:** recortes da história da suaevolução – Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

LIMA, J. H. S. **A trigonometria na Grécia Antiga:** Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio e Hiparco de Nicéia. XIII Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM, 2019b.

LIMA, J. H. S. **As contribuições à trigonometria nos séculos XVII, XVIII e XIX**. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2019c.

LIMA, J. H. S. **Contribuições à trigonometria:** Al-Battani, BhaskaraAkaria, Fibonacci e Nicoled'Oresme. XII Encontro Paraense de Educação Matemática – EPAEM, 2019d.

LIMA, J. H. S. **História da Matemática no Ensino de Matemática:** O caso da Trigonometria. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado do Pará, 2019a.

MEDEIROS, A. R. H. **A História de Juros e seu ensino.** Universidade do Estado do Pará – UEPA. Belém, 2022.

MENDES, I, A; CHAQUIAN, M. **História nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém (PA): SBHMat, 2016.

MENDES, M, J, F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática:** mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De RevolutionibusOrbiumCoelestium* – Natal, RN, 2010.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática.** Campinas, São Paulo 1993. 274p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.

MOL, R, S. **Introdução à História da Matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOREIRA, F. R. S. **Trigonometria.** Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, 2005.

OLIVEIRA, J. **Tópicos selecionados de trigonometria e sua história.** Trabalho de conclusão de curso. Departamento de Matemática/CCET. Universidade Federal de São Carlos – SP, 2010.

ROBERVAL, GILLES PERSONNE DE. Disponível em <http://matheusmathica.blogspot.com/2011/08/roberval-gilles-personne-de.html.> Acesso em: 18 de março de 2021.

SANTOS, F. J. **IntroduçãoásSéries de Fourier.** Minas Gerais: Edição PUCMINAS, 2004.

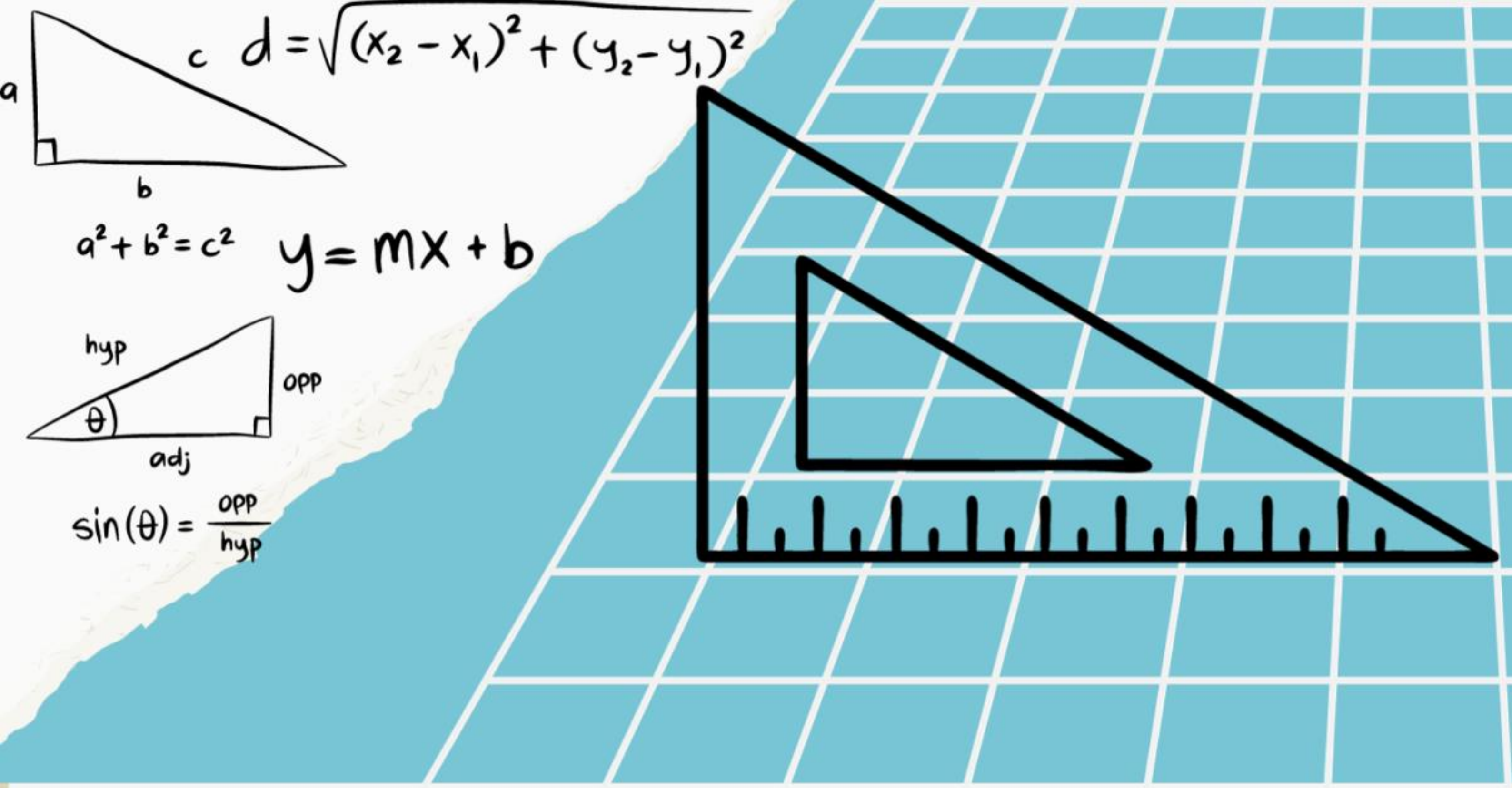
SILVA, W. **O ensino de trigonometria**: perspectiva do ensino fundamental ao médio. Universidade Estadual, 2013.

TALES DE MILETO. Disponível em <https://www.ebiografia.com/tales_de_mileto/> Acesso em : 05 de julho de 2022.

VASCONCELOS, V. B. **Recortes da História da Matemática para o Ensino de Probabilidade.** Universidade do Estado do Pará – UEPA. Belém, 2023.

VIANA, M. **Tales de Mileto foi o primeiro matemático.** Folha de São Paulo, 2019.

VINAGRE, A. L. M. **Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra.** UNICAMP, 2002.



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TRAVESSA DJALMDA DUTRA, S/n - TELÉGRAFO
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem