SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM PRODUTO EDUCACIONAL

LUCAS BENJAMIN BARBOSA SOUZA

NATANAEL FREITAS CABRAL

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CCSE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
UEPA

Licenciatura em MATEMÁTICA
UEPA

2023

Lucas Benjamin Barbosa Souza
Natanael Freitas Cabral

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM PRODUTO EDUCACIONAL

Produto educacional apresentado ao comitê de avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará

Belém
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Souza, Lucas Benjamin Barbosa

Sequência didática para o ensino de raízes racionais de equações polinomiais: um produto educacional / Lucas Benjamin Barboza Souza, Natanael Freitas Cabral. – Belém, 2023.

ISBN: 978-65-84998-62-9

Produto educacional vinculado à dissertação “Raízes racionais de equações polinomiais: uma abordagem didática à luz da UARC” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. - Belém, 2023.

1.Algebra-Estudo e ensino.2.Polinômios-Estudo e ensino.3.Ensino médio I. Cabral, Natanael Freitas. II. Título.

CDD. 23º ed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UMA ABORDAGEM DE ENSINO A PARTIR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UARC'S".**

Mestrando: **LUCAS BENJAMIN BARBOSA SOUZA**

Data da avaliação: **27/10/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio
( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio
( ) Outros: __________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo
( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo
( ) Software ( ) Outro: __________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: __________
( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*
(X) Sim
( ) Não. Justifique? __________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Grupo focal de Professores.

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Grupo de alunos do Ensino Médio.

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Grupo focal de Professores.

( ) Não, justifique: ____

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(X) outro: Grupo focal de Professores

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ____

( ) outros membros da comunidade, tais como ____

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Presidente)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Examinador 01)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: IFPA

Diagramação e Capa: Os autores.

Revisão: Os autores

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem é um tema de discussão interruptas no campo educacional. Diversas e constante são as pesquisas que abordam em relação às ações de ensinar e aprender. A Matemática enquanto ciência de natureza abstrata configura-se como um saber de difícil aquisição por parte dos estudantes. Nessa missão, o professor deve estar qualificado no sentido de promover diferentes alternativas e na aplicação de variadas abordagens em sua prática docente.

Caro, Professor. É com grande entusiasmo que apresentamos o material: Sequência didática para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais – um produto educacional que tem como proposito contribuir com a potencialização do processo de ensino da matemática, em especifico das equações polinomiais.

A sequência didática teve seus aportes estabelecidos à luz do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky (1999); a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008) e os conceitos relacionados às Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017).

Dentre as características deste material, destacamos sua capacidade de promover: a interatividade uma vez que oferece uma série de ferramentas que promovem a interação direta entre alunos e conteúdo, tornando o aprendizado mais dinâmico; flexibilidade pois é adaptável a realidade de professor e pode ser desenvolvido individual ou coletivamente (grupos pequenos); Intuitivo, pois aborda de linguagem acessível e busca promover reflexões por parte dos alunos e investigativo, no sentido de que o aluno passa a ser o ator principal da ação educativa e deve dar atenção a cada tópico trabalhado ao longo das atividades.

Este produto educacional é fruto de uma pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e se apresenta disponível para acesso e utilização por parte dos professores da Educação Básica. **Bom uso!**

Lucas Benjamin Barbosa Souza

Natanael Freitas Cabral

1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

A sequência didática para o ensino de raízes racionais de equações polinomiais tem como bases teóricas conceitos pesquisados por diversos autores que apresentam uma vasta estrada no que tange a pesquisas acerca do ensinar e aprender matemática em sala de aula.

Esta proposta metodológica de ensino tem seus aportes estabelecidos a luz do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky (1999); a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008) e os conceitos relacionados às Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017).

O material a ser trabalhado com os alunos é composto de 5 UARC's que abordam, de modo gradativo, cada tópico conceitual relacionado ao objeto. As atividades estão articuladas para que o aluno possa formalizar conceitos ao termino de cada etapa e consequentemente ao fim do desenvolvimento da sequência didática possa ter uma aprendizagem efetiva deste objeto matemático trabalhado.

O quadro a seguir apresenta a organização de cada UARC com seu respectivo tópico a ser trabalhado e o tempo estimado para a resolução em sala com os alunos.

Quadro 1 – Proposta de organização das atividades.

<table>
<tr><th>Sessão</th><th>Título da Atividade</th><th>Tempo estimado</th></tr>
<tr><td>1ª</td><td>Diagnóstico inicial e Nivelamento (se necessário).</td><td>1 aula</td></tr>
<tr><td>2ª</td><td>UARC 1: Os atores principais: a_0 e a_n.</td><td rowspan="2">2 aulas</td></tr>
<tr><td>3ª</td><td>UARC 2: As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.</td></tr>
<tr><td>4ª</td><td>UARC 3: Identificação do 0 como raiz de uma equação polinomial.</td><td rowspan="3">1 aula</td></tr>
<tr><td>5ª</td><td>UARC 4: Identificação do 1 como raiz de uma equação polinomial.</td></tr>
<tr><td>6ª</td><td>UARC 5: Identificação do –1 como raiz de uma equação polinomial.</td></tr>
<tr><td>7ª</td><td>Avaliação Aplicativa.</td><td>1 aula</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A proposta de material para diagnóstico inicial está disponibilizada no apêndice deste produto educacional. Ressaltamos que esta sequência didática pode ser desenvolvida individualmente, em dupla ou mesmo em grupos pequenos. Fica a critério do professor mediador estabelecer a organização com os alunos em sala.

Não obstante, contamos com a utilização do aplicativo Mathway, um *software* educacional ao qual utilizaremos seu recurso para determinação das raízes de equações polinomiais. O Mathway pode ser adquirido gratuitamente por meio de download disponível tanto nas plataformas de aparelhos Android quanto IOS.

1.1. MATERIAL DO ALUNO

Escola:		
Professor:		**Matemática**
Aluno:		

UNIDADE 1 - OS ATORES PRINCIPAIS: a_0 & a_n

1) Toda equação polinomial pode ser escrita na forma de coeficientes inteiros na ordem decrescente de seus expoentes $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, em que $a_n \neq 0$. Assim, escreva ao lado das equações polinomiais a seguir sua estrutura no modelo descrito.

I) $-7x + x^3 + 6 = 0$
II) $-13t^2 + 36 + t^4 = 0$
III) $2u^5 + 19u + 12u^3 = 14u^2 + 9u^4 + 1$
IV) $-5v^2 = -v^4 - 4$
V) $23w + 10 = -3w^3 + 20w^2$

a) Observe as equações que você organizou, todas possuem um termo de maior e um termo independente?

____

b) No caso de uma equação não apresentar termo independente isso implica dizer que o seu valor é igual a quanto?

____

c) Identifique em cada equação polinomial reescritas acima o valor dos coeficientes do termo de maior expoente (a_n) e valor do termo independente (a_0).

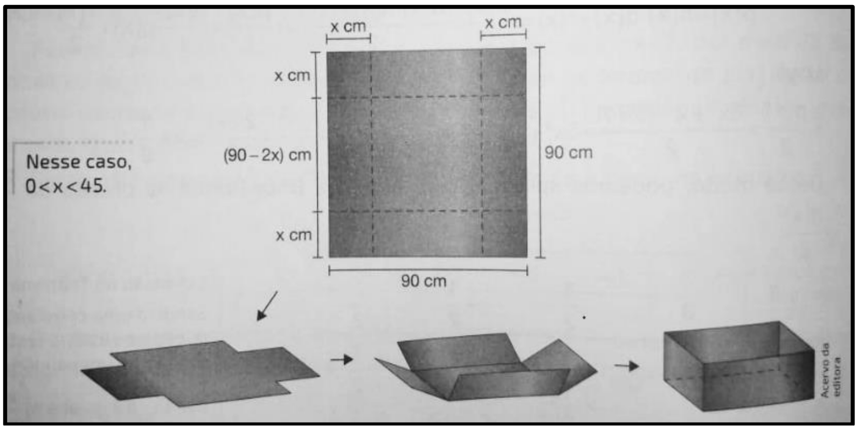
Equação	I	II	III	IV	V
a_n					
a_0					

Intervenção formalizante:

$[\boldsymbol{IA_r}]$. Complete a tabela a seguir identificando o coeficiente líder e o termo independente em cada equação.
I. $2x^2 + 3x = -10 - x^3$
II. $-4y^4 + 2y - 5 = 2y^7 - 4y^3 + y^2$
III. $z^4 - 3z^3 - 7z^2 + 31z - 10 = 0$
IV. $6t^3 + 4t = -3t^5$
V. $u^5 + 3u^3 + u + 3 = 0$

Equação Polinomial	I	II	III	IV	V
Coeficiente Líder					
Termo independente					

$[IA_a]$. (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 184. Adaptado). Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de $90cm$ de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado $x\ cm$. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.184).

A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a $50.000\ cm^3$, desconsiderando a espessura do material.

a) De acordo com as exigências, qual a expressão para a determinação da medida x do lado de cada quadrado?

b) Identifique o coeficiente líder e o termo independente da equação polinomial encontrada.

Escola:		
Professor:		**Matemática**
Aluno:		

UNIDADE 2 - AS RAÍZES RACIONAIS A PARTIR DOS DIVISORES DE a_0 E a_n

1) Utilize o *software* Mathway nas equações abaixo e transcreva as raízes indicadas em cada uma delas.

Equação Polinomial	Raízes				
$x^3 - 7x + 6 = 0$	-3	1	2		
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$					
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$					
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$					
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$					

2) Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_o em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_o					
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1	-1	2	-2	3	-3
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

3) Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_n em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_n					
$x^3 - 7x + 6 = 0$						
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

4) A partir dos quadros anteriores, escreva os números racionais que podemos obter fazendo $\frac{D(a_o)}{D(a_n)}$ em cada equação polinomial de coeficientes inteiros, sendo $D(a_0)$ os divisores de a_0 e $D(a_n)$ os divisores de a_n. Em seguida, substitua os valores nas equações polinomiais e marque "x" àqueles que satisfizerem a igualdade.

Equação Polinomial	Números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$							
$x^3 - 7x + 6 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^3 - 20x^2 + 23x - 2 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

a) Todas as equações polinomiais tiveram números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade?

____

b) Os números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade estão presentes nas raízes identificadas com o *software* Mathway? O que podemos afirmar em relação a esses números racionais?

____

c) Você percebeu alguma forma de determinar uma raiz racional de equação polinomial por meio do seu coeficiente líder e termo independente? Se sim, descreva com suas palavras.

____
____
____

Intervenção formalizante:

5) A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma raiz racional não inteira, determine-a pelo método aprendido.

6) Desde a antiguidade a humanidade discute a resolução de equações polinomiais nos mais variados contextos. Dentre elas, as equações de terceiro grau geraram bastante polêmica no que diz respeito a métodos de resolução. Nicolo Brescia, mais conhecido como Tartaglia teve destaque por desenvolver solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Hoje, temos diversos recursos para utilização. A partir do uso do teorema das raízes racionais determine a(s) raiz(es) racionais da equação polinomial $x^3 - x^2 = 4$.

Escola:		
Professor:		**Matemática**
Aluno:		

UNIDADE 3 - IDENTIFICAÇÃO DO 0 COMO RAIZ DE EQUAÇÃO POLINOMIAL

1) Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI) e responda: Qual a principal diferença no tange aos termos dos polinômios desses grupos?

I. $x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$
II. $2x^5 + 6x^3 + 3x + 12 = 0$
III. $4x^4 - 8x^2 - 10 = 0$

IV. $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$
V. $x^5 - 10x^3 = 0$
VI. $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

____

____

2) Complete a tabela calculando o $P(0)$ de cada equação a seguir.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômio	$P(0)$	Polinômio	$P(0)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$		$P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x + 12$		$P(x) = x^5 - 10x^3$	
$P(x) = 4x^4 - 8x^2 - 10$		$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x$	

a) Em qual grupo o 0 (zero) apresenta valor numérico nulo? O que isso significa?

____

____

b) Qual a relação entre a presença do termo independente e a raiz nula de um polinômio, considerando a análise anterior?

____

____

Intervenção formalizante:

3) Segundo o teorema fundamental da álgebra todo o polinômio real pode ser escrito como produto de fatores lineares reais. Deste modo qual das alternativas configura uma equação que possuí o 0 (zero) como raiz racional?

(A) $A(x) = (x - 1)(x - 2)$
(B) $B(t) = (t + 3)(t + 3)(t - 1)$
(C) $C(m) = \left(m - \sqrt{5}\right)\left(m + \sqrt{5}\right)(m - 1)(m + 1)$
(D) $D(s) = (s - 2)\,(s + 2)\,s$
(E) $E(y) = (y - 3)(y - 2)$

Escola:		
Professor:		Matemática
Aluno:		

UNIDADE 4 - IDENTIFICAÇÃO DO 1 COMO RAIZ DE EQUAÇÃO POLINOMIAL

1) Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete a tabela com a soma dos coeficientes de cada equação polinomial.

I. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$
II. $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$
III. $2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$
IV. $x^3 - 7x + 6 = 0$
V. $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$
VI. $x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$

Grupo A		Grupo B	
Equação polinomial	Soma	Equação polinomial	Soma
$2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^3 - 7x + 6 = 0$	
$x^4 + 8x^2 - 20 = 0$		$3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$	
$2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$		$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$	

2) Em relação a soma dos coeficientes da equação polinomial, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

____

____

3) Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		Grupo B	
Polinômios	$P(1)$	Polinômios	$P(1)$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$		$P(x) = x^3 - 7x + 6$	
$P(x) = x^4 + 8x^2 - 20$		$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 - 3x + 12$		$P(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2$	

a) Em qual grupo o 1 foi raiz das equações polinomiais apresentadas? (em qual grupo o 1 teve valor numérico nulo).

____

b) Qual a relação entre a soma dos coeficientes das equações polinomiais descritas e a raiz 1 de um polinômio, considerando a análise anterior?

____

____

Intervenção formalizante:

[IA_r]. Qual das equações polinomiais apresentadas a seguir admite 1 como raiz?

(A) $2x^2 - x + 5 = 0$
(B) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$
(C) $x - 2 = 0$
(D) $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$
(E) $2x^5 + x^3 - 4x = 0$

Escola:		
Professor:		**Matemática**
Aluno:		

UNIDADE 5 - IDENTIFICAÇÃO DO 1 COMO RAIZ DE EQUAÇÃO POLINOMIAL

1) Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete os quadros a seguir realizando as seguintes somas.

Soma 1 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente par;
Soma 2 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar;
Resultados – possibilidades: Iguais = ou diferentes ≠

Grupo A			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$			
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$			
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$			
Grupo B			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$			
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$			
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$			

Em relação as somas dos coeficientes de expoentes pares e ímpares, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

____
____
____

2) Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(-1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(-1)$	Polinômios	$P(-1)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$		$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$	
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 - 16$		$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$	
$P(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x + 6$		$P(x) = x^5 + 2x^3 + 3$	

O que você conseguiu identificar em relação ao valor numérico obtido nas equações do grupo A e nas equações do grupo B?

____
____
____

3) Utilize o aplicativo Mathway e identifique as raízes de cada equação polinomial oriundas dos grupos polinomiais A e B anteriores.

Grupo A	
Equações Polinomiais	Raízes
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$	
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$	
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$	

Grupo B	
Equações Polinomiais	Raízes
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$	
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$	
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$	

a) Qual grupo apresentou -1 como uma de suas raízes? Qual relação você consegue estabelecer com a questão inicial?

___

___

b) Quais suas conclusões em relação as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros?

___

___

Intervenção formalizante:

[IA_a]. Construa duas equações polinomiais que possua -1 (menos um) como uma de suas raízes e entregue para um colega identificar utilizando o método da soma dos coeficientes de termos de expoente par e ímpar. Utilize o aplicativo Mathway se necessário para confirmação.

Escola:		
Professor:		**Matemática**
Aluno:		

AVALIAÇÃO APLICATIVA

1) Ana e Pedro decidiram verificar seus conhecimentos em relação ao estudo de raízes racionais de equações polinomiais. Dada a equação $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$, ajude-os a responder as questões.

a) Quais as possíveis raízes racionais da equação estudada? Utilize o teorema das raízes racionais trabalhado em sala.

b) Utilize o cálculo do valor numérico das possíveis raízes racionais na equação polinomial. Quais seriam as suas raízes racionais?

c) Essas seriam todas as raízes da equação? Justifique.

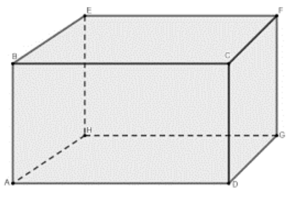
____

____

2) Considere a equação polinomial $x^3 + 25x = 0$ e verifique a existência de raízes racionais e em seguida identifique-a (s), se houver.

3) A equação $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ apresenta uma raiz racional, determine seu valor.

4) O volume (V) de um molde paralelepípedo está representado na expressão $V = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$. Identifique no desenho a seguir as suas dimensões.



5) Dentre o grupo de equações polinomiais descritos, podemos afirmar que possuem 0 como raiz as equações:

I. $x^4 + 2x^2 - 10 = 0$
II. $x^3 - 2x^2 - x = 0$
III. $4x^2 - 2x = 0$

(A) I apenas.
(B) II apenas.
(C) I e III apenas.
(D) I e II apenas.
(E) II e III apenas.

6) O valor de a para que a equação polinomial $x^5 - 3x^4 + ax^3 - 2ax^2 + 3x = 0$ admita 1 como raiz é:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

7) Dentre as equações do grupo abaixo, admitem -1 como raiz as equações:

I. $-3x + 3 = 0$
II. $x^2 - 3x + 2 = 0$
III. $x^3 + 4x^2 - x - 3 = 0$
IV. $-2x^4 - x^2 + 8 = 0$
V. $-x^5 + 3x^3 + 2x + 4 = 0$

(A) I e II apenas.
(B) I e III apenas.
(C) I, II e IV apenas.
(D) I, II e V apenas.
(E) II, III e V apenas.

8) Ana e Pedro estão analisando a equação polinomial $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$. Ana afirma que -1 é uma das raízes racionais da equação. Pedro afirma que na verdade é 1 quem constitui uma das raízes da equação polinomial. Quem está correto? Porquê?

1.2. MATERIAL DO PROFESSOR

Abordamos na sequência didática proposta: Estudo dos termos de uma equação polinomial; O teorema das raízes racionais de uma equação polinomial e as condições para que o 0 (zero), 1 (um) e o -1 (menos um) sejam raízes de uma equação polinomial.

Como supracitado, o tempo total estimado de desenvolvimento das atividades é de 4 aulas considerando a avaliação aplicativa. Consideramos 1 aula ao tempo de 45 min. Apresentamos a seguir nossas análises prévias de cada UARC, destacando seus objetivos, materiais necessários para seu desenvolvimento e o constructo com as intervenções articuláveis que estão por trás do material apresentado ao aluno.

UARC 1 – os atores principais: a_0 e a_n.

A atividade inicial tem por objetivo que o aluno seja capaz de reconhecer o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0) de uma equação polinomial dada. O material utilizado será o próprio protocolo impresso da sequência didática, caneta, lápis, borracha. O professor deverá orientar os alunos no que diz respeito aos comandos das atividades e no esclarecimento de dúvidas, de modo tal a permitir que o aluno se comunique com o material e expresse nele seus pensamentos resolutivos.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Toda equação polinomial pode ser escrita na forma de coeficientes inteiros na ordem decrescente de seus expoentes $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, em que $a_n \neq 0$. Desde modo, escreva as equações polinomiais a seguir no modelo descrito.

I) $-7x + x^3 + 6 = 0$ R:____
II) $-13t^2 + 36 + t^4 = 0$ R:______________________________________
III) $2u^5 + 19u + 12u^3 = 14u^2 + 9u^4 + 1$ R:__________________________
IV) $-5v^2 = -v^4 - 4$R:____
V) $23w + 10 = -3w^3 + 20w^2$ R: ___________________________________

$[\mathrm{I_r}]$. Observe as equações que você organizou, todas possuem um termo de maior e menor expoente?
R:____

$[\mathrm{I_e}]$. Identifique em cada equação polinomial reescritas acima o valor dos coeficientes do termo de maior expoente ($\mathrm{a_n}$) e de menor expoente ($\mathrm{a_0}$).

Equação	I	II	III	IV	V
a_n					
a_0					

$[\mathrm{I_f}]$. Em todo polinômio na forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ chamamos o coeficiente da incógnita de maior grau de **coeficiente líder** representado por $\boldsymbol{a_n}$ e o coeficiente da incógnita de menor grau de **termo independente** identificado em $\boldsymbol{a_0}$.

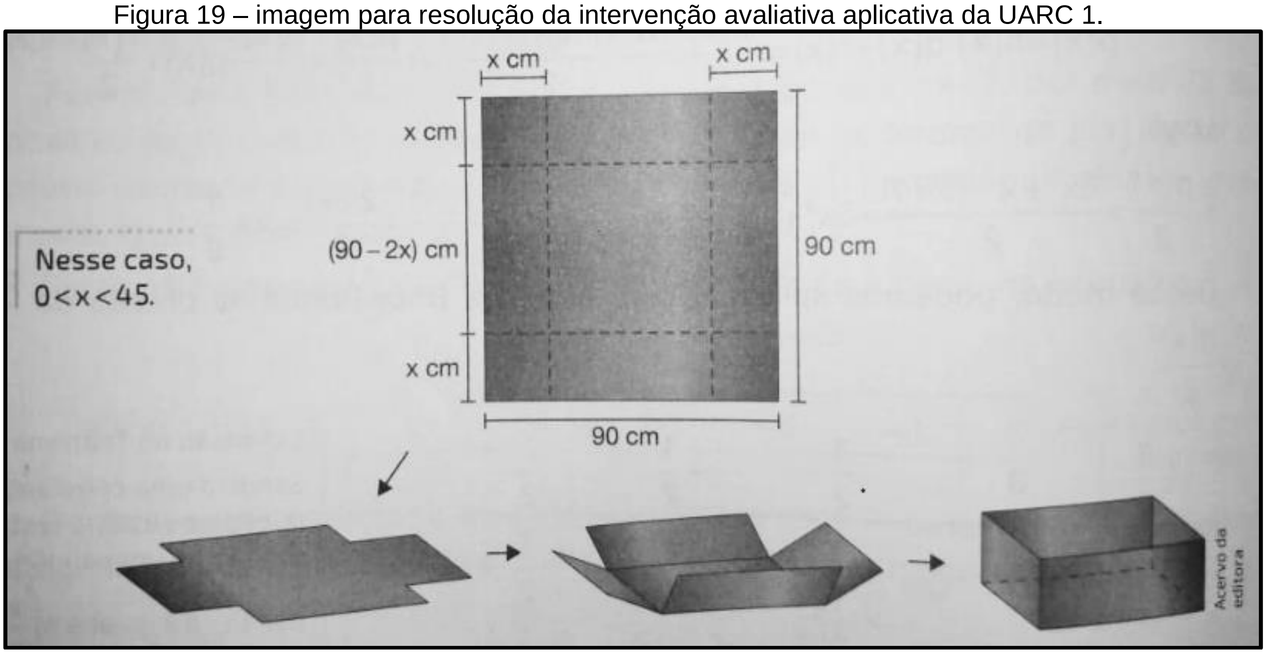
$[\mathrm{IA_r}]$. Complete a tabela a seguir identificando o coeficiente líder e o termo independente em cada equação.

I. $2x^2 + 3x = -10 - x^3$
II. $-4y^4 + 2y - 5 = 2y^7 - 4y^3 + y^2$
III. $z^4 - 3z^3 - 7z^2 + 31z - 10 = 0$
IV. $6t^3 + 4t = -3t^5$
V. $u^5 + 3u^3 + u + 3 = 0$

Equação Polinomial	I	II	III	IV	V
Coeficiente Líder					
Termo independente					

$[\mathrm{IA_a}]$. (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 184. Adaptado). Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de $90cm$ de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado $x\ cm$. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.

Figura 19 – imagem para resolução da intervenção avaliativa aplicativa da UARC 1.



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.184).

A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a $50.000\ cm^3$, desconsiderando a espessura do material.

a) De acordo com as exigências, qual a expressão para a determinação da medida x do lado de cada quadrado?

b) Identifique o coeficiente líder e o termo independente da equação polinomial encontrada.

R:____

Nesta atividade o aluno é incentivado recorrer a seus conhecimentos prévios para o desenvolvimento dos produtos que compõem a equação polinomial, sendo este o fator principal para resolução da questão proposta.

Destacamos a importância da orientação ao aluno para que siga o que foi proposto no desenvolvimento das atividades anteriores, uma vez que a organização da equação polinomial na ordem decrescente de seus expoentes permite maior facilidade para identificação do coeficiente líder e o termo independente.

UARC 2 - As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.

Tem por objetivo o aluno compreender as propriedades em volta a uma raiz racional de uma equação polinomial, além do protocolo impresso utilizaremos como auxilio o aplicativo Mathway (a ser baixado nos celulares dos alunos para a experimentação), o aplicativo determina as reais de uma equação polinomial fotografada em letra legível e serão utilizadas para confirmação de informações essenciais do teorema das raízes racionais. Assim, os alunos desenvolverão o protocolo da sequência didática e na questão solicitada utilizarão o *software.*

$[\mathrm{I}_i - EP]$. Utilize o *software* Mathway nas equações abaixo e transcreva as raízes presentes em cada uma.

Equação Polinomial	Raízes				
$x^3 - 7x + 6 = 0$	-3	1	2		
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$					
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$					
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$					
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$					

$[\mathrm{I}_e]$. Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_o em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	**Divisores de a_o**					
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1	-1	2	-2	3	-3
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\mathrm{I}_e]$. Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_n em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	**Divisores de a_n**					
$x^3 - 7x + 6 = 0$						
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\mathrm{I}_e]$. A partir dos quadros anteriores, escreva os números racionais que podemos obter fazendo $\frac{D(a_o)}{D(a_n)}$ em cada equação polinomial de coeficientes inteiros, sendo $D(a_0)$ os divisores de a_0 e $D(a_n)$ os divisores de a_n. Em seguida, substitua os valores nas equações polinomiais e marque "x" àqueles que satisfizerem a igualdade.

Equação Polinomial	**Números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$**							
$x^3 - 7x + 6 = 0$	,							
Satisfez a igualdade?								
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^3 - 20x^2 + 23x - 2 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

$[\mathrm{I}_r]$. Todas as equações polinomiais tiveram números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade?
R:____

$[\mathrm{I}_r]$. Os números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade estão presentes nas raízes identificadas com o *software* Mathway?
R:____

$[\mathrm{I}_r]$. Você percebeu alguma forma de determinar uma raiz racional de equação polinomial por meio do seu coeficiente líder e termo independente? Se sim, descreva com suas palavras.

R: ____

$[I_f]$. Toda equação polinomial de coeficientes inteiros definida por $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ que possuir números racionais em suas raízes, terão elas a forma $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$, sendo $D(a_0)$ divisor de a_0 e $D(a_n)$ divisor de a_n.

$[IA_r]$. A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma raiz racional não inteira, determine-a.

$[IA_a]$. Desde a antiguidade a humanidade discute a resolução de equações polinomiais nos mais variados contextos. Dentre elas, as equações de terceiro grau geraram bastante polêmica no que diz respeito a métodos de resolução. Nicolo Brescia, mais conhecido como Tartaglia teve destaque por desenvolver solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Hoje, temos diversos recursos para utilização. A partir do uso do teorema das raízes racionais determine a(s) raiz(es) racionais da equação polinomial $x^3 - x^2 = 4$.

UARC 3 – Identificação do 0 (zero) como raiz de uma equação polinomial

Esta atividade tem por objetivo fazer com que o aluno possa compreender as condições para o zero ser raiz de uma equação polinomial. Para isto, os alunos também utilizarão o protocolo da sequência didática, lápis, caneta e borracha. Em que o professor atuará como mediador da atividade permitindo que os alunos expressem suas conclusões.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI) e responda: Qual a principal diferença no tange aos termos dos polinômios desses grupos?

I. $x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$
II. $2x^5 + 6x^3 + 3x + 12 = 0$
III. $4x^4 - 8x^2 - 10 = 0$
IV. $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$
V. $x^5 - 10x^3 = 0$
VI. $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

R: ____

[I_e]. Complete a tabela calculando o $P(0)$ de cada equação a seguir.

Grupo A		Grupo B	
Polinômio	$P(0)$	Polinômio	$P(0)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$		$P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x + 12$		$P(x) = x^5 - 10x^3$	
$P(x) = 4x^4 - 8x^2 - 10$		$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x$	

[I_r]. Em qual grupo o 0 (zero) apresenta valor numérico nulo?

R:____

[I_r]. Qual a relação entre a presença do termo independente e a raiz nula de um polinômio, considerando a análise anterior?

R:____
____

> [I_f]. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 0 (zero) como raiz quando o termo independente for nulo, isto é $a_0 = 0$.

[IA_r]. Segundo o teorema fundamental da álgebra todo o polinômio real pode ser escrito como produto de fatores lineares reais. Deste modo qual das alternativas configura uma equação que possuí o 0 (zero) como raiz racional?

a) $A(x) = (x - 1)(x - 2)$

b) $B(t) = (t + 3)(t + 3)(t - 1)$

c) $C(m) = (m - \sqrt{5})(m + \sqrt{5})(m - 1)(m + 1)$

d) $D(s) = (s - 2)\ (s + 2)\ s$

e) $E(y) = (y - 3)(y - 2)$

A partir da revisão de estudos identificamos nas pesquisas experimentais que o trabalho com os coeficientes das equações polinomiais não configurou dificuldades por parte dos alunos investigados.

Não obstante, pelo desenvolvimento desta atividade ser após a realização da UARC 1 (que explora o coeficiente líder e o termo independente) inferimos que os alunos não apresentaram dificuldades em seu desenvolvimento.

O fator principal para compreensão das condições do zero ser raiz de uma equação polinomial está na percepção dos valores numéricos obtidos quando uma equação polinomial possui ou não o termo independente. Assim buscamos tratar nesta UARC, bem como as demais (condições para um raiz e menos um raiz), com a utilização de dois grupos de equações, uma que satisfaz as condições e outro que permite a diferenciação.

UARC 4 – Identificação do 1 (um) como raiz de uma equação polinomial

Temos por objetivo levar aluno a identificar quando 1 (um) é raiz de uma equação polinomial sem necessitar utilizar métodos de resolução ou a determinação do valor numérico. os materiais utilizados serão o protocolo da sequência didática, lápis, caneta e borracha. Em que o professor atuará como mediador da atividade prestando esclarecimentos e dando liberdade de os alunos dissertarem suas resoluções e conclusões.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete a tabela com a soma dos coeficientes de cada equação polinomial.

I. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

II. $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$

III. $2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$

IV. $x^3 - 7x + 6 = 0$

V. $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$

VI. $x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$

Grupo A		**Grupo B**	
Equação polinomial	Soma	Equação polinomial	Soma
$2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^3 - 7x + 6 = 0$	
$x^4 + 8x^2 - 20 = 0$		$3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$	
$2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$		$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$	

$[I_r]$. Em relação a soma dos coeficientes da equação polinomial, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

R:____

____

$[I_e]$. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(1)$	Polinômios	$P(1)$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$		$P(x) = x^3 - 7x + 6$	

$P(x) = x^4 + 8x^2 - 20$		$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 - 3x + 12$		$P(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2$	

$[I_r]$. Em qual grupo o 1 foi raiz das equações polinomiais apresentadas? (em qual grupo o 1 teve valor numérico nulo).

R: ____

$[I_r]$. Qual a relação entre a soma dos coeficientes das equações polinomiais descritas e a raiz 1 de um polinômio, considerando a análise anterior?

R:____

____

$[I_f]$. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 1 (um) como raiz quando a soma dos coeficientes de uma equação polinomial for igual a 0 (zero), isto é, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

$[IA_r]$. Qual das equações polinomiais apresentadas a seguir admite 1 como raiz?

(A) $2x^2 - x + 5 = 0$

(B) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$

(C) $x - 2 = 0$

(D) $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

(E) $2x^5 + x^3 - 4x = 0$

A condição para que o 1 (um) seja raiz de uma equação polinomial é a soma de dos coeficientes dessa equação ser igual a zero. Embora algumas pesquisas teóricas que abordaram o conteúdo de equações polinomiais apresentassem a condição do 1 (um) raiz como espécie de corolário, não identificamos atividades que discutissem as condições para 1 (um) ser raiz de uma equação polinomial. Ainda assim, nossos estudos preliminares permitiram inferir que uma possível dificuldade a ser apresentada pelos alunos consiste na percepção do termo independente enquanto coeficiente da potência de grau zero.

UARC 5 – Identificação do -1 (menos um) como raiz de uma equação polinomial

Por fim, temos a UARC 5 que tem por objetivo fazer com que o aluno possa compreender as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial sem a necessidade da resolução da equação ou verificação via cálculo do valor numérico. Os materiais e os procedimentos serão os mesmos descritos nas atividades anteriores e, de modo análogo, não foram identificadas questões específicas relativas a este tópico. Dentre as dificuldades que os alunos possam vir a apresentar destacamos a identificação do termo independente enquanto coeficiente da potência de grau zero.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete os quadros a seguir realizando as seguintes somas.

Soma 1 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente par;

Soma 2 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar;

Resultados – possibilidades: Iguais (=) ou diferentes (≠).

Grupo A			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$			
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$			
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$			
Grupo B			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$			
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$			
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$			

$[I_r]$. Em relação as somas dos coeficientes de expoentes pares e ímpares, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

R:____

____

$[I_e]$. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(-1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		Grupo B	
Polinômios	$P(-1)$	Polinômios	$P(-1)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$		$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$	
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 - 16$		$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$	
$P(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x + 6$		$P(x) = x^5 + 2x^3 + 3$	

$[I_r]$. O que você conseguiu identificar em relação ao valor numérico obtido nas equações do grupo A e nas equações do grupo B?

R:

[I_e]. Utilize o aplicativo Mathway e identifique as raízes de cada equação polinomial oriundas dos grupos polinomiais A e B anteriores.

Grupo A					
Equações Polinomiais	Raízes				
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$					
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$					
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$					

Grupo B					
Equações Polinomiais	Raízes				
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$					
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$					
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$					

[$I_r - 03$]. Qual grupo apresentou -1 como uma de suas raízes? Qual relação você consegue estabelecer com a questão inicial?

[I_r]. Quais suas conclusões em relação as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros?
R:

[I_f]. Quando a soma dos coeficientes dos termos de expoente par for igual a soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar, então -1 (menos um) será uma das raízes dessa equação polinomial.

[IA_a]. Construa duas equações polinomiais que possua -1 (menos um) como uma de suas raízes e entregue para um colega identificar utilizando o método da soma dos coeficientes de termos de expoente par e ímpar. Utilize o aplicativo Mathway se necessário para confirmação.

2. SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

O Conteúdo de equações polinomiais (ou equações algébricas) é ensinado nas escolas, na maioria dos casos, na 3ª série do Ensino Médio. Os alunos são conduzidos a aprofundarem os conhecimentos obtidos nos estudos de polinômios, agora dentro do contexto dos números complexos. São retomadas as operações com polinômios com apresentação de novos algoritmos para o cálculo algébrico, não obstante, os estudos das raízes são aprofundados e os procedimentos de determinação se mostram variados.

Com enfoque nas questões acerca do ensino de raízes racionais de equações polinomiais, nos propomos a realizar inicialmente uma revisão de estudo de pesquisas experimentais relacionadas a este objeto matemático. Em seguida, realizamos a verificação das considerações dos documentos oficiais.

Acreditamos que tais procedimentos acabam por fornecer uma melhor reflexão do objeto matemático estudado no âmbito do seu processo de ensino e aprendizagem. Tais estudos preliminares contribuíram para construção da sequência didática voltada para o ensino de raízes racionais de equações polinomiais. Deste modo, este tópico tem por objetivo apresentar um panorama relativo ao ensino e a aprendizagem do tema a partir das considerações da comunidade científica e dos documentos oficiais.

2.1. CONSIDERAÇÕES DE PESQUISAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico visamos apresentar as observações obtidas a partir de uma revisão de estudos acerca do teorema das raízes racionais de equações polinomiais no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, sendo nosso enfoque neste produto educacional as pesquisas experimentais.

Estas foram coletadas de repositórios online de instituições de ensino superior e de bibliotecas digitais segundo os filtros de “equações polinomiais”, “ensino de equações polinomiais”, “polinômios e livro didático” e “raízes de equações polinomiais”. Uma vez que não foi identificada em nossas buscas pesquisas que versassem especificamente do tema de raízes racionais.

Em seguida selecionamos as pesquisas segundo critérios de inclusão e exclusão estabelecidos pelo período dado (2014-2018) e pelas categorias de revisão referente ao tipo de pesquisa desenvolvida. O gráfico a seguir apresenta a relação de pesquisas levantadas para discussão do objeto matemático.

Quadro 2 – Relação de pesquisas experimentais da revisão de estudos

TÍTULO	AUTOR	IES	ANO
Ensino de polinômios no ensino médio: uma nova abordagem	André Ricardo Dierings	UFSM	2014
Equações polinomiais: um estudo aplicado ao ensino médio	Oséas Arruda Ciriaco	UEMS	2016
O estudo das funções polinomiais no Ensino médio.	Tuane Gomes de Oliveira Fuly de Mattos	UENF	2017
Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio	Bruna Fernanda Sato Lopes	UFMT	2018
Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem	Edson Vander da Silva	USP	2018

Fonte: Souza e Cabral (2019).

Em cada pesquisa, destacamos questão de pesquisa, objetivo, metodologia e resultados obtidos estabelecendo relações e realizando discussões no que tange ao processo de ensino e aprendizagem de equações polinomiais.

A pesquisa de Dierings (2014) teve por objetivo propor uma nova forma de abordagem para o ensino de polinômios no ensino médio que desse enfoque na preparação para os estudos no Ensino Superior. A proposta metodológica é composta de 7 atividades que, segundo o autor, trabalha as habilidades de investigação e intuição dos alunos sem deixar de dar ênfase às definições e teoremas sendo aplicadas com uma turma do 3º ano do nível técnico em informática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS).

No desenvolvimento da atividade o autor destaca preocupação com relação ao tempo de aplicação da proposta metodológicas e o tempo dos alunos devida à preparação para o vestibular a ser realizado ao final do ano letivo. As atividades eram desenvolvidas com a utilização do software GeoGebra e com a planilha de cálculo do Excel e discutiam diversos tópicos do conteúdo de polinômios no Ensino Médio, dando enfoque no estudo gráfico das funções polinomiais, a determinação de raízes e na operação de divisão de polinômios.

Após o desenvolvimento das atividades foi percebido um maior domínio do conteúdo de polinômios nesse nível de ensino e um bom desempenho por parte dos alunos na resolução tanto de exercícios do livro didático e quanto questões de vestibular. Além disso, os alunos apresentam ter interesse no estudo do conteúdo gerando um melhor entendimento dos teoremas e de questões comparada as outras turmas ensinadas no modelo tradicional.

Nas conclusões é confirmada a viabilidade da proposta metodológica e sua contribuição para com o desenvolvimento de habilidades no conteúdo de polinômios de modo a preparar para estes, caso queiram, prosseguir os estudos na área de ciências exatas e tecnologias.

Por conseguinte, temos a pesquisa de Ciriaco (2016) cujo objetivo foi apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino de equações polinomiais de grau até quatro. Dando atenção especial a fórmula de Cardano-Tartaglia. A sequência era composta de 3 blocos de atividades.

A primeira com relação a situações problemas envolvendo polinômios e algumas questões procedimentais; no segundo bloco foi desenvolvido por meio de atividades a fórmula de Cardano-Tartaglia e explorado exercícios envolvendo polinômios de 3º grau e no terceiro bloco de atividades o autor deu enfoque em questões de aplicação de polinômios em diferentes contextos de modo a verificar e aprofundar os conhecimentos detidos pelos alunos no desenvolvimento das atividades; Por fim, foi realizada uma avaliação da aprendizagem com relação ao conteúdo abordado.

As atividades foram desenvolvidas com uma turma de 3º ano do Ensino Médio ao longo de 15 aulas de 50 minutos cada, foi inicialmente realizada uma avaliação diagnóstica para verificar os conhecimentos da turma acerca do tema. A turma foi dividia em equipes formadas pelos próprios alunos e foi solicitado a estes realizassem as atividades individualmente, mas que realizassem discussão com seu grupo diante das questões, além disso foi pedido aos alunos que registrassem as atividades e as anotações feitas para sua resolução.

Nos resultados, observou-se que os alunos apresentaram dificuldades com relação a questões envolvendo situações reais e no tratamento das questões relacionadas a demonstração da solução de polinômios de 3º grau. É destacado pelo autor como possíveis justificativas a organização do currículo e o sistema de ensino estabelecido e ressalta a necessidade relacionar o estudo das equações polinomiais, às equações já conhecidas e que os alunos detêm maior afinidade e esclarecer que os conteúdos não são diferentes.

A pesquisa de Mattos (2017) teve por objetivo propor uma sequência de atividades que contribuísse para a compreensão de conceitos, propriedades e características das funções polinomiais por meio da visualização e aplicação.

Para isso elaborou atividades pautada na resolução de problemas com o auxilio do *Software* GeoGebra. As atividades foram aplicadas com uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do Rio de Janeiro.

Nos resultados foi constatado a importância da contextualização no processo de construção do conhecimento além da utilização de recursos tecnológicos no ensino das funções polinomiais. Não obstante, a autora destaca que a proposta proporcionou uma aprendizagem significativa a partir das aulas diferenciadas, o que reduziu as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos.

Lopes (2018) realizou uma pesquisa com alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentaram maior dificuldade no conteúdo de funções polinomiais, teve por objetivo de investigar as contribuições de uma metodologia apoiada na resolução de problemas com auxílio do software GeoGebra para o ensino de funções polinomiais. Para isso, a autora elaborou uma sequência de atividades desenvolvidas com os alunos durante aulas de reforço realizadas no contra turno escolar.

Foram desenvolvidas 13 atividades que versaram o conteúdo de funções polinomiais, trabalhando com polinômios de grau menor que 4, em específico a definição de modelos polinomiais, valores numéricos, identificação de raízes a partir de gráficos elaborados via GeoGebra.

Nos resultados, a autora identificou que os alunos apresentaram inicialmente resistência na proposta a partir da utilização dos recursos computacionais GeoGebra por estarem acostumados com atividades mecânicas e expositivas, gerando assim dificuldades na utilização do software e dos resultados, apresentaram melhor desempenho nas questões relativas à função polinomial do 1º e 2º grau.

O trabalho de Silva (2018) teve por objetivo analisar polinômios da forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com condições sobre os coeficientes, para solução de equações polinomiais de grau até quatro. Para isso, o autor realizou um estudo epistemológico dos polinômios, das considerações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e das abordagens presentes em manuais didáticos. Tais informações foram necessárias para elaboração de uma proposta metodologia de intervenção para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos polinômios.

A proposta consistia em 6 atividades (de aplicação e situação problema) relacionadas a resolução de equações polinomiais e com utilização do programa computacional Graphmatica que foram aplicadas a turma de 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública da rede estadual. Após a realização de aulas para o ensino de conteúdos pré-requisitados, tais como números complexos, polinômios e expressões algébricas, foi realizado uma avaliação composta de 4 questões para resolução por parte dos alunos e verificação da aprendizagem sendo ambos os momentos analisados quantitativamente e qualitativamente segundo as observações realizadas pelo autor.

Nas análises o autor identificou que os alunos souberam aplicar os conhecimentos obtidos nas aulas dos conteúdos pré-requisitados para a resolução das atividades apresentando desempenho assertivo de 50% a 100% das questões. Toda via, chama atenção a algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nas operações com números reais e complexos; reconhecer termos de funções polinomiais e multiplicidade de raízes, interpretar geometricamente polinômios e resolução de problemas com raízes complexas.

Deste modo, Silva (2018) confirma a eficácia da proposta metodológica com o recurso computacional para o processo de ensino e aprendizagem de polinômios e equações polinomiais e destaca sua utilização como fator motivador para o estudo de polinômios da $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por parte dos estudantes.

Considerando nosso enfoque nos resultados de nossa pesquisa, relatamos que em síntese as pesquisas correlatas apresentam propostas metodológicas elaboradas a partir da utilização de softwares computacionais voltados ao ensino de matemática, como o GeoGebra e o Graphmatica, em que os alunos de modo geral apresentaram algumas dificuldades na utilização dos programas, porém abertos a proposta. Nos resultados identificamos que os alunos investigados apresentaram dificuldades de aprendizagem em questões envolvendo situações reais, reconhecimento de funções polinomiais, multiplicidade de raízes, interpretação geométrica de polinômios e resolução de problemas com raízes complexas.

2.2. CONSIDERAÇÕES DOS DOCUMENTOS OFICIAIS

No que concerne ao processo de aprendizagem em Matemática por parte dos alunos na Educação Básica, podemos considerar diversos fatores exógenos ou não à sala de aula que atuam como barreiras nesse processo e dificultam a assimilação e compreensão do conteúdo pelo alunado. Nesse sentido, os documentos oficiais buscam auxiliar a pratica docente no âmbito de metodologias e o currículo a ser trabalhado. Descrevemos a seguir as considerações de documentos oficiais referente ao conteúdo de Equações Polinomiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) sistematizam o ensino de matemática em três eixos: álgebra (números e funções), geometria e medidas, e análise de dados. O conteúdo de equações polinomiais está imerso no eixo da álgebra, referente a este há uma atenção especial ao estudo das funções (o que incluem funções polinomiais) por estas proporcionarem o desenvolvimento da linguagem algébrica. Não obstante por meio desse conhecimento é possível resolver problemas, criar modelos descritivos de fenômenos e estabelecer conexão com outras áreas (BRASIL, 2002, p. 121).

Ainda nos parâmetros, observamos o destaque para o estudo de equações polinomiais até o segundo grau e a resolução de sistemas de equações lineares até o estilo 3 x 3. O aprofundamento do estudo das Equações Polinomiais (bem como dos polinômios e funções polinomiais) devem constar na parte flexível do currículo, ou seja, ficam a critério de escolha da escola o seu ensino.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) versam acerca do conteúdo de funções polinomiais com olhar para funções de grau até 2 e as exponenciais. Com relação ao tratamento de equações de ordem superiores o documento ressalta dificuldades de abordagem e até de representação gráfica. No entanto, ressalta a pertinência do estudo de funções e equações polinomiais no âmbito de suas raízes. (BRASIL, 2006, p. 74).

De modo a confirmar o cenário em construção, na leitura do documento de contribuições da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (2014) para discussão do currículo de Matemática no Ensino Médio, não foi identificado a menção ao estudo aprofundado de equações polinomiais versando em suas considerações o tratamento das equações de primeiro e segundo grau relacionados ao modelo funcional.

Por fim, observamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por ser o norteador vigente dos currículos das Escolas de rede pública e privada de ensino. A BNCC corresponde a parte do currículo do Ensino Médio, sendo este composto além dela por itinerários formativos que podem variar conforme o contexto local. Deste modo temos uma parte fixa representada pelo documento e uma parte flexível estabelecida por cada Escola, Secretarias e Municípios. O conteúdo de Equações Polinomiais consta na parte flexível do currículo.

Percebemos do exposto que não há menção ao estudo das raízes racionais e as equações polinomiais no seu sentido mais aprofundado estão enquadrados como conteúdo da parte flexível dos currículos educacionais, fato que justifica sua abordagem no 1º e 2º ano, em anos anteriores e até mesmo a sua ausência deste objeto matemático no currículo escolar.

3. UM ESTUDO DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Neste tópico abordaremos o que a ciência nos apresenta em relação as raízes racionais de equações polinomiais. Para isso, iremos explorar alguns tópicos que se tornam base deste teorema e sustentam as os corolários decorrentes deste.

A obra Fundamentos da Matemática Elementar, no seu sexto volume, nos traz o estudo dos números complexos, polinômios e das equações polinomiais define-as da seguinte maneira: "Dadas duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $f(x) = g(x)$" (IEZZI, 2013, p. 109). Logo se, por exemplo, temos $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ e $g(x) = x^2 - 8$ a sentença $x^3 + 2x^2 - 6x = x^2 - 4$ configura uma equação polinomial.

A raiz de uma equação polinomial é o valor dado a incógnita x que torna na sentença verdadeira. Considerando o exemplo dado acima para $x = 0$, temos que $0^3 + 2.0^2 - 6.0 = 0^2 - 4$, consequentemente temos $0 = -4$ (falsa). Por outro lado, para $x = 1$, temos $1^3 + 2.1^2 - 6.1 = 1^2 - 4$, consequentemente temos $-3 = -3$ (verdadeira) e portanto, $x = 1$ se configura como uma raiz da equação polinomial.

O conjunto solução ou conjunto verdade de uma equação polinomial $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{C}$, é o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas de uma equação polinomial. Considerando a equação polinomial em estudo $x^3 + 2x^2 - 6x = x^2 - 4$, o conjunto solução é dado por $S = \{-1 - \sqrt{5},\ 1, -1 + \sqrt{5}\}$.

Assim, quando se fala em resolver uma equação polinomial significa obter o seu conjunto solução a partir de uma linha de raciocínio lógico-matemático, sem o uso da intuição ou adivinhação. Para isso, trabalhamos com a equação polinomial em uma forma equivalente de modo que a sentença seja igual a zero, portanto, uma equação polinomial pode ser escrita na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Disso, decorre o teorema fundamental da álgebra, cujo qual afirma que todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa e o teorema da decomposição o qual apresenta a decomposição de um polinômio P de grau $n \geq 1$ a partir de n fatores do primeiro grau, isto é, $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$, em que r_1, r_2, r_3, ... r_n são as raízes de P.

Em consequência do teorema da decomposição, temos que um polinômio P de grau $n(n \geq 1)$ admite raízes que são distintas ou não, deste modo temos a possibilidade da multiplicidade de raízes no conjunto solução de uma equação polinomial, neste caso o polinômio P pode ser escrito na forma $P = (x-r)^m.Q$, sendo $Q(r) \neq 0$, um polinômio fator que constitui P.

Assim adentramos nas relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial. Essas relações foram estudadas por anos e nos levaram ao que conhecemos como relações de Girard, um matemático francês que nos proporcionou métodos para determinação de raízes de equações algébricas para qualquer grau, embora seja usada para equações de 3º, 4º e, por vezes 5º grau.

Tomando como ponto de partida a equação do 2º grau, temos sua forma canônica dada por $ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$, cujas raízes são r_1 e r_2. Vimos que essa equação pode ser escrita a partir do produto do coeficiente do termo dominante e suas raízes, isto é, $a(x-r_1)(x-r_2)=0$. Umas vezes equivalentes, vale a igualdade a seguir $ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$. Desenvolvendo de ambos os lados temos que $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(r_1+r_2)+r_1r_2, \forall x$. Portanto, concluímos que $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$ e $r_1r_2=\frac{c}{a}$ que vemos no método de soma e produto ensinado no estudo da equação polinomial do 2º grau.

De modo análogo faremos o mesmo para equação do 3º grau. Assim, dado $ax^3+bx^2+cx+d=0, (a \neq 0)$ e as raízes r_1, r_2 e r_3, podemos escrever a equação na forma $a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0$, de modo equivalente segue a expressão $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, desenvolvendo de ambos os lados temos a igualdade a seguir

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x-r_1r_2r_3, \forall x.$$

Portanto, temos $r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a}$, $r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=\frac{c}{a}$ e $r_1r_2r_3=-\frac{d}{a}$.

Essas são as relações Girard para equações do 3º grau. Em continuidade é possível deduzir as relações para uma equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$. Para isso considere uma equação polinomial dada por: $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$, $a_n \neq 0$ cujas raízes são r_1, r_2, $r_3, \ldots, r_n$, temos a identidade:

$$P(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)=a_nx^n-a_n(r_1+r_2+r_3+\cdots r_n)x^{n-1}+a_n(r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n)x^{n-2}-a_n(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n)x^{n-3}+\cdots+(-1)^h a_nS_nx^{n-h}+\cdots+(-1)^n a_n(r_1r_2r_3.\ldots.r_n), \forall x.$$

Sendo

$$S_1=r_1+r_2+r_3+\cdots r_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$S_2 = (r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$S_3 = (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n) = \frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$S_h = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \text{ e, enfim,}$$

$$S_n = r_1r_2r_3. \ldots . r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

As relações de Girard apresentadas acima constituem um método de relações entre coeficientes e raízes de equações polinomiais. No entanto, as n relações para uma equação polinomial de grau n não são suficientes para obter $r_1, r_2, r_3. \ldots . r_n$. Tomando r_1 para determinação temos no fim das substituições $a_n{r_1}^n + a_{n-1}{r_1}^{n-1} + a_{n-2}{r_1}^{n-2} + \cdots + a_1r_1 + a_0 = 0\ (*)$ (IEZZI, 2013). Porém esse modelo será necessário para demonstração do teorema das raízes racionais, vamos a ele.

O teorema das raízes racionais aponta se uma equação polinomial de grau n dada por $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0\ \ (a_n \neq 0)$, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ com p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Para Demonstrar o teorema, partirmos de $(*)$, se $\frac{p}{q}$ é uma raiz de $P(x) = 0$, temos $a_n.\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}.\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}.\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_1.\frac{p}{q} + a_0 = 0$, multiplicando a equação por q^n obtemos $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$. Isolando a_np^n e, em seguida a_0q^n, temos

$$(1)\ a_np^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}]$$
$$(2)\ a_0q^n = -p[a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1q^{n-1}]$$

Como $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, p\ e\ q$ são todos inteiros, decorre que

$$\alpha = [a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}] \text{ é inteiro.}$$
$$\beta = [a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1q^{n-1}] \text{ é inteiro.}$$

Assim, retomando (1) e (2), vem

$$(1) = \frac{a_np^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} \text{ e } (2) = \frac{a_0q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$$

Nisso a_np^n é divisível por q e como p^n e q são primos entre si e temos que a_n é divisível por $q.a_0q^n$ é divisível por p e como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p. Sua utilização acontece na identificação de todas as possíveis raízes racionais $\frac{p}{q}$ a partir dos divisores de a_0 e a_n, respectivamente. A exemplo, considere a equação $P(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$. Por ser uma equação polinomial do 3º grau, temos que $P(x)$ admite 3 raízes. Se existe(m) raiz(es) racionais $\frac{p}{q}$, temos que p é divisor de $a_0 = 6$ e q é divisor de $a_n = 1$. A tabela a seguir mostra o conjunto de possibilidades de raízes racionais para esta equação polinomial em estudo.

$q \backslash p$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
-1	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
1	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6

Deste modo se a equação polinomial $x^3 - 7x + 6 = 0$ tiver raízes racionai, estas estarão no conjunto $\frac{p}{q} = \{-1,1,-2,2,-3,3,-6,6\}$. Fazendo a verificação para os 8 elementos do conjunto é possível identificar que $P(x)$ possui suas três raízes números racionais, são eles $-3, 1$ e 2, afinal temos

$$P(-3) = (-3)^3 - 7.(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = -27 + 27 = 0$$

$$P(1) = 1^3 - 7.1 + 6 = 1 - 7 + 6 = -7 + 7 = 0$$

$$P(2) = 2^3 - 7.2 + 6 = 8 - 14 + 6 = -14 + 14 = 0$$

Nessa pesquisa daremos enfoque no ensino do teorema das raízes racionais sob a metodologia do desenvolvimento de sequência didática à luz das UARC.

Nesse sentido, é intencional da pesquisa tornar o aluno um pesquisador para que este, com espirito investigativo, consiga deduzir este teorema e possa utiliza-lo na resolução de equações polinomiais e problemas traduzidos em modelos matemáticos polinomiais.

Não obstante, desenvolveremos previamente os corolários de confirmação de $-1{,}0$ e 1 como raízes de uma equação polinomial, uma vez que, estes corolários desenvolvem a familiaridade do aluno com os termos de uma equação polinomial e consequentemente auxiliam na compreensão do teorema das raízes racionais.

Em suma, descrevemos a seguir os três corolários: (I) Uma equação polinomial que possui o termo independente nulo, isto é, $a_0 = 0$ admite o 0 (zero) como uma de suas raízes. (II) Uma equação polinomial que tem a soma de seus coeficientes igual a 0 (zero), admite 1 (um) como uma de suas raízes. E por fim, (III) Uma equação polinomial que tiver a soma dos coeficientes de termos de expoente par igual a soma dos coeficientes de termos de expoente ímpar, admite -1 como uma de suas raízes.

4. ORIENTAÇÕES AOS ALUNOS

Nesta sessão apresentamos algumas orientações que acreditamos ser pertinentes utilização de sequências didáticas em sala de aula e em especifico para o trabalho com as raízes racionais de equações polinomiais.

Inicialmente apresentamos os objetivos de aprendizagem de cada uma das atividades (UARC) a serem desenvolvidas (quadro 3) e em seguida versão acerca das orientações que os professores podem repassar aos alunos antes da aplicação.

Quadro 3 – Objetivos de aprendizagem das UARC's

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
1	Os atores principais a_n e a_0.	Identificar em uma equação polinomial o seu coeficiente líder a_n e o termo independente a_0.
2	As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.	Aplicar o Teorema de pesquisa das raízes racionais de equações polinomiais na resolução de atividades.
3	Identificação do 0 como raiz de equação polinomial.	Verificar se o 0 (zero) compõe uma das raízes de uma equação polinomial.
4	Identificação do 1 como raiz de equação polinomial.	Verificar se o 1 (um) compõe uma das raízes de uma equação polinomial.
5	Identificação do – 1 como raiz de equação polinomial.	Verificar se o – 1 (menos um) compõe uma das raízes de uma equação polinomial.

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Os princípios teóricos que regem a utilização de sequência didáticas no ensino requerem que o aluno tenho participação ativa no processo de ensino e aprendizagem, isto é, seja protagonista da construção de seu conhecimento e tenho o desejo e motivação para realizar as ações necessárias para isso.

Deste modo, na aplicação deste produto educacional é essencial que o aluno tenha olha investigativo e leitura atenta. Assim, antes de começar, leia todos os materiais e instruções da sequência didática cuidadosamente. Certifique-se de que eles compreendam o objetivo de cada atividade caso seja explicito.

Não obstante, peça que os alunos deixem apostos os materiais necessários para atividade, em nosso caso: caneta, lápis, borracha, o manual da sequência didática e o celular com o aplicativo Mathway aberto. É importante reclamar que evitem a utilização do celular para outras finalidades que não seja o uso do aplicativo.

Perguntar é essencial. Lembre os alunos que se manifestem caso apresentem dúvidas sobre algum conteúdo ou atividade, este ponto é fundamental e nas orientações ao professor esclareceremos o porquê. Caso os alunos forem fazer em dupla ou grupo peças que eles se organizem e deixe a composição livre, no entanto, dê a cada um material próprio e utilize seu próprio caderno para anotações.

O tempo é de sua regência, porém o esse período pode ser compartilhado com os alunos para que os mesmos tenham ciência do tempo de desenvolvimento da atividade e que foque sua atenção para cumprir este prazo.

Ao final de cada atividade sugira que o aluno reflita sobre o que foi desenvolvido e na resposta registrada. Tal atitude é fundamental, uma vez que, as UARC's trabalho a partir da abordagem conectada de conceitos e de modo gradual o que implica que a compreensão de um tópico contribui para o avanço para o tópico subsequente a ser abordado na sequência didática.

Por fim, avisem que os alunos não devem escrever no quadro de intervenção formalizante, este espaço compete ao professor. Não obstante, antes de estabelecer a intervenção formalizante, peça que os alunos se manifestem e compartilhem suas ideias com a turma. Este feedback contribui para que os alunos consolidem os conhecimentos e seus entendimentos em relação ao conceito matemático em estudo.

5. ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES

No trabalho com sequência didática segundo o modelo estruturante das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) existem etapas a serem desenvolvidas antes e depois da aplicação do material.

Assim, conceitualmente, para que ocorra a aprendizagem de um determinado saber é essencial que o aluno esteja a par dos conhecimentos prévios relacionados a este saber e após o estudo é importante, embora a avaliação seja continua, realizar uma verificação da aprendizagem como é o caso de nossa avaliação aplicativa.

Nesse sentido, destacamos como conhecimentos prévios ao ensino das raízes racionais de equações polinomiais o estudo da estrutura de equação polinomial; a identificação do grau de uma equação polinomial; a compreensão de valor numérico e raiz; e o conhecimento do teorema fundamental da álgebra. Apresentamos uma proposta de teste diagnóstico ao final deste produto (Apêndice).

Cada uma das unidades conceituais possui seu respectivo objetivo de ensino que em conjunto determinam a aprendizagem do conteúdo de raízes racionais de equações polinomiais. O quadro 4 apresenta essa relação.

Quadro 4 – Objetivos de ensino das UARC's

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
1	Os atores principais a_n e a_0.	Reconhecer em uma equação polinomial o seu coeficiente líder a_n e o termo independente a_0.
2	As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.	Ensinar o Teorema de pesquisa das raízes racionais de equações polinomiais para resolução de atividades.
3	Identificação do 0 como raiz de equação polinomial.	Definir as condições em que o 0 (zero) é raiz de uma equação polinomial.
4	Identificação do 1 como raiz de equação polinomial.	Definir as condições em que o 1 (zero) é raiz de uma equação polinomial.
5	Identificação do – 1 como raiz de equação polinomial.	Definir as condições em que o – 1 (zero) é raiz de uma equação polinomial.

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

A sequência didática configura-se uma proposta para o ensino de um saber, no entanto, cada sala de aula é única com suas particularidades e características. Nesse ponto, ressaltamos que é essencial a preparação do professor para a sua aplicação e, portanto, é importante sua familiarização com o material e que este o adapte, caso necessário, a sua realidade.

Além disso, o professor deve separar os recursos necessários para o desenvolvimento das atividades, em nosso caso, a sequencia didática impressa para os alunos e o *software* Mathway em seu celular.

O professor possui um papel de mediador nesta modelo de ação educativa. Em consequência disso, deve atuar para estar disponível aos alunos assim como para realização dos esclarecimentos de dúvidas, fornecimento de exemplos. Evite dar a resposta rapidamente, apenas forneça os subsídios necessários para que o aluno por si próprio elabore sua resposta.

A promoção de discussões é fundamental no processo de ensino e aprendizagem. No cerne do constructo das UARC's, Cabral (2017) destaca a Intervenção Oral de Manutenção Objetiva que refere as colocações feitas pelo professor de modo a não desviar o aluno do objetivo de aprendizagem, bem como para instigar a sua percepção de conceitos, regularidades, procedimentos e teoremas.

Portanto, o dialogo possui papel fundamental e o jogo de feedback da interação Professor-Aluno-Saber (Triangulo Didático) corrobora para a construção do conhecimento por parte dos alunos. Ainda acerca da importância do diálogo, permita e incentive a interação entre os alunos em assuntos relacionados ao objeto de estudo, independente de a atividade estar sendo realizada individualmente ou não.

Nas questões que levantam reflexões por parte dos alunos, busque realizar a socialização para uma reflexão conjunta. Esta prática contribui para o educando consolide seus conhecimentos do objeto matemático, neste caso, as raízes racionais de equações polinomiais.

Não obstante, realize uma avaliação continua, a partir da sequencia didática, da avaliação aplicativa e do desempenho e dedicação dos alunos ao longo de todo processo. Além disso é essencial que você professor pratique a autoavaliação, destacando os pontos altos e baixos no desenvolvimento da sequência didática.

REFERÊNCIAS

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).** Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______, MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 144 p. 2002.

______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, v. 2, 2006.

______, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretários de Educação. União Nacional dos Dirigentes Municipais da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**: Educação é a Base. Brasília – DF, 2017. Disponível em: <568 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2019.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**. 1 ed. Ática. São Paulo. 2008.

CABRAL, N. F. **Sequência Didática**: Estrutura e elaboração. 1 ed. Belém-PA. SBEM/ SBEM – Pará, 2017.

CIRIACO, O. A. **Equações polinomiais:** um estudo aplicado ao ensino médio. 2016. 55 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourado – MS, 2016.

DIERINGS, A. R. **Ensino de polinômios no ensino médio – uma nova abordagem.** 2014. 70 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Naturais e Exatas – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2014.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar 6:** complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LOPES, B. F. S. **Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio**. 2018. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e da Terra – Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá – MS, 2018.

MATTOS, T. G. O. F. de. **O estudo das funções polinomiais no ensino médio**. 2017. 112 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciência e Tecnologia – Laboratório de Ciências Matemáticas – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes – RJ, 2017.

SILVA, E. V. da. **Resolubilidade de polinômios:** da teoria ao ensino-aprendizagem. 2018. 105 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2018.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

APÊNDICES

TESTE DIAGNÓSTICO INICIAL

1) Equação polinomial ou (algébrica) de grau $n \geq 1$ é toda equação da forma:

$$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$$

Onde a variável x e os coeficientes $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \dots,\ a_1,\ a_0$ pertencem ao conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. A partir disso, considere a equação polinomial $2x^3 + 4x^4 - 7x + x^2 + 3x^5 - 1 = 0$. Os coeficientes a_0 e a_n são respectivamente:

(A) 4 e -7
(B) 2 e -1
(C) -1 e 2
(D) -1 e 3
(E) 3 e -1

2) Em uma equação polinomial $\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$. O grau de um polinômio é definido pelo maior expoente da variável x entre os termos da equação. Assim, analise os polinômios a seguir.

$A(x) = 2x^3 + 4x^4 - 7x + x^2 + 3x^5 - 1$

$B(x) = 0x^3 + x - 2$

$C(x) = -10$

A alternativa que apresenta respectivamente os graus de $A(x), B(x)$ e $C(x)$ é:

(A) 2-3-1
(B) 5-3-0
(C) 5-1-0
(D) 5-1-1
(E) 2-3-0

3) [...] Um número complexo r é raiz de um polinômio $P(x)$ quando $\boldsymbol{P(r) = 0}$. Quais os valores do conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ são soluções da equação polinomial dada por $2x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 3 = 0$.

(A) 0 e 1
(B) -1 e 0
(C) -2 e 2
(D) -1 e 1
(E) 1 e 2

4) O conjunto solução das equações polinomiais abaixo são os valores de x dados por, respectivamente:

(I): $3x - 5 = 0$ **(II):** $x^2 - 5x + 6 = 0$

(A) $S_1 = \left(\frac{5}{3}\right)\ e\ S_2 = (2{,}3)$

(B) $S_1 = \left(\frac{3}{5}\right)\ e\ S_2 = (1{,}3)$

(C) $S_1 = \left(\frac{5}{3}\right)\ e\ S_2 = (-2{,}3)$

(D) $S_1 = (2)\ e\ S_2 = (-2, -3)$

(E) $S_1 = (8)\ e\ S_2 = (2, -3)$

5) Teorema da decomposição: todo polinômio $P(x) = \boldsymbol{a_n x^n} + \boldsymbol{a_{n-1} x^{n-1}} + \boldsymbol{a_{n-2} x^{n-2}} + \cdots + \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_0}$ de grau $n \geq 1$, em C pode ser fatorado na forma: $P(x) = a_n(x - \alpha_1).(x - \alpha_2). \cdots .(x - \alpha_{n-1}).(x - \alpha_n)$. Sendo α_n, o coeficiente dominante e α_1, α_2, ... , α_{n-1}, α_n as raízes desse polinômio. Desta forma, marque a alternativa que apresenta o polinômio $P(x) = -2 + 2x^4$ na forma fatorada, sabendo que suas raízes são $1, -1, i$ e $-i$.

(A) $P(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(B) $P(x) = 2(x + 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(C) $P(x) = 2(x - 1)(x - 1)(x + i)(x + i)$
(D) $P(x) = -2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(E) $P(x) = -2(x + 1)(x + 1)(x - i)(x - i)$

6) As raízes da equação polinomial $3x^3 + 10x^2 + 7x - 10 = 0$, sabendo que $-2 - i$ é uma delas, são:

(a) $-2, -2 - i, i$
(b) $-2, i, 2$
(c) $-2 - i, -2 + i, \frac{1}{2}$
(d) $-2 - i, -2 + i, \frac{2}{3}$
(e) $-2 - i, 2 + i, \frac{1}{2}$