Recurso Educacional

Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES, FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA
SIMON GEORGE CHIOSSI

NITERÓI
JULHO/2023

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro Professor(a),

Apresentamos a você, este caderno de atividades, parte integrante da dissertação de mestrado intitulada "*ESTRATÉGIAS PARA CONSOLIDAR O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1^{O} E 2^{O} GRAU EM TURMAS DE 9^{O} ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II*", resultado da pesquisa vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ligado ao Instituto de Matemática e Estatística, da UFF (Universidade Federal Fluminense).

Este tem como objetivo complementar e apoiar as orientações metodológicas sugeridas no último capítulo da pesquisa citada acima. Está dividido em quatro sequências compostas por parte teórica, seguidas de sugestões de exercícios que buscam consolidar a aprendizagem do conteúdo estudado.

São elas:

1. Relação x Função.
2. Lei de Formação.
3. Função Polinomial do 1^{o} Grau.
4. Função Polinomial do 2^{o} Grau.

1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta, assume-se que o público-alvo possua conhecimentos prévios sobre:

- Teoria de conjuntos.
- Par ordenado.
- Plano cartesiano.
- Equações do 1º e 2º grau.

Caso não seja esta a realidade encontrada, se faz necessário que se introduza tais conceitos e definições antes de iniciar esta sequência didática. Para isso, sugerimos que utilize como apoio o capítulo 1, itens 1.1 e 1.2 (1.2.1. e 1.2.2.), deste material apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) para desenvolvimento dos mesmos.

1.1. RELAÇÃO X FUNÇÃO

Objetivo:

- Compreender os conceitos e definições de relação (ou relação binária) e função.
- Levar o aluno a diferenciar relação (ou relação binária) de função.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, videoaulas de sua preferência sobre o tema.
Tipo de atividade: Individual.
Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Neste primeiro momento se faz necessário uma aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. Porém, se tiver a possibilidade de reproduzir uma mídia digital, sugere-se que utilize videoaulas de sua preferência sobre o assunto.

Registros para serem realizados na lousa:

1.1.1. Introdução ao Estudo de Funções

Toda letra em uma equação pode assumir o papel de:

- <u>Incógnita</u> → são os valores desconhecidos de uma sentença matemática a serem determinados em um problema.

Exemplo:

$$x + 3 = 4$$

$$x = 1$$

- <u>Variável</u> → são as letras de uma expressão algébrica e que podem assumir diferentes valores conforme a situação.

$$p/x = 2 \qquad\qquad p/x = -1$$

$$x + 3 = 5 \qquad\qquad x + 3 = 2$$

Dicas ⟶ Deve-se exemplificar oralmente com exemplos lúdicos que façam parte do cotidiano dos alunos, para melhor compreensão.

Tipo:

- **Quanto pagarei pela passagem do ônibus variando o número de pessoas?**
- **Fiz uma compra e gastei um determinado valor, sabendo que um produto custa tanto, quanto custa o outro?**

1.1.2. Relação

*Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação** de A em B todo subconjunto R de A x B ou, mais simplesmente, uma relação binária de A em B.*

$$\boldsymbol{R} \text{ é } \boldsymbol{rela\text{ção } bin\text{á}ria\ de\ A\ em\ B} \Leftrightarrow \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}.$$

O conjunto R está contido em A x B e é formado por pares (x, y), em que o elemento x de A é "associado" ao elemento y de B mediante um certo critério de "relacionamento" ou "correspondência".

Exemplo:

Dica ⟶ Utilize cores distintas para a representação dos elementos referentes aos conjuntos A e B.

Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. O produto cartesiano de A por B é

A x B= $\{(0, 1), (0, 3), (0, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$.

Observe que como o conjunto A possui 3 elementos e o conjunto B também, temos $3 \cdot 3 = 9$. Daí, o conjunto A x B é composto por 9 elementos.

Considere o conjunto de pares ordenados (x, y) ∈ A x B, tais que $x < y$ (lê-se: *x* menor que *y*),

$$R = \{(0, 1), (0, 3), (0, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\},$$

este é chamado de **relação** entre os elementos de A e de B.

1.1.3. Função

Uma relação em que **CADA** elemento do conjunto domínio (x) se relacionar com um **ÚNICO** elemento do conjunto imagem (y) denomina-se **FUNÇÃO**. Ou seja, **função é um caso particular de relação.**

Esta pode ser representada por:

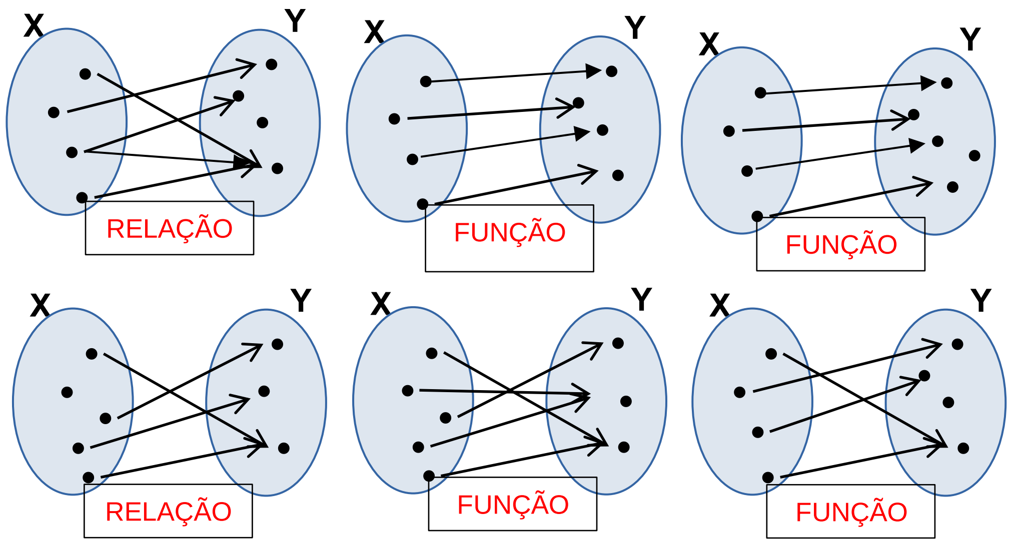
- Diagramas (Conjuntos)

Exemplos:

Dicas→ É preciso classificar em função e relação junto com os alunos, verificando a definição:

1. **Utilizando *"cada elemento do domínio (x)";***
2. **Se relacionando "*com um único y";***
3. **Vale ressaltar ainda que só importa de onde partem as setas (x).**
4. **Uma analogia muito próxima da linguagem utilizada por este público-alvo na idade regular é comparar a função a um relacionamento. Quando o *"x"* é correto e fiel, ele se relaciona com apenas um *"y"* e não sobra ninguém *"solto na pista"* para bagunçar os relacionamentos. Já a relação simples é *"bagunça" e pode tudo. Ou seja, "x"* se relaciona com quantos *"y"* ele desejar e ainda pode ter *"x" "livre"* para *"bagunçar".***

Figura 1 – Representação de função por diagramas



Fonte: Figura produzida pelo autor

1.1.3.1. Gráficos

Observe que no plano cartesiano, o conjunto domínio é formado pelas abscissas que representam o *"x"* no par ordenado, (x, y). Já o *"y"* é representado pelas ordenadas e eles são os elementos que formam o conjunto imagem.

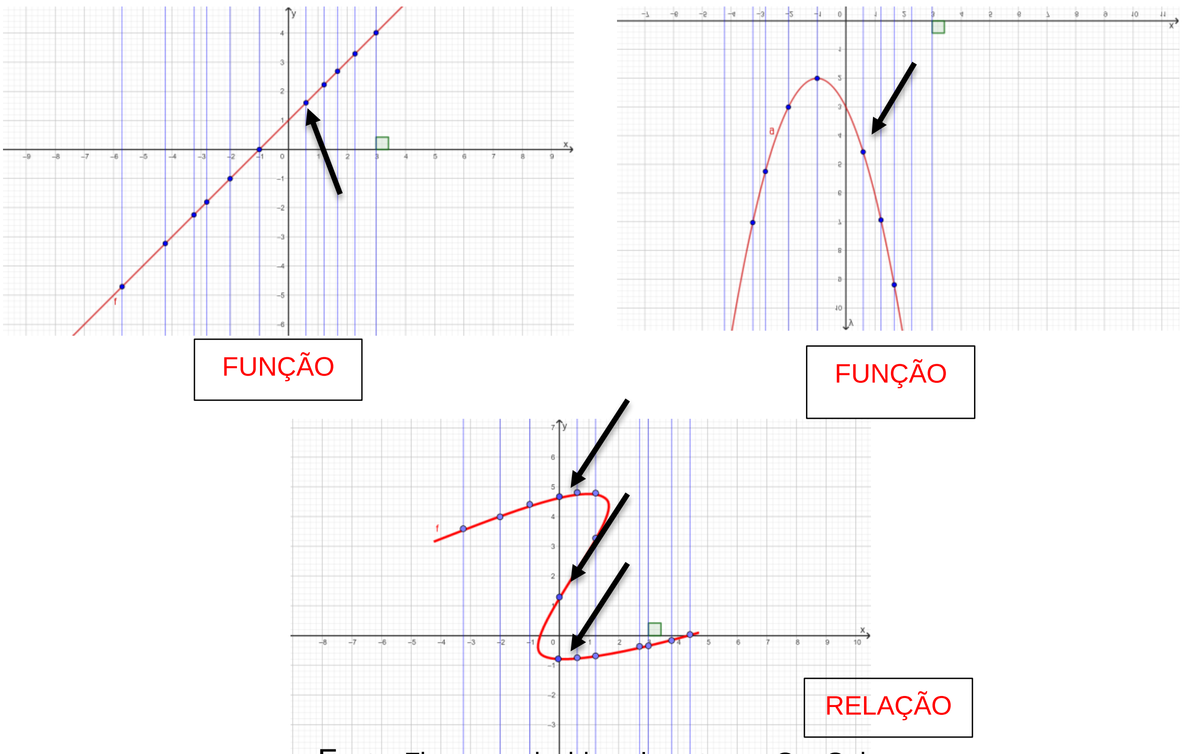
Uma forma prática de perceber a definição numa representação gráfica é traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas (x) no plano cartesiano e verificando se as mesmas interceptam o gráfico em apenas um único ponto, ou seja, um único *“y”* para cada elemento do domínio.

Exemplos:

Dicas ⟶ É preciso classificar em função e relação junto com os alunos, verificando a definição:

1. **Utilizando *“cada elemento do domínio (x)”* no eixo das abscissas*;***
2. **Se relacionando “*com um único y”*, corta o gráfico em um único ponto;**
3. **Uma analogia muito próxima da linguagem utilizada por este público-alvo na idade regular é comparar a função a um relacionamento. Quando o *“x”* é correto e fiel, ele se relaciona com apenas um *“y”* e não sobra ninguém “solto na pista” para bagunçar os relacionamentos. Já a relação é *“bagunça”* e pode tudo. Ou seja, *“x”* se relaciona com quantos *“y”* ele desejar e ainda pode ter *“x” “livre”* para *“bagunçar”.* É preciso praticar um pouco para consolidar tal entendimento, antes de avançar com o conteúdo.**

Figura 2 – Representação gráfica de função



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

1.1.3.2. Domínio, Contradomínio e Imagem

Os conjuntos de uma função são classificados em domínio, contradomínio e imagem.

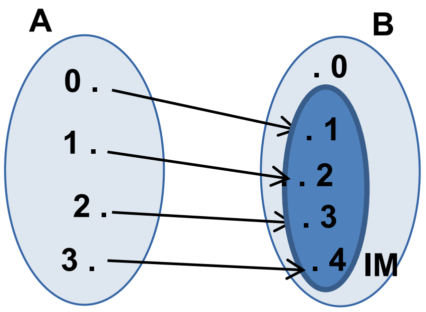
O conjunto D, domínio, é formado por todos os elementos do conjunto A, de onde partem as setas. Assim, costuma ser denominado também como o conjunto de partida.

Já o conjunto CD, contradomínio, é formado por todos os elementos de B, ou seja, é o conjunto que recebe as setas. Ele também é dominado como o conjunto de chegada, pois não necessariamente, todos os elementos de B precisam ser usados pela função, ou seja, receber setas.

Por último temos o conjunto IM, imagem, que é formado por todos os elementos de B que, de fato, recebem as setas. Observe que o conjunto IM é composto por todos os elementos "y" da função, portanto o conjunto imagem é subconjunto do contradomínio.

Exemplo:

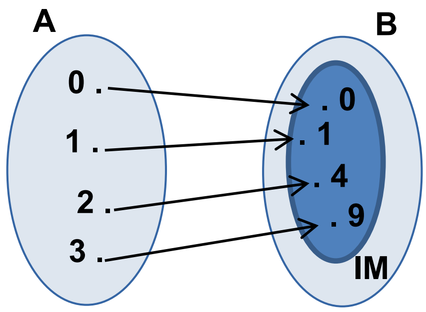
Figura 3 – Domínio, Contradomínio e Imagem



$D = A,$

$CD = B,$

$IM = \{1, 2, 3, 4\}$



$D = A,$

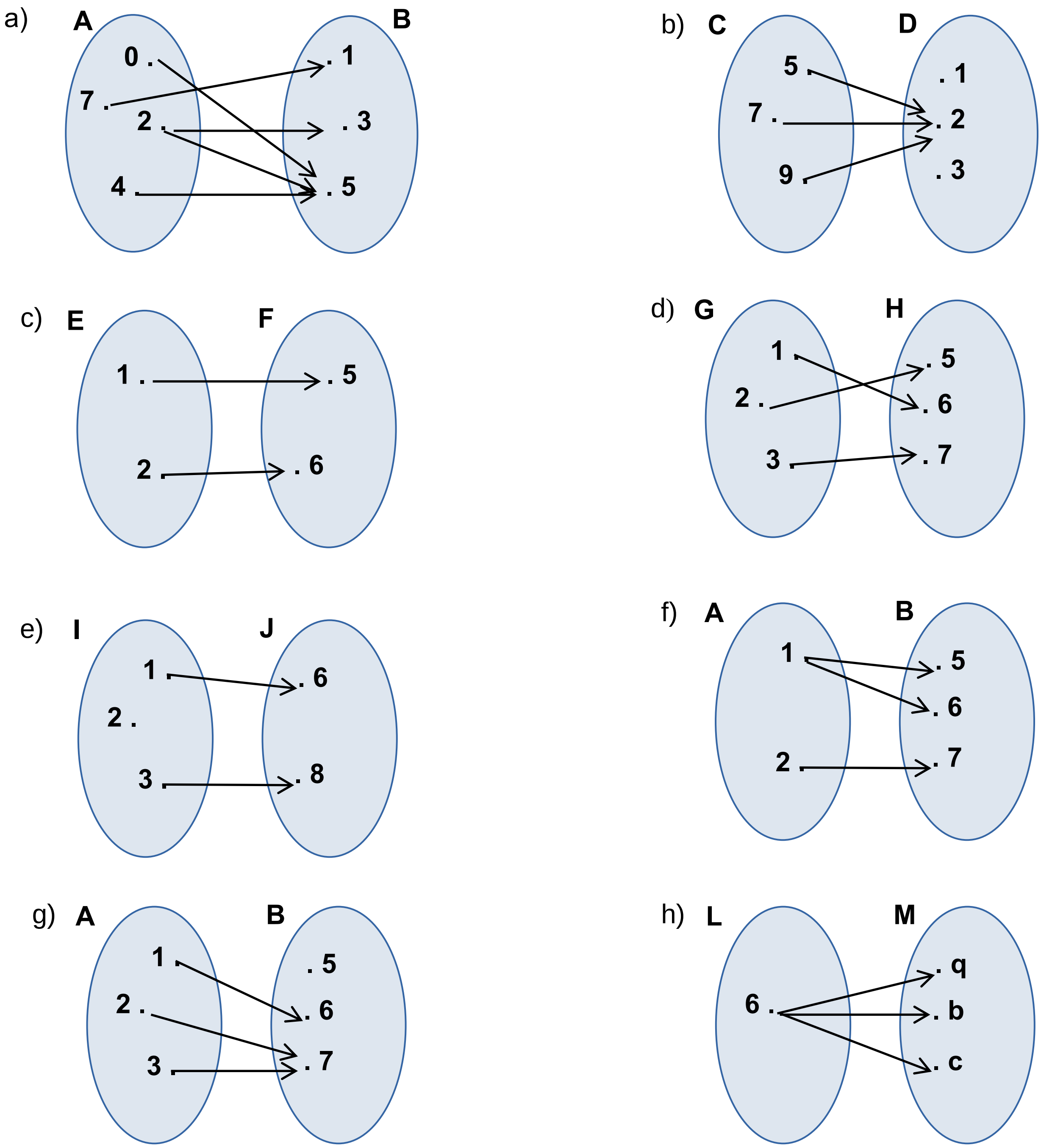
$CD = B,$

$IM = \{0, 1, 4, 9\} = B.$

Fonte: Figura produzida pelo autor

Atividade 1: Considere as relações dadas pelos diagramas abaixo e classifique em **Função** ou **Relação**.

Figura 4 – Representação de função por diagramas - Atividade



Fonte: Figura produzida pelo autor

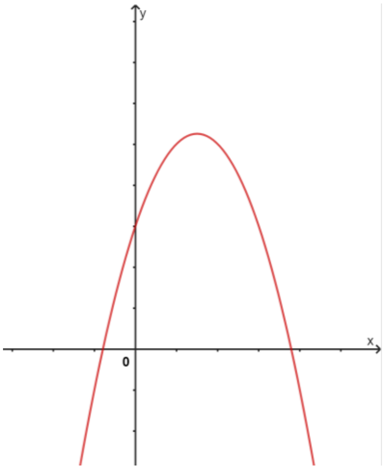
Atividade 2: Determine o Domínio, Contradomínio e Imagem dos diagramas do atividade 1.

Atividade 3: Represente as relações do atividade 1, enumerando os pares ordenados.

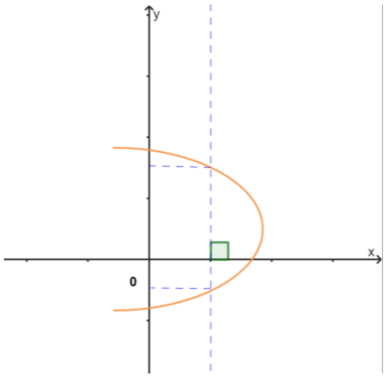
Atividade 4: (Teláris – p.130, n^{o} 35) Para *x* e *y* números reais, identifique se o gráfico é de uma função ou de uma relação. Justifique sua resposta nos casos em que não for função.

Figura 5 – Representações gráficas de função e relação – Atividade

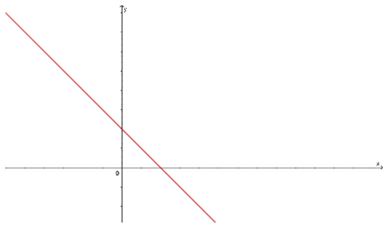
a)



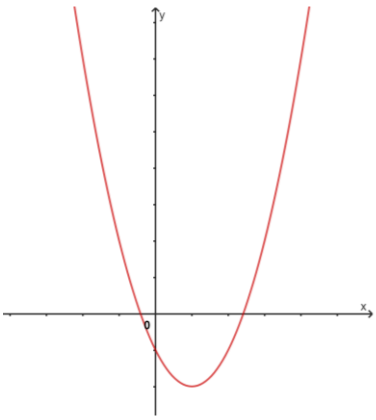
b)



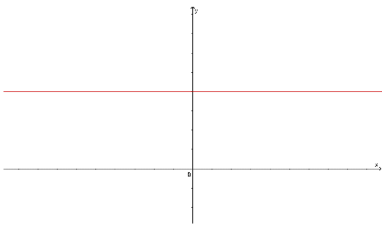
c)



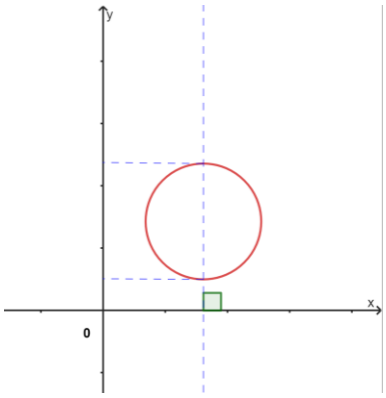
d)



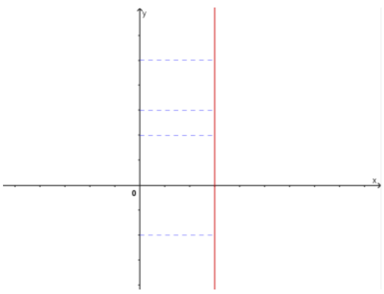
e)



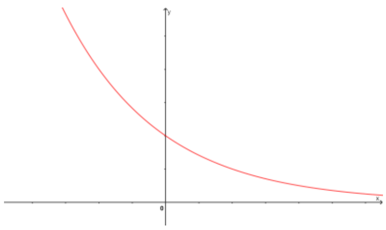
f)



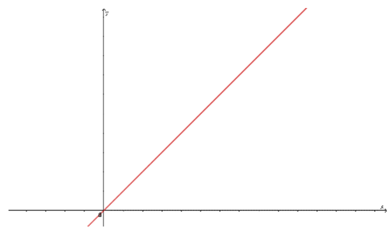
g)



h)



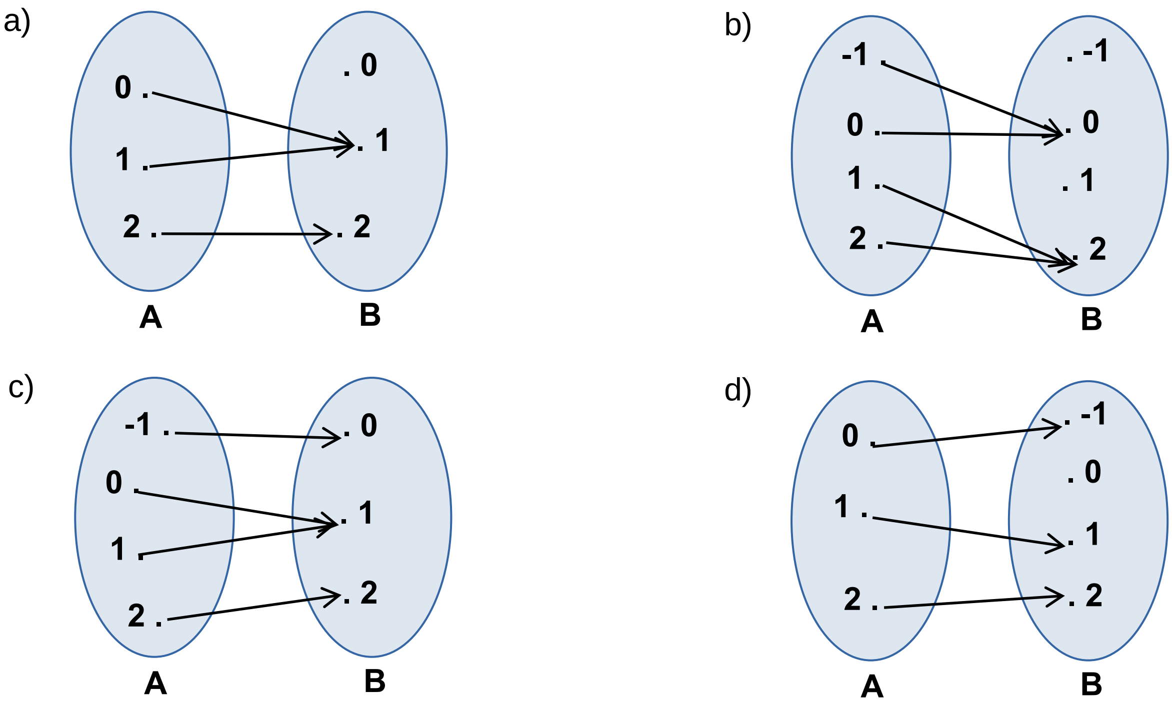
i)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 5: Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ em $\boldsymbol{B} = \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$?

Figura 6 – Representação de função por diagramas – Atividade 2



Fonte: Figura produzida pelo autor

Atividade 6: 2. Dada à função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$, o domínio $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ e o contradomínio composto pelos naturais entre **1** e **10**, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?

a) $\{1, 3, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

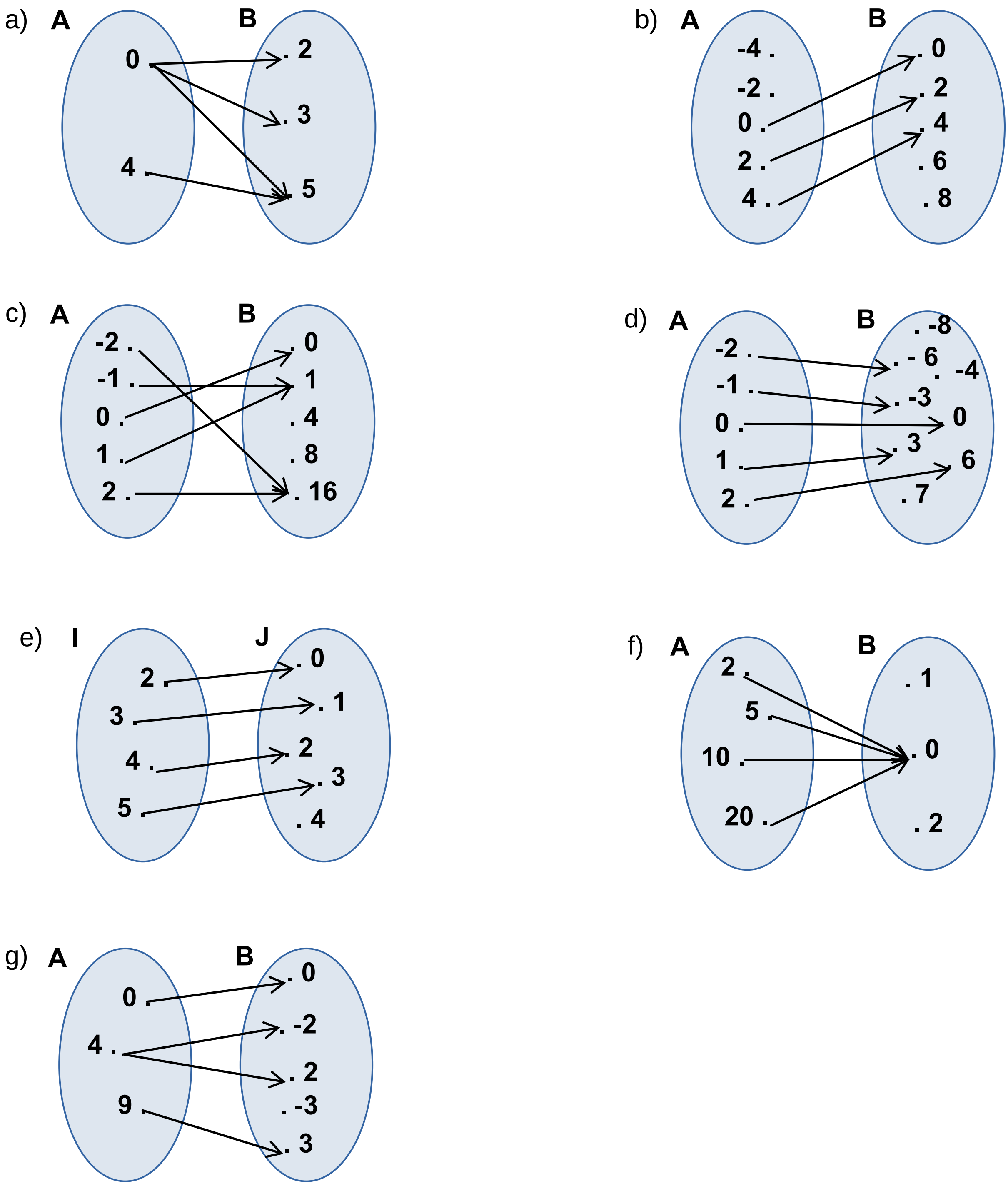
c) $\{4, 6, 8\}$

d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $\{1, 3, 8\}$

Atividade 7: Verifique quais relações abaixo representam FUNÇÕES.

Figura 7 – Representação de função por diagramas – Atividade 3



Fonte: Figura produzida pelo autor

2.2. LEI DE FORMAÇÃO

Objetivo:

- Compreender o conceito de lei de formação.
- Identificar os pares ordenados (x, y) que geram uma função.
- Levar o aluno a compreender de forma intuitiva a generalização de fórmulas matemáticas.

Material necessário: Lousa e pilotos coloridos.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos.

Registros para serem realizados na lousa:

Lei de Formação

Toda função é gerada através de uma expressão algébrica que nos permite encontrar os pares ordenados (x, y), por meio de uma fórmula denominada **lei de formação.** É através desta fórmula que se relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

A lei de formação da função é uma espécie de "*identidade*" única e é através dela que se gera um gráfico único da mesma.

Exemplos:

$$y = x + 1 \qquad f(x) = x^2 + 2x + 5 \qquad y = 2^x$$
$$y = \log x \qquad f(x) = sen\ 2x \qquad f(x) = |x - 3|$$

Para determinar um par ordenado (x, y), basta conhecer o valor da variável, *"x"*, para determinar o valor da outro *"y"*.

Nota-se que $f(x) = y$.

Exemplos:

Dica ⟶ Neste momento, é recomendável exercitar esses procedimentos com funções polinomiais do 1º e 2º grau uma familiaridade com as funções que serão aprofundadas posteriormente.

$f(x) = x + 1, p\ /\ x = 1$
$f(1) = (1) + 1$
$f(1) = 2$
$(1, 2)$

$y = 5x - 3, p/x = 0$
$y = 5(0) - 3$
$y = -3$
$(0, -3)$

$y = x^2 + 5x + 6, p/x = 2$
$y = (2)^2 + 5(2) + 6$
$y = 4 + 10 + 6$
$y = 20$
$(2, 20)$

Em alguns casos particulares, como nas funções polinomiais do 1º grau, conhecendo *"y"* permite encontrar *"x".* Mas, em geral, isso não é possível.

$f(x) = x + 1, p\ /\ y = 4$
$4 = x + 1$
$x = 3$
$(3, 4)$

$y = 5x - 3, p/y = 0$
$0 = 5x - 3$
$x = \frac{3}{5}$
$\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

Atividade 1: Conforme a lei de formação das funções abaixo, determine o conjunto relação, de acordo com $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) $y\ =\ 2x\ +\ 1$

$b)\ f(x)\ =\ x^2 - 3x\ +\ 4$

Atividade 2: Dada a função ***f(x) = 2x – 3***, o domínio {2, 3, 4} e o contradomínio composto pelos naturais entre 1 e 10, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?

a) $\{1, 3, 5\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c) $\{4, 6, 8\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $\{1, 3, 8\}$

Atividade 3: Seja a função $f\ :\ D\ \rightarrow\ R$ dada pela lei de formação $\boldsymbol{f(x)\ =\ 5x\ +2}$, de domínio $\boldsymbol{D} = \{\mathbf{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}\}$. Determine o conjunto imagem dessa função.

2.3. FUNÇÕES POLINOMIAIS

2.3.1. Função Polinomial do 1º Grau

Objetivo:

- Compreender o conceito de função polinomial do 1º grau.
- Analisar e construir gráficos de função polinomial do 1º grau.
- Relacionar problemas do cotidiano com função polinomial do 1º grau.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, Datashow, GeoGebra (App) e papel quadriculado.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Dica ⟶ Caso seja possível, o ideal é que em todo o processo utilize o GeoGebra no Datashow e nos celulares dos alunos, ora para simples conferência de resultados, ora para expor várias leis de formações de forma a levar o aluno a perceber que um sinal que mude gera um gráfico distinto.

Aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. É recomendável que a análise gráfica seja feita com o auxílio do aplicativo GeoGebra nos celulares dos alunos, com auxílio de Datashow, papel quadriculado,... a medida do possível.

Registros para serem realizados na lousa:

Funções Polinomiais

As funções polinomiais são as funções cujas leis de formação são compostas por polinômios. De acordo com o grau atribuído ao polinômio é definido o grau da função e quantas raízes reais ou não a mesma possui.

- Função polinomial do 1º grau

Toda função polinomial do 1º grau possui como lei de formação um polinômio do 1º grau, completo ou incompleto. Logo, sua lei de formação deve ser do tipo

$f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

$y = 2x + 4$, onde a= 2 e b= 4. $f(x) = 3x$, onde a= 3 e b= 0;

$f(x) = -2x + 3$, onde a= -2 e b= 3.

O coeficiente "*a*" é chamado de coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é sempre representado por uma reta.

Através dos pares ordenados gerados de acordo com a lei de formação é possível construir um gráfico.

Como toda função, substituindo os valores de “x” pertencentes ao conjunto domínio na lei de formação dada, é gerada os pares ordenados (x, y).

Exemplo:

Sejam $f(x) = x + 1$ e o conjunto domínio $D = \{0, 1, 2, 3\}$, temos:

$f(0) = x + 1$	$f(1) = x + 1$	$f(2) = x + 1$	$f(3) = x + 1$
$f(0) = 0 + 1$	$f(1) = 1 + 1$	$f(2) = 2 + 1$	$f(3) = 3 + 1$
$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 3$	$f(3) = 4$
Logo, $(0, 1)$.	Logo, $(1, 2)$.	Logo, $(2, 3)$.	Logo, $(3, 4)$.

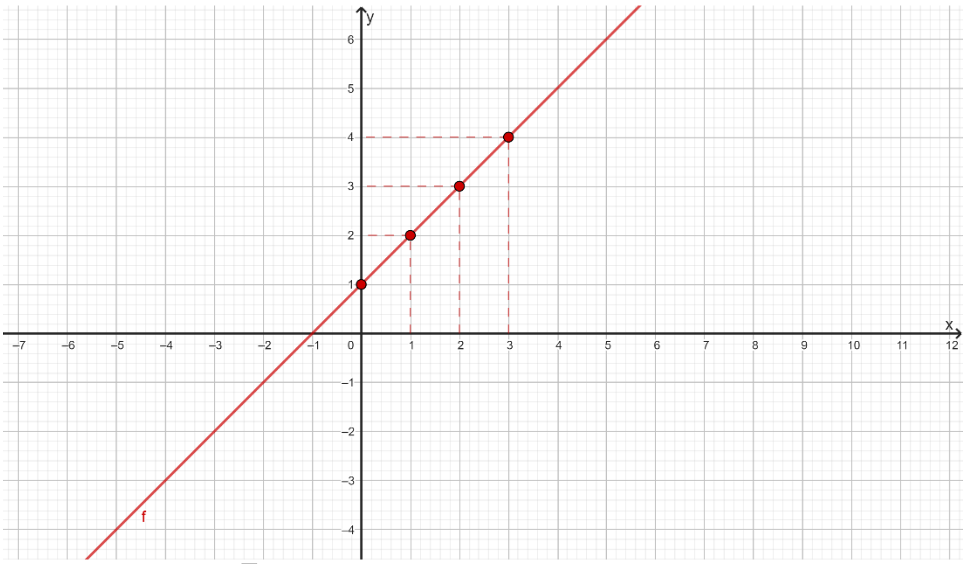
Arrumando no formato de tabela para melhor organização dos dados obtidos, temos:

Figura 8 – Tabela de $f(x) = x + 1$

x	$f(x) = x + 1$
0	1
1	2
2	3
3	4

Fonte: Figura produzida pelo autor

Figura 9 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Porém, da geometria Euclidiana temos que "*pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.*" Sendo assim, no gráfico de uma função polinomial do 1º grau, alguns pontos notáveis podem auxiliar bastante neste processo. Estes, são os pontos de interseção com os eixos cartesianos.

O primeiro a ser estudado é a raiz da função, ou também chamado zero da função. Basta igualar a expressão algébrica dada à zero.

Exemplo:

$$f(x) = x + 1$$

$$0 = x + 1$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Logo, $(-1, 0)$.

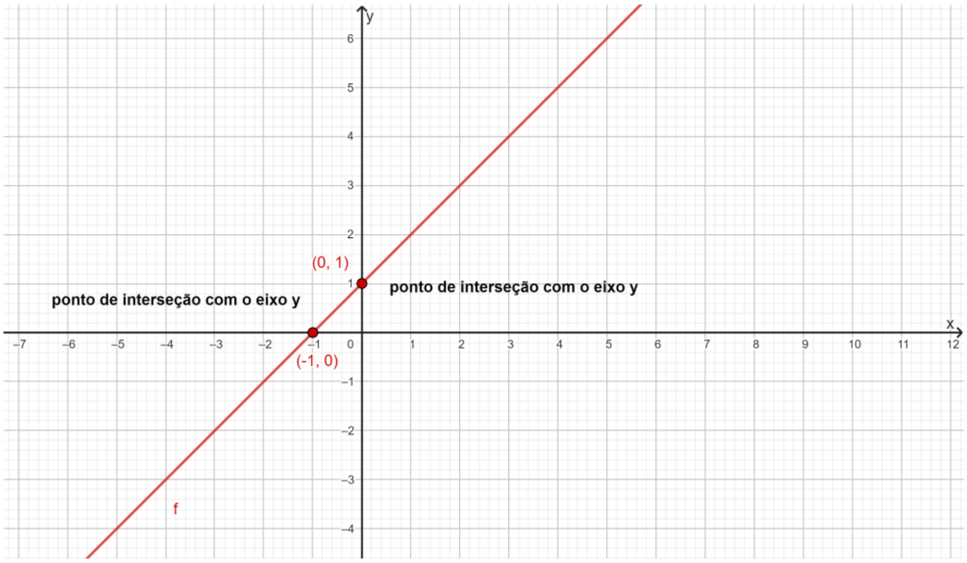
Vale ressaltar que por se tratar de uma função polinomial de grau 1, a mesma possui apenas uma raiz, já que é o grau do polinômio corresponde também a ao número máximo de raízes que a função possui.

Dando continuidade, o segundo ponto a ser obtido é o par ordenado que intercepta o eixo das ordenadas, "y". Ou seja, quando a abscissa é zero.

Apesar de este ponto poder ser obtido com a substituição deste valor na lei de formação dada, mas ele também pode ser gerado pelo coeficiente independente do polinômio, o *"b*". Sendo assim, este segundo par ordenado pode ser obtido por $(0, b)$.

Com estes dois pontos, $(-1, 0)\ e\ (0, 1)$, o gráfico de $f(x)$ pode ser construído.

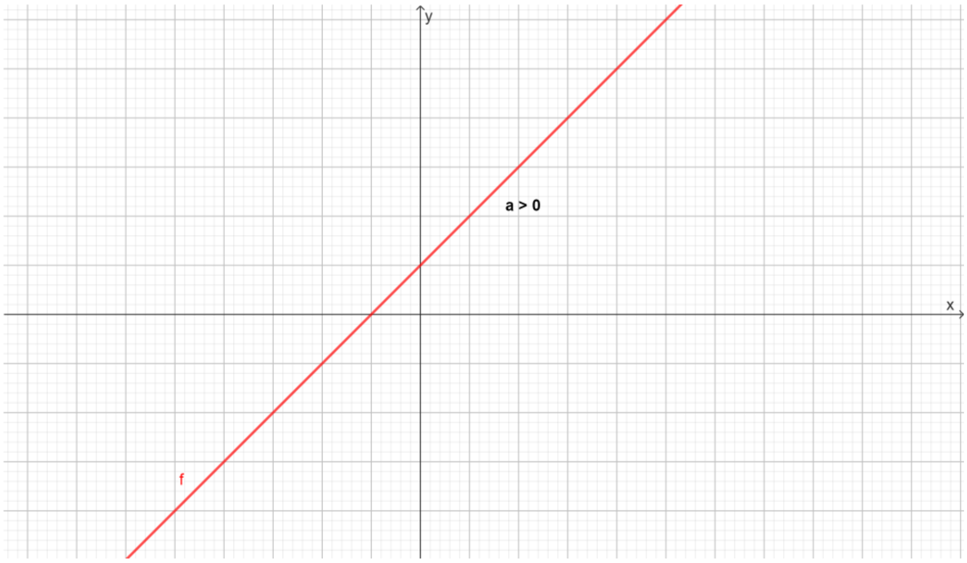
Figura 10 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$, interceptando os eixos



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

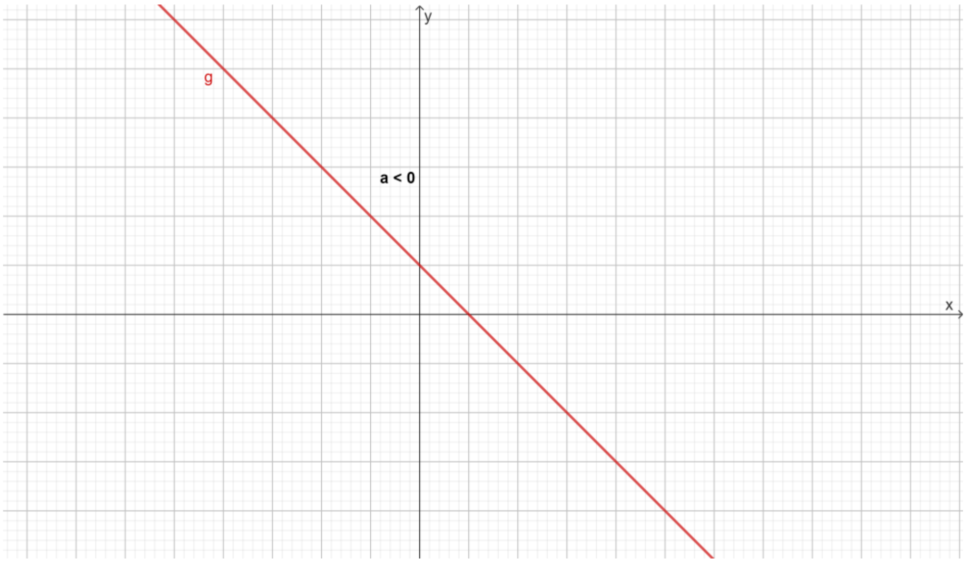
O sinal do coeficiente angular ou declividade da reta, o "*a*" da lei de formação da função polinomial do 1º grau, conforme o próprio nome sugere, determina a inclinação da reta. Se este for um valor real positivo, a reta *"sobe"* e a função é crescente, proporcionalmente. Já se este coeficiente for um valor real negativo, a reta "*desce"* e a função é decrescente.

Figura 11 – Declividade da reta conforme coeficiente angular, $a > 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Figura 12 – Declividade da reta conforme coeficiente angular, $a < 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Após exercitar tais conceitos e procedimentos, é importante também nesta etapa utilizar o conceito de função polinomial do 1º grau em algumas aplicações de questões práticas familiares aos alunos. Nesta etapa de ensino, eles precisam conseguir fazer a conexão do conteúdo matemático apreendido em sala de aula com suas práticas diárias. Dar significado sempre que possível, de alguma forma, a toda abstração trabalhada na disciplina, agrega familiaridade ao aluno, auxiliando assim no processo ensino/aprendizagem.

Atividade 1: (Bianchini adaptado – p 229) Identifique as leis que representam funções polinomiais do 1º grau.

a) $y = x + 3$

b) $y = -5x + 1$

c) $y = x^2 - 3x$

e) $y = x^2 - 5x + 6$

d) $y = -4x$

f) $y = 2 - x$

Atividade 2: Dados *a* e *b*, escreva a lei de cada função polinomial do 1º grau em que ***y = ax + b***.

a) $a = 2$ e $b = -1$

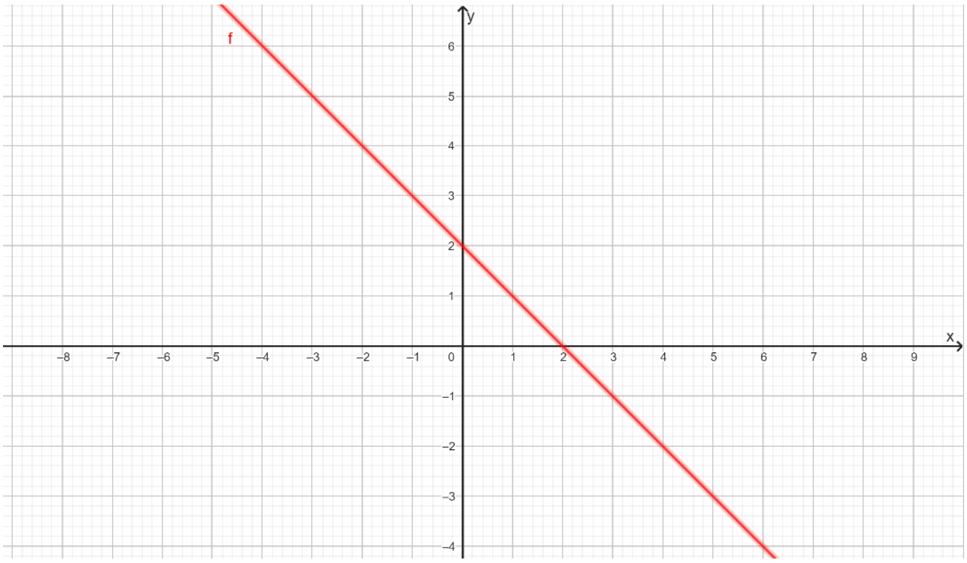
b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$

c) $a = \sqrt{2}$ e $b = 0$

d) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$

Atividade 3: (Bianchini – p 231) Observe o gráfico de uma função para responder as questões abaixo:

Figura 13 – Representação gráfica de $f(x)$ - Atividade



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

a) Qual é o valor de $\boldsymbol{y}$ quando $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$**?**

b) Para que valor de $\boldsymbol{x}$ temos $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$?

Atividade 4: Considere a função polinomial do 1^0 grau definida pela lei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbf{3}$.

a) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado.

b) Qual é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo dos *x*?

c) Qual é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos *y*?

Atividade 5: Dada a função definida pela lei $\boldsymbol{f(x) = 5x - 4}$ com *x* real, determine:

a) $f(-1)$

b) $f(-\frac{3}{5})$

c) O valor de *x* para que se tenha $f(x) = 6$

d) O valor de *x* para que se tenha $f(x) = 0$

Atividade 7: (Andrini & Vasconcellos adaptado – p. 126) Atribua valores à variável *x*, construa uma tabela com alguns pares ordenados e construa um gráfico das funções:

a) $y = -2x$

b) $y = -x - 1$

c) $y = 3 - x$

d) $y = \frac{x}{2} + 1$

e) $y = \frac{x}{3} + 1$

f) $y = - x$

2.3.1.1. Problemas envolvendo Funções Polinomiais do 1º grau

Apesar de ser um conteúdo bastante abstrato, função é aplicável em várias áreas do conhecimento, como: Contabilidade, Análise de sistema, Arquitetura, Engenharias, entre outras.

Exemplo:

Dica → A construção da solução deve ser feita de forma intuitiva junto com os alunos, fazendo questionamentos sobre o melhor caminho a seguir para determinar a solução, até que os mesmos consigam compreender a abstração respondendo assim a segunda parte da pergunta.

Quanto pagarei de Porto das Caixas a Itaboraí, aproximadamente 9 km de distância, para 3 pessoas, indo:

a) Na linha de ônibus 06, cujo preço da passagem é R$ 3,75? Qual expressão matemática me permite este cálculo?

Valor p a ser pago	Expressão matemática
$p = 3 \cdot 3{,}75$	$y = ax + b$
$p = 11{,}25$	$p = 3{,}75x, com\ b = 0$

b) Indo de Uber, sabendo que a taxa cobrada pela contratação do serviço é R$ 3,50 e que por cada km percorrido é pago R$ 1,60? Qual expressão matemática me permite este cálculo?

Valor p a ser pago	Expressão matemática
$p = 9 \cdot 3{,}50 + 1{,}60$	$y = ax + b$
$p = 33{,}10$	$p = 3{,}50x + 1{,}60$

Atividade 8: (Bianchini adaptado – p. 220) Responda:

Em certa loja, uma blusa custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

a) Na compra de 2 blusas, qual será o valor pago? E na compra de 10 blusas?

b) Para cada quantidade comprada dessa blusa, o preço associado é único?

c) A relação entre a quantidade de blusas e o preço pago é uma função?

d) Determine o preço pago **(*y*)**, como uma função do número de blusas compradas **(*x*)**.

Atividade 9: (Bianchini adaptado – p. 220) Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

* pela 1ª hora: R$ 10,00;
* pela 2ª hora e seguintes: R$ 2,00 por hora.

Se ***x*** representa o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento e ***y***, o valor a ser pago, qual é a lei da função que fornece ***y*** em função de ***x***?

Atividade 10: (Bianchini – p. 220) Uma máquina produz 8 litros de sorvete a cada 10 minutos. Assim, a produção ***p*** depende da quantidade ***t*** de minutos em que a máquina produz.

Escreva a lei dessa função, que fornece ***p*** em função de ***t***.

Atividade 11: (Bianchini – p. 220) Em uma loja, certo tipo de tecido está sendo vendido a R$ 8,00 o metro.

a) Escreva a fórmula que indica o preço ***y*** a pagar na compra de ***x*** metros de tecido, ou seja, ***y*** em função de ***x***, sendo ***x*** e ***y*** reais com $\boldsymbol{x \geq 0}$.

b) Construa uma tabela relacionando ***x*** e ***y***:

$x = 5$ $x = {}^{1}/_{2}$ $x = 3{,}5$ $x = 1{,}25$

c) Faça o gráfico correspondente para ***x real*** e $\boldsymbol{x \geq 0}$.

Atividade 12: (Andrini & Vasconcelos – p. 107) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 7,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,20, responda:

a) Qual o valor ***v*** a pagar numa corrida de ***n*** quilômetros?

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

d) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 27,40 pela corrida?

e) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 18,40 pela corrida?

Atividade 13: (CEFET - MG - 2015) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado $(\boldsymbol{R})$ num dia é função da quantidade total $(\boldsymbol{x})$ de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $\boldsymbol{R(x) = ax + b}$, em que $\boldsymbol{a}$ é o preço cobrado por quilômetro e $\boldsymbol{b}$, a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:

Dados: $\boldsymbol{a = 2}$ **e** $\boldsymbol{b = 5}$

a) 14

b) 16

c) 18

d) 20

Atividade 14: Carlos é dono de uma empresa e o salário de seus funcionários é dado por um valor fixo e uma taxa variável de acordo com o número de horas extras trabalhadas. Veja a função que representa o salário pago por Carlos.

$$\boldsymbol{S(t) = 1022 + 15.t}$$

Considerando $(\boldsymbol{S})$ o salário pago e $(\boldsymbol{t})$ o número de horas extras trabalhadas, o salário recebido por um funcionário que trabalhou 5 horas extras mensais será equivalente a:

a) R$ 1022,00.

b) R$ 1037,15.

c) R$ 1097,00.

d) R$ 1112,00.

Atividade 15: (UCSAL - adaptada) Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ funções de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$, sendo $\boldsymbol{R}$ o conjunto dos números reais, dadas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$. Nestas condições, $\boldsymbol{f}(-\mathbf{1})$ é igual a:

a) -5

b) -4

c) 0

d) 4

e) 5

2.3.2. Função Polinomial do 2º Grau

Objetivo:

- Compreender o conceito de função polinomial do 2º grau.
- Analisar e construir gráficos de função polinomial do 2º grau.
- Relacionar problemas do cotidiano com função polinomial do 2º grau.
- Diferenciar funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, Datashow, Geogebra (App) e papel quadriculado.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Dica ⟶ Caso seja possível, o ideal é que em todo o processo utilize o GeoGebra no Datashow e nos celulares dos alunos, ora para simples conferência de resultados, ora para expor várias leis de formações de forma a levar o aluno a perceber que um sinal que mude gera um gráfico distinto.

Novamente, aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. É recomendável que a análise gráfica seja feita com o auxílio do aplicativo GeoGebra nos celulares dos alunos, com auxílio de Datashow, papel quadriculado,... a medida do possível.

Registros para serem realizados na lousa:

- Função polinomial do 2º grau

As funções polinomiais do 2º grau, também conhecidas como funções quadráticas, são oriundas de polinômios do 2º grau, completos ou incompletos.

Logo, sua lei de formação deve ser do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad f(x) = -2x^2 + 3$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x \qquad f(x) = -x^2$$

A sua representação gráfica é dada por uma parábola.

A função polinomial do 2º grau possui duas raízes reais quando o gráfico intercepta o eixo das abscissas (*x*) em dois pontos. Porém, o mesmo pode possuir apenas uma raiz real ou até nenhuma raiz real. Estas também podem ser facilmente definidas algebricamente conforme o discriminante delta:

$\Delta > 0$ (possui duas raízes reais).

$\Delta = 0$ (possui uma raiz real).

$\Delta < 0$ (não possui raízes reais).

Ao contrário da função polinomial do 1º grau, cujo gráfico é uma reta, a parábola precisa de vários pontos para ser traçada. Preferencialmente, com as duas raízes e o vértice já se tornam possível esboçar a parábola.

Para calcular as coordenadas do vértice basta utilizar as fórmulas específicas

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ e } y = -\frac{\Delta}{4a},$$

determinando assim (x_v, y_v).

Exemplo:

Dica ⟶ É preciso lembrar ao aluno que para determinar os pares ordenados (x', 0) e (x", 0), os zeros ou raízes da função, basta substituir o "*y*" por zero e resolver uma equação do 2º grau, pelo método que for mais conveniente ao aluno.

Para $f(x) = x^2 + 6x + 5$, com $a = 1,\ b = 6\ e\ c = 5$.

Aplicando as fórmulas das coordenadas do vértice da parábola, temos:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \text{ e } y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4,$$

com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(5) = 16,$$

gerando assim as coordenadas do vértice $(-3, -4)$.

Observe que como o discriminante é positivo, $\Delta > 0$, ela possui duas raízes reais.

Definindo as raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

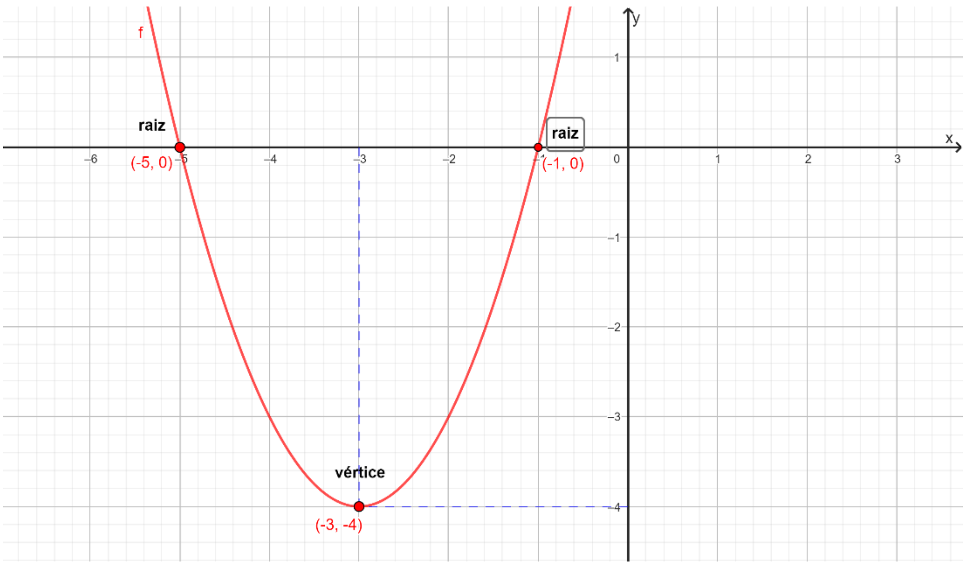
$$x' = \frac{-6+4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x'' = \frac{-6-4}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

Logo, os pares ordenados que interceptam o eixo das abscissas são $(-1, 0)$ e $(-5, 0)$.

Daí,

Figura 14 – Representação gráfica de $f(x) = x^2 + 6x + 5$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Porém, para se obter um gráfico um pouco mais preciso, o ideal é que se tenha um número maior de pontos. O ponto de interseção com o eixo *"y"*, $(0, c)$ é uma boa sugestão como um dos pontos. Já um ponto extra, se calcular a distância (*d*) do x_v ao zero no eixo das abscissas ($d = |x_v - 0|$), o x de um ponto pode ter abscissa igual ao dobro desta distância partindo do zero, com o sinal idêntico ao sinal do x_v ($2x_v$, c), obtendo-se assim a forma quadrática da parábola. Mas, nada impede que este ponto seja um valor aleatório para *"x"*. Sendo assim, basta substituí-lo na lei de formação da função em questão, para gerar o quinto ponto de forma aleatória, (x, y).

Complementando o gráfico $f(x) = x^2 + 6x + 5$, do exemplo temos,

Figura 15 – Tabela de $f(x) = x^2 + 6x + 5$

x	$f(x) = x^2 + 6x + 5$
-5	0
-1	0
-3	-4
0	5
-6	5

Fonte: Figura produzida pelo autor

Observe que a distância entre o x_v e o zero é -2. Daí,

$$2 \cdot (-2) = -4$$

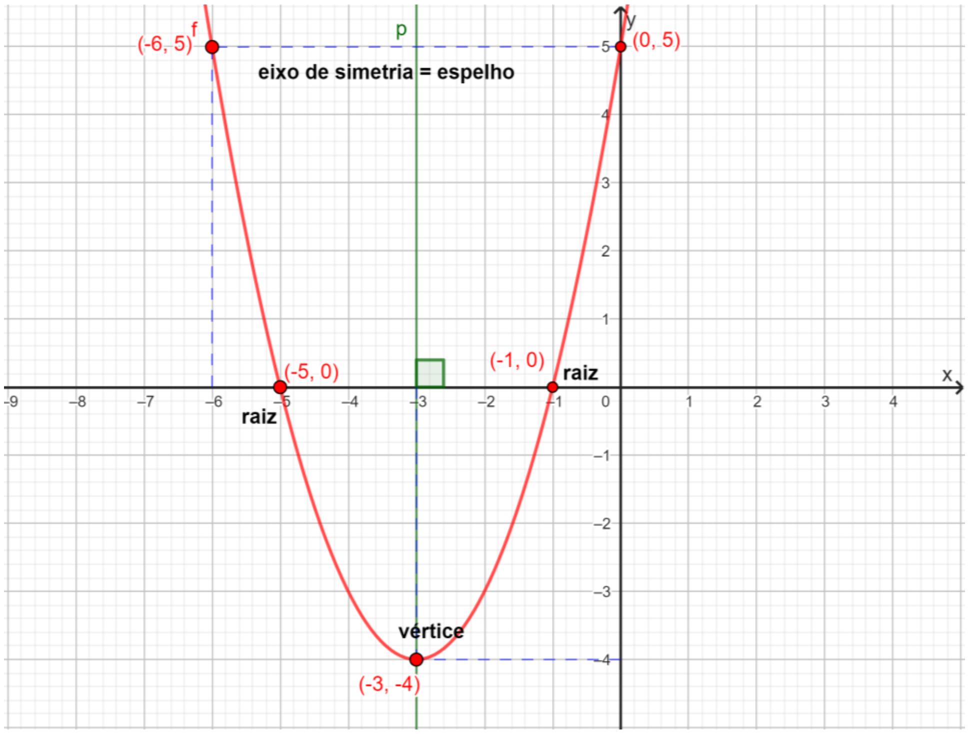
que adicionado a abscissa do vértice, temos:

$$-4 + (-2) = -6.$$

Ou,

$$f(-6) = x^2 + 6x + 5$$
$$f(-6) = (-6)^2 + 6(-6) + 5$$
$$f(-6) = 36 - 36 + 5$$
$$f(-6) = 5$$

Figura 16 – Parábola completa e eixo de simetria



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Pelo vértice ainda é possível traçar o eixo de simetria da parábola. Através de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo vértice, é possível visualizar que a parábola se "*espelha*".

Atividade 1: O vértice da parábola que representa a função quadrática $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ será um ponto do eixo das abscissas se:

a) $\Delta = 0$.

b) $\Delta < 0$.

c) $\Delta \geq 0$.

d) $\Delta > 0$.

Atividade 2: Considere a função definida pela lei $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 1.}$

a) Determine o(s) zero(s) dessa função.

b) Construa o gráfico da função.

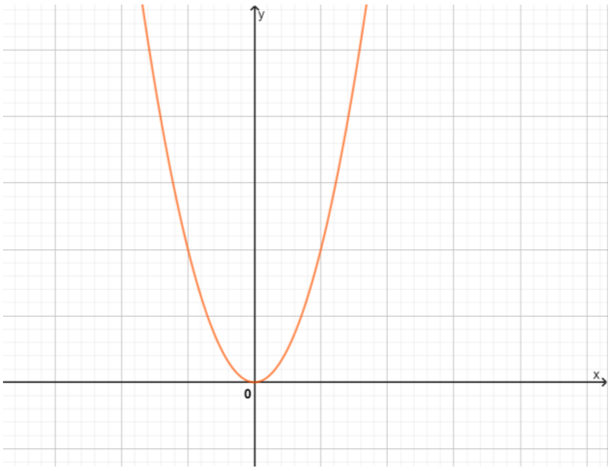
c) Para que valores de x temos $y = 1$?

d) Para que valores de x temos $y > 0$?

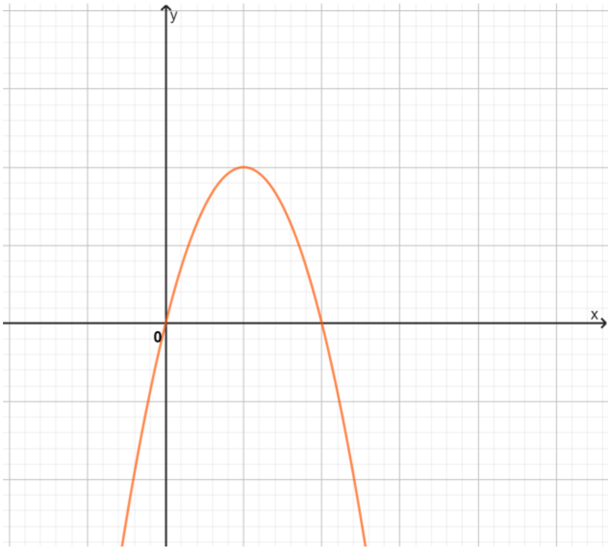
Atividade 3: (SARESP) O gráfico que melhor representa a função definida por $y = -x^2$ é:

Figura 17 – Parábolas – Atividade

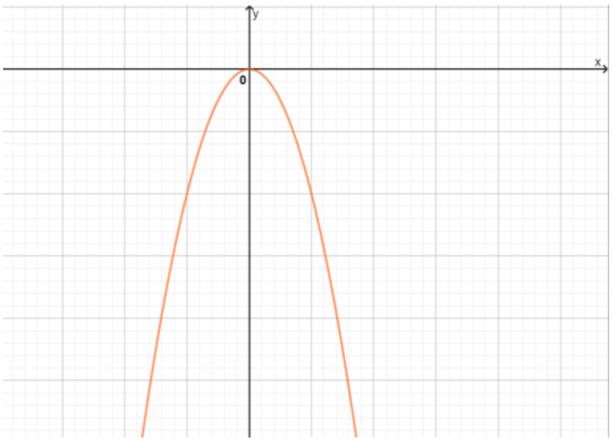
a)



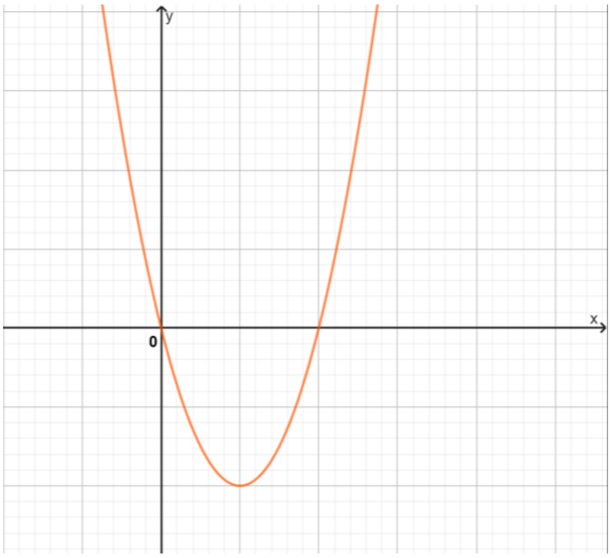
b)



c)



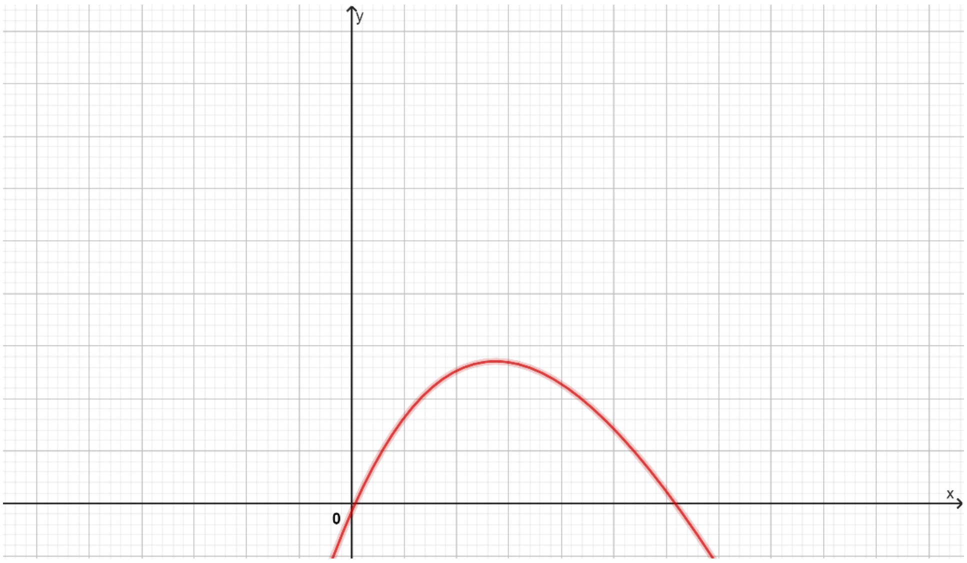
d)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 4: (CEETEPS-SP) Um projétil é atirado do ponto 0, como mostra a figura, e descreve uma parábola cuja função é $\boldsymbol{y = -2x^2 + 80x}$, sendo *x* e *y* dados em metros.

Figura 18 – Parábola $y = -2x^2 + 80x$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

O alcance desse projétil é:

a) 40 m

b) 60 m

c) 80 m

d) 100 m

Atividade 5: Usando o discriminante, determine no caderno quantas raízes reais cada função tem.

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 10x - 250$

c) $y = 5x^2 - x - 1$

2.3.2.1. Máximo e Mínimo

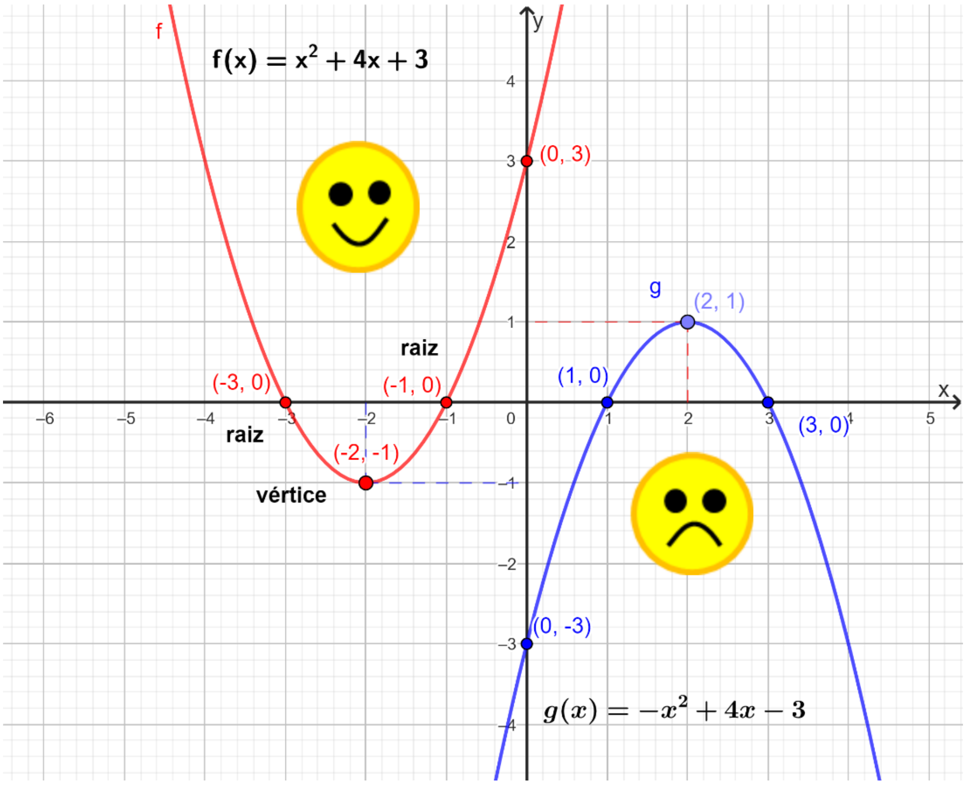
O vértice da parábola é o ponto responsável pelo valor máximo (ou mínimo) assumido por este tipo específico de função. O sinal do coeficiente *"a"* determina a concavidade da parábola. Se *"a"* for positivo, $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima, logo ponto mínimo. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo e a função possui ponto máximo.

Exemplo:

Dica →Se *"a"* for positivo, $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima, logo ponto mínimo. Costuma-se fazer uma analogia aos "*emojis"*, comumente utilizados pelos alunos, e

dizer que a parábola está feliz. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo e a função possui ponto máximo. Aplicando a mesma analogia dos "*emojis*", pode se dizer que a parábola está triste. Tais analogias ajudam ao aluno a fixar determinadas propriedades.

Figura 19 – Mínimo e máximo de uma parábola (emojis)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 6: Dadas as funções quadráticas, responda se cada vértice é um ponto de máximo ou mínimo:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = x^2 + 4x - 1$

c) $y = -x^2 + 1$

d) $y = -x^2 + 6x - 5$

e) $y = x^2 + x - 1$

f) $y = x^2 + 8x - 9$

g) $y = 2x^2 + x + 6$

h) $y = -x^2 + 5x$

i) $y = -2x^2 + 3$

Atividade 7: Em uma apresentação aérea de acrobacias, um avião a jato descreve um arco no formato de uma parábola de acordo com a seguinte função $y = -x^2 + 60x$. Determine a altura máxima atingida pelo avião.

Atividade 8: Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $\boldsymbol{C(x) = x^2 - 80x + 3000}$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

Atividade 9: De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $\boldsymbol{L = R - C}$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $\boldsymbol{C(x) = x^2 - 2000x}$ e a receita representada por $\boldsymbol{R(x) = 6000x - x^2}$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

2.3.2.2. Problemas envolvendo Funções Polinomiais do 2º grau

O conceito de função polinomial do 2º grau é usado no dia a dia para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

Exemplo:

Dica ⟶ A construção da solução deve ser feita de forma intuitiva junto com os alunos, fazendo questionamentos sobre o melhor caminho a seguir para determinar a solução, até que os mesmos consigam compreender a abstração respondendo assim a segunda parte da pergunta.

(UFSCAR–SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $\boldsymbol{h(t) = -2t^2 + 8t \ (t \geq 0)}$, onde $\boldsymbol{t}$ é o tempo medido em segundo e ***h(t)*** é a altura em metros da bola no instante $\boldsymbol{t}$. Determine, após o chute:

a) o instante em que a bola retornará ao solo.

Dica ⟶ É preciso levar os alunos a compreenderem que no momento em que a bola tocar o solo a sua altura será nula.

$h(t) = -\ 2t^2 +\ 8t$

$0 = -\ 2t^2 +\ 8t$

$t\ (-\ 2t +\ 8) = 0$

$t' = 0$

$-2t" + 8 = 0$

$-2t" = -8$

$t" = 4$

Observe que a bola atinge o chão no instante zero e no tempo 4 segundos. No instante zero é no início e após 4 segundos toca o chão novamente.

b) a altura atingida pela bola.

Dica → É preciso levar os alunos a observar que como o coeficiente a < 0, a parábola possui ponto máximo. Logo, basta identificar o y do vértice para se obter a altura máxima.

$h(t) = -\ 2t^2 +\ 8t$, logo $a =\ -2, b =\ 8\ e\ c = 0$.

$$y = -\frac{\Delta}{4a} =\ -\frac{64}{4(-2)} =\ 8$$

$$\Delta =\ b^2 - 4ac$$

$$\Delta =\ 8^2 - 4(-2)(0) = 64$$

Logo, a altura atingida pela bola é 8 m.

Atividade 10: (Bianchini – p. 255) (UFRGS RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = 2x^2 +\ 12x$, em que *y* é a altura dada em metro. A altura máxima atingida pela bola é:

a) 36 m.

b) 18 m.

c) 12 m.

d) 6 m.

e) 3 m.

Atividade 11: (Bianchini – p. 255) Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por $\boldsymbol{x \cdot\ (20 - x)\ e\ 2.}$ Qual é o maior volume que essa piscina poderá ter, em metro cúbico?

Atividade 12: (Bianchini – p. 255) (ESPM-SP) A estrutura do lucro de uma pequena empresa pode ser estudada através da equação $\boldsymbol{y = -x^2 + 120x - 2.000}$, sendo *y* o lucro em real quando a empresa vende *x* unidades. Com base nisso, pode-se afirmar que:

a) o lucro é máximo quando $x = 60$.

b) o lucro é máximo quando $x = 1.600$.

c) o lucro é máximo quando $x = 20$ ou $x = 100$.

d) o lucro é máximo quando $x > 2.000$.

e) o lucro é máximo quando $a < 20$ ou $x > 100$.

Atividade 13: (Bianchini – p. 255) O lucro (L) de uma empresa para certo produto é obtido pela função definida pela lei $\boldsymbol{L = -2x + 2000x - 100}$, em que *x* representa a quantidade do produto. Calcule para quantas unidades se obtém o lucro máximo possível.

Atividade 14: (Bianchini – p. 255) A temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica é dada por uma função cuja lei é $\boldsymbol{y = t^2 - 7t + c}$, em que *t* indica o tempo e *y* indica a temperatura.

a) Sabendo que para $t = 0$ a temperatura é de 10 °C, calcule o valor de *c*.

b) Qual é a lei da função?

c) Calcule o valor de *t* para que a temperatura seja a mínima possível.

2. REFERÊNCIAS

- ALVES, A. Exercícios sobre funções quadráticas, ponto máximo, mínimo e vértice resolvido para o 9º ano. *In:* ALVES. **Mania de Calcular**. Disponível em: <http://maniadecalcular.blogspot.com/2015/04/exercicios-de-matematica-de-funcoes.html>. Acessado em: 14 jun. 2023.

- ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 9º ano.** 4. ed. São Paulo: Ed. do Brasil, 2015.

- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini 9º ano**. 9. ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2018.

- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática 9º ano.** 3. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2018.

- MPPEB – CPII. Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica. **Colégio Pedro II**. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://www.cp2.g12.br/blog/mpcp2/produtos-educacionais>. Acessado em: 10 jan. 2023.

- SILVA, M. N. P. da. Exercícios sobre Máximo e Mínimo. *In:* Brasil Escola. **Exercícios Brasil Escola.** Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-maximo-minimo.htm>. Acessado em: 14 jun. 2023.