v. 4, n. 1, 2024

Journal of
Engineering
Research

EL OPERADOR DIFERENCIAL DE ORDEN PAR EN L2([-π, π])

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas, Av. Venezuela S/N Lima 01
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Resumen: En este trabajo, estudiamos al operador diferencial de orden par en el subespacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$. Determinamos el resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolución. Esta teoría nos permite resolver problemas distribucionales. Finalmente, damos algunas aplicaciones y comentarios.

Palabras Clave: Operador diferencial de orden par, Resolvente de un operador, espacio distribucional periódico, Transformada de Fourier, existencia de solución.

INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos al operador diferencial de orden 2p con p ∈ IN, en el espacio de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$. Daremos la forma explícita del resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolución. Además, determinaremos la solución de un problema distribucional y de un problema de valor inicial (PVI). Citamos algunas referencias para el tratamiento de existencia de solución mediante semigrupos, por ejemplo: [1], [3], [4], [5] y [6].

El presente estudio puede ser aplicado a los espacios de Sobolev periódico H^s_{per}.

Podemos citar algunos trabajos en estos espacios, como [1], [3]-[8].

Como referencia para este estudio citamos a Iorio [1] y [8].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en cinco subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos al Operador diferencial H^p_o en $L^2([-\pi, \pi])$. En la subsección 3.2, estudiamos al Operador $F_z(H^p_o)$ en $L^2([-\pi, \pi])$, probando que es acotada y que representa al resolvente en z de H^p_o. En la subsección 3.3, obtenemos otra caracterización del resolvente de H^p_o usando la convolución. En la subsección 3.4, damos una aplicación donde evidenciamos la forma explícita de la solución de un problema distribucional. En 3.5, damos resultados de existencia de solución para PVI's.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1 Sea

$$P: = C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi]),$$

el espacio de las funciones f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciable y periódica con periodo 2π.

Así, se prueba que P es un espacio métrico completo.

Tambíen,

$P' := \{T : P \to \mathbb{C}$ lineal tal que $\exists \psi_n \in P$ y

$$< T, \varphi >= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\, dx\ ,\ \forall \varphi \in P \Big\}$$

= (P').

Esto es, P' es el dual topológico de P. Así, P' es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

Definición 2.2 *Denotamos por $S(\mathbb{Z})$ al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in Z}\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{C}\ /\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty\ y\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty\ ,\ \forall n \geq 1 \right\}$$

y $S'(\mathbb{Z})$ *es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por* $S'(\mathbb{Z}) := \{\alpha = (\alpha_k)_{k \in Z}\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \ /\ \exists C > 0\ ;\ \exists N \in IN$ con $|\alpha_k| \leq C|k|^N\ ;\ \forall k \neq 0\}$.

Definición 2.3 *Definimos el espacio*

$L^2([-\pi, \pi]) := \{f \in P', \exists (\varphi n)$ sucesión de Cauchy en P con $\|.\|_2$ y $\varphi n \xrightarrow{P'} f\} \subset P'$

Se prueba que L2([-π, π]) es un ₵ - espacio de Hilbert.

Para ver propiedades de P, P', S(ℤ) y S'(ℤ) citamos [1] y [9]; y para $L^2([-\pi,\pi])$ y propiedades citamos [10].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz) *Si T es un operador lineal no acotado, simétrico y densamente definido (i.e $\overline{Dom(T)} = H$) en un espacio H de Hilbert, entonces no admite extensión lineal simétrica a H.*

Prueba.- *Citamos Kreyszig* [2].

PRINCIPALES RESULTADOS

Recordemos al operador diferencial H_o, estudiado en la proposición 3.5 de [11].

Definición 3.1 (Operador Diferenciación H_o) Definimos el siguiente operador

$H_o : Dom(H_o) \subset L^2([-\pi,\pi]) \to L^2([-\pi,\pi])$

$f \to -f''$ *derivada distribucional*

con Dom$(H_o) := \{f \in L^2([-\pi,\pi])$ *tal que* $-f'' \in L^2([-\pi,\pi])\}$.

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *El operador* H_o *es* ₵ *-es lineal, simétrico, densamente definido y no acotado. Además,* H_o *no admite extensión lineal simétrica a* $L^2([-\pi,\pi])$.

Prueba.- Su prueba puede ser vista en [11]. Es el caso p = 1 de la proposición 3.2 que veremos en la siguiente subsección.

A continuación daremos los resultados obtenidos.

EL OPERADOR H^p_O en $L^2([-\Pi, \Pi])$

Previamente, introducimos la siguiente notación.

Notación: Sea $p \in \mathbb{N}$, $H^1_o := H_o$, $H^p_o := \underbrace{H_o \circ \ldots \circ H_o}_{\text{p-veces}}$.

Observación 3.1 (Operador Diferenciación H^p_o) *Sea p ∈ IN, el Operador*

$H^p_o : Dom(H^p_o) \subset L^2([-\pi,\pi]) \to L^2([-\pi,\pi])$

$f \to (-1)^p f^{(2p)}$ *derivada distribucional con Dom*$(H^p_o) = \{f \in L^2([-\pi,\pi])$ tal que $f^{(2p)} \in L^2([-\pi,\pi])\}$.

Observación 3.2 $Dom(H^p_o) = \{f \in L^2([-\pi,\pi])$ tal que $(k^{2p}\hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})\}$ y $H^p_o(f) = (k^{2p}\hat{f}(k))^{\vee}$, $\forall f \in Dom(H^p_o)$, desde que $\{(-1)^p f^{(2p)}\}^{\wedge}(k) = k^{2p}\hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.2 H^p_o *es* ₵*-lineal, simétrico, densamente definido y no acotado. Además,* H^p_o *no admite extensión lineal simétrica a* $L^2([-\pi,\pi])$.

Prueba.- Sean f; g ∈ $Dom(H^p_o)$ y c ∈ ₵ entonces f y g son infinitamente diferenciables en el sentido distribucional, con $f^{(2p)}, g^{(2p)} \in L^2([-\pi,\pi])$, luego, $(cf + g)^{(2p)} = cf^{(2p)} + g^{(2p)} \in L^2([-\pi,\pi])$, esto es $H^p_o(cf + g) = cH^p_o f + H^p_o g$.

Se cumple $P \subset Dom(H^p_o)$, luego

$$L^2([-\pi,\pi]) = \overline{P}^{|||\cdot|||_2} \subset \overline{Dom\,(H^p_o)}^{|||\cdot|||_2} \subset L^2([-\pi,\pi])\,,$$

de donde obtenemos que $\overline{Dom\,(H^p_o)}^{|||\cdot|||_2} = L^2([-\pi,\pi])$.

Ahora, probaremos que el Operador H^p_o no es acotado. En efecto, para esto introduciremos la sucesión (ψ_k) de funciones en P, donde $\psi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{k^{2p}}$. Se observa que $\|\psi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^{2p}}$. Además, $\psi_k^{(2p)}(x) = (-1)^p e^{ikx}$ $|||H^p_o \psi_k|||_2 = \|\psi k^{(2p)}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Podemos observar que $\frac{\|H^p_o \psi_k\|_2}{\|\psi_k\|_2} = k^{2p}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ no es acotada. Luego, el operador H^p_o no es acotado.

Sean f; g 2 $Dom(H^p_o)$, probaremos que $(H^p_o f, g) = (f, H^p_o g)$. En efecto, usando la Identidad de Parseval y las igualdades:

$$\begin{aligned}\left\{(-1)^p f^{(2p)}\right\}^{\wedge}(k) &= k^{2p}\widehat{f}(k)\\ \left\{(-1)^p g^{(2p)}\right\}^{\wedge}(k) &= k^{2p}\widehat{g}(k)\,,\end{aligned}$$

$\forall k \in Z$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
((-1)^p f^{(2p)}, g) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{(-1)^p f^{(2p)}\right\}^{\wedge}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2p} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{k^{2p}\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{\left\{(-1)^p g^{(2p)}\right\}^{\wedge}(k)} \\
&= \left(f, (-1)^p g^{(2p)}\right),
\end{aligned}
$$

esto es, $(H^p_o f, g) = (f, H^p_o g)$ para todo f, g ∈ Dom (H^p_o), con lo que hemos probado que H^p_o es simétrico.

El además, sale de usar el Teorema 2.1.

Observación 3.3 *El operador* H^p_o *es una extensión de* D^{2p}*, donde* $D^{2p} : P \subset L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi])$ tal que a cada $\varphi \in P$ le hace corresponder $(-1)^p\varphi^{(2p)}$.

A seguir, daremos algunas propiedades importantes de H^p_o.

Proposición 3.3 *Se satisfacen los siguientes enunciados*:

1. *Para* $k \in \mathbb{Z}$, ϕ_k *es una autofunción de* H^p_o *correspondiente al autovalor* k^{2p}*, desde que* $H^p_o \phi_k = D^{2p} \phi_k = (-1)^p\phi_k^{(2p)}\phi_k = (-1)^p(ik)^{2p}\phi_k = k^{2p}\phi_k$ con $\phi_k(x) := e^{ikx}$.
2. $\phi_k(.) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2p}P_k(\cdot)$, *donde para* $f \in Dom(H^p_o)$ *se tiene para cada* $k \in \mathbb{Z}$ $P_k(f) = \frac{1}{2\pi}(f, \phi_k)\phi_k \in \mathcal{L}(\{\phi_k\})$. *Recordemos que* P_k *es el operador proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado* $\mathcal{L}(\{\phi_k\})$. *Y observemos que la convergencia de la serie es con la norma* $|||.|||_2$.

Prueba.- Es inmediato.

Observación 3.4 *Se verifica que* $\{k^{2p}\}_{k\in Z} \subset \sigma_{pu}(H^p_o)$*, donde estamos denotando por* $\sigma_{pu}(H^p_o)$ *al espectro puntual del operador* H^p_o.

EL OPERADOR $F_z(H^p_o) \in B(L^2([-\Pi, \Pi]))$

Ahora, a partir de H^p_o generaremos un operador acotado, y para ello introduciremos una función F_z.

Definición 3.2 Sean $p \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ y la función $F_z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ con $k^{2p} - z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, definimos:

$Fz(H^p_o) : Dom(F_z(H^p_o)) \subset L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi])$

$f \to F_z(H^p_o)f := \{(F_z(k^{2p})\hat{f}(k))\}^{\vee}$,

con $Dom(F_z(H^p_o)) := \{f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $F_z(k^{2p}) \in \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$.

Así, de la definición de $F_z(H^p_o)$ tenemos

$$
F_z(H^p_o)f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^{2p}) \underbrace{\widehat{f}(k)\phi_k}_{P_k(f)=},
$$

$$
\forall f \in Dom(F_z(H^p_o)),
$$

donde la convergencia de la serie es con la norma $|||.|||_2$.

Ahora, estudiaremos algunas propiedades de $F_z(H^p_o)$.

Proposición 3.4 *La aplicación* $F_z(H^p_o)$ *es* $\mathbb{C}$ *- lineal.*

Prueba.- Sean f, g ∈ Dom $(F_z(H^p_o))$ entonces $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, $(F_z(k^{2p})\hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$ y $(F_z(k^{2p})\hat{g}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$. Luego, $\{f + cg\} \in L^2([-\pi, \pi])$ y

$$
\begin{aligned}
\left(F_z(k^{2p})\{f+cg\}^{\wedge}(k)\right) &= \left(F_z(k^{2p})\{\widehat{f}(k)+c\widehat{g}(k)\}\right) \\
&= \left(F_z(k^{2p})\widehat{f}(k)+cF_z(k^{2p})\widehat{g}(k)\right) \\
&= \left(F_z(k^{2p})\widehat{f}(k)\right)+c\left(F(k^{2p})\widehat{g}(k)\right) \in l^2(\mathbb{Z}). \quad (3.1)
\end{aligned}
$$

Tomando la transformada inversa de Fourier a (3.1), tenemos $F_z(H_o)\{f + cg\} = F_z(H_o)f + cF_z(H_o)g$.

Proposición 3.5 Sean $p \in IN$, $z \in ₵$ y $F_z(x) := \frac{1}{x-z}$ tal que $k^{2p} - z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, entonces $F_z(H^p_o) \in B(L^2([-\pi, \pi]))$.

Prueba.- Primero notemos que existe $\inf_{k\in\mathbb{Z}} |k^{2p} - z| > 0$ e introduciendo la siguiente notación $\delta := \inf_{k\in\mathbb{Z}} |k^{2p} - z|$, obtenemos

$$0 < \delta \leq |k^{2p} - z|, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Luego,

$$|F_z(k^{2p})| = \frac{1}{|k^{2p} - z|} \leq \frac{1}{\delta}, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Sea $f \in Dom\ F_z(H^p_o)$, usando (3.2) y la Identidad de Parseval se tiene

$$\begin{aligned} |||F_z(H_o^p)f|||_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F_z(k^{2p})\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi\delta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi\delta^{-2}\|\widehat{f}\|_2^2 \\ &= \delta^{-2}|||f|||_2^2. \end{aligned}$$

Esto es, $|||F_z(H^p_o)f|||_2 \leq \delta^{-1}|||f|||_2$, $\forall f \in Dom(F_z(H^p_o))$. Así, $F_z(H^p_o)$ es acotada y $||F_z(H^p_o)|| \leq \delta^{-1}$.

Nos resta probar que $Dom\ (F_z(H^p_o)) = L^2([-\pi, \pi])$. Una de las inclusiones es inmediata. Probaremos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces $(F_z(k^{2p})\ \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$.

En efecto, por hipótesis, aplicando la transformada de Fourier a f tenemos $\hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$, luego usando la acotación (3.2), tenemos $(F_z(k^{2p})\ \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$.

Finalmente veremos que $F_z(H^p_o)$ es el inverso del operador $H^p_o -z$; esto es, $F_z(H^p_o) = (H^p_o -z)^{-1}$.

Proposición 3.6 (Caracterización de $F_z(H^p_o)$) Sean $p \in IN$, $z \in ₵$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^{2p} - z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, entonces $B(L^2([-\pi, \pi])) \ni F_z(H^p_o) = (H^p_o -z)^{-1}$, esto es satisface:

1. $(H^p_o - z)F_z(H^p_o)f = f$, $\forall f \in DomF_z(H^p_o) = L^2([-\pi, \pi])$ y $F_z(H^p_o)f \in Dom(H^p_o)$.

2. $F_z(H^p_o)(H^p_o - z)f = f$, $\forall f \in Dom(H^p_o)$.

Prueba.- Primero veremos que la función $\mathbb{Z} \ni k \longrightarrow \frac{k^{2p}}{k^{2p}-z}$ es acotada. En efecto,

$$\begin{aligned} \left|\frac{k^{2p}}{k^{2p} - z}\right| &= \left|1 + \frac{z}{k^{2p} - z}\right| \\ &\leq 1 + |z|\left|\frac{1}{k^{2p} - z}\right| \\ &\leq \underbrace{1 + |z|\delta^{-1}}_{\xi(z):=},\ \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $0 < \delta := \inf_{k\in\mathbb{Z}} |k^{2p} - z|$.

Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, usando (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{4p}|\{F_z(H_o^p)f\}^\wedge(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{4p}|F_z(k^{2p})\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{4p}\frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k^{2p} - z|^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{k^{2p}}{k^{2p} - z}\right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq \left(\underbrace{\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{k^{2p}}{k^{2p} - z}\right|}_{\leq\xi(z)}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty, \end{aligned}$$

desde que $\hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Por lo tanto, $F_z(H^p_o)f \in Dom\,(H^p_o)$ y

$$\begin{aligned}(H_o^p - z)F_z(H_o^p)f &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^{2p} - z)\{F_z(H_o^p)f\}^\wedge(k)\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^{2p} - z)\frac{\widehat{f}(k)}{k^{2p} - z}\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\phi_k \\ &= f\,.\end{aligned}$$

Ahora, sea $g \in Dom\,(H^p_o)$, entonces

$$\begin{aligned}F_z(H_o^p)(H_o^p - z)g &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^{2p})(k^{2p} - z)\widehat{g}(k)\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\phi_k \\ &= g\,.\end{aligned}$$

Definición 3.3 Sea $p \in IN$,

$$A_p := \{z \in \mathbb{C},\ k^{2p} - z \neq 0\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$$

Observación 3.5 Sea $p \in IN$, si $z \in A_p$ entonces el operador $H^p_o\text{-}zI : Dom\,(H^p_o) \rightarrow L^2([-\pi, \pi])$ no es acotado.

Observación 3.6 *De la Proposición 3.5 se deduce que para cada $p \in IN$ fijado se tiene una familia no numerable de operadores acotados en $L^2([-\pi, \pi])$, esto es*

$$\{F_z(H_o^p)\}_{z\in A_p} \subset B(L^2([-\pi, \pi]))\,.$$

Al operador $F_z(H^p_o)$ lo llamaremos: Operador Resolvente de H^p_o. Otra notación para este operador es $R(z;H^p_o)$.

Así, tenemos

Observación 3.7 *Se satisface: $A_p \subset \rho\,(H^p_o)$ y $\rho\,(H^p_o) \neq \theta$, donde $\rho\,(H^p_o)$ es el conjunto resolvente de H^p_o.*

Observación 3.8 *De las observaciones 3.4, 3.7 y desde que $\mathbb{C} = \{k^{2p}\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup A_p$ entonces $\sigma_{pu}(H^p_o) = \{k^{2p}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\rho(H^p_o) = A_p$ y $\sigma_c(H^p_o) = \sigma_r(H^p_o) = \theta$.*

Además, se tiene el siguiente resultado

Proposición 3.7 (Existencia de solución) Sean $p \in IN$ y $z \in A_p$ entonces

$$\forall g \in L^2([-\pi,\pi])\ \exists! f \in Dom(H_o^p) \subset L^2([-\pi,\pi])$$
$$tal\ que\ \ (H_o^p - z)f = g \qquad (3.4)$$

donde $f := F_z(H^p_o)g = (H^p_o - z)^{-1}g = R(z,H^p_o)\,g$.

Así, el problema en (3.4) posee una única solución.

CARACTERIZACIÓN DE $F_Z(H^P_O)$ VÍA LA CONVOLUCIÓN

Usando que en P', la transformada de la convolución es el producto de las convoluciones, tenemos otra caracterización para $F_z(H^p_o)$:

Proposición 3.8 *Sean* $p \in IN$, $z \in \mathbb{C}$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^{2p} - z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$F_z(H_o^p)f = G_z * f\,,\ \forall f \in L^2([-\pi,\pi])\,,$$

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.1317412415018

donde $C_{per}([-\pi,\pi]) \ni G_z := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$ *y esta serie converge uniformemente.*

Prueba.- La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Probaremos que la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$ converge uniformemente, ∀z ∈ ₵ fijo tal que z ≠ k^{2p}, ∀k ∈ ℤ. En efecto, como $\left|\frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k(x)\right| = \left|\frac{1}{k^{2p}-z}e^{ikx}\right| = \frac{1}{|k^{2p}-z|}$ y $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^{2p}-z}e^{ikx}$, tenemos para n < m:

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{2p}-z}e^{ikx} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{k^{2p}-z}e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^{2p}-z|} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{|k^{2p}-z|} \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^{2p}-z|}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tomando supremo a la desigualdad (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq 2\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^{2p}-z|} \\ &= 2\left\{ \frac{1}{|(n+1)^{2p}-z|} + \dots \frac{1}{|(m)^{2p}-z|} \right\} \\ &= 2\left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|k^{2p}-z|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|k^{2p}-z|} \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|k^{2p}-z|}$ es convergente, su n-ésima suma parcial es de Cauchy; tomando límite a la desigualdad (3.6) cuando n;m → +1 tenemos que la sucesión (S_n) es de Cauchy en C([-π, π]) con la norma $\|.\|_\infty$ y por lo tanto S_n es convergente en $(C([-\pi,\pi]), \|.\|_\infty)$, denotamos a ese límite como G_z i.e. S_n converge uniformemente a G_z.

2. Luego, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, esto es

$$G_z(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k(x).$$

3. Obviamente, como las ϕk son periódicas, la unicidad del límite de la serie nos conduce a que G_z es periódica. Así, $G_z \in C_{per}([-\pi,\pi])$.

Finalmente, sea $f \in L^2([-\pi,\pi]) \subset P'$ aplicamos $F_z(H^p_o)$, y usando que en P' es válido que la transformada de la convolución es el producto de las convoluciones obtenemos:

$$
\begin{aligned}
F_z(H_o^p)f &= R(z, H_o^p)f \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k^{2p}-z}\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}-z}\widehat{f}(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G_z}(k)\widehat{f}(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G_z * f}(k)\phi_k \\
&= G_z * f \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

donde $G_z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$.

Observación 3.9 *Sea $p \in IN$, si $z \in A_p$ entonces $R(z, H^p_o)f = G_z * f$, $\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$, donde $G_z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$.*

Observación 3.10 *Sean $p \in IN$ y $z \in A_p$, si $g \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces*

$$L^2([-\pi,\pi]) \supset Dom(H_o^p) \ni f = G_z * g$$

es solución de (3.4).

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DISTRIBUCIONAL

Proposición 3.9 *Sea $p \in IN$, $z \in \mathbb{C}$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^{2p} - z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ entonces $G_z := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$ es solución de la ecuación distribucional*

$$
\left|\begin{array}{c}
\exists f \in P' \ \ tal\ que \\
(-1)^p f^{(2p)} - zf = 2\pi\delta
\end{array}\right. \qquad (3.8)
$$

Prueba.- En efecto, sea $\varphi \in P$ y como $G_z \in C_{per}([-\pi, \pi]) \subset P'$, tenemos

$$
\begin{aligned}
((-1)^p G_z^{(2p)} - zG_z, \varphi) &= (-1)^p(G_z^{(2p)}, \varphi) - (zG_z, \varphi) \\
&= (-1)^p(G_z^{(2p)}, \varphi) - (zG_z, \varphi) \\
&= (G_z, (-1)^p\varphi^{(2p)}) - (G_z, z\varphi) \\
&= (G_z, (-1)^p\varphi^{(2p)} - z\varphi)\,. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Ahora, observamos que

$$
\begin{aligned}
\{(-1)^p\varphi^{(2p)} - z\varphi\}^\wedge(k) &= (-1)^p\widehat{\varphi^{(2p)}}(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\
&= (-1)^p(ik)^{2p}\widehat{\varphi}(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\
&= (k^{2p} - z)\widehat{\varphi}(k)\,.
\end{aligned}
$$

Luego

$$(-1)^p\varphi^{(2p)} - z\varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)(k^{2p} - z)\phi_k\,. \qquad (3.10)$$

Tambíen,

$$
\begin{aligned}
(k^{2p}-z)(G_z,\phi_k) &= (k^{2p}-z)\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^{2p}-z}\,e^{imx}e^{ikx}dx\\
&= (k^{2p}-z)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^{2p}-z}\int_{-\pi}^{\pi}e^{imx}e^{ikx}dx\\
&= (k^{2p}-z)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^{2p}-z}\,\delta_{k,-m}\,2\pi\\
&= 2\pi\,. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Usando (3.10) y (3.11) en (3.9) obtenemos

$$
\begin{aligned}
((-1)^pG_z^{(2p)}-zG_z,\varphi) &= (G_z,\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(k)(k^{2p}-z)\phi_k)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(k)\,\underbrace{(k^{2p}-z)(G_z,\phi_k)}_{=2\pi}\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(k)\\
&= 2\pi\varphi(0)\\
&= 2\pi(\delta_0,\varphi)\\
&= (2\pi\delta,\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(-1)^pG_z^{(2p)}-zG_z=2\pi\delta$ en P'.

Ahora, veamos que si f ∈ P' es solución de (3.8) entonces su expresión es G_z. En efecto, tomando la transformada de Fourier a la ecuación obtenemos

$$k^{2p}\widehat{f}(k)-z\widehat{f}(k)=2\pi\widehat{\delta}(k)=1$$

esto es, $\widehat{f}(k)=\frac{1}{k^{2p}-z}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ desde que z ∈ A_p. Luego, $f=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}-z}\phi_k$.

OTRA APLICACIÓN

Obtenemos un importante resultado de existencia de solución para una familia $\{(Qp)\}_{p\in IN}$ de problemas de valor inicial.

Proposición 3.10 Sea p ∈ IN, el Problema de Cauchy Abstracto

$$(Q_p)\ \left|\ \begin{array}{l} u_t=-H_o^p\,u\\ u(0)=f\in Dom(H_o^p)\subset L^2([-\pi,\pi]) \end{array}\right.$$

posee una única solución: $u(t)=e^{-tH_o^p}f$, $\forall t\geq 0$, donde $u\in C([0,\infty);L^2([-\pi,\pi]))\cap C^1((0,\infty),L^2([-\pi,\pi]))$ y $e^{-tH_o^p}f:=(e^{-tk^{2p}}\hat{f}(k))^{\vee}$.

Además, se tiene

Proposición 3.11 La solución del Problema (Q_p) depende continuamente respecto al dato inicial.

CONCLUSIONES

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Para cada p ∈ IN, introducimos un operador H^p_o en $L^2([-\pi,\pi])$, que es una extensión de D^{2p}, y hemos probado que está densamente definida, es no acotada,

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.1317412415018

simétrica y que no admite extensión lineal simétrica a $L^2([-\pi, \pi])$.

2. Introducimos otro operador $F_z(H^p{}_o)$ en $L^2([-\pi, \pi])$ y hemos probado que está en el espacio $B(L^2([-\pi, \pi]))$, para todo $z \in A_p$. Así tambíen, se probó que este operador es el resolvente de $H^p{}_o$ en $z \in A_p$.

3. Usando la convolución se encontró una caracterización para el operador acotado $F_z(H^p{}_o)$.

4. Tambíen, se estudió el problema de existencia de solución de un problema distribucional de orden par 2p, evidenciando su solución. Además, damos resultados de existencia de solución para una familia de PVI's.

5. Finalmente, queremos enfatizar que este estudio puede ser generalizado a los espacios de Sobolev periódico.

REFERENCIAS

[1] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

[2] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. 1978.

[3] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existencce of the solution of a Schrodinger type homogeneous model in Periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(02): 357-369.

[4] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

[5] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

[6] Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

[7] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(05): 43-56.

[8] Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schr¨odinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.

[9] Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

[10] Santiago Ayala, Y. El espacio Distribucional periódico L2([-π, π]) como completamiento del espacio P. Construção e difusão do conhecimento matemático. 2023; 34-60.

[11] Santiago Ayala, Y. Resolvente del Operador Diferencial en el espacio L2([-π, π]). Construção e difusão do conhecimento matemático 2. 2023; 1-13.