

Universidade do Estado do Pará  
Centro de Ciências Sociais e Educação  
Departamento de Matemática, Estatística e Informática  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



JESSIE HEVENY SARAIVA LIMA

**TRIGONOMETRIA E SEU ENSINO  
RECORTES HISTÓRICOS PARA SALA DE AULA**

Belém - PA

2023

JESSIE HEVENY SARAIVA LIMA

**TRIGONOMETRIA E SEU ENSINO:  
RECORTES HISTÓRICOS PARA SALA DE AULA**

Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém - PA

2023

**Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)**  
**Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA**

---

Lima, Jessie Heveny Saraiva

Trigonometria e seu Ensino - recortes históricos para sala de aula/ Jessie Heveny Saraiva Lima; orientador Miguel Chaquiam, Belém - 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Belém, 2023.

1. Trigonometria-História. 2. Ensino de matemática. 3. Trigonometria-Estudo e ensino. I. Chaquiam, Miguel, orient. II. Título.

CDD 512 23º ed.

---

XXXXXXXXXXXXXXXXXX

JESSIE HEVENY SARAIVA LIMA

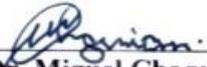
## A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA E SEU ENSINO: RECORTES PARA SALA DE AULA

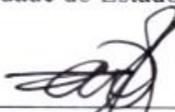
Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

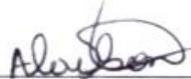
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 27/10/2023

Banca examinadora

  
\_\_\_\_\_. Orientador  
**Prof. Dr. Miguel Chaquiam**  
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN  
Universidade do Estado do Pará

  
\_\_\_\_\_. Examinador Interno  
**Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral**  
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ  
Universidade do Estado do Pará

  
\_\_\_\_\_. Examinador Externo  
**Prof. Dr. Alailson Silva de Lira**  
Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me iluminado nessa jornada e ter me concedido essa oportunidade que tem sido muito importante, não somente à minha vida profissional, como também à minha vida pessoal.

De modo especial, agradeço aos meus pais Juceli da Costa e Ronaldo Joacy, que foram fundamentais nessa etapa de minha vida, que sempre me apoiaram nas minhas decisões acadêmicas e que me serviram de exemplo para sempre buscar alcançar todos os meus objetivos.

Agradeço a toda a minha família, por terem acreditado na minha capacidade, e que de maneira direta ou indireta me ajudaram e me incentivaram a chegar até aqui.

Agradeço ao Kevim Wille, pelo incentivo, pela paciência e compreensão dos dias ausentes e pela falta de tempo, por ter me apoiado e por ter sido um pilar fundamental durante todos os anos acadêmicos.

Ao meu orientador, Miguel Chaquiam, pelo estímulo e colaboração nessa trajetória.

Por fim, agradeço aos membros da Banca Examinadora pelas valiosas contribuições durante a qualificação e defesa, bem como, a todos, que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a realização de mais essa etapa em minha vida.

## RESUMO

**LIMA, Jessie Heveny Saraiva. A História da Trigonometria e seu Ensino: Recortes para Sala de Aula.** 141 f. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

A História da Matemática é apontada por literaturas e documentos oficiais como um recurso didático eficiente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem do aluno, porém, apesar da eficiência que ela pode proporcionar, existe uma escassez de referenciais teóricos que fazem uso da História da Matemática, o que me induziu ao interesse por esse estudo, mais especificamente para o ensino de trigonometria, fato que me levou à seguinte questão de pesquisa: “Que recortes históricos podem ser realizados a partir de uma história da trigonometria de modo a integrar história e matemática num contexto didático-pedagógico para uso no processo de ensino na Educação Básica?”. Para responder a esse questionamento, objetivou-se elaborar textos com recortes da história da trigonometria, utilizando o diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022), de modo que possam ser utilizados como recurso didático durante o processo de ensino dos conteúdos envolvidos. Para tanto, este trabalho relata uma pesquisa do tipo bibliográfica que se insere na área de Educação Matemática, na linha de História da Matemática, no qual revisamos os estudos feitos por Costa (2003), Chaquiam (2017, 2020, 2022) Gomes (2009), Mendes (1997), Miguel (1993), Oliveira (2009), Prado (1990), Viana e Silva (2007) e entre outros estudos que apontam sobre a História da Matemática e advertem a importância do uso desse recurso didático no ensino da trigonometria. Além disso, foi aplicado um questionário via Google Forms para professores de diferentes redes de ensino com o intuito de fazer um levantamento diagnóstico do processo de ensino do conteúdo de trigonometria. E outro questionário, também via *Google Forms*, foi aplicado com o intuito de analisar o texto histórico, seus recortes e as suas respectivas atividades propostas. Diante desse contexto, a partir das literaturas, observou-se que a História da Matemática tem sido vista como relevante para o processo de ensino e aprendizagem e que pode ser considerada como um recurso para o ensino, capaz de incentivar os alunos durante as aulas de matemática. Além disso, a partir dos resultados dos questionários, percebem-se algumas dificuldades obtidas pelos professores durante o processo de ensino dos conteúdos trigonométricos e a necessidade de recursos didáticos inovadores que possam melhorar esse ensino, o que permite concluir que a História da Matemática no ensino de matemática, em particular na trigonometria, pode ser eficiente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Os resultados dessa pesquisa geraram o produto educacional intitulado: “Ensino de trigonometria por meio de recortes históricos<sup>1</sup>”, disponível no link indicado no rodapé.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. História no Ensino. Trigonometria. História da Matemática como Recurso Pedagógico. História da Trigonometria.

---

<sup>1</sup> Link do produto educacional

## ABSTRACT

**LIMA, Jessie Heveny Saraiva. A História da Trigonometria e seu Ensino: Recortes para Sala de Aula.** 141 f. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

The History of Mathematics is highlighted by literature and official documents as an efficient teaching resource for improving the student's teaching and learning process, however, despite the efficiency it can provide, there is a scarcity of theoretical references that make use of the History of Mathematics. Mathematics, which led me to become interested in this study, more specifically for the teaching of trigonometry, a fact that led me to the following research question: "What historical insights can be made from a history of trigonometry in order to integrate history and mathematics in a didactic-pedagogical context for use in the teaching process in Basic Education?". To answer this question, the aim was to prepare texts with excerpts from the history of trigonometry, using the methodological diagram proposed by Chaquiam (2017, 2020, 2022), so that they can be used as a teaching resource during the teaching process of the contents involved. To this end, this work reports a bibliographical research that falls within the area of Mathematics Education, in the line of History of Mathematics, in which we review the studies carried out by Costa (2003), Chaquiam (2017, 2020, 2022) Gomes (2009), Mendes (1997), Miguel (1993), Oliveira (2009), Prado (1990), Viana e Silva (2007) and among other studies that point to the History of Mathematics and warn the importance of using this didactic resource in teaching of trigonometry. Furthermore, a questionnaire was administered via Google Forms to teachers from different education networks with the aim of carrying out a diagnostic survey of the teaching process of trigonometry content. And another questionnaire, also via Google Forms, was applied with the aim of analyzing the historical text, its excerpts and their respective proposed activities. Given this context, from the literature, it was observed that the History of Mathematics has been seen as relevant to the teaching and learning process and that it can be considered as a teaching resource, capable of encouraging students during math classes. mathematics. Furthermore, based on the results of the questionnaires, we can see some difficulties experienced by teachers during the process of teaching trigonometric content and the need for innovative teaching resources that can improve this teaching, which allows us to conclude that the History of Mathematics in teaching mathematics, particularly trigonometry, can be efficient in improving the mathematics teaching and learning process. The results of this research generated the educational product entitled: "Teaching trigonometry through historical clippings<sup>2</sup>", available at the link indicated in the footer.

**Key-words:** Mathematics Teaching. History in Teaching. Trigonometry. History of Mathematics as a Pedagogical Resource. History of Trigonometry.

---

<sup>2</sup> Educational product link

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Diagrama I .....	45
Figura 2:	Diagrama II .....	46
Figura 3:	Diagrama III .....	47
Figura 4:	Diagrama Metodológico - séc. III e II a.C.....	49
Figura 5:	Diagrama metodológico – séc. XVII ao XIX .....	50
Figura 6:	Diagrama metodológico – séc. IX ao XIV .....	51
Figura 7:	Papiro de Rhind .....	53
Figura 8:	Seqt Egípcio .....	53
Figura 9:	Régua egípcia para medir o tempo .....	54
Figura 10:	Triângulo Retângulo obtido pelos babilônios em 1600 a.C. ...	58
Figura 11:	Dedução do Teorema de Pitágoras .....	59
Figura 12:	Arquimedes .....	60
Figura 13:	Esquema da ideia de Erastóstenes .....	62
Figura 14:	Cálculo da corda de Hiparco .....	64
Figura 15:	A ideia do raio 1 de Al-Battani .....	67
Figura 16:	Fórmula usada para construir a Tabela de Al-Battani .....	68
Figura 17:	Capa da Obra de Triangulis Omnimodis Libri Quinque, 1533	71
Figura 18:	Problema proposto por Copérnico .....	74
Figura 19:	Seqt Egípcio .....	81
Figura 20:	Régua Egípcia para medir o tempo .....	81
Figura 21:	Pitágoras .....	82
Figura 22:	Tales de Mileto .....	82
Figura 23:	Hiparco de Nicéia .....	83
Figura 24:	Ideia de Tangente .....	84
Figura 25:	Tábua de Senos Trigonométricos .....	86
Figura 26:	Esquema da Ideia de Erastóstenes .....	88
Figura 27:	Introdução do conteúdo de trigonometria no Livro Didático ....	105

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1:	Textos a partir do Diagrama Metodológico .....	13
Quadro 2:	Grau de dificuldade segundo os professores .....	42
Quadro 3:	Cordas de Ptolomeu .....	68
Quadro 4:	Cordas de Ptolomeu .....	89
Quadro 5:	Validação do texto principal – Uma História da Trigonometria .....	100
Quadro 6:	Contribuições dos professores – Questão 1 .....	101
Quadro 7:	Contribuições dos professores – Questão 2 .....	102
Quadro 8:	Contribuições dos professores – Questão 3 .....	103
Quadro 9:	Contribuições dos professores – Questão 5 .....	104
Quadro 10:	Contribuições dos professores – Questão 6 .....	106
Quadro 11:	Validação do Recorte – Questão 1 .....	107
Quadro 12:	Contribuição dos professores para os Recortes I, II e III – Questão 1 ..	107
Quadro 13:	Validação do Recorte – Questão 2 .....	109
Quadro 14:	Contribuição dos professores para os Recortes I, II e III – Questão 2 ..	109
Quadro 15:	Validação do Recorte – Questão 3 .....	110
Quadro 16:	Contribuição dos professores para os Recortes I, II e III – Questão 3 ..	110
Quadro 17:	Contribuição dos professores para os Recortes I, II e III – Questão 4 ..	111

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Sobre a metodologia inicial nas aulas de trigonometria .....	37
Gráfico 2: Materiais de seleção de tópicos às aulas de trigonometria .....	38
Gráfico 3: Avaliações utilizadas pelos professores .....	39
Gráfico 4: Metodologias usadas para fixação dos conteúdos ministrados .....	40

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....</b>	<b>26</b>
<b>2. SOBRE O ENSINO DA TRIGONOMETRIA.....</b>	<b>33</b>
2.1. NA PERSPECTIVA LITERÁRIA.....	33
2.2. NA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES ENTREVISTADOS.....	35
<b>3. SOBRE O DIAGRAMA E O SEU USO.....</b>	<b>44</b>
3.1. O MODELO PROPOSTO.....	44
3.2. TEXTOS DECORRENTES A PARTIR DO MODELO.....	48
<b>4. UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA.....</b>	<b>52</b>
4.1. A TRIGONOMETRIA DO SÉC XVII A.C. AO SÉC XVI A.C.....	52
4.2. A TRIGONOMETRIA DO SÉC VI A.C.....	55
4.3. A TRIGONOMETRIA DO SÉC III A.C. AO SÉC II A.C.....	60
4.4. A TRIGONOMETRIA DO SÉC II.....	65
4.5. A TRIGONOMETRIA DO SÉC IX AO SÉC XIV.....	67
4.6. A TRIGONOMETRIA DO SÉC XV AO SÉC XVI.....	71
4.7. A TRIGONOMETRIA DO SÉC XVII AO SÉC XIX.....	77
<b>5. RECORTES DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO.....</b>	<b>80</b>
5.1. INTRODUÇÃO AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA.....	80
5.2. A IDEIA DE SENO, COSSENO E TANGENTE.....	83
5.3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS À CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA.....	87
<b>6. CONSTITUIÇÃO DO PROCESSO DE VALIDAÇÃO.....</b>	<b>91</b>
6.1. AVALIAÇÃO DO TEXTO HISTÓRICO.....	91
6.2. AVALIAÇÃO DOS RECORTES E ATIVIDADES.....	94
<b>7. VALIDAÇÃO DOS TEXTOS E DAS ATIVIDADES PROPOSTAS.....</b>	<b>99</b>
7.1. VALIDAÇÃO DAS PERCEPÇÕES DO TEXTO HISTÓRICO.....	99
7.2. VALIDAÇÃO DAS PERCEPÇÕES DOS RECORTES E ATIVIDADES..	106
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>113</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>117</b>
<b>APÊNDICE.....</b>	<b>121</b>

## INTRODUÇÃO

No decorrer da minha graduação no curso de Licenciatura em Matemática despertou em mim, desde o primeiro ano letivo do curso, o interesse em desenvolver um estudo mais aprofundado sobre a importância do uso da História da Matemática no Ensino de Matemática, em particular os benefícios que essa metodologia pode oferecer para o ensino de trigonometria. O primeiro contato com a História da Matemática se deu a partir de um trabalho realizado à disciplina Metodologia Científica no ano de 2016, desde então aprofundei meus estudos nessa temática com o desígnio de defender o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), em Licenciatura em Matemática, intitulado *A História da Matemática: o caso da trigonometria* no ano de 2019.

O interesse por esse estudo surgiu devido à escassez de recursos didáticos que façam uma abordagem histórica para ser utilizado durante o ensino de conteúdos matemáticos, mais especificamente no ensino de trigonometria. Diante desse contexto, busquei elaborar um texto sobre o conteúdo de trigonometria utilizando a História da Matemática, com base no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022), visando contribuir na prática dos professores a partir da reflexão e procura por métodos que possam servir de auxílio e enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem, podendo melhorar o ensino de matemática e ajudar os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos a partir da História.

Nesse trabalho de conclusão da graduação foram desenvolvidas pesquisas preliminares sobre História da Matemática, em particular, História da Trigonometria, no qual busquei saber a sua origem, personagens contribuintes, contexto sociocultural, sua função e como usar a História da Matemática para ensinar ao aluno esse conteúdo. Tendo em vista os materiais elaborados e publicados em eventos científicos por mim e meu orientador, tomamos por base tais textos como suporte inicial para continuidade as pesquisas, bem como a possibilidade de utilização destes como complemento de futuros textos.

No quadro 1, têm-se os textos elaborados, nos quais foram apresentados como possível recurso didático para serem utilizados por professores de matemática durante o processo de ensino dos conteúdos trigonométricos.

Quadro 1: Textos a partir do diagrama metodológico

<b>Título</b>	<b>Evento</b>	<b>ISSN</b>
A TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA ANTIGA: Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio e Hiparco de Nicéia.	XIII Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM	2236-4102
AS CONTRIBUIÇÕES À TRIGONOMETRIA NOS SÉCULOS XVII, XVIII E XIX.	XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM	2178-034X
CONTRIBUIÇÕES À TRIGONOMETRIA: Al-Battani, Bhaskara Akaria, Fibonacci e Nicoled’ Oresme.	XII Encontro Paraense de Educação Matemática – EPAEM	2178-3632

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Com o intuito de continuar a investigar a relevância e os benefícios que essa linha de pesquisa pode oferecer para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, em específico à trigonometria, este trabalho se insere na área de Educação Matemática, na linha de História da Matemática, que visa trazer à discussão a importância do uso da História no Ensino de Matemática, tomando por base textos voltados para o ensino de trigonometria.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o entendimento matemático é imprescindível para todos os alunos da Educação Básica, devido sua grande aplicação na sociedade moderna e pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. Além disso, a BNCC (2017) destaca que apesar de a Matemática ser uma ciência hipotético-dedutiva – pois suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados – é importante considerar o seu papel de investigação de fatos das experimentações no processo de aprendizagem da Matemática.

Diante disso, a primeira competência específica de matemática para o ensino fundamental imposta pela BNCC (2017) é:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribuiu para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (Brasil, 2017, p. 267)

E para atingir essa competência faz-se necessário a abordagem da História da Matemática, que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

de 1998, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento, ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. Além disso, conceitos abordados em vinculação com sua história constituem meios de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, apontada pelo PCN (1998) como um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

A matemática é uma ciência considerada de fundamental importância para o desenvolvimento e progresso da humanidade. De acordo com Mendes (2001) este desenvolvimento e progresso devem ser buscados a partir da compreensão dos termos: modificabilidade e perfectibilidade, isto é, compreender a história para melhor centralizar e planejar as ações educativas e a vida no geral no nosso dia-a-dia.

Embora a Matemática seja considerada como uma das disciplinas mais importantes da educação básica, em qualquer sociedade, o seu ensino deve ser muito delicado para que não se torne rapidamente abstrata para a maioria das crianças, fazendo-o perder rapidamente significado, sabor e sem contato cultural (história da sociedade) pelas crianças conhecidas.

A associação entre a História da Matemática e a Educação Matemática tem trazido à tona diversas discussões, no qual se configura como um novo campo de investigação, o que lhe auferi destaque dentre as diversas tendências da Educação Matemática, considerada como um recurso metodológico que pode ser capaz de ensinar aos alunos as origens e modificações que a matemática sofreu para chegar até o modelo atual, como é apontado por Oliveira, Oliveira e Vaz (2014) ao dizer que o recurso em questão é uma ferramenta de investigação, das origens e descobertas, métodos e notações matemáticas que se desenvolveram no decorrer do tempo, desde as antigas civilizações até os dias atuais.

Muitos são os estudos que apontam a importância da História da Matemática para o processo de ensino, como o de Oliveira (2011) no qual diz que esse recurso metodológico na formação do aluno, pode contribuir para o seu maior conhecimento matemático e amenizar as dúvidas e as dificuldades que apresentam em sala de aula. Nesse sentido, a História da Matemática, juntamente

com outros recursos didáticos e metodológicos, pode possibilitar uma nova forma de ver e entender a matemática como uma ciência mais atrativa, mais interdisciplinar e mais criativa.

Para Oliveira, Oliveira e Vaz (2014), o uso de fatos históricos na sala de aula é capaz de proporcionar ao aluno um entendimento mais eficaz, no que diz respeito à dimensão histórica dos assuntos envolvidos, o que leva a despertar o interesse dos alunos, assim como os incentiva cada vez mais a buscar novos conhecimentos. Nesse sentido, o professor precisa tornar seus alunos mais investigadores, aperfeiçoando o seu senso crítico para não torná-los cidadãos rasos de conhecimento, mas sim que tenham possibilidade de êxito na construção do mesmo.

Além disso, Oliveira, Oliveira e Vaz (2014) destacam em seus estudos a necessidade de discutir a forma de como iniciar o uso da História da Matemática em sala de aula:

É preciso discutir a forma de introduzir a História da Matemática em sala de aula, com um planejamento pedagógico que seja capaz de propor aulas que façam uso dessa área do conhecimento com a redescoberta do conhecimento e com a construção de conceitos semelhantes da criação histórica dos mesmos, pois entendendo de onde vêm esses conceitos o aluno poderá compreender melhor e entender como a matemática pode ser inserida em seu cotidiano. (Oliveira, Oliveira E Vaz, 2014, P. 460)

Nos estudos feitos por Miguel (1993) têm-se algumas justificativas para o uso da História da Matemática como metodologia de ensino. Segundo o autor, uma utilização adequada da história, desde que seja associada a um conhecimento atualizado da matemática e de suas aplicações, poderia levar o estudante a perceber:

- i. Que a matemática é uma criação humana;
- ii. As razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
- iii. As conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e o mundo físico e matemática e lógica;
- iv. Que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas;
- v. Que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão "O que aconteceria se...?", pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;
- vi. Que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;

- vii. A natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização da história do pensamento matemático e
- viii. A natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (Miguel, 1993, p. 76)

A abordagem histórica dos conteúdos de matemática em sala de aula pode ser usada como uma ferramenta incentivadora, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa, capaz de favorecer um ensino rico em significados, proporcionando a participação dos alunos das descobertas, discutindo manifestações, crenças, emoções e afetos ocorridos em tal criação.

Algumas pesquisas, como por exemplo, as de Balestri e Cyrino (2008), Lopes e Ferreira (2013) e entre outras, relatam a facilidade que o professor tem de perceber dificuldades na compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos trigonométricos, e usar a história como recurso didático poderá facilitar o seu entendimento acerca do conteúdo matemático. Porém, é raro encontrar professores que façam uma abordagem histórica em sala de aula, que usem atividades estruturadas envolvendo história e ensino no processo de ensino-aprendizagem.

Diante desse contexto, a História da Matemática pode ser inserida no planejamento pedagógico do professor, com o intuito de melhorar a aprendizagem e de mostrar aos alunos os caminhos traçados por muitos matemáticos para poder chegar ao modelo que temos hoje em dia, mostrando suas origens, suas transformações, o contexto sociocultural, as contribuições de outros cientistas de outras áreas de conhecimento, como por exemplo, a física, a astronomia, desmistificando, assim, a ideia que muitos alunos ainda têm de que a matemática nasceu pronta e acaba.

De acordo com Godoy e Santos (2012), nos últimos 30 anos, o foco principal dos trabalhos teóricos sobre o currículo de Matemática tem se direcionado à busca de componentes ou dimensões que permitem estruturar o sistema curricular. Rico (2004 apud Goody e Santos, 2012) diz que são poucos os especialistas que têm defendido plausivelmente a inclusão da Matemática no currículo escolar e, com frequência, as justificativas específicas são superficiais, o que revela as disparidades entre os fundamentos e as práticas e não refletem as relações entre os procedimentos matemáticos formais e suas raízes.

Em 1960, com a chegada das orientações do Movimento da Matemática Moderna (MMM), começaram a surgir mudanças significativas no ensino de

Matemática. Segundo Godoy e Santos (2012) o MMM tinha como objetivo modernizar o ensino dessa área do conhecimento, adequando-a as necessidades de expansão industrial que orientavam a reconstrução no pós-guerra, e atendendo às exigências de uma sociedade em constante avanço tecnológico.

Pietropaolo (1999, apud Godoy e Santos, 2012) diz que para entender melhor a necessidade dessas mudanças nos currículos, é necessário ter em mente que, nas primeiras décadas do século XX, os matemáticos concentravam suas forças na busca por um enfoque unificador da Matemática. Diante desse contexto, de acordo com Silva (2013), muitos educadores matemáticos colocaram em discussão a importância do ensino de trigonometria e as relações dela com a geometria e a álgebra, questionando se o ensino independente desse conteúdo era viável ou não.

Segundo Silva (2013) existia uma vertente que afirmava ser um erro muito grave separar, por exemplo, a trigonometria e a geometria, e principalmente ao considerá-la uma parte independente no currículo da matemática ensinada, enquanto outros afirmavam que a trigonometria era um conteúdo específico que deveria ser abordado de forma isolada. No entanto, para alguns estudiosos, de acordo com Silva (2013), a separação da matemática causaria dificuldades no processo de aprendizagem do aluno.

Alguns estudiosos consideravam ainda que tal separação certamente acarretaria a criação de barreiras que dificultariam o conhecimento de poderosos métodos da própria trigonometria, buscaram apoio no fato de que muitas questões de geometria se resolvem de maneira elementar e rápida graças às noções básicas da trigonometria. (Silva, 2013)

De acordo com Mendes (2002), na década de 30, Euclides Roxo (1937) deu início a uma discussão acerca do ensino de trigonometria como disciplina isolada no currículo da escola. Para ele, isso se tratava de um erro muito grave, pois ele afirmava que não havia na época, justificativa para que, tanto no âmbito do conhecimento escolar quanto do âmbito científico, o estudo da trigonometria, se configurasse como um ramo especial da matemática, visto que os assuntos que são abordados sob a denominação de trigonometria devem ser ligados às partes da geometria e da álgebra, com os quais se relacionam.

Para sustentar seus argumentos, Roxo (1937 apud Mendes, 2002) se apoiou das percepções teóricas de educadores matemáticos como Rey Pastor

(1888-1962) e Felix Klein (1849-1925), por exemplo. Dentre seus argumentos, o mais forte refere-se à unidade da ciência matemática, concepção integradora dos diversos ramos da matemática, baseado no princípio unificador, defendido pelo matemático Felix Klein, que foi um dos maiores influenciadores do pensamento de Roxo no início do século XX. O pensamento de Roxo admitia que a unidade da ciência matemática implicava na fusão de tópicos a serem abordados nos programas de ensino, de modo que os estudantes pudessem perceber a integração interdisciplinar de tais tópicos, na solução aplicada de problemas matemáticos ou de outras disciplinas do currículo escolar.

Nesse sentido, tendo em vista o ensino de trigonometria a partir do currículo de matemática, o interesse por tal tema levou-me a realizar uma pesquisa de campo, a partir de um formulário aplicado pelo *Google Forms* a professores de diferentes redes de ensino a respeito do processo de ensino do conteúdo de trigonometria em sala de aula. Trata-se de um estudo de caso, cujo objetivo foi realizar um levantamento diagnóstico do processo de ensino do conteúdo de Trigonometria, a partir da opinião de professores de matemática do Ensino Fundamental.

Para a realização da entrevista, foi feito um levantamento referente às metodologias de ensino utilizadas durante as aulas de trigonometria, tendo em vista que, para que o aluno aprenda, é necessário que o professor seja capaz de transformar o conhecimento, o que o leva a estar sempre em busca de novas metodologias de ensino e de novos recursos didáticos.

Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (Brasil, 1998, p. 36)

Estudos apontam argumentos favoráveis à aproximação do professor com o uso da História da Matemática no ensino, como por exemplo, os estudos de Santos (2007) onde diz que aprender sobre as dificuldades que os antigos matemáticos passaram, através de tentativas e erros, para chegarem a grandes relações valiosas, pode ser uma maneira de o professor identificar as dificuldades que os alunos têm atualmente, podendo criar maneiras de sanar tais dificuldades.

Além de contribuir com a amenização das barreiras que os alunos têm com o processo de aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos a História da Matemática pode ajudar a dinamizar as aulas, tornando-as mais atrativa. De acordo com Chaquiam (2017) inserir fatos históricos durante as aulas pode torná-las mais dinâmicas, tendo em vista que os alunos podem reconhecer essa ciência como uma criação humana, que surgiu a partir das buscas por soluções para problemas do cotidiano.

Segundo D'Ambrosio (1999) um dos principais objetivos do professor começar a utilizar a História da Matemática é destacar que a transmissão do conhecimento matemático depende de sua compreensão, de como esse conhecimento surgiu, quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. O autor ainda propõe nortear o currículo matemático à criatividade, curiosidade e à crítica, contribuindo à melhor formação do cidadão de acordo com seu contexto social, político, econômico e ideológico.

D'Ambrosio (1999) diz em seus estudos que a História da matemática serve tanto para alunos, como professores, pais e para o público em geral. Além disso, relata alguns pontos que destacam para o que convém o uso da História da Matemática:

- I. Para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
- II. Para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
- III. Para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
- IV. Para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação. (D'Ambrosio, 1999, p.27)

Segundo o autor, os pontos enumerados de 1 a 4 constituem a essência de um programa de estudos, ou de um currículo que faça uso da História da Matemática. Porém, a utilização desse método é desafiadora para os professores, mesmo que se restrinja a alguma subárea específica. De acordo com D'Ambrosio (1999) muitas vezes apresenta-se a História da Matemática como algo definitivo, o

que pode ser falsificador. Esse recurso metodológico, durante o ensino, deve ser exaltado devido o seu valor de motivação à Matemática, mesmo que alguns alunos não se interessem, o que é natural segundo D'Ambrosio (1999).

De acordo com Chaquiam (2017) estudos apontam que a História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode ajudar a melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, possibilitando em uma nova forma de ver e entender essa disciplina, tornando-a mais contextualizada, mais interdisciplinar, mais agradável, mais criativa e mais humanizada. Ainda de acordo com o autor, observa-se um crescente desenvolvimento de pesquisas relacionadas à História das ciências e, em particular, a História da Matemática.

Diante desses estudos, como os de Oliveira, Oliveira e Vaz (2014), Santos (2007), D'Ambrosio (1999) e entre outros, onde apontam que inserir fatos históricos é importante para dinamizar e tornar mais interessante as aulas durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática, com o intuito de motivar os alunos a conhecerem mais sobre o desenvolvimento e as origens dos conteúdos matemáticos, foi que Chaquiam (2017, 2020, 2022) resolveu elaborar um diagrama metodológico tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na Educação Básica, e formação de professores.

O diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022) tem como objetivo orientar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de História da Matemática associada a personagens/matemáticos e tema/conteúdos ministrados em sala de aula. De acordo com o autor, o texto elaborado com base no modelo proposto pelo o mesmo pode levar o sujeito a reconstruir algumas das operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos. Além disso, durante a elaboração do texto deve-se prevalecer o discurso didático-pedagógico, usando uma linguagem simples e clara.

A estrutura do diagrama, de acordo com Chaquiam (2017), segue uma ordem de prioridades que deve ser seguida ao longo do desenvolvimento da pesquisa:

[...] inicia-se com a escolha do tema/conteúdo matemático; segue-se com a composição da evolução do tema/conteúdo e identificação dos personagens que contribuíram para o tema/conteúdo; eleja um dos

personagens para dar destaque no texto; identifique os contemporâneos do personagem evidenciado; faça um recorte da história da humanidade para descrever o cenário mundial e, por fim, identifique historiadores/pesquisadores que emitiram pontos de vista sobre o personagem destacado ou tema/conteúdo. (Chaquiam, 2017, p. 32)

Chaquiam (2017) ressalta que a ordem estabelecida para a obtenção dos dados para constituição do diagrama no decorrer da pesquisa não é a ordem sugerida para a elaboração do texto didático-pedagógico, embora, esta seja uma decisão pessoal. A necessidade de modificar a ordem pode surgir por diversos fatores, como por exemplo, dificuldades de encontrar literaturas disponíveis que tratem do tema escolhido ou por algum outro obstáculo ao longo da pesquisa.

Tendo em vista as possíveis vantagens que o diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022) pode proporcionar no momento de elaborar um texto para ser utilizado pelo professor na educação básica com o intuito de integrar a história no ensino de determinados conteúdos matemáticos, delimitou-se a seguinte questão de pesquisa: *Que recortes históricos podem ser realizados a partir de uma história da trigonometria de modo a integrar história e matemática num contexto didático-pedagógico para uso no processo de ensino na Educação Básica?*

Para obter argumentos favoráveis que corroborem em responder ao questionamento elencado acima, foi estabelecido o seguinte objetivo: *Elaborar textos com recortes da história da trigonometria de modo que possam ser utilizados como recurso didático durante o processo de ensino dos conteúdos envolvidos.*

Para melhor balizamento da pesquisa e obtenção de elementos que possam contribuir para atingir o objetivo geral e, conseqüentemente, também contribuir para responder à questão de pesquisa, elencamos especificamente os seguintes objetivos:

- Identificar em literaturas o uso da história da matemática como recurso didático, especificamente, no ensino de trigonometria, tendo em vista a obtenção de propostas e parâmetros que possam contribuir na elaboração dos textos;
- Apresentar as percepções de professores a respeito do ensino e aprendizagem da trigonometria, tendo em vista a elaboração de textos

que envolvam história e trigonometria e que possam ser utilizados em sala de aula;

- Efetuar revisão bibliográfica a respeito da história da trigonometria, visando obter elementos para constituição de uma história da trigonometria;
- Elaborar textos que envolvam a história da trigonometria de acordo com o modelo proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022) para uso como recurso didático no ensino de conteúdos trigonométricos;
- Apresentar recortes dos conteúdos trigonométricos destacados nos textos elaborados, tendo em vista à formação continuada dos professores;
- Validar as propostas apresentadas a partir das manifestações dos professores, tendo em vista a elaboração de um produto educacional.

A seguir descrevo a metodologia da pesquisa, assim como o embasamento teórico na qual está assentada. Neste sentido, realizamos uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa para análise dos dados. Segundo Severino (1941) a pesquisa bibliográfica é aquela que é realizada a partir de estudos feitos através de livros, artigos, teses, entre outros. Utilizam dados já existentes em que o pesquisador irá desenvolver uma segunda pesquisa a partir das contribuições já citadas pelos autores dos estudos analisados.

A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses, etc. utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores, dos estudos analíticos constantes dos textos (Severino, 1941, p. 112)

De acordo com Gil (2008), a pesquisa bibliográfica se destaca pelo fato da mesma permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente, ou seja, quando o problema de pesquisa requer muitos dados que estão dispersos, o pesquisador pode recorrer a estudos já realizados por outros pesquisadores com o intuito de encontrar respostas para a sua pesquisa e obter as informações necessárias. No caso deste estudo, a pesquisa bibliográfica foi de suma importância, pois, segundo

Gil (2008), esse tipo de pesquisa é indispensável nos estudos históricos, tendo em vista que em muitas situações não há outra maneira de conhecer os fatos passados senão com base em dados secundários.

Desta forma, foi feita uma revisão de literaturas (livros, teses, dissertações e artigos científicos) que apontam sobre a História da Matemática e advertem a importância de seu uso durante o processo de ensino e aprendizagem, dando ênfase para o ensino de trigonometria.

Já com a pesquisa qualitativa, de acordo com Moreira (2011), temos como principal objetivo buscar a compreensão do fenômeno social, cuja realidade é socialmente construída. Tal pesquisa, segundo o autor, procura analisar de maneira crítica cada significado em cada contexto; não está interessada na descoberta de *universais abstratos*, aos quais se chega através de generalizações estatísticas de amostra para populações, mas sim de *universais concretos* atingidos através do estudo detalhado de um caso específico e da comparação desse caso com outros estudos igualmente com grande detalhe.

Ainda de acordo com Moreira (2011), a pesquisa qualitativa está associada a tributos como *interpretativa, holística, naturalista, participativa, interacionista simbólica, construtivista, etnográfica fenomenológica e antropológica*.

A pesquisa qualitativa também é chamada de *naturalista*, porque não envolve manipulação de variáveis, nem tratamento experimental (é o estudo do fenômeno em seu acontecer natural); *fenomenológica*, pois enfatizam os aspectos subjetivos do comportamento humano, o mundo sujeito, suas experiências cotidianas, suas interações sociais e os significados que dá a essas experiências e interações; *internacionalista simbólica*, uma vez que toma como pressuposto que a experiência humana é mediada pela interpretação, a qual não se dá de forma autônoma, mas na medida em que o indivíduo interage com outro, é por meio de interações sociais como vão sendo construídas as *interpretações*, os significados, a visão de realidade do sujeito. (André, 1998, P.17 – 18, apud Moreira, 2011, P.76)

Para Silveira e Córdova (2009), a pesquisa qualitativa tem objetivos bem definidos, onde temos que descrever, compreender e explicar os dados coletados. Além disso, o autor diz em seus estudos que é preciso ter confiança no investigador como instrumento de coleta de dados.

Sendo assim, foi aplicado um questionário para professores da educação básica, de diferentes redes de ensino, com o intuito de investigar sobre o processo de ensino do conteúdo de trigonometria em sala de aula, os recursos incrementadores que os mesmos utilizam e as dificuldades percebidas a respeito

do aprendizado dos alunos. O questionário foi aplicado via *Google forms*, posteriormente feito uma análise qualitativa e, a partir dos resultados obtidos, foi possível fazer uma discussão sobre o uso da História da Matemática no ensino de Trigonometria como recurso didático.

Como suporte teórico para elaboração dos textos que serão utilizados no processo de ensino dos conteúdos relacionados à trigonometria utiliza-se como base o diagrama proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022). Tal diagrama tem como um de seus objetivos, de acordo com Chaquiam (2020), aproximar os professores da história, em especial, da história da matemática, e com o intuito de apresentar uma relação entre história e matemática com possibilidades de uso do texto resultante como recurso didático no ensino de matemática.

Tendo isso em vista, foram feitos recortes da história da trigonometria com o intuito de aproximar estudantes e professores da matemática e de sua história. Por outro lado, segundo Chaquiam (2020), a composição do texto nos fornece uma espécie de catálogo de fatos da história geral, em especial da matemática, organizados temporalmente de acordo com a evolução dos temas e personagens associados a estes.

O uso do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022), de acordo com o próprio autor, orienta a elaboração de um texto multicontextual, no qual proporciona a integração da história e matemática e fornece uma visão global aos iniciantes da historicidade do conhecimento científico. O diagrama estabelece conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, explora os conteúdos a partir de um personagem principal, associando a esse personagem alguns de seus contemporâneos, e trás à discussão os aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico de sua época.

Com o intuito de proporcionar uma melhor dimensão do trabalho, este foi organizado em sete capítulos. No capítulo 1, denominado “História da Matemática no Ensino de Matemática”, apresento uma revisão da literatura que sustenta e aponta o uso da História da Matemática como eficaz durante o processo de ensino e aprendizagem do aluno e os benefícios que a mesma pode oferecer. No capítulo 2, intitulado “Sobre o Ensino da Trigonometria”, trago à discussão as dificuldades e os desafios enfrentados por professores durante o processo de ensino do conteúdo de trigonometria, na perspectiva literária e de acordo com os resultados de uma pesquisa de campo feita com professores da educação básica.

No capítulo 3 (Sobre o Diagrama e o seu uso), apresento de forma breve o surgimento do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020 e 2022), suas transformações e sua estrutura como um recurso didático capaz de ajudar na elaboração de textos que envolvem História e Ensino. Além disso, trago alguns exemplos de textos que já foram elaborados a partir do modelo proposto e que tiveram contribuições para a associação da História da Matemática com o Ensino de Trigonometria.

No Capítulo 4, denominado “Uma História da Trigonometria”, apresento os caminhos traçados por matemáticos – e outros cientistas que contribuíram significativamente com o desenvolvimento da trigonometria – desde o século XVII a.C. até o século XIX d.C., mostrando os principais personagens envolvidos e as principais descobertas realizadas para conseguir chegar nas definições trigonométricas que temos hoje.

No capítulo 5, intitulado “Recortes da História da trigonometria para o Ensino”, são apresentados recortes com o intuito de serem utilizados pelos professores da educação básica, mas especificamente do 9º ano do ensino Fundamental – tendo em vista que nessa série inicia-se o ensino de trigonometria – para ensinar aos alunos a origem, os caminhos traçados, as modificações e descobertas realizadas até chegar à trigonometria que temos hoje.

No capítulo 6 são apresentadas as constituições do processo de avaliação, tanto do texto histórico, quanto dos recortes e atividades. Foi realizado através de um questionário aplicado via *Google Forms*, no qual se trata de uma plataforma online, no qual os professores puderam ter acesso e contribuir de maneira significativa para o desenvolvimento da pesquisa e, principalmente, ajudando a responder a questão principal dessa pesquisa.

No capítulo 7 são feitas as validações dos textos e das atividades propostas em cada recorte. Foram analisadas as respostas de 32 professores que responderam o questionário online e deram suas contribuições para o aperfeiçoamento dos recortes e das atividades.

Por fim, apresento as considerações pertinentes ao trabalho desenvolvido onde elenco as minhas conclusões, delimitações e possíveis desdobramentos dessa pesquisa.

## 1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Como toda ciência, a Matemática desenvolveu-se a partir de um processo histórico, fruto da construção humana e, olhando por essa perspectiva, percebe-se que os objetos matemáticos são construções sociais, históricas e culturais, desenvolvidas por métodos específicos de pensamentos que foram geradas pelas necessidades práticas construídas para atender o desenvolvimento da sociedade.

Ao longo dos anos muitas discussões vêm sendo desenvolvidas a respeito do uso da História da Matemática e a sua utilização na Educação Matemática. Diversos são os pesquisadores que apontam a relevância e a importância da História da Matemática como recurso didático que pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, como por exemplo, D'Ambrosio (1999), Chaquiam (2017), Mendes (2001), Santos (2007), entre outros. Tais pesquisas levantam um crescente busca pela História da Matemática e sua utilização no ensino, de maneira que, sendo usada adequadamente, auxilia a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Durante as aulas de Matemática, em sua maioria, essa disciplina ainda é apresentada aos alunos sem fazer nenhuma referência histórica, utilizando-se ainda de procedimentos mais tradicionais e arcaicos, tornando as aulas mecânicas e levando ao desinteresse dos alunos por não existir um incentivo que desperte um novo olhar dos mesmos para essa disciplina. Nesse sentido, a História da Matemática pode ser utilizada visando inovar a prática pedagógica e proporcionar melhores rendimentos no processo educativo.

De acordo com Chaquiam (2017) pesquisas recentes apontam que inserir fatos históricos, para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, pode ser uma dinâmica bastante interessante, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que se originou a partir de buscas por soluções para resolver problemas do cotidiano como contar, dividir, calcular alturas e distâncias, além de, através da história, estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Para Oliveira, Oliveira e Vaz (2014) a História da Matemática pode ser usada para fazer os alunos compreenderem que os matemáticos passaram por diversas dificuldades e ainda assim deram grandes contribuições não só à

matemática como também para o progresso da sociedade e da tecnologia. Além disso, para os autores, com o estudo da História da Matemática se pode analisar a construção das noções básicas dos conceitos matemáticos, fazendo os alunos reviverem suas descobertas e aumentar a sua compreensão do conteúdo sem a necessidade de memorização de suas definições.

O ensino de matemática fora de contexto tem se mostrado ineficaz. Para tirar o aluno da condição de expectador passivo é necessário que haja uma contextualização, o que pode ser útil e levar o aluno a uma aprendizagem significativa. De acordo com Santos (2007) a História da Matemática pode levar a contextualização, aproximando o mundo matemático ao universo do aluno e a realidade que o cerca. No ensino contextualizado de Matemática, os alunos desenvolvem conhecimentos que podem ser aplicados ou mesmo associados à situação real de seu cotidiano.

O uso da História no processo de ensino e aprendizagem da Matemática pode possibilitar a desmistificação da ideia de que a matemática nasceu pronta e acabada, além disso, para Santos (2007), a História da Matemática pode motivar o aluno a se aprofundar no assunto que está sendo trabalhado, buscando entender como os problemas matemáticos eram resolvidos antes de existir os métodos e as fórmulas que existem hoje, auxiliando no conhecimento matemático e ajudando o aluno a compreender tais métodos e fórmulas usadas atualmente na matemática.

De acordo com Santos (2007), a História da Matemática pode ser considerada como um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na fonte de busca, na compreensão e como elemento esclarecedor de conceitos matemáticos. Além também de possibilitar o levantamento e a discussão das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante. É pela História da Matemática que se tem possibilidade do estudante entender como o conhecimento matemático é construído historicamente.

Para D'Ambrosio (1999) não se pode entender o desenvolvimento da matemática sem fazer uma análise do processo de conquista e colonização e de suas conseqüências, ou seja, é de fundamental importância buscar os fatos históricos para melhor compreender os caminhos traçados da evolução da matemática anos após anos. Para o autor, a transmissão de conhecimento do professor de matemática depende de sua compreensão de como esse

conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões para se aprender e, destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática.

Sobre a abordagem a partir de elementos históricos, Oliveira (2009) nos diz que:

Podemos considerar que a abordagem no conhecimento matemático, partindo de elementos históricos, modifica a dinâmica da sala de aula por propiciar ao aluno, momentos de reflexão e aprendizagem acerca da construção do conhecimento matemático, tomando como base as ideias ancoradas no conhecimento histórico, como também serve como recurso motivador para sua aprendizagem. (Oliveira, 2009, p.1)

Outra importância significativa da História da Matemática é que ajuda o aluno a perceber que a matemática não é uma ciência isolada dos demais saberes, e ainda, a História no ensino de matemática pode ser um potencializador do conhecimento e servir como guia para o desenvolvimento de novos questionamentos acerca do conteúdo abordado em sala de aula, fazendo o aluno querer aprender mais sobre o assunto, além disso, ajuda na compreensão de que o conhecimento atual da matemática se desenvolveu mediante as exigências da sociedade e não está pronta e acabada, podendo sofrer modificações ou complementações por meio de estudos fundamentados ao longo do tempo. Segundo Oliveira (2009)

Conhecer a história da matemática permite colocar em evidência situações didáticas mais pertinentes para que o aluno consiga aprender sobre a formação do pensamento matemático, que fio condutores conduziram a sua constituição e como se deu a disseminação deste pensamento em diferentes contextos culturais. (Oliveira, 2009, p. 13)

Na atualidade, a História da Matemática encontra-se ausente na sala de aula. Tal conteúdo deixou de ser um recurso apresentado nos livros didáticos. No entanto, a História da Matemática pode ser utilizada visando inovar a prática pedagógica e proporcionar melhores rendimentos no processo educativo.

A História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta motivadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja, o maior ganho dessa forma de utilizar a História da Matemática na Educação Matemática é a possibilidade de discutir-se crença, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu (Viana e Silva, 2007, p.7)

A História constitui um valioso instrumento no processo de ensino e aprendizagem e usufruir desse conhecimento é uma forma de melhorar o ensino da matemática, além de ajudar nas maneiras de como o professor pode responder questionamentos que são feitos pelos alunos em sala de aula, como por exemplo, “por que eu preciso aprender isso ou aquilo?”. Para Mendes e Chaquiam (2016) o professor poderá responder perguntas feitas pelos alunos por intermédio da História da Matemática, e a partir de então favorecer ao aluno um maior conhecimento, além de poder haver um interesse para estudos futuros.

Uma delas é explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação de suas estratégias de pensamento e, conseqüentemente o ajudará na sua produção de conhecimento, ou seja, aumentará sua capacidade de aprendizagem. [...] o professor poderá extrair das informações históricas, aspectos epistemológicos que favoreçam a sua explicação de porquês matemáticos e que muitas vezes favorecem a ampliação e o enriquecimento da aprendizagem dos alunos, ocasionando até a manifestação de interesses para estudos futuros sobre os temas tratados pelo professor [...] (Mendes e Chaquiam, 2016, p. 25)

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), apesar da História da Matemática contribuir significativamente para o desenvolvimento de ensino e aprendizagem do aluno, há muitos professores que ainda não reconhecem isso, e chegam a afirmar que o uso da História da Matemática não é importante para o ensino de matemática, e esse tipo de argumento se torna um obstáculo para as iniciativas pedagógicas na inserção da História da Matemática no Ensino de Matemática.

D'Ambrosio (1999) pontuou em seu trabalho para que serve a História da Matemática no ensino de Matemática:

1. Para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
2. Para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
3. Para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
4. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências socioculturais dessa incorporação. (D'Ambrosio, 1999, p. 27)

De acordo com o autor, os pontos 1. 2. 3. e 4. constituem a essência de um programa de estudos, podendo mesmo dizer de um currículo, de História da Matemática.

Levando em consideração que o uso da História da Matemática é fundamental para o ensino e aprendizagem, logo, é preciso ter professores que busquem entender essa História e interliguem com a Matemática da sala de aula. Porém, sabe-se das dificuldades que muitos professores têm na hora de se apropriar da História e transpor esse conhecimento para o aluno fazendo uma ligação com a matemática, como por exemplo, quando se trata da trigonometria, em que o conhecimento passado em sala de aula não vai além de teorias que estão formuladas.

Em um estudo desenvolvido por Prado (1990), apresentou a proposta ligada à preparação metodológica do professor de matemática a partir da compreensão dos períodos históricos como meio de encaminhamento das ações pedagógicas, procurando relacioná-las ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Além de Prado, Mendes (2001), também, considera importante a preparação do professor, já que ele irá aplicar atividades usando a história do conteúdo, logo o professor deverá ter um aprofundamento acerca o conteúdo histórico.

É de fundamental importância realizarmos uma preparação efetiva do professor que atuará com essa proposta de Educação Matemática, caso contrário correremos o risco de ver mais uma vez a matemática ser tratado como um meio de seleção escolar, além de continuarmos a fomentar a utilização de receitas prontas no ensino de matemática. (Mendes, 2001, p. 65)

Em sala de aula quando o assunto se trata de trigonometria, os professores que não buscam fazer uma abordagem histórica sobre o conteúdo, conseqüentemente, não costumam usar atividades que usem conceitos históricos. A trigonometria abrange um conceito histórico incrível que pode facilitar a compreensão do aluno a cerca desse conteúdo e usá-la pode fazer com que os alunos tenham mais curiosidade sobre os conceitos trigonométricos fazendo com que tenham mais interesse em aprender.

Através do conhecimento histórico, o aluno é capaz de pensar e compreender as leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usados hoje e que foram difíceis de descobrir em períodos anteriores ao que vivemos. Ele deve participar da construção do próprio conhecimento da forma mais ativa e crítica possível, relacionando cada saber construído com as necessidades históricas e sociais nele

existentes. Para isso o professor deve adotar a conduta de orientador das atividades, priorizando as experiências teóricas ou práticas dos alunos a fim de formular conceitos ou propriedades e interpretar essas formulações visando aplicá-las na solução de problemas práticos que assim o exijam. (Mendes, 2001, p.57)

Mendes (2001) considera que a História da Matemática deve ser aplicada na elaboração e execução de atividades matemáticas, levando em consideração o ato cotidiano de ensinar e aprender, e a partir da História o aluno pode continuar buscando compreensão das propriedades matemáticas através da solução de problemas que irá exigir um conhecimento mais amplo do aluno, além de levá-lo a uma própria construção de conhecimento.

O uso das atividades de redescoberta pressupõe uma mútua colaboração entre professor e aluno durante o ato de construção do saber, já que a característica essencial desse modo de encaminhar o ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos estão para ser (re) descobertos pelo próprio professor até que eles sejam incorporados à estrutura cognitiva do aprendiz. (Mendes, 2001, p.59)

O uso da história da trigonometria pode levar o aluno a buscar novas respostas para suas dúvidas e ajudar a desenvolver um pensamento mais crítico e aguçado, além de poder ser usado para fazer debates sobre a origem da trigonometria em sala de aula. Mendes (2001) julga ser necessária a abordagem histórica no processo de ensino de trigonometria.

Assim, julgamos necessário resgatar o processo histórico da construção dessa base da trigonometria, para que o aluno possa compreender o significado matemático desses termos e sua importância para o desenvolvimento de toda a trigonometria, pois, se perguntarmos, hoje, aos estudantes, algo a respeito desse assunto, corremos o risco de não recebermos nenhuma resposta em virtude da falta de informação sobre o significado histórico e conceitual desses tópicos básicos. (Mendes, 2001, p. 63)

Para Prado (1990) a trigonometria tem em sua cronologia e em seus termos um significado importante em virtude das transformações que esse conhecimento foi sofrendo ao longo das conquistas e relações comerciais entre os povos. Assim, os porquês cronológicos da trigonometria foram sempre contextualizados culturalmente e isso é uma razão importante para seu ensino através da abordagem histórica.

D'Ambrosio (1999) coloca em seu trabalho sugestões para professores do que se pode fazer de história nas aulas de matemática. Para o autor, uma vertente pouco utilizada é a História oral, ou seja, retratar, pelos seus próprios

depoimentos, a vida e obra de matemáticos brasileiros. Além da valorização e do reconhecimento da contribuição de nossos conterrâneos à matemática e à sua difusão aqui no Brasil.

Dentre as sugestões propostas por D'Ambrosio (1999), têm-se: identificar a matemática do cotidiano, tendo em vista que é algo que pode ser muito bem explorado pelos professores; levantamento de fatos matemáticos numa comunidade; escrever sobre professores secundários de matemática que marcaram uma escola ou mesmo uma comunidade, pois a memória de matemáticos, de professores de matemática e de atividades matemáticas brasileiras é de suma importância e deveria ter prioridades em cursos de História da Matemática; deve-se dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos, outros alunos não se interessarão, mas isso é natural; além de outras sugestões propostas pelo autor.

## 2. SOBRE O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo abordamos sobre o ensino de trigonometria, suas dificuldades e barreiras no processo de ensino e aprendizagem ao longo dos anos, de acordo com revisões literárias como de Mendes (2022), Silva (2013), Costa, Pequeno e Pereira (2019) e entre outros autores. Além disso, para melhor compreender o cenário que se encontra o ensino de trigonometria, apliquei um questionário para professores da educação básica, mais especificamente professores de turmas do 9º ano do ensino fundamental, com perguntas referentes aos tópicos dos conteúdos trigonométricos, as dificuldades que os mesmos têm para ensinar trigonometria, os recursos e metodologias que utilizam e entre outros questionamentos.

### 2.1. NA PERSPECTIVA LITERÁRIA

Os tópicos básicos de trigonometria que são abordados durante o processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental são de suma importância para que o estudante desenvolva algumas habilidades para a resolução de problemas futuros no ensino médio e até mesmo em outras disciplinas, por exemplo, na física, geometria e entre outros que envolvem o referido assunto.

De acordo com Mendes (2022), é preocupante a forma de aprendizagem “mecânica” da trigonometria, geralmente abordada nos livros didáticos e na prática do professor, que acarreta um desconhecimento total dos seus elementos-chave como seno, cosseno e tangente de um ângulo, além de outros tópicos básicos no desenvolvimento da trigonometria. Ainda de acordo com o autor, para que o aluno possa compreender o significado matemático desses termos e sua importância para o desenvolvimento da trigonometria, é necessário investigar o processo histórico da construção desse conteúdo em questão.

Na primeira metade do século XX, segundo Silva (2013), muitos professores de matemática trouxeram à discussão a importância do ensino de trigonometria e as relações dela com a geometria e a álgebra, indagando se o ensino trigonométrico isolado dos demais era viável ou não. No entanto, apesar de muitos afirmarem que a trigonometria era um conteúdo específico e que por isso

deveria ser abordado de forma separada, alguns estudiosos, de acordo com Silva (2013), consideravam essa separação como uma barreira que dificultaria o conhecimento de poderosos métodos da própria trigonometria.

Para Costa, Pequeno e Pereira (2019), um estudante que não aprende as propriedades básicas da matemática, que não tira suas dúvidas e não recebe ajuda adequada de seus professores, acaba criando uma barreira no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, assim como na trigonometria. Segundo Fonseca (2010 apud, Costa, Pequeno e Pereira, 2019), a disciplina de matemática, em especial, tem se destacado pelo alto índice de evasão e repetência, ou seja, muitos alunos acabam desistindo de aprender matemática por conta das dificuldades que são reflexos do aprendizado anterior.

Há muita reclamação referente à forma como a trigonometria é mostrada nos livros didáticos, de acordo com Costa, Pequeno e Pereira (2019), muitos livros apresentam uma linguagem muito rebuscada e com vários termos técnicos, o que prejudica ainda mais o entendimento dos alunos. Segundo Silva (2013), é muito comum encontrar livros que abordem a trigonometria de uma maneira muito superficial, seguindo a ordem: Definição; Apresentação da tabela de valores trigonométricos; Exercícios para calcular as medidas dos lados de um triângulo retângulo utilizando tabela de valores trigonométricos anterior; Abordagem de conceitos básicos sobre: arcos, ângulos, unidades de medida na circunferência, comprimento de arco, circunferência trigonométrica, congruência de arcos, funções trigonométricas, equações e inequações trigonométricas e resoluções de triângulo quaisquer.

E, ainda de acordo com Silva (2013), quando é feita a abordagem do conteúdo de trigonometria da forma supracitada, está sendo feita uma abordagem didática semelhante ao do início do século XX, no qual os alunos apenas reproduzem técnicas e repetições feitas por professores em sala de aula. No entanto, a realidade dos dias atuais exige que o ensino possa auxiliar na formação de um cidadão que saiba questionar, compreender, aplicar, propor, sistematizar, relacionar, avaliar, inovar e, não apenas reproduzir ações. Sendo assim, essa abordagem mecanicista não contribui de forma satisfatória para essa formação dos cidadãos.

Para Vazquez (2010, apud Bortoli, 2016, p. 15), nossa prática pedagógica em sala de aula deve ser refletida, tendo em vista as dificuldades que muitos

alunos têm de aprender os conceitos de trigonometria, revertendo os resultados negativos gerados pela simples memorização de fórmulas. A maneira como o aluno aprende, suas dificuldades e suas necessidades devem ser analisadas e investigadas com o intuito de identificar meios de relacionar o conteúdo com a prática.

Segundo Bortoli (2016), é comum, atualmente, os alunos julgarem os assuntos matemáticos tratados em sala de aula como conteúdos afastados de sua realidade, julgando ser desnecessários e de pouca aplicabilidade. No entanto, o ensino de trigonometria não deve está relacionado somente com suas vivências atuais (do ensino básico), deve-se mostrar aos alunos que a trigonometria está relacionada a muitos ramos profissionais, como a engenharia, a topografia, a geografia, astronomia e muitas outras áreas, nas quais se calculam alturas, distâncias ângulos e outros.

Para Nacarato, Bredariol e Passos (2010, apud Bortoli, 2016, p.18) a Trigonometria tem grande importância para a Matemática e para outras áreas do conhecimento e, é por isso, que está presente nos currículos de matemática (ensino fundamental e médio). No entanto, ao chegar no ensino superior os alunos apresentam um conhecimento muito superficial sobre os conceitos trigonométricos e, muitas das vezes, não sabem como utilizar e aplicar suas teorias e fórmulas, tornando-os até mesmo universitários frustrados por acharem que nunca mais viriam esse conteúdo depois do ensino básico.

No trabalho feito por Silvia e Frota (2010, apud Bortolini 2016, p.18), eles trazem à discussão a respeito de suas experiências enquanto docentes, no qual permitiram visualizar algumas dificuldades que os alunos apresentam no processo de aprendizagem da Trigonometria, entre elas: perceber a utilidade das razões trigonométricas além de sua utilização em sala de aula; e como mobilizar os conhecimentos prévios da Trigonometria em situações posteriores ao que é trabalhado em sala de aula para resolver problemas propostos.

## 2.2. NA PERSPECTIVA DOS PROFESSORES ENTREVISTADOS

Para melhor compreender a percepção dos professores a respeito do processo de ensino do conteúdo de trigonometria em sala de aula, foi realizado

um levantamento diagnóstico a partir de um questionário, que foi aplicado via *Google Forms*, do qual foram coletadas 20 respostas que serão analisadas e discutidas levando em conta as concepções apresentadas pelos autores Silva (2013), Silveira e Filho (2013), Mendes (2002) e Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) sobre o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria em sala de aula para o ensino fundamental. A sistematização das informações produzidas ocorreu da construção de gráficos e quadro estatísticos relativos a cada uma das questões do questionário aplicado.

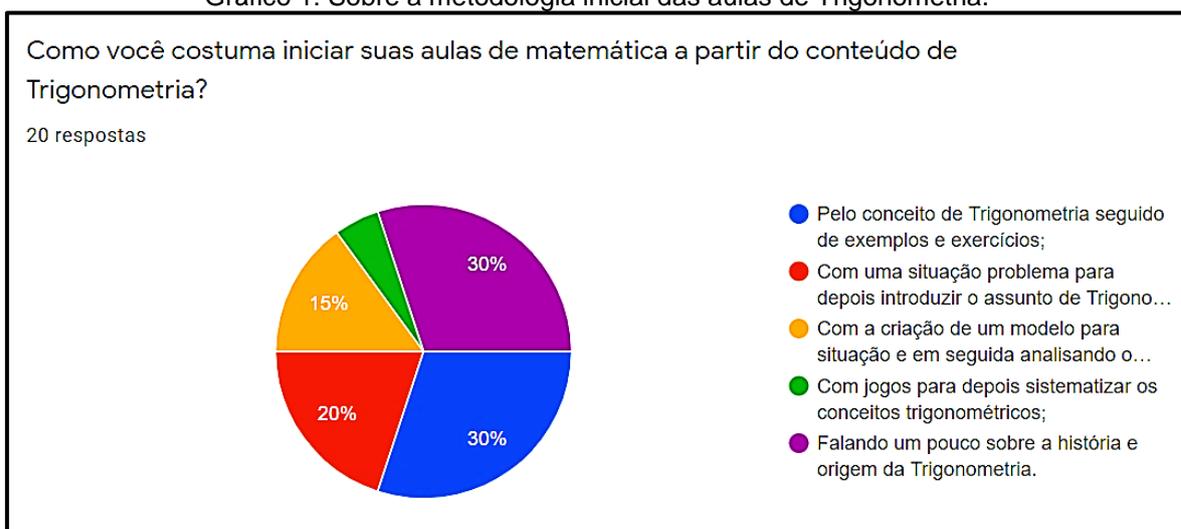
Foi feito um levantamento a respeito do currículo dos professores entrevistados e, para analisar e discutirmos. Separamos alguns dos questionamentos referentes à metodologia de ensino utilizado durante as aulas de trigonometria para analisarmos. Tendo em vista que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF), para que o professor desempenhe seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, ele precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área de conhecimento.

Além disso, para que o aluno aprenda, é necessário que o professor seja capaz de transformar o conhecimento, o que o leva a está sempre em busca de novas metodologias de ensino.

Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (Brasil, 1998, p. 36)

A primeira indagação feita aos professores pesquisados foi como eles iniciam suas aulas de matemática a partir do conteúdo de trigonometria, cujo foi obtido os seguintes resultados:

Gráfico 1: Sobre a metodologia inicial das aulas de Trigonometria.



Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2021)

Nota-se que dentre os professores pesquisados, 6 iniciam suas aulas pelo conceito de Trigonometria seguido de exemplos e exercícios – método considerado tradicional – e 6 falam um pouco sobre a História da Trigonometria – utilizando como recurso a História da Matemática. 4 professores iniciam com uma situação problema para depois introduzir o assunto de Trigonometria, 3 iniciam com a criação de um modelo para situação e em seguida analisam o modelo e apenas 1 dos professores inicia o conteúdo de Trigonometria com jogos para depois sistematizar os conceitos trigonométricos

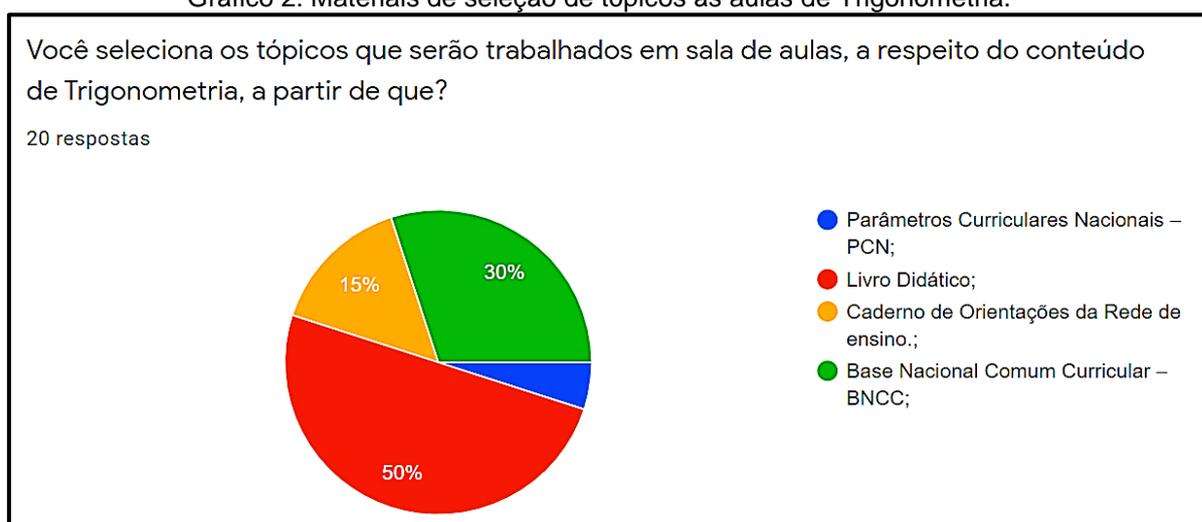
De acordo com os PCNEF (1998) a utilização de resolução de problemas como ponto de partida das aulas de matemática no Ensino Fundamental não tem desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimento adquiridos anteriormente pelos alunos. Tendo isso em vista, os PCNEF considera mais viável apresentar primeiro os conceitos, procedimentos ou técnicas, para somente depois utilizar uma situação problema.

A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (Brasil, 1998, p. 40)

Enquanto à utilização da História da Matemática como um recurso inicial às aulas de Trigonometria, de acordo com Silveira e Filho (2013), favorece a articulação dos conhecimentos e contribui significativamente na superação das dificuldades de compreensão por parte de alunos e professores, auxiliando o processo de ensino e aprendizagem. Além do mais, de acordo com Silva (2013) a trigonometria, nos livros didáticos, muitas das vezes não está relacionada com os fatos históricos do desenvolvimento da matemática, o que poderia facilitar a compreensão do aluno com relação às aplicações desse conteúdo no desenvolvimento das civilizações.

A próxima pergunta feita aos professores é a respeito de qual material eles utilizam para fazer a seleção dos tópicos que são trabalhados em sala de aula, a respeito do conteúdo de trigonometria. Foram obtidos os seguintes resultados:

Gráfico 2: Materiais de seleção de tópicos às aulas de Trigonometria.

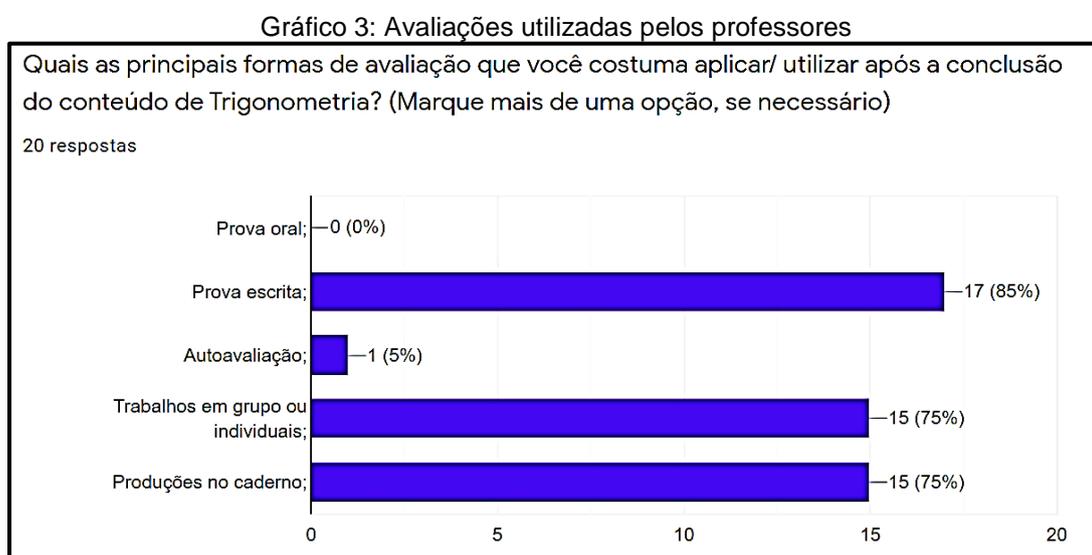


Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2021)

Dentre os resultados obtidos têm-se que o material mais utilizado pelos professores para selecionarem os tópicos de trigonometria a serem trabalhados em sala de aula é o livro didático. De acordo com Silva (2013), antigamente alguns livros didáticos tinham como proposta apresentar a trigonometria como um conteúdo isolado dos demais segmentos matemáticos e das demais áreas, não havendo uma preocupação com o desenvolvimento conceitual das noções básicas da trigonometria, conseqüentemente, muitos tópicos que hoje são considerados relevantes antes não eram ensinados pelos professores que faziam uso apenas do livro didático.

A segunda opção mais escolhida pelos professores foi a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no qual trás dentro da unidade temática Geometria, cujo está à trigonometria, os seguintes objetos de conhecimento: Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração e; Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificação experimentais.

O próximo questionamento feito aos professores foi referente à forma em que eles avaliam os seus alunos a respeito do conteúdo de trigonometria, do qual se obteve os seguintes resultados:

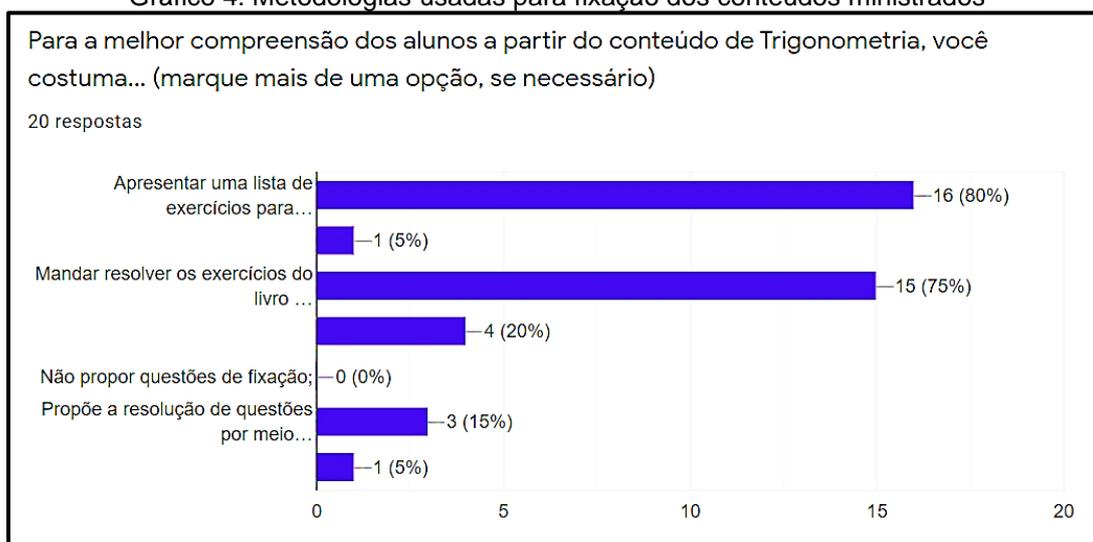


Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2021)

É consensual a ideia de que não existe apenas um caminho que possa ser identificado como único e melhor para avaliar o processo de aprendizagem do aluno em sala de aula de qualquer disciplina, em particular, da matemática e, mais especificamente, do conteúdo de trigonometria. No entanto, conhecer diversas formas de avaliar o aluno em sala de aula é fundamental para que o professor consiga melhor diagnosticar as dificuldades que seus alunos sentem a respeito do conteúdo em questão.

A próxima pergunta feita aos professores foi sobre a metodologia usada para que os alunos possam compreender melhor o conteúdo de trigonometria após as explicações. Os resultados foram os seguintes:

Gráfico 4: Metodologias usadas para fixação dos conteúdos ministrados



Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2021)

A metodologia mais utilizada pelos professores entrevistados é a apresentação de uma lista de exercícios para serem resolvidos e os exercícios do livro didático. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, a resolução de exercícios, após a explicação do conteúdo matemático, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a perspectiva que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (Brasil, 1998, p. 40)

Depois dessas duas metodologias mais utilizadas pelos professores, têm-se o uso da História da Matemática como um recurso incrementador para o ensino. Segundo Silveira e Filho (2013) a História constitui-se em um importante instrumento no processo de ensino e aprendizagem e seu uso é uma forma de melhorar o ensino da matemática. Com o uso da História da Matemática, a compreensão dos conceitos e suas aplicações torna-se mais fácil. Ainda de acordo com Silveira e Filho (2013) muitos alunos sentem dificuldades para resolver atividades que envolvem trigonometria e, a História da Matemática tem como função, em sala de aula, dar auxílio no desenvolvimento cognitivo dos alunos por meio da resolução de problemas com base em definições próprias dos conceitos, ligando a causalidade dos fatos à criação de novas definições.

Os dois próximos questionamentos a serem analisados são referentes à afinidade dos alunos com o conteúdo de trigonometria. Primeiro perguntamos aos professores se consideram difícil de ensinar trigonometria, 45% responderam não e 55% sim. Em seguida perguntamos quantos de seus alunos tem afinidade com esse conteúdo e as respostas ficaram entre a minoria (75%) e a maioria (25%).

Podemos perceber que a maioria dos professores consideram o conteúdo de Trigonometria difícil de ensinar e esses mesmos professores – e mais outros três – dizem que a minoria de seus alunos tem afinidade com o conteúdo em questão. Fato que pode está diretamente relacionado, visto que, já que o professor sente dificuldade em ensinar muito provável o aluno sentirá dificuldade em aprender. Nesse sentido, de acordo com Strasburg, Sperotto, Meneghetti (2015), o estudo de trigonometria é parte importante do desenvolvimento da Matemática e para um melhor processo de ensino e aprendizagem o professor deve está em incessante busca por uma nova estratégia de ensino da Matemática, visando sanar algumas dificuldades e despertando o interesse do educando, cujo não é uma tarefa fácil de realizar, porém é possível.

Muitos recursos, atualmente, são utilizados com o objetivo de facilitar o processo de ensino e de aproximar o aluno cada vez mais do conteúdo de trigonometria, entre eles têm-se o uso da História da Matemática, proposto por autores como Silva (2013), Mendes (2002) – já citados até aqui – no qual, de acordo com ambos, esse recurso didático, a pesar de ser considerado relevante para o ensino, tem sido cada vez mais ausente em materiais e livros didáticos. Outro recurso que pode ser usado para facilitar o ensino de trigonometria é o uso de Software, apontado por Strasburg, Sperotto, Meneghetti (2015) como recurso capaz de desenvolver nos alunos a capacidade de aplicar os conhecimentos trigonométricos construídos. Tais recursos didáticos citados são capazes de aproximar o aluno da Trigonometria e fazer com que surjam neles o interesse maior por esse conteúdo.

Por fim, o último item do questionário aplicado aos professores. Este procurou investigar os tópicos ensinados a partir do conteúdo de trigonometria e o grau de dificuldade em que os alunos têm em aprender. Foi elaborada uma tabela com os resultados obtidos. Segue abaixo o quadro de dificuldades:

Quadro 2: Grau de dificuldade segundo os professores

Conteúdo	Costuma Ensinar?		Grau de dificuldade para os alunos aprenderem?			
	SIM	NÃO	MF	F	D	MD
As razões trigonométricas.	100%	0%	10%	45%	40%	5%
A ideia de seno, cosseno e tangente	100%	0%	0%	0%	20%	80%
Definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos.	70%	30%	0%	42,9%	35,7%	21,4%
Relação entre seno, cosseno e tangente.	95%	5%	0%	36,8%	52,6%	10,5%
Razões trigonométricas para ângulos de 30°, 45° e 60°.	100%	0%	10,5%	57,9%	26,3%	5,3%
A tabela das razões trigonométricas em um triângulo qualquer.	90%	10%	11,1%	22,2%	61,6%	5,6%
Lei dos cossenos.	80%	20%	0%	5,9%	23,5%	70,6%
Lei dos senos.	80%	20%	0%	12,5%	12,5%	75%

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2021)

Portanto, nota-se que as dificuldades dos alunos variam de acordo com os tópicos trabalhados em sala de aula. Além do mais, os tópicos que os professores ensinam são com base nos materiais que os mesmos utilizam, e de acordo com os resultados da pesquisa a maioria dos professores selecionam os tópicos a partir de livros didáticos. Strasburg, Sperotto, Meneghetti (2015) fazem uma análise em 5, dos 10 livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, colocados a disposição dos professores da rede pública de ensino pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura) através no PNLD 2014 (Programa Nacional do Livro Didático) e notam algumas particularidades, alguns tópicos que têm em uns não têm em outros.

Os livros analisados por Strasburg, Sperotto, Meneghetti (2015) foram: *Matemática – Bianchini* de Bianchini (2012), *Matemática – ideias e desafios* de Onaga e Mori (2012), *Matemática: teoria e contexto* de Centurión e Jakubovic

(2012), *Projeto Araribá Matemática* de Leonardo (2013) e *Vontade de saber Matemática* de Souza e Pataro (2012). E os autores apresentam os seguintes resultados:

- Os diferenciais de Bianchini (2012) são: mostrar ao leitor como usar a calculadora científica para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente; explicar o que é teodolito (aparelho usado para medir ângulos) e como construir um teodolito com transferidor, que pode ser interessante para ser trabalhado em sala de aula.
- Os diferenciais de Onaga e Mori (2012) são: uma linguagem acessível ao leitor e a construção de um instrumento para determinar os valores de seno e cosseno para ângulos maiores que  $0^\circ$  e menores que  $90^\circ$  que reproduz o primeiro quadrante do círculo trigonométrico.
- O livro de Centurión e Jakubovic (2012): estimula a aplicação dos conhecimentos na prática; apresenta o conteúdo de forma bem ilustrada e apresenta a curiosidade de como calcular o raio da Terra.
- O autor de Leonardo (2013): apresenta relações entre seno, cosseno e tangente e mostra ao leitor como usar a calculadora científica para encontrar os valores de seno, cosseno e tangente.
- Os diferenciais de Souza e Pataro (2012) são: expor o conteúdo de forma bem ilustrada e com muitos detalhes; conter um número expressivo de exercícios e explicar ao leitor como usar um software, que oferece a possibilidade de encontrar medidas de ângulos e lados de triângulos, chamado Microsoft Mathematics. (Strasburg, Sperotto, Meneghetti, 2015, p. 619).

Logo, como os professores utilizam materiais diferentes, conseqüentemente ensinam alguns tópicos diferentes ou de formas distintas, com o uso de algum recurso proposto pelo material, bem tal como, linguagens diferentes, uns utilizam de uma linguagem mais técnica científica e outros usufruem de uma linguagem mais acessível, facilitando a compreensão por parte dos alunos.

### 3. SOBRE O DIAGRAMA E O SEU USO

Neste capítulo abordamos sobre os processos de construção e as transformações do diagrama metodológico proposto por Chaquiam, desde 2016 até 2022. Além disso, trouxe exemplos de textos que já utilizaram como base o modelo proposto.

#### 3.1. O MODELO PROPOSTO POR CHAQUIAM

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), nas últimas cinco décadas observou-se um grande desenvolvimento de pesquisas relacionadas à História das Ciências e, em particular, a História da Matemática, que estão se constituindo em um importante elemento para a melhoria no processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

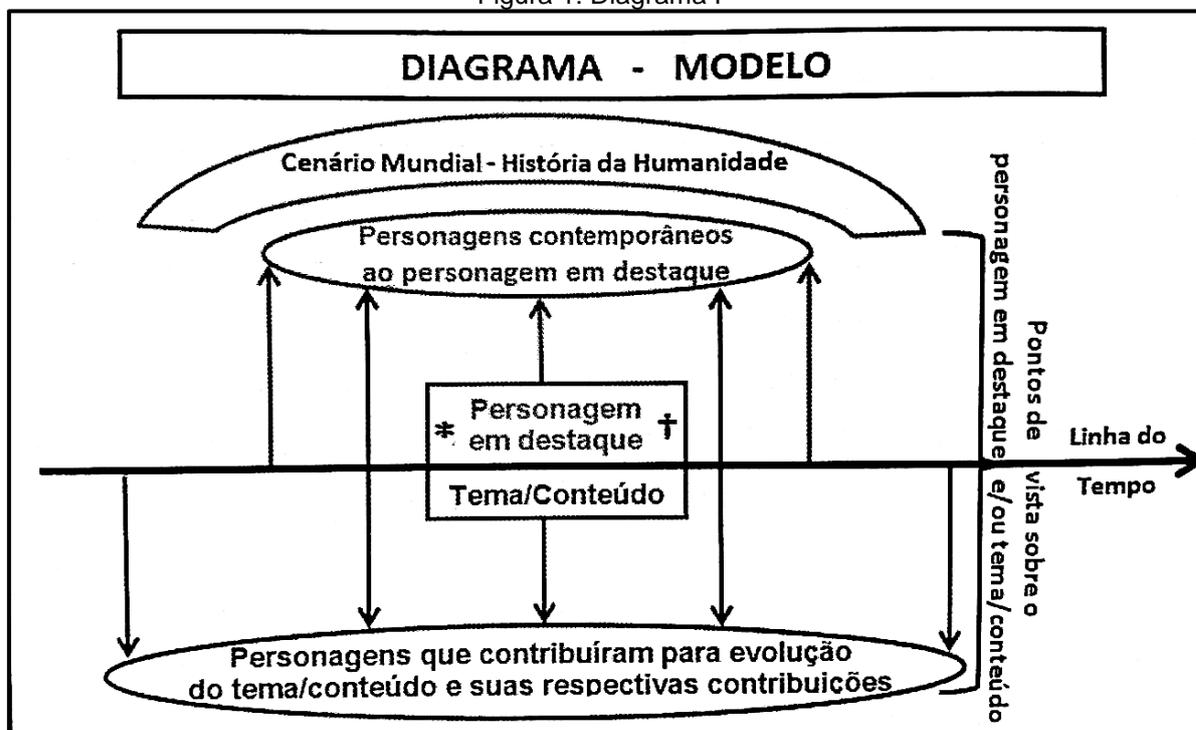
Tendo isso em vista, e com o intuito de contribuir à associação da história no ensino de matemática em sala de aula, o professor Miguel Chaquiam, a partir do ano de 2013, começou a elaborar um diagrama metodológico cujo objetivo principal foi possibilitar a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação de tempo e espaço na história da humanidade, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na Educação Básica e formação de professores.

A primeira versão do diagrama metodológico foi apresentada pelo professor Miguel Chaquiam no IX Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM), no qual propôs o ensino de conteúdos matemáticos e de história da matemática a partir de personagens/matemáticos. De acordo com Chaquiam (2017), essa primeira versão foi experimentada e modificada com o intuito de esclarecer elementos que tornavam a pesquisa mais complexa para os alunos e a inserção de um tema/conteúdo previsto para ser ministrado em sala de aula.

Em 2015, durante o XI Seminário Nacional de História da Matemática (XI SNHM), no livro *História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos*, o professor Dr. Miguel Chaquiam apresentou o primeiro modelo base do diagrama metodológico, após novas experimentações e recomposições. O diagrama tinha como intuito, segundo Chaquiam (2017),

orientar a elaboração de um texto envolvendo tópicos de história da matemática associada a personagens/matemáticos e tema/conteúdos ministrados em sala de aula.

Figura 1: Diagrama I

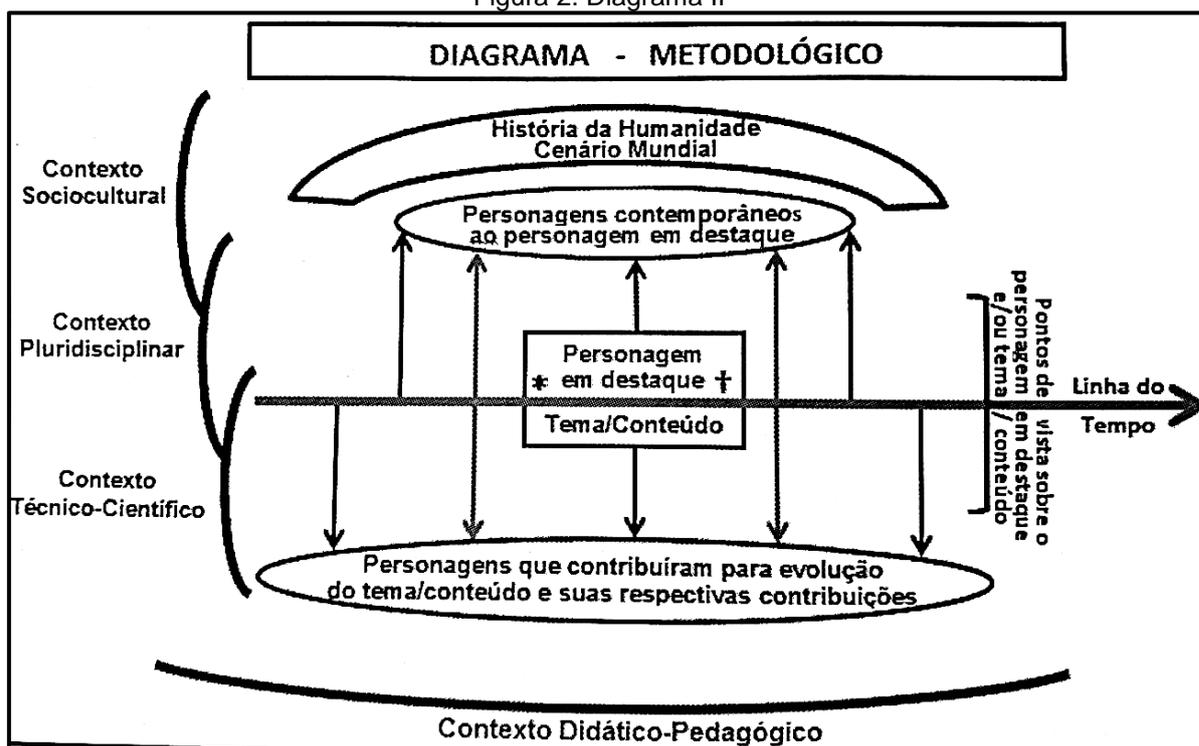


Fonte: Chaquiam (2015)

O diagrama pode ser modificado de acordo com o enfoque desejado ou devido às dificuldades de se obter informações necessárias para a construção dos componentes do diagrama. Além disso, segundo Chaquiam (2017), ao adotar o modelo deve-se ter clareza que o seu nível de conhecimento histórico e matemático, as possibilidades de acesso à bibliografia especializada e sua visão sobre história da matemática podem influenciar ou até mesmo desvirtuar da finalidade didático-pedagógico proposta.

Em 2017, no livro *História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, de Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam, é apresentada uma nova versão do diagrama metodológico, inseridos outros elementos como: técnico-científico, pluridisciplinar, sociocultural e didático-pedagógico.

Figura 2: Diagrama II



Fonte: Chaquiam (2017)

Os elementos que compõe o diagrama proposto pelo professor Dr. Miguel Chaquiam são:

**Tema/conteúdo:** esse deve ser o primeiro passo a ser tomado à elaboração do texto. Escolher um tema/conteúdo matemático que seja ensinado, preferencialmente, na Educação Básica.

**Evolução do tema/conteúdo:** a partir do tema/conteúdo escolhido, devem-se identificar os elementos necessários para compor a sua evolução. Os caminhos traçados, os personagens que se encontram envolvido no desenvolvimento desse tema/conteúdo, as mudanças que sofreu ao longo do tempo. Todas as informações devem ser apresentadas, preferencialmente, em ordem cronológica.

**Personagens que contribuíram para a evolução do tema/conteúdo:** durante a constituição da evolução do tema/conteúdo podem surgir muitos personagens/matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Selecione os mais relevantes para incluir na sua pesquisa.

**Personagem em destaque:** é aquele que mais contribuiu para o desenvolvimento do seu tema/conteúdo escolhido. Você irá elegê-lo como personagem principal da sua pesquisa.

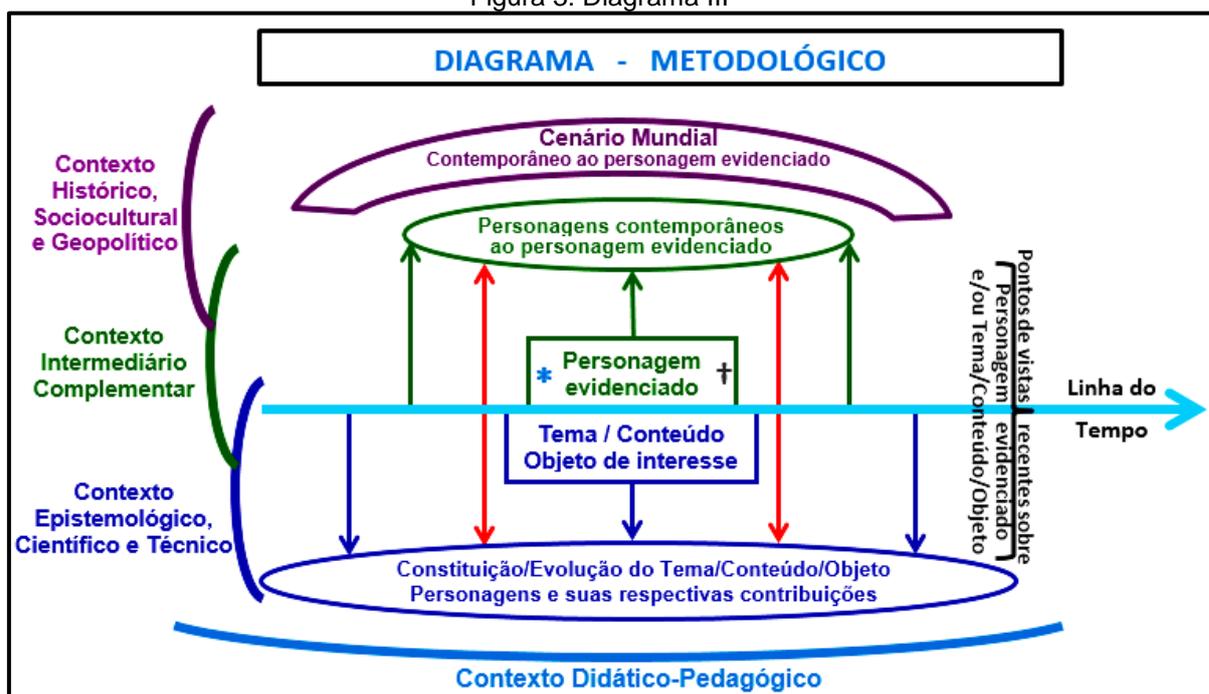
**Personagens contemporâneos:** são os personagens que viveram na mesma época que o seu personagem principal, mas que pode ter contribuído para outros temas/conteúdos ou até mesmo para outras áreas como física, química, biologia e outros. Esse elemento proporciona uma visão contextual pluridisciplinar.

**História da humanidade/cenário mundial:** neste componente você irá contar o que acontecia na história da humanidade no período em que o seu personagem principal vivia. Devem ser pontuados os acontecimentos mais importantes, revoluções, descobertas, guerras (se houver), e entre outros. . Esse elemento proporciona uma visão contextual sociocultural.

**Pontos de vista sobre o personagem em destaque ou tema:** tendo em vista o seu tema/conteúdo ou o seu personagem principal, você irá buscar outras pesquisas que abordem sobre e irá apresentar outros pontos de vista, com o intuito de enriquecer o seu trabalho. Esse elemento proporciona uma visão contextual técnica-científica.

Em 2022, uma nova proposta do diagrama metodológico foi apresentada durante o minicurso “História e Matemática dos Contextos às Atividades” X Bial de Matemática. Nesse novo modelo, de acordo com Chaquiam (2022), alguns contextos foram alterados por alguma razão, como mostra a figura a seguir:

Figura 3: Diagrama III



Fonte: Chaquiam (2022)

Observa-se que os contextos Sociocultural, Pluridisciplinar e Técnico Científico ganharam novos nomes, respectivamente: Contexto Histórico, Sociocultural e Geopolítico; Contexto Intermediário Complementar; e Contexto Epistemológico, Científico e Técnico. Tais alterações, de acordo com Chaquiam (2022), levam os contextos a uma maior dimensão, com uma maior riqueza de detalhes dos recortes efetuados a partir de uma história do tema/conteúdo/objeto. Além disso, segundo o autor, essas modificações irão proporcionar mais liberdade no processo de elaboração dos textos e, principalmente, na elaboração das atividades vinculadas aos textos que utilizarem o diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2022).

### 3.2. TEXTOS DECORRENTES DO DIAGRAMA PROPOSTO

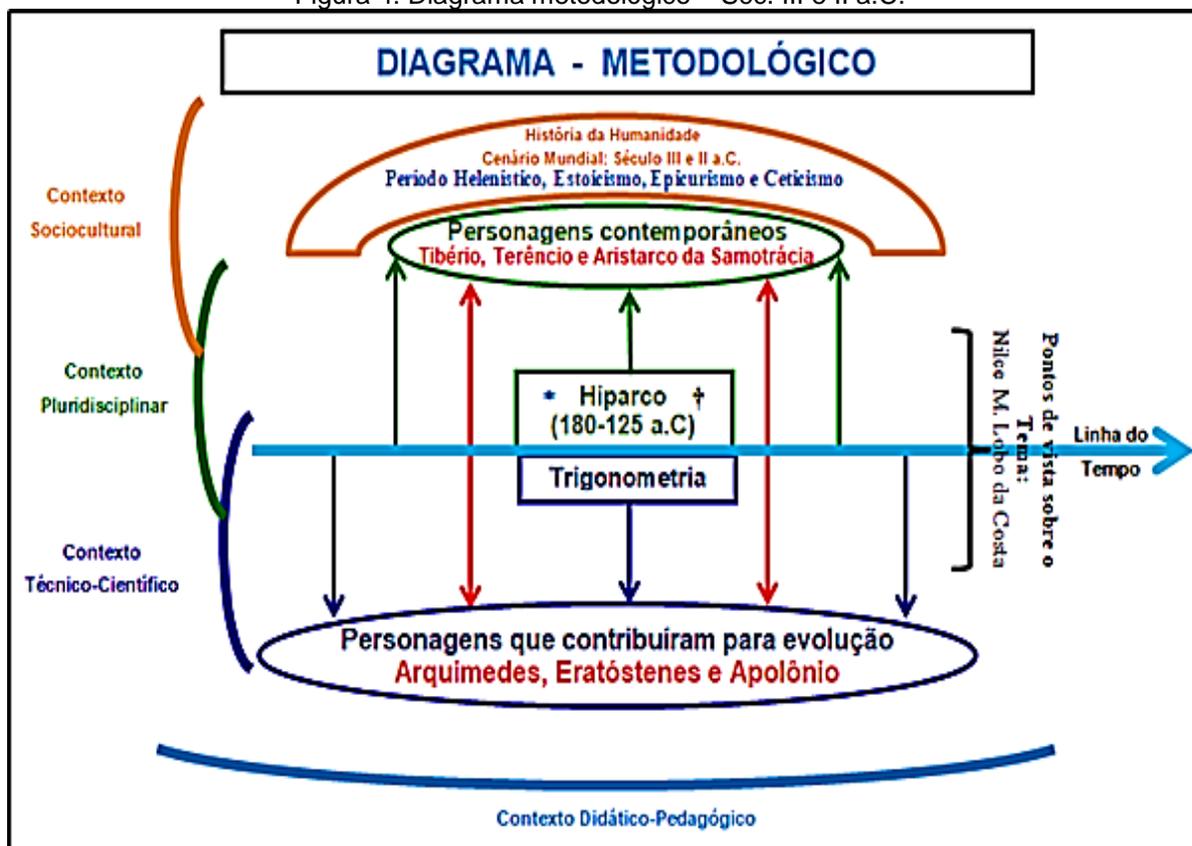
Os trabalhos analisados são de autoria de Jessie Heveny Saraiva Lima, publicados no ano de 2019, em coautoria com seu orientador Prof. Dr. Miguel Chaquiam. A autora fez uso do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) para desenvolver os seus textos, fazendo uso da História da Trigonometria para detalhar os caminhos traçados pelos matemáticos.

O texto intitulado *A Trigonometria na Grécia Antiga: Arquimedes, Erastóstenes, Apolônio e Hiparco de Nicéia* teve por objetivo apresentar um recorte do desenvolvimento histórico da trigonometria na Grécia antiga nos séculos III e II a.C, baseado no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017). A partir do modelo proposto por Chaquiam (2017), Lima (2019b) elenca um personagem principal e a partir dele constrói tópicos com o contexto sociocultural, contexto pluridisciplinar, contexto técnico-científico e o contexto didático-pedagógico.

Dentre os personagens da trigonometria, foi elencado por Lima (2019b) Hiparco de Nicéia como o personagem principal nesse diagrama. Além disso, no seu texto é abordado o contexto sociocultural provavelmente vivenciado por Hiparco de Nicéia, com destaque para os principais acontecimentos dessa época, em seguida Lima (2019b) trilhou um caminho onde reconstruiu traços biográficos de Arquimedes, Erastóstenes, Apolônio e Hiparco, que viveram no século III a.C, e para melhor compreensão do cenário da época em torno de Hiparco, elencou os

seus contemporâneos Tibério Graco, Terêncio e Aristarco da Samotrácia. Por fim, a autora abordou outros olhares sobre o desenvolvimento da trigonometria com Hiparco. Como mostra o diagrama a seguir:

Figura 4: Diagrama metodológico – Séc. III e II a.C.



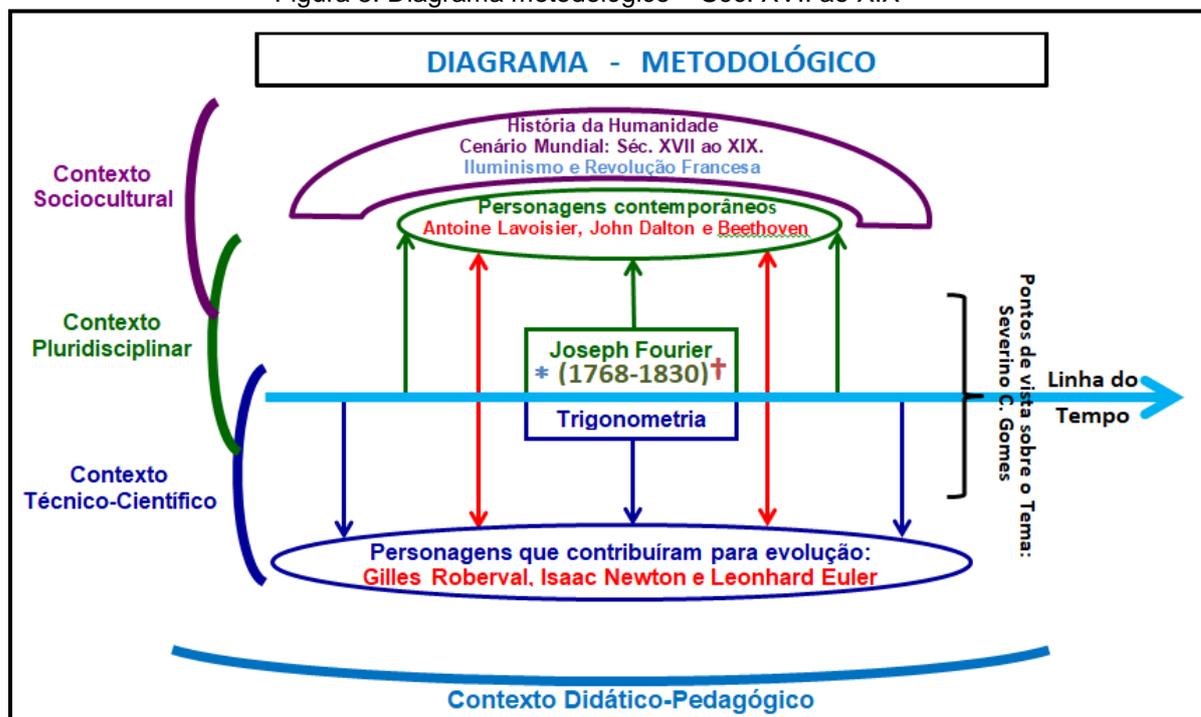
Fonte: Lima (2019b), adaptado de Chaquiam (2017)

O segundo trabalho analisado foi intitulado como *As contribuições à Trigonometria nos séculos XVII, XVIII E XIX* teve por objetivo apresentar outro recorte a partir da linha do tempo trigonométrica constante Lima (2019a), referente aos séculos XVII, XVIII e XIX, também baseado em Chaquiam (2017), tendo como personagem principal Fourier.

Tendo Joseph Fourier elencado como personagem principal, Lima (2019c) apresenta o contexto sociocultural vivenciado pelo personagem, onde se destaca os principais acontecimentos da época, além disso, para melhor entender o que aconteceu nas outras áreas das ciências no período em que Fourier viveu, Lima (2019c), destacou personagens contemporâneos a ele: Antoine Lavoisier, John Dalton e Beethoven. No tópico seguinte do trabalho de Lima (2019c) a autora discorre sobre as contribuições que os demais personagens da linha do tempo

deram à trigonometria e, por fim, o último tópico traz outra visão sobre a temática que está sendo abordada. A seguir, têm-se o diagrama usado na elaboração desse texto:

Figura 5: Diagrama metodológico – Séc. XVII ao XIX



Fonte: Lima (2019c), adaptado de Chaquiam (2017)

O próximo texto, intitulado *CONTRIBUIÇÕES À TRIGONOMETRIA: Al-Battani, Bhaskara Akaria, Fibonacci e Nicole d' Oresme*, teve por objetivo apresentar um recorte histórico da trigonometria dos séculos IX ao XIV, com destaque para Al-Battani como personagem principal e, para melhor compreensão do cenário da época, foram elencados seus contemporâneos.

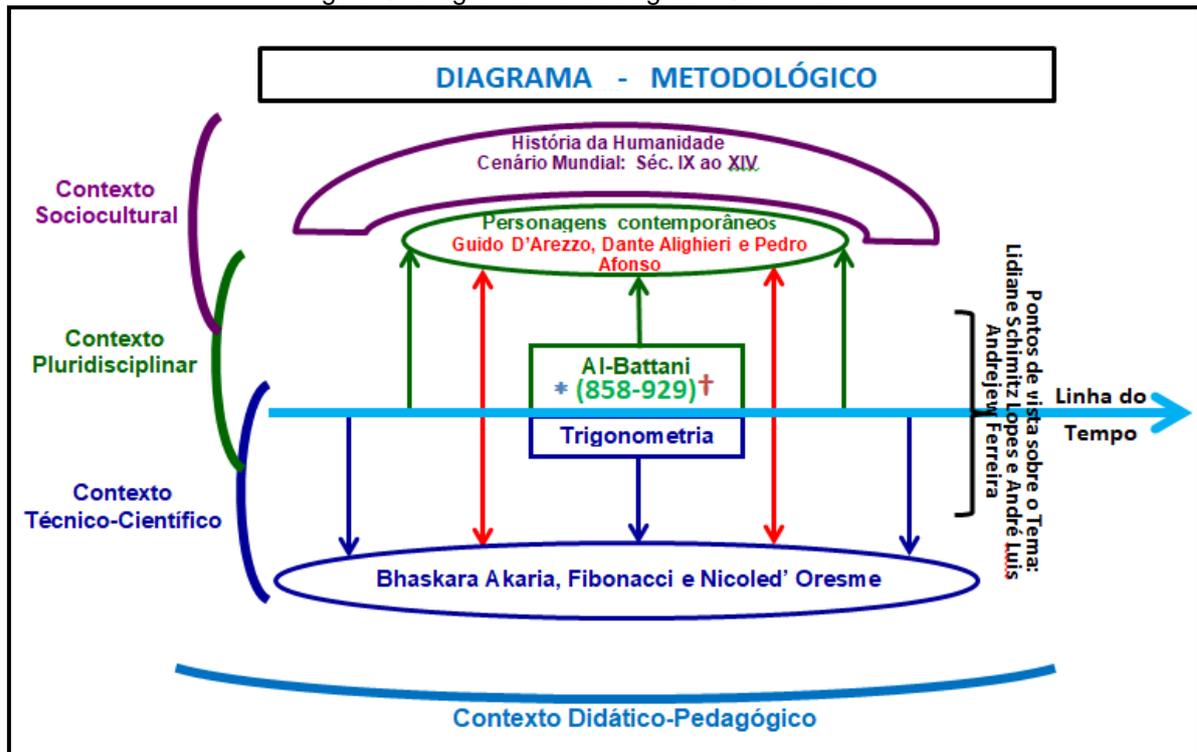
Em Lima (2019d), Al-Battani foi o personagem principal e seus contemporâneos foram Guido D'Arezzo, Dante Aleghieri e Pedro Afonso. Após comentar sobre os personagens contemporâneos, que viveram na mesma época que Al-Battani e que contribuíram para outras áreas da ciência, Lima (2019d), faz uma breve biografia do personagem elencado como principal, destacando-o como o mais importante astrônomo e matemático árabe de sua época.

Baseado no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017), Lima (2019d) traz as contribuições de outros personagens à trigonometria e que também viveram entre os séculos IX ao XIV: Bhaskara Akaria, Fibonacci e Nicole d'Oresme. O último tópico do modelo proposto por Chaquiam (2017) sugere trazer

uma visão mais atual sobre a temática, sendo assim, Lima (2019d), trouxe o trabalho intitulado *Um olhar sobre a História nas aulas de Matemática* de Lidiane Schimitz Lopes e André Luis Andrejew Ferreira, feito em 2013, onde teve por objetivo apresentar possibilidades do uso da história da matemática como recurso didático, compatível com Lima (2019).

O diagrama balizador de Lima (2019d), adaptado de Chaquiam (2017), para esse recorte foi:

Figura 6: Diagrama metodológico – Séc. IX ao XIV



Fonte: Lima (2019d), adaptado de Chaquiam (2017)

## 4. UMA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Assim como na Matemática, as origens da Trigonometria também são incertas. Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. Entretanto, embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações existentes entre lados e ângulo dos triângulos para resolverem problemas foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.

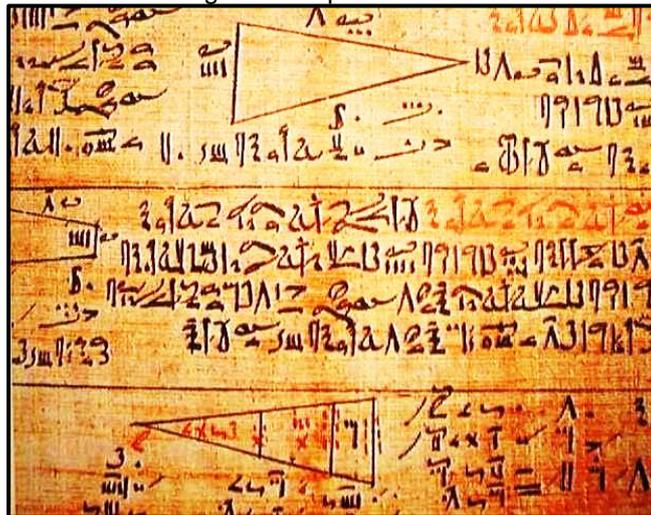
Neste capítulo apresentamos recortes sobre a evolução da trigonometria, desde o século XVI a.C. até o século XIX d. C., abordando personagens que viveram nesses períodos e mostrando as suas contribuições à trigonometria, as transformações que ocorreram e a evolução que tivera até chegar nos dias atuais.

### 4.1. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XVII A.C. AO SÉCULO XVI A.C.

De acordo com Oliveira (2010), com o passar do tempo, mais especificamente na Babilônia e no Egito, surgiu à necessidade de utilizar mais ainda a Trigonometria para a resolução de problemas sobre a Astronomia, a cronologia do tempo e a agricultura. Nessa investigação mais a fundo para melhor compreender o universo, a Trigonometria foi uma ferramenta importante nas mãos, não só dos babilônios e dos egípcios como também nas dos gregos, hindus e árabes.

Muitos povos contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, segundo Leite (2016), prova disso foi a descoberta de um papiro datado em 1650 a.C. e denominado Papiro de Rhind, em homenagem ao arqueólogo Henry Rhind do século XIX a.C. De acordo com Eves (2011) o Papiro em questão é uma fonte primária e rica sobre a matemática egípcia. Atualmente esse Papiro, juntamente com toda a coleção egípcia que pertence a Rhind, faz parte do acervo do Museu Britânico em Londres.

Figura 7: Papiro de Rhind

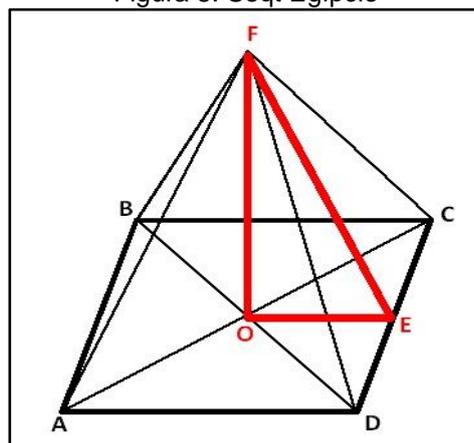


Fonte: Google Imagens (2021)

O Papiro de Rhind traz uma série de 84 problemas matemáticos e que fazem menção a uma razão trigonométrica chamada *seqt* – o que chamamos hoje de *cotangente* – que para os egípcios era utilizada para manter constantes as inclinações das faces das pirâmides. Leite (2016), em outras palavras, diz que os egípcios conceberam o significado de *seqt* como a razão entre o afastamento horizontal em relação à elevação vertical e a medida da altura que determinava como deveria ser a inclinação de uma pirâmide.

Segue um exemplo:

Figura 8: Seqt Egípcio



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Tomemos a média de  $OE = 100$  e a medida de  $OF = 50$ .

Seja  $OE$  o afastamento horizontal em relação à elevação vertical e  $OF$  a altura da pirâmide, temos a seguinte razão:

$$\text{seqt} \frac{OE}{OF} = \frac{100}{50}$$

Isto é,

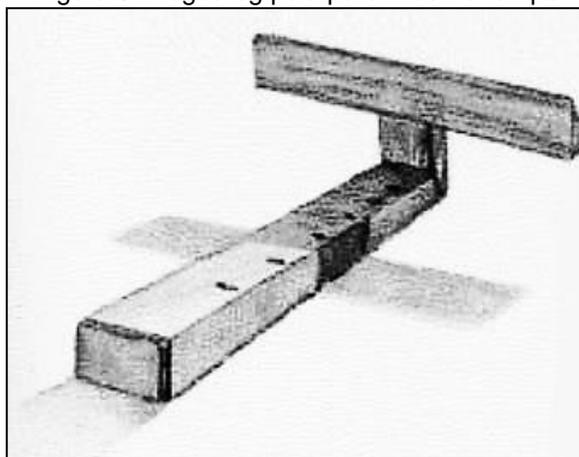
$$\operatorname{seqt} \frac{OE}{OF} = 2$$

Além da trigonometria ter grande importância na medição das pirâmides, em aproximadamente 1500 a.C. os egípcios começaram a associar sombras projetadas por Gnômon (uma vara vertical), a números, resultando ao que seria o primeiro relógio de Sol, além de estar anunciando a primeira chegada de algumas funções trigonométricas, como afirma Costa (2003) em seus estudos.

[...] no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias. COSTA (2003, p. 2-3)

O mais antigo relógio de sol existente está exposto no Museu de Berlim, acredita-se, de acordo com Corrêa (2009), que pertenceu ao faraó Tutmés III do Egito (1504 – 1450 a.C.), e foi denominado régua egípcia. Este era uma pedra, na forma de um T (como mostra a figura 9), com uns 30 cm, suportando outra peça de mesmo comprimento e perpendicular. As linhas de hora eram marcadas na pedra a intervalos regulares. O T era voltado para o Leste na parte da manhã e a Oeste na tarde. A posição da sombra da parte superior do T indicava a hora.

Figura 9: Régua egípcia para medir o tempo



Fonte: Google Imagens (2021)

Primitivamente, conforme diz a história, e de acordo com Corrêa (2009), o primeiro relógio construído e usado pelo homem foi o *gnômon*, que consistia em uma coluna que, iluminado pelo sol ou pela lua, projetava sua sombra, que se

movia com o passar das horas e entre o seu ponto inicial e seu ponto final havia um espaço que o homem fracionou criando a divisão do tempo. Enquanto os gregos antigos achavam que as horas eram divindades mitológicas, simbolizando as partes do dia, os babilônios e os chineses foram os primeiros que dividiram o dia em horas.

Como bem já foi mencionado, os primeiros vestígios da Trigonometria não surgiram apenas no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios demonstravam grande interesse pela astronomia, tanto por questões religiosas, quanto pelas vinculações com o calendário e as épocas de plantio. De acordo com Costa (2003) é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidade de medidas e uma escala. Os babilônios foram extraordinários astrônomos e influenciaram os povos posteriores.

A matemática teve um grande desenvolvimento na Grécia, e a partir de então a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as demais nações. Segundo Costa (2003) o historiador Heródoto (490 – 420 a.C.) aponta que foram os gregos que deram o nome *gnômon* ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C.

#### 4.2. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO VI A.C.

Os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos estavam na Grécia, são eles: Tales de Mileto (625 – 546 a.C.) e seu discípulo Pitágoras (570 – 495 a.C.); ambos foram um dos primeiros a contribuir com o surgimento da trigonometria, Tales com seus estudos de semelhança de triângulos que embasam a trigonometria e Pitágoras ao demonstrar o teorema que leva seu nome: “*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos*”. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

Apesar de Tales de Mileto não ter deixado nenhuma obra que lhe atribui a muitas descobertas, de acordo com muitos historiadores da matemática antiga – que se baseiam em antigas referências gregas – a geometria demonstrativa

iniciou-se com ele. Atribuiu-se a Tales o cálculo da altura das pirâmides, assim como o cálculo da distância até os navios no mar, por triangulação e entre outros fatos geométricos que contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria, como:

- A demonstração de que os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais;
- A demonstração do teorema “*se dois triângulos têm dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais*”;
- A demonstração de que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;
- A demonstração de que ao unir-se qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtêm-se um triângulo retângulo em C. (provavelmente, para demonstrar esse teorema, Tales usou também o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos); e entre outras contribuições.

Tales de Mileto nasceu na cidade de Mileto, por volta de 620 a.C., e morreu aos 78 anos, durante a 58ª Olimpíada, que ocorreu entre 548 e 545 a.C.. De acordo com o historiador Heródoto, ele previu o eclipse de 28 de maio de 585 a.C.. Na geometria há dois teoremas com o nome de Tales, ambos sobre triângulos. Suas contribuições marcaram a evolução da matemática do particular para o geral, do concreto para o abstrato, que se iniciara antes, mas alcançou a maturidade na Grécia.

Segundo Viana (2019) o primeiro uso da palavra trigonometria está no livro “*trigonometria: tratado breve e claro da resolução de triângulos*” (em tradução livre do latim), publicado em 1595 pelo astrônomo e teólogo alemão Bartholomaeus Pitiscus (1561 – 1613). Entretanto, o uso das ideias da trigonometria é muito anterior: Hiparco de Rhodes (190 a.C. – 120 a.C.), em 180 a.C., publicou um livro no qual apresentava tabelas da primeira função trigonométrica, chamada de “corda” e relacionada com a função seno.

A partir dos ensinamentos deixados por Tales de Mileto, Pitágoras, filho de Mnesarose Pártenis, continuou seus estudos. De acordo com Kamers (2008), o pai de Pitágoras investiu muito em sua educação, contratou grandes homens da época, como Ferecídio – discípulo de Tales – tendo sido, posteriormente, aluno do próprio Tales em Mileto. Após aprender rapidamente sobre matemática e filosofia

deixou para trás seus mestres, seguindo seu caminho e se dedicando cada vez mais por essas áreas de conhecimento.

O ano de nascimento de Pitágoras parece ser incerto, pois as literaturas apontam anos diferentes, como por exemplo, de acordo com Contador (2006) Pitágoras nasceu no ano de 582 a.C., já de acordo com Andrade (2009) nasceu por volta de 569 a.C. e outros estudos apontam que Pitágoras nasceu no ano de 586 a.C. apesar do ano de nascimento ser incerto, sabe-se, de acordo com Andrade (2009), que Pitágoras nasceu em uma extensa e sinuosa ilha Égea chamada Samos, de frente a costa da Ásia Menor.

Com mais ou menos dezenove anos de idade, aconselhado por Tales, Contador (2006) aponta em seus estudos que Pitágoras iniciou uma viagem em direção ao oriente, dirigiu-se primeiro à Babilônia, em seguida à Índia, depois para o Egito e por fim quando regressou à Grécia já estava com cinquenta e três anos e tornou-se líder de um movimento religioso, movimento este que tinha como base o misticismo, ritos de abstinência, pureza e meditações. A escola pitagórica durou cerca de 150 anos, e a visão mística dos pitagóricos não os impediu de fundarem a Aritmética, ou a ciência dos números.

A sociedade pitagórica, de acordo com Andrade (2009), foi fundada na Itália e para se tornar um discípulo de Pitágoras era preciso se submeter a um período de iniciação de pelo menos cinco anos, onde deveria se manter em silêncio absoluto. Após os cinco anos de silêncio e ser admitido na sociedade, o silêncio sobre os ensinamentos do mestre ainda era obrigatório. Desse modo, aquele que se tornasse discípulo de Pitágoras teria que se dedicar exclusivamente para esta missão, abandonando os negócios – pois não podia se envolver com o comércio – além de não poder se defender no tribunal e não podia sacrificar animais, se alimentando de mel e cevada.

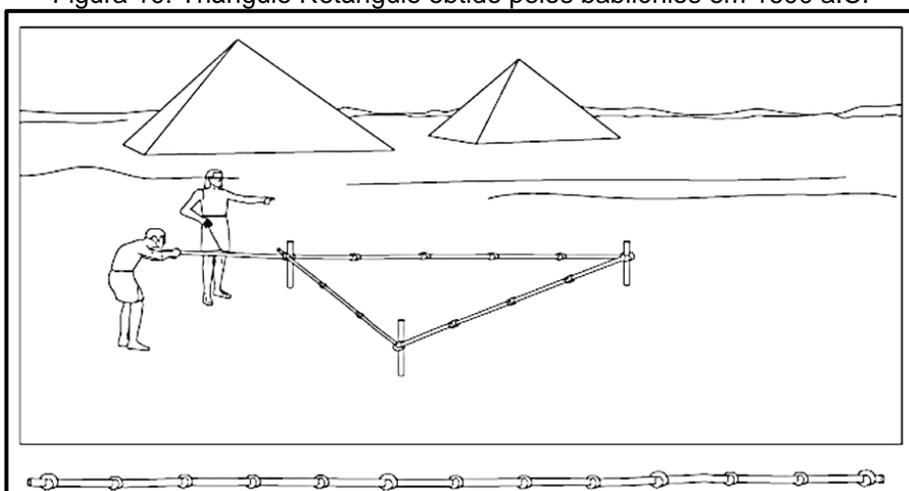
Segundo Andrade (2009) a sociedade era de caráter religioso e filosófico, que apresentavam aspectos políticos. O termo mais correto para descrever essa sociedade é bomakoeion, ou seja, um lugar onde as pessoas podiam reunir e ouvir os discursos de Pitágoras. Desde o começo, Pitágoras era o líder da escola, sua divinização estabeleceu sua absoluta autoridade no interior da sociedade. Ainda de acordo com Andrade (2009), os membros contribuíram para o desenvolvimento da filosofia com suas ideias originais, mas todas as inovações continuavam sendo atribuídas a Pitágoras.

Pitágoras, como astrônomo, de acordo com Contador (2006), foi o primeiro a afirmar que a terra era redonda e estava suspensa no espaço, assim como os planetas giravam em torno de uma chama central à qual dava o nome de Héstia, que não era o sol; a terra por sua vez recebia a luz de Héstia e a refletia. De acordo com Pitágoras, o movimento dos planetas produzia sons que nós não ouvíamos, porque estávamos acostumados com eles. Com essa forma de pensar o seu sistema foi o melhor que se conheceu até Copérnico.

Os estudos de Kamers (2008) apontam que na época em que Pitágoras visitou o Egito ficou impressionado com a maneira que as pirâmides eram construídas e, a partir de então, depois de muitos estudos, desenvolveu o conhecido “Teorema de Pitágoras”. O Teorema de Pitágoras aborda a relação entre os lados e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Segundo Contador (2006) Pitágoras foi o primeiro homem não a criar, mas a conceituar e deduzir este teorema. Embora os babilônios não tenham nos deixados deduções, esta relação já era conhecida por eles.

Para o que hoje utilizamos o chamado Teorema de Pitágoras ( $a^2 = b^2 + c^2$ , onde  $a$  representa a hipotenusa e os catetos são representados por  $b$  e  $c$ ) os babilônios utilizavam um instrumento muito simples e prático para construir ângulos retos: uma corda. De acordo com Kamers (2008), na corda eles iam fazendo nós com distâncias sempre iguais e depois marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si. Depois juntavam o primeiro ao último nó. Quando esticavam a corda, fixando-a nos três nós marcados, se tinha um triângulo retângulo.

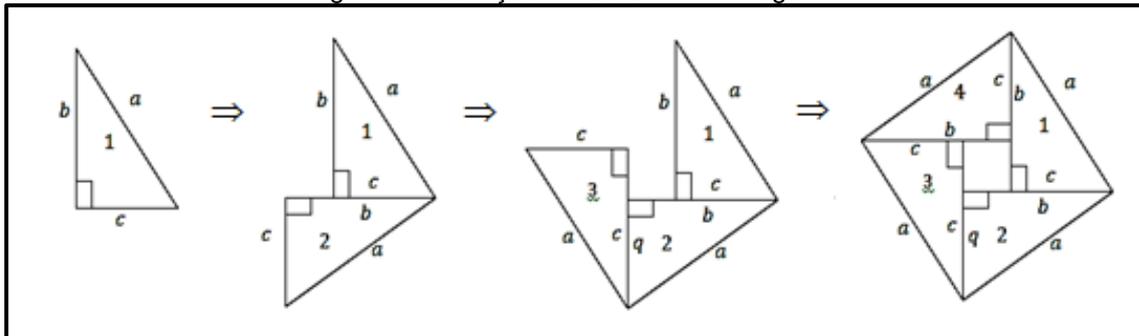
Figura 10: Triângulo Retângulo obtido pelos babilônios em 1600 a.C.



Fonte: Kamers (2008)

Diante das várias deduções existentes, Contador (2006) mostra em seus estudos uma simples dedução que comprova esse teorema. Seja um triângulo retângulo de lados  $b$ ,  $c$  e hipotenusa, a partir dele, é possível montar um quadrado cujo lado seja a hipotenusa desse triângulo, como mostra a figura a seguir:

Figura 11: dedução do teorema de Pitágoras



Fonte: Contador (2006)

Notemos que o mesmo triângulo repetido quatro vezes forma um quadrado de lado  $a$  e área denominada de  $S$ , note que ganhamos no centro, um pequeno quadrado de lado  $b - c$  e área que chamaremos de  $S'$ , então se chamarmos de  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  as áreas dos triângulos 1, 2, 3 e 4 temos:

$a$  = hipotenusa;

$b$  = cateto maior;

$c$  = cateto menor;

$S$  = área do quadrado grande;

$S'$  = área do quadrado pequeno.

$$S = a^2$$

$$S' = (b - c)^2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S'$$

$$S = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + (b - c)^2$$

$$S = 2 \cdot b \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot c + c^2$$

Logo:  $a^2 = b^2 + c^2$

Esta fórmula, de acordo com Contador (2006), que é válida para todo e qualquer triângulo retângulo e immortalizou o nome de Pitágoras, atualmente é uma

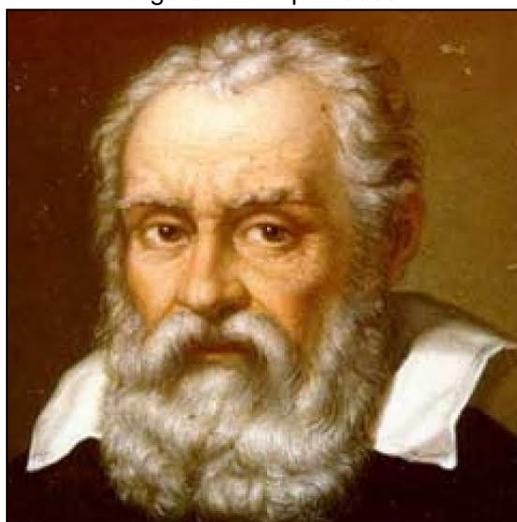
dedução simples, mas com certeza está entre as mais importantes da matemática e levou milhares de anos para ser demonstrada com prova concreta. O homem Pitágoras morreu, mas seus ensinamentos continuaram e seu trabalho foi escrito por Filolau de Tebas cerca de cem anos depois de sua morte.

#### 4.3. A TRIGONOMETRIA DO SÉCULO III A.C. AO SÉCULO II A.C.

Os personagens que viveram nesse período e que contribuíram para a trigonometria foram Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio (personagens do século III a.C.) e Hiparco de Nicéa (personagem do século II a.C.). Que além de terem sido importantes para o desenvolvimento da trigonometria, contribuíram significativamente para a construção do que viria a ser considerada a primeira tabela trigonométrica.

Arquimedes (287 – 212 a.C.) foi um importante estudioso da mecânica teórica. Seus textos eram semelhantes aos *Elementos* de Euclides, eram escritas de maneira formal, partindo de definições e postulados simples. Uma de suas obras mais importantes é chamada *Sobre Corpos Flutuantes*, estruturada de forma matemática e abordava postulados sobre pressão e fluidos, hoje conhecido como *Princípio hidrostático*.

Figura 12: Arquimedes



Fonte: Google Imagens (2021)

Embora Arquimedes seja mais conhecido pelo princípio da Hidrostática, importante descoberta para os estudos das ciências físicas, também teve grande

contribuição na matemática ao estudar sobre a medida do círculo. De acordo com Mol (2013), Arquimedes consagrou-se a Matemática quando conseguiu avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Ao estudar um hexágono regular inscrito e um hexágono circunscrito, duplicou progressivamente o número de lados até obter o polígono de 96 lados. Como resultado de seus cálculos, conseguiu encontrar um valor próximo para  $\pi$  da forma  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ , ou seja,  $\frac{3.71+10}{71} < \pi < \frac{3.70+10}{70}$ , logo,  $3,1408 < \pi < 3,1428$  (comparando com o valor  $\pi = 3,14159\dots$ ).

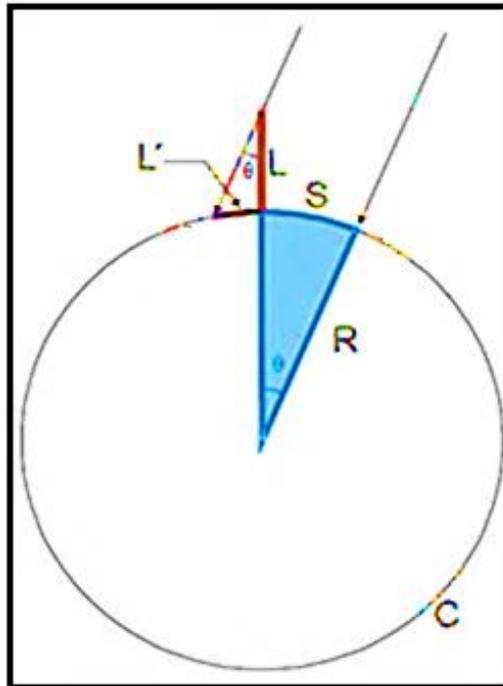
Mol (2013) aponta em seu estudo que Arquimedes tinha um tratado que foi descoberto no início do século XX chamado *O Método*. Nesta obra, Arquimedes aborda alguns aspectos do seu processo de criação matemática. Para ele, as demonstrações poderiam ser facilitadas a partir da existência de indicações sobre a validade de um resultado, e essas indicações, Arquimedes obtinha por investigações “mecânicas”, após as quais uma prova rigorosa deveria ser construída pelo método geométrico tradicional. Esse tratado continha uma série de cartas escrita por Arquimedes ao matemático Erastóstenes, que é outro destaque do século III a.C.

Mesmo estudando círculos e retas e aplicando esses resultados na Astronomia, Arquimedes não conseguiu chegar a uma trigonometria sistemática. Porém, seus estudos e suas cartas ajudaram o Erastóstenes a produzir, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais notável medida da circunferência da terra na Antiguidade.

Erastóstenes (276 – 194 a.C.) Por volta de  $\pm 240$  a.C. fez uma medida surpreendentemente correta da circunferência da terra, não foi a primeira medição feita, porém a de maior precisão para a época e, para isso, ele comparou as sombras ao meio-dia entre Alexandria e Siena. Segundo Vinagre (2002) ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus, depois dividiu 360 por 7,2 o que dá 50, e assim soube que eram necessárias 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da terra.

Abaixo, tem uma análise mais detalhada da ideia de Erastóstenes. Iremos partir do esquema apresentado na figura 13, e definir as grandezas envolvidas no problema:

Figura 13: Esquema da Ideia de Erastóstenes



Fonte: Vinagre (2002)

- S é a distância entre Siena e Alexandria;
- $\theta$  é o ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria;
- C é a circunferência da terra;
- D é o diâmetro da terra;
- R é o raio da terra;
- L é o comprimento do poste;
- L' é o comprimento da sombra do poste;

Para calcular a circunferência da terra, de acordo com Vinagre (2002), Erastóstenes utilizou a seguinte razão trigonométrica:  $\frac{s}{c} = \frac{\theta}{2\pi}$ . Ou seja, a razão entre a distância de Alexandria e Siena e a circunferência igual a razão do ângulo formado a partir da distância entre as cidades e o ângulo total da circunferência terrestre ( $2\pi$ ). Isolando C, teremos:  $C = \left(\frac{2\pi}{\theta}\right) \cdot s$ . E a partir dessa relação Eratóstenes fez seus cálculos, substituiu os valores que ele encontrou para  $\theta(0,02 \cdot 2\pi)$  e o valor de S (5.000 estádios) que era obtido pelo número de passos dados de Siena até Alexandria pelos Bematistas do Rei multiplicado pelo

comprimento de cada passo que supostamente tinha o mesmo tamanho. E obteve a seguinte equação:

$$C = \left(\frac{2\pi}{0,02 \cdot 2\pi}\right) \cdot 5000; C = \left(\frac{1}{0,02}\right) \cdot 5000; C = 50.5000; C = 250.000 \text{ estádios}$$

E para obter o resultado em quilômetros multiplicamos o resultando obtido em C por 0,157 Km, o que resulta:  $C = 39.250 \text{ Km}$ . A partir desse valor encontrado poderemos também calcular o valor do Raio da terra utilizando a relação  $C = 2\pi R$  e por consequência o valor do Diâmetro (o dobro do Raio).

Como podemos observar, para realizar tal aproximação de medida utilizou semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Em seus estudos foi determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo.

Após os estudos feitos por Erastóstenes para calcular a circunferência da terra, surge às contribuições de Apolônio (262-190 a.C.) à trigonometria, Segundo Oliveira (2010), ao tentar calcular um melhor conjunto de cordas, fato que o levou a perceber a necessidade de estabelecer relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Por volta de 180 a.C., Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o dia em 360 partes. Mais tarde, Hiparco de Nicéia (180 -125 a.C.) utilizou-se das ideias de Apolônio e Hipsícles e criou a primeira tabela trigonométrica, com valores de cordas de vários ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

A maioria das informações sobre as contribuições de Hiparco de Nicéia não puderam ser obtidas com segurança, no geral não se sabe as datas e a ordem de redação dos seus livros. Porém, há muitos relatos em *O comentário de Arato* escrito pelo próprio Hiparco e há mais suposições de suas obras em *Almagesto*, escrito por Ptolomeu. Tendo isso em vista, tomaremos por base essas obras para discorrer sobre as contribuições de Hiparco para a astronomia e, conseqüentemente, à trigonometria.

Segundo Moreira (2005), Hiparco é considerado o pai da trigonometria pelo fato de o mesmo ter introduzido as medidas sexagonais em Astronomia e elaborado um tratado de doze livros sobre a construção de tábuas de cordas: primeira tabela trigonométrica.

A tabela trigonométrica de Hiparco, segundo Gillispie (2007), foi baseada em um círculo, cuja circunferência era dividida em 360 graus de 60 minutos e o

raio R expresso em minutos era dado por  $R = 360 \cdot 60' / 2\pi$ , que seria aproximadamente 3438'. Essa tabela das cordas sobreviveu apenas em relação aos senos com  $R = 3438'$  e valores calculados a intervalo de 3-3/4°.

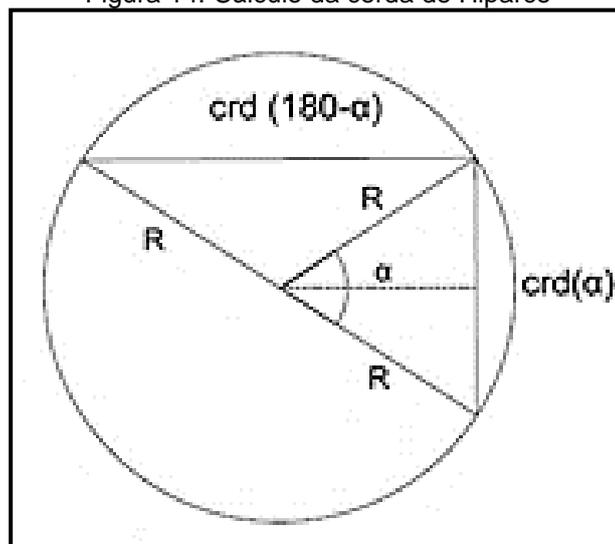
Para realizar os cálculos da tabela de cordas, Hiparco iniciou com o ângulo de 60°, de acordo com Oliveira (2010). Em seguida observou que a corda de 60° era igual ao raio da circunferência em um triângulo equilátero, ou seja,  $\text{Crd}(60) = 3430'$ . Para o ângulo de 90° ele obteve a corda igual a:

$$R \cdot \sqrt{2} = 3438' \cdot 1,414 \approx 4862' = 81,2 = 81 \cdot 60 + 2.$$

Para completar a tabela e calcular o valor as outras cordas, Hiparco utilizou dois resultados geométricos, a primeira é uma aplicação trivial do teorema de Pitágoras, e a segunda já era conhecida por Arquimedes.

*Primeiro resultado:* Aplicando o Teorema de Pitágoras na Figura 14, tem-se:

Figura 14: Cálculo da corda de Hiparco



Fonte: Oliveira (2010)

$$\begin{aligned} (R + R)^2 &= \text{crd}^2(180 - a) + \text{crd}^2(a) \\ \text{crd}^2(180 - a) &= (2R)^2 - \text{crd}^2(a) \\ \text{crd}(180 - a) &= \sqrt{(2R)^2 - \text{crd}^2(a)} \end{aligned}$$

*Segundo resultado:* Hiparco deduziu uma fórmula para a corda do arco-metade,  $\text{crd}\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{R(2R - \text{crd}(180 - a))}$ . Foi dessa forma que Hiparco calculou sua tabela de corda de 0° a 180° com intervalos de  $7\frac{1}{2}^\circ$  em  $7\frac{1}{2}^\circ$ , tendo em vista que  $7\frac{1}{2}^\circ = 15^\circ/2$  e  $15^\circ = 30^\circ/2$ .

Segundo Oliveira (2010) não há relatos que comprovem como Hiparco fez sua tabela, pois muitos de seus estudos e registros se perderam. Porém, quando Téon de Alexandria comentou sobre as tabelas de Ptolomeu, fez referência ao tratado de doze livros de Hiparco sobre cordas em um círculo, então provavelmente os métodos de Hiparco sejam parecidos com os de Ptolomeu.

Diante disso, concluímos que as teorias de Hiparco contribuíram significativamente para a realização da mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade, o *Almagesto* de Claudio Ptolomeu.

#### 4.4. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO II

Cláudio Ptolomeu (100 - 168) foi astrônomo, geógrafo e matemático, onde de acordo com Mol (2013) escreveu um dos textos científicos de maior influência de todos os tempos, tal obra é intitulado de *Síntese Matemática* no qual aborda um tratado astronômico e matemático sobre o movimento estelar e planetário que celebraria o modelo geocêntrico do universo. Composto por 13 livros, seu tratado ficou conhecido como *Almagesto*, onde Ptolomeu também deu contribuições significativas à trigonometria na antiguidade.

Segundo Oliveira (2010) o nome *Almagesto*– proveniente de *Al magiste* – tem origem árabe, pois foram eles os primeiros a traduzi-lo diversas vezes por considerarem esta como a maior obra em relação aos trabalhos astronômicos de Aristarco, Hiparco e outros. O primeiro dos 13 livros traz informações sobre matemáticas preliminares, indispensáveis na época para compreender os fenômenos celestes, por exemplo, as proposições sobre geometria esférica já estudada por seu predecessor Menelau de Alexandria. Os demais livros foram dedicados à astronomia.

Apesar de Hiparco ter contribuído significativamente à trigonometria com a primeira tabela de cordas, de acordo com Oliveira (2010) o *Almagesto* contém uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco, onde mostra os métodos para calcular o comprimento das cordas, as construções da tábua de cordas, entre outros. Hiparco de Nicéia foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande Cláudio Ptolomeu que estendeu os trabalhos de Hiparco, criando um procedimento para o cálculo de cordas subentendida por arcos de um círculo.

De acordo com Mol (2010) a separação de um círculo em 360 graus foi celebrizada por Ptolomeu. Empregou o sistema sexagesimal para obter os comprimentos das cordas cuja unidade de medida denotou por parte, após dividir o círculo em 360 partes, dividiu o diâmetro em 120 partes e utilizou  $\frac{377}{120}$  como uma aproximação para  $\pi$ , que no sistema decimal isso equivale a  $\pi \approx 3,1416$ . Dessa forma, segundo Oliveira (2010), Ptolomeu conseguiu calcular o comprimento das cordas correspondentes aos ângulos centrais de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  em intervalos de  $\frac{1^\circ}{2}$ .

Segundo Mol (2010) a tabela de cordas de Ptolomeu seria referência para os astrônomos por mais de mil anos. A construção da tabela equivalia a construir uma tabela de senos de  $\frac{1^\circ}{4}$  a  $90^\circ$  e, uma vez que  $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$ , indiretamente também fornecia uma tabela de cossenos. De acordo com Costa (2013) na verdade, não existe no *Almagesto* nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, mas sim a função corda do arco  $x$  ou  $\text{crd } x$ , embora naturalmente estes termos não apareçam.

Ainda de acordo com Costa (2013) a função corda do arco  $x$  era determinada como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de  $x$  graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de  $\text{crd } x$  correspondente a um acréscimo de um minuto em  $x$ . A terceira coluna era usada para interpolações, isto é, para achar o valor de  $\text{crd } x$  se  $x$  estivesse entre duas entradas na coluna de arcos.

Quadro 3: Cordas de Ptolomeu

$\alpha$ em graus	Crd ( $\alpha$ )	$\alpha$ em graus	Crd ( $\alpha$ )
$\frac{1^\circ}{2}$	0; 31, 25	$40^\circ$	41; 2, 33
$1^\circ$	1; 2, 50	$60^\circ$	60; 0, 0
$1^\circ\frac{1}{2}$	1; 34, 15	$70^\circ$	68; 49, 45
2	2; 5, 40	$90^\circ$	84; 51, 57
$2^\circ\frac{1}{2}$	2; 37, 4	$100^\circ$	91; 55, 32
$3^\circ$	3; 8, 28	$120^\circ$	103; 55, 23
$5^\circ$	5; 14, 4	$135^\circ$	110; 51, 57
$10^\circ$	10; 27, 32	$140^\circ$	112; 45, 28
$20^\circ$	20; 50, 16	$160^\circ$	118; 10, 37
$30^\circ$	31; 3, 30	$180^\circ$	120; 0, 0

Fonte: Oliveira (2010)

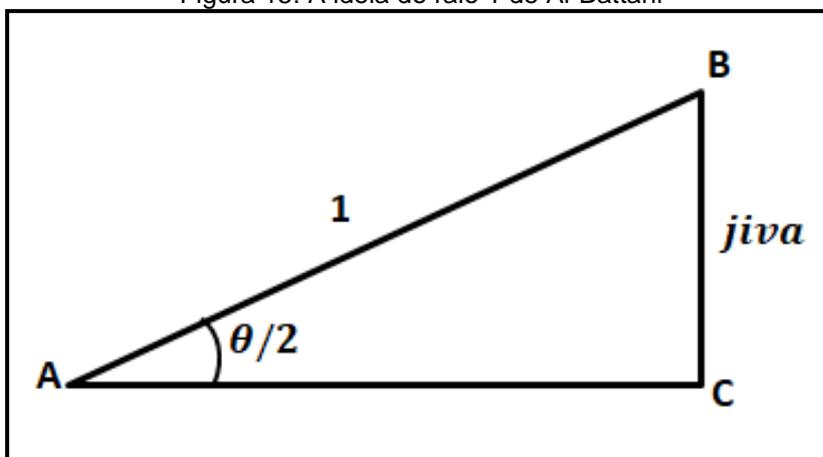
Dessa forma, Ptolomeu deu sua grande contribuição à trigonometria a partir de estudos já feitos, como é o caso de Hiparco, onde ele só aprimorou seus estudos e lançando mão das fórmulas da diferença da corda de um arco, o arco metade, a soma de dois arcos e a relação entre arcos (maior e menor), Ptolomeu também obteve sua tabela de cordas, como mostra o quadro seguir.

#### 4.5. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO IX AO SÉCULO XIV

De acordo com Costa (2003) pode-se dizer que os árabes começaram a ser influentes a partir da fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al-Battani, ou Albategnius, nas traduções latinas. Na matemática, em especial na trigonometria, de acordo com Júnior e Oliveira (2017), deixou grandes e importantes contribuições, tendo o mérito de ter empregado pela primeira vez, depois dos hindus, os senos ao invés de cordas.

Costa (2003) aponta que os estudos de Al-Battani ficaram entre o *Almagesto* e *Siddhanta* e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes. Al-Battani foi influenciado principalmente após sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

Figura 15: A ideia do raio 1 de Al-Battani

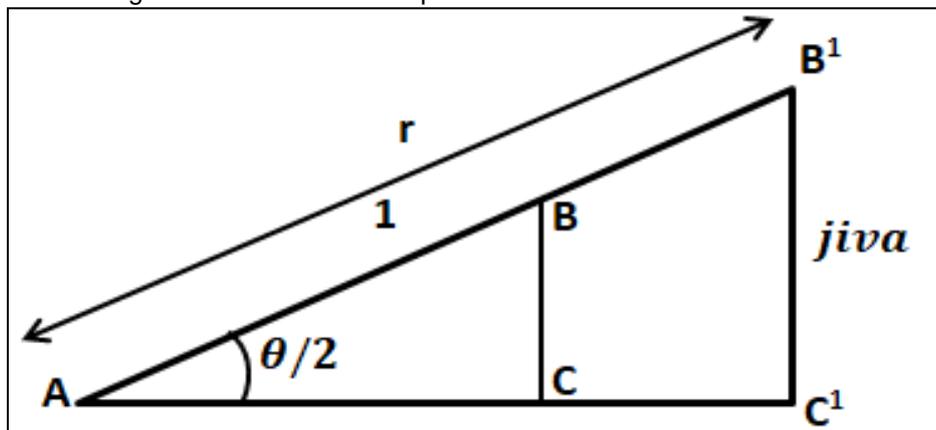


Fonte: Costa (2003) – adaptado pelos autores

$$jiva = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{BC}{1} \text{ ou seja } \text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1}$$

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo  $\frac{\theta}{2}$  então, quaisquer que seja as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, pode-se afirmar que:  $\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$ . No  $\Delta ABC$  temos  $\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{jiva}{1}$ . Aplicando o teorema de Tales, temos:  $\frac{jiva}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$ , logo  $\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{jiva}{1}$ .

Figura 16: Fórmula usada para construir a tabela de Al-Battani



Fonte: Costa (2003) – adaptado pelos autores.

De acordo com Costa (2003), a partir desta fórmula pode-se construir uma tábua de  $1/4$  a  $90^\circ$ , variando de  $1/4$  em  $1/4$  de graus, ou seja, uma tabela de senos, a pesar deste nome não ter sido usado para designá-la. Segundo Costa (2003) Al-Battani tinha interesse em calcular a altitude do sol, e para isso foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas mais precisas que as existentes na época, sendo assim, fez a primeira aparição do termo seno e o teorema dos senos aplicado por ele:  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$ .

Bhaskara Akaria (1114 – 1185) – algumas vezes referido como Bhaskara II (por já ter existido um matemático anterior com o mesmo nome) de acordo com Katz (2010) tornou-se conhecido por ter criado a fórmula matemática aplicada na equação do segundo grau, embora haja controvérsias quanto a esse fato.

Embora Bhaskara tenha trabalhado com a questão da raiz quadrada em equações, sabendo que existiam duas raízes na resolução da equação de segundo grau, não há registros que confirmem que a conhecida fórmula de

Bhaskara seja realmente dele. Porém, as seguintes equações referentes ao estudo de seno e cosseno foram concebidas por ele:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sena} \cdot \text{cos}b + \text{sen}b \cdot \frac{\text{cosa}}{\text{sen}(a - b)}$$

$$\text{sen}(a + b) = \text{sena} \cdot \text{cos}b - \text{sen}b \cdot \text{cosa}$$

Bhaskara determinou um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo. Segundo Katz (2010) curiosamente, embora o matemático Bhaskara tratasse principalmente de problemas algébricos, as necessidades da astronomia sempre exigiram dele familiarização com as ideias da trigonometria. Foi a partir do estudo contínuo destas noções que os matemáticos indianos do século XIV ao XVI, em Kerala, no sul da Índia, desenvolveram ideias sobre formas de representar trigonométricas por séries. Nenhum texto astronômico indiano até o tempo de Bhaskara continha uma tabela de senos para arcos inferiores a  $3\frac{3}{4}^\circ$ . Em vez disso, os indianos desenvolveram métodos de aproximação.

Fibonacci (1170-1250), de acordo com Gillispie (2007) foi o primeiro matemático do Ocidente cristão. Os números de Fibonacci se relacionam com outras áreas da matemática, em especial trataremos da relação de Fibonacci com a Trigonometria. De acordo com Almeida (2014) a partir de algumas identidades trigonométricas e a fórmula de Binet, é possível determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci, tal fórmula foi estabelecida por W. Hop e Jones em 192. Para determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci, de acordo com Almeida (2014), iremos considerar as identidades trigonométricas:

1.  $\text{sin}2\theta = 2\text{sin}\theta\text{cos}\theta$

2.  $\text{cos}2\theta = \text{cos}^2\theta - \text{sin}^2\theta = 2\text{cos}^2\theta - 1$

3.  $\text{cos}3\theta = \text{cos}(2\theta + \theta) = \text{cos}2\theta\text{cos}\theta - \text{sin}2\theta\text{sin}\theta$

A partir das identidades obtemos:

$$\begin{aligned} \text{cos}3\theta &= \text{cos}\theta(2\text{cos}^2\theta - 1) - (2\text{sin}\theta\text{cos}\theta)\text{sin}\theta \\ &= 2\text{cos}^3\theta - \text{cos}\theta - 2\text{cos}\theta\text{sin}^2\theta \\ &= 2\text{cos}^3\theta - \text{cos}\theta - 2\text{cos}\theta(1 - \text{cos}^2\theta) \\ &= 2\text{cos}^3\theta - \text{cos}\theta + 2\text{cos}^3\theta - 2\text{cos}\theta \end{aligned}$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Agora, iremos considerar  $\theta = \pi/10$ . Temos:  $\frac{\pi}{2} = 5\theta = 2\theta + 3\theta$ .

Daí, temos que  $2\theta$  e  $3\theta$  são ângulos complementares e,  $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ .

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Dividindo por  $\cos\theta$  (com  $\cos\theta \neq 0$ ), obtemos:  $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$

$$2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$$

$$2\sin\theta = -4\sin^2\theta + 1e,$$

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ , uma equação do segundo grau em  $\sin\theta$ .

Resolvendo a equação obtida, encontramos as raízes:

$$\sin\theta = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como  $\theta = \pi/10$  um arco do primeiro quadrante, temos que o  $\sin\theta > 0$ , temos que:

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin\theta = \frac{(-1+\sqrt{5})}{4} = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\beta = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2\alpha}, \text{ desde que}$$

$$\alpha\beta = -1.$$

Calculamos agora o  $\cos 2\theta$ . Como  $\theta = \left(\frac{\pi}{10}\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\theta$  e  $\cos \frac{\pi}{5} = \cos 2\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = \cos^2\theta - \sin^2\theta \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\theta \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{1}{2\alpha^2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

Multiplicando ambos os termos por  $\beta^2$ , obtemos  $\alpha/2$  que é igual a  $\cos(\pi/5)$ , ou seja,  $\alpha/2 = \cos(\pi/5)$ . Calculando  $\cos 3\pi/5$  iremos obter como resultado:

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha^2 - 3). \text{ Como } \alpha^2 + \beta^2 = 3 \rightarrow \alpha^2 - 3 = \beta^2, \text{ temos que: } \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\beta$$

Já encontramos que  $\cos(\pi/5) = \alpha/2$ , então  $\alpha = 2\cos(\pi/5)$  e  $\cos(3\pi/5) = (1/2)\beta$ . Logo,  $\beta = 2\cos(3\pi/5)$ .

Substituindo as relações encontradas na fórmula e Binet, podemos determinar a fórmula trigonométrica para os números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^n - \left(2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}$$

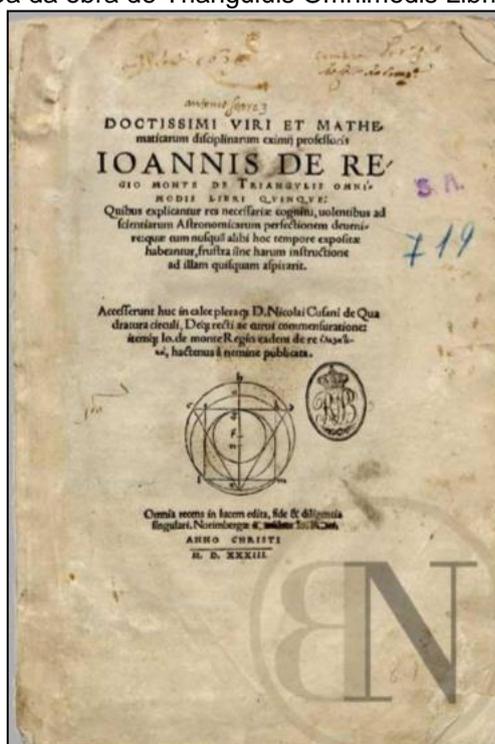
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(2^n) \left[ \cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right], n \geq 0.$$

Se tratando de trigonometria, Nicole d’Oresme (1320-1382) introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis, que auxiliaria o conceito de função que, mais tarde seria utilizado nos conceitos trigonométricos. Em paralelo ao desenvolvimento da trigonometria ocorreu o desenvolvimento das funções com Nicole d’Oresme, onde com seu “*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*”, introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso velocidade por tempo).

#### 4.6. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XV AO SÉCULO XVI

Johannes Muller (1436-1476) contribuiu significativamente para o desenvolvimento da trigonometria. De acordo com Pereira (2011), a principal obra que contribuiu para esse desenvolvimento é *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos) iniciada em Viena e terminada parcialmente em Veneza, em 1463, que apresentava uma primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, uma tentativa importante de tratamento da Trigonometria de modo independente a Astronomia.

Figura 17: Capa da obra de *Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, 1533



Fonte: Pereira (2011)

Em 1462, Johannes Muller sentiu a necessidade de escrever regras sobre Triângulos que seriam úteis aos leitores do Epítome. Segundo Pereira (2011), esse trabalho se constituiu um marco no estabelecimento da Trigonometria como um ramo da Matemática independente da Astronomia. Infelizmente, é uma obra inacabada: o Livro V, com suas aplicações de Leis de Cossenos, apresentadas ali pela primeira vez, é apenas um fragmento. Este trabalho, dedicado por Muller a Bessarion – cardeal da época – foi publicado por Schoner em 1533.

Johannes Muller, primeiramente, completou os livros sobre Trigonometria Esférica, que mais tarde formaria os livros III e IV. Como no Epítome, o *De Triangulis* contém a Lei de Seno que relaciona os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele escreveu no livro II um tratamento para triângulos planos, embora apareça esse tratamento também no livro I. Johannes Muller começou este trabalho em 1462, de acordo com pinheiro (2011), e deve ter escrito o livro IV ainda na Itália.

A obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* poderia servir como base para cálculos geométricos e astronômicos como ele havia originalmente planejado e deveria ser usado para calcular diariamente as coisas do céu e o tamanho e distância de cometas. A verdadeira ferramenta útil aqui era a trigonometria. No livro I existiam 23 definições, 7 axiomas e 57 teoremas, nos livros II, III, IV e V não haviam nem definições e nem axiomas, apenas teoremas, 33, 56, 34 e 15 respectivamente, em cada livro.

De acordo com Pereira (2011) Johannes Muller se baseou apenas nas regras iniciadas no Epítome para dar continuidade à Trigonometria Esférica. Ele já estava familiarizado com os trabalhos de Menelaus, Theodosius e Gebber, como revelado em suas cartas para Bianchini, porém, nenhum deles foram mencionados no *De Triangulis*. Ou seja, Muller omite suas fontes, embora não tenha declarado os teoremas como sendo dele próprio, porém, sabe-se que o livro e as tábuas de seno são fruto do seu trabalho. Logo, podemos atribuir a ele a Lei dos senos e a solução de muitos triângulos.

De acordo com Costa (2013) Nicolau Copérnico (1473-1543) contribuiu à trigonometria ao completar, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu *De Lateribuset Angulis Triangulorum*, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus em 1542, onde contempla a

construção de tabelas trigonométricas que parte desde o século II a.C. com Hiparco de Nicéia até a construção da tabela feita por Copérnico no século XVI.

Segundo Mendes (2010) para sustentar sua teoria do universo, Copérnico necessitava de alguns desenvolvimentos em trigonometria, como por exemplo, a tabela de senos, encontrada em sua obra *De revolutionibus orbium coelestium*, que passou a ser modelo à astronomia e posteriormente tomou o lugar da tabela de Ptolomeu, um dos autores mais importantes relacionadas à construção das tabelas trigonométricas com sua obra *Almagesto*.

Com a construção de uma tabela de senos para usar em sua teoria do universo, Nicolau Copérnico, de acordo com Mendes (2010) relacionou tal tabela com linhas retas e círculos, com triângulos planos e esféricos. Copérnico parte então do consenso unânime dos matemáticos e divide o círculo em  $360^\circ$ , adotou uma divisão do diâmetro em 200 mil unidades que entende ser suficiente para excluir qualquer erro apreciável, considerando que quando acontecer das quantidades não corresponderem umas às outras, como número inteiro a outro número inteiro, basta usar uma aproximação.

Copérnico explica a partir de seis teoremas e um problema os seus procedimentos para a construção de sua tabela de senos, postos a seguir de acordo com Mendes (2010):

*1º teorema: Dado o diâmetro de um círculo também são dados os lados do triângulo, do quadrado, do pentágono, do hexágono e do decágono inscritos num círculo.*

*2º teorema: Se um quadrilátero estiver inscrito num círculo, o retângulo formado pelas suas diagonais é igual ao retângulo formado pelos lados opostos.*

*3º teorema: Sendo dadas as cordas que subtendem a arcos desiguais de um semicírculo, também é dada a corda que subtende a diferença entre os dois arcos.*

*4º teorema: Dada a corda que subtende um arco, é igualmente dada a corda que subtende a corda correspondente a metade desse arco.*

*5º teorema: Se são dadas as cordas subtendidas por dois arcos, é dada também a corda correspondente ao arco resultante da soma dos dois.*

*6º teorema: A razão entre dois arcos é maior do que a razão entre a corda do maior e a do menor.*

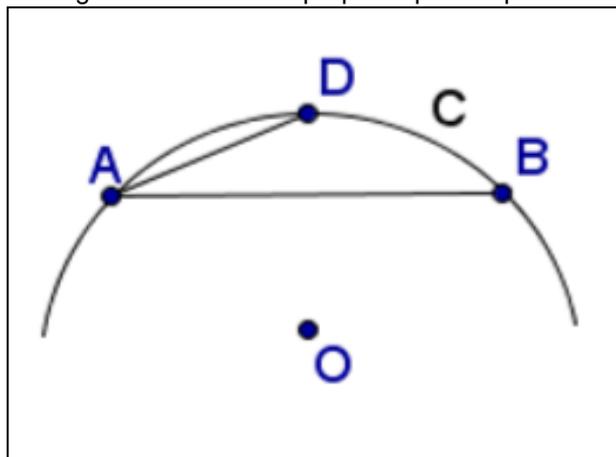
*Problema: Um arco é sempre maior do que a corda por si subtendida, porque uma linha reta é a linha mais curta entre dois pontos. Mas esta desigualdade tende*

para a igualdade quando se passa das secções maiores de um círculo para os menores. Assim, finalmente, quando a corda tocar o círculo, unem-se numa só a linha reta e a curva.

De acordo com Mendes (2010) Copérnico exemplifica da seguinte forma:

Seja  $C(0, r)$ ;  $\forall A \in C, AO = r$

Figura 18: Problema proposto por Copérnico



Fonte: Mendes (2010)

- AB: arco  $3^\circ$
- AD: arco  $1\frac{1}{2}^\circ$
- crd AB = 5235 unidades
- crd AD = 2618 unidades
- $2r = 200.000$  unidades
- Arco AB = 2 . arco AD, mas crd AB < 2 . crd AD

Se AB: arco  $1\frac{1}{2}^\circ$  e AD: arco  $\frac{3}{4}^\circ$ ,

crd AB = 2618 unidades e

crd AD = 1309 unidades

arco AB = 2 . arco AD, mas crd AB < 2 . crd AD.

Dessa forma a desigualdade desaparece, como se a curva e a reta se formassem em uma única linha, Copérnico então conclui que as cordas dos arcos frações de  $1^\circ$  estão em proporção com as 1309 unidades da corda do arco de  $\frac{3}{3}^\circ$ . Sendo assim, encontra:

- $\text{crd } \frac{1}{4}^\circ = \frac{\text{crd } \frac{3}{4}^\circ}{3} = \frac{1309}{3} = 436,333 \dots \Rightarrow \text{crd } \frac{1}{4}^\circ \cong 436,25$
- Corda de  $1^\circ$

$1^\circ = \frac{3}{4}^\circ + \frac{1}{4}^\circ \Rightarrow$  aplica o 5º teorema:

$$(\text{crd } 1^\circ)^2 = (2r)^2 - (\text{crd } 179^\circ)^2$$

$$\text{crd } 179^\circ = \frac{\text{crd}\left(180 - \frac{3}{4}^\circ\right) \cdot \text{crd}\left(180 - \frac{1}{4}^\circ\right) - \text{crd}\frac{3}{4}^\circ \cdot \text{crd}\frac{1}{4}^\circ}{2\pi}$$

$$\text{crd } 179^\circ = 199992,3847$$

$$\text{crd } 1^\circ = 1745,2971 \Rightarrow \text{crd } 1^\circ \cong 1745$$

Copérnico determina a corda correspondente a  $\frac{1}{2}^\circ$  utilizando o 4º teorema, ou seja, pelo arco metade:  $\left(\text{crd } \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2r \cdot \left[r - \frac{1}{2}\text{crd } (180^\circ - \alpha)\right]$ :

$$(\text{crd } 1/2^\circ)^2 = 200000 \cdot \left[100000 - \frac{1}{2}\text{crd}179^\circ\right]$$

mas:

$$(\text{crd}179^\circ)^2 \cong 199992 \Rightarrow \text{crd } 1/2^\circ \cong 872,5$$

Em seguida Copérnico encontra a corda correspondente a  $1/3^\circ$ , com o mesmo procedimento utilizado para o cálculo de  $\frac{1}{4}$ , isto é, considerando que as cordas dos arcos frações de  $1^\circ$  estão em proporção, então

$$\text{crd } \frac{1}{3}^\circ = \frac{\text{crd}1^\circ}{3} = \frac{1745}{3} = 681,666 \dots \Rightarrow \text{crd } \frac{1}{3}^\circ \cong 582$$

Ainda utilizando o 4º teorema, encontra a corda correspondente ao arco de  $1/6^\circ$

$$\text{Crd } 1/6^\circ \cong 291$$

Copérnico inicia sua tabela de cordas com a medida de  $1/6^\circ$ , a partir daí e em escala ascendente apresenta as medidas de outras cordas, as quais podem ser encontradas utilizando os 6 teoremas comentados.

Copérnico constrói então uma tabela na escala ascendente de  $1/6$  e com três colunas: na primeira estão os graus ou pares de um arco e sextas partes de um grau; a segunda tem o valor numérico da metade da corda correspondente ao dobro do arco; a terceira contém as diferenças destes valores numéricos relativos a cada grau. Estas diferenças permitem a interpolação de quantidades proporcionais correspondentes a cada minuto de grau.

Sete anos após o falecimento de Nicolau Copérnico nasce John Napier(1550-1617), oitavo proprietário de Merchiston, filho de Archibald Napier

com sua primeira esposa Janet Bothwell. De acordo com Gillispie (2007) com treze anos de idade, Napier, foi para o St. Salvator's College de St. Andrews, onde morou com John Rutherford, o diretor da faculdade. Pouco se sabe sobre a vida de Napier durante esse período.

Apesar de Napier ser conhecido na história da matemática como o inventor dos logaritmos, ele também fez uso frequente de teoremas trigonométricos, e deu contribuições ao desenvolvimento e à sistematização da trigonometria esférica, que foi considerada excelente. Segundo Gillispie (2007) as regras de Napier para o triângulo retângulo esférico foram publicadas em *Descriptio*, onde ele usou expressões logarítmicas e exibiu o caráter delas em relação ao pentágono estrelado com cinco ângulos retos.

Em um período de sua vida, após retomada dos processos de aprendizagem na Europa Ocidental, de acordo com Gillispie (2007), alguns dos primeiros progressos foram na trigonometria, que se desenvolveu como um campo de estudo independente, aplicado principalmente à astronomia, mas também à agrimensura, à cartografia e à navegação. Levou muito tempo para realizar o cálculo de detalhadas tabelas de senos e tangentes.

De acordo com Costa (2013) a invenção posterior dos logaritmos e alguns teoremas demonstrados por Napier mostram que a trigonometria de Regiomontanus – um dos maiores matemáticos do século XV que estabeleceu a trigonometria como uma ciência independente da astronomia – não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No *tratado*, Napier calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de seno de Purbach – mestre de Regiomontanus – e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na trigonometria plana e esférica.

Muitas relações trigonométricas que conhecemos hoje foram deduções feitas por François Viète (1540-1603), tais como a transformação de soma e produto, arco duplo e arco triplo. Além da trigonometria, Viète teve grande destaque no desenvolvimento da Álgebra. O mais famoso trabalho é a sua obra *In artem*, ao qual contribuiu de forma singular ao apresentar uma nova nomenclatura para equações algébricas, introduzindo na Álgebra o emprego sistemático das letras para representar valores numéricos, que tomou possível a noção de fórmula geral.

#### 4.7. TRIGONOMETRIA DO SÉCULO XVII AO SÉCULO XIX

Viète era profundo conhecedor de trigonometria. Em sua obra *Canon mathematicus seu ad triangula* tratava-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Obteve expressão para  $\cos(n\theta)$  como função de  $\cos\theta$  para  $n = 1, 2, 3, \dots, 9$  e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irreduzível das cúbicas.

Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) deu sua contribuição para a trigonometria ao desenvolver um método de computar tangentes enquanto trabalhava em cicloide algum tempo antes de 1636. No início ele manteve essa descoberta em segredo, mas decidiu revelar seu método entre 1639 e 1644. Para realizar os desenhos tangentes, considerou uma curva descrita por um ponto móvel cujo movimento é a resultante de vários movimentos mais simples. Além disso, também descobriu um método de derivar uma curva a partir de outra curva. Para essas curvas, que também foram aplicadas a algum efeito quadraturas, o Evangelista Torricelli deu o nome de “linhas Robervallian”. Além disso, foi capaz de desenvolver habilidade e conhecimento suficientes para integrar o  $\sin(x)$  e computar a extensão do arco de uma espiral.

De acordo com Costa (2003) Isaac Newton (1643 – 1727), também deu sua contribuição à trigonometria, pois, em conjunto com seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido  $\arcsin x$  em séries e, por reversão, deduzido a série para  $\sin x$ . Além disso, passou a fórmula geral para Leibniz para  $\sin(nx)$  e  $\cos(nx)$ , tendo assim, aberto a perspectiva para  $\sin x$  e o  $\cos x$  surgirem como números e não grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Leonhard Euler (1707 – 1783) fez grandiosas descobertas para áreas como teoria dos números, análise e mecânica, seus esforços eram sempre voltados para as ciências matemáticas. As descobertas de Euler ajudaram também para a trigonometria, ele ofereceu duas maneiras diferentes para a exposição analítica do sistema da trigonometria esférica. Mostrou que a trigonometria das superfícies esferóides podia ser aplicada à geodésia superior em 1755. Gillispie (2007) diz em

seus estudos que em 1763 Euler fez o primeiro avanço substancial no estudo da curvatura das superfícies.

Em 1770, em uma nota escrita, porém, só publicada em 1862, Leonhard Euler descobriu a condição necessária para a aplicação das superfícies, que foi independentemente determina por Gauss em 1828. Além disso, criou uma fórmula matemática que mostra uma relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial.

Joseph Fourier (1768 – 1830) teve duas grandes importantes contribuições para a matemática: a série de Fourier e a transformada de Fourier. Falaremos sobre as séries de Fourier, que é onde ele traz grandes contribuições para a trigonometria, pois diz respeito à representação de sinais como uma combinação linear de sinais básicos como senos e cossenos, ou exponenciais complexas.

Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717-1738) já haviam estudado sobre as séries infinitas para resolverem problemas diversos da física, porém, Fourier foi o primeiro a fazer um estudo sistemático das séries infinitas para resolver a equação da propagação do calor na física, na publicação "*Mémoiresurlathéorie de lachaleur*", embora ele não tenha expresso os seus resultados com grande formalismo. Somente uns anos mais tarde que dois matemáticos: o alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), expressaram os resultados de Fourier com mais rigor e precisão.

De acordo com Santos (2004) nas séries trigonométricas de Fourier para sinais contínuos, ele considerou um sinal periódico contínuo  $x(t)$  pertencente ao conjunto dos números reais, para todo  $t$ . onde o sinal  $x(t)$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sen\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

onde os coeficientes  $a_0, a_n, b_n$ , são chamados *Coefficientes de Fourier*, com  $n$  pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos sem o zero ( $n \in \mathbb{Z}_*^+$ ). Como  $x(t)$  possui período fundamental  $T$ , sua frequência fundamental é  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , sendo assim, reescrevemos a série da seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sen(n\omega_0 x)$$

Onde:

T = Período fundamental do sinal x(t);

$\omega_0$  = Frequência fundamental do sinal x(t);

$$a_k = \frac{2}{T} \int x(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) dt = \frac{2}{T} \int x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot kt) dt, \text{ com } K = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int x(t) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) dt = \frac{2}{T} \int x(t) \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot kt) dt, \text{ com } K = 1, 2, 3, \dots$$

observe que temos que as integrais acima são tomadas ao longo do intervalo do período T do sinal periódico x(t), além de existir  $a_0$  na série  $a_k$ , porém, não existir  $b_0$  na série  $b_k$ , e, por fim,  $a_0$  pode ser reescrito de forma mais simplificada pois como:  $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) = \cos(\omega_0 \cdot kt)$ , com  $K = 0$ , então,  $a_0 = \frac{2}{T} \int x(t) \cdot dt$  ou seja,  $a_0$  de certa forma representa um valor médio do sinal x(t) no intervalo de um período T.

Esta série é conhecida como Série Trigonométrica de Fourier, pois contém termos com senos e cossenos, onde a equação de x(t) é conhecida como “*equação de síntese*” e as de  $a_k$  e  $b_k$  são conhecidas como “*equação de análise*”.

## 5. RECORTE DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO

Os recortes apresentados nesse capítulo foram pensados de maneira que possam ser utilizados durante as aulas de Trigonometria. O primeiro recorte traz um texto que pode ajudar a introduzir o conteúdo de Trigonometria contando um pouco do seu surgimento. O segundo recorte faz menção ao primeiro cálculo da circunferência da terra, no qual foi utilizado a trigonometria como fator importante para a realização desse cálculo. O terceiro recorte traz, com o uso da história, o surgimento das ideias de seno, cosseno e tangente. Além disso, apresento sugestões de atividades para serem trabalhadas em sala de aula a partir do texto base.

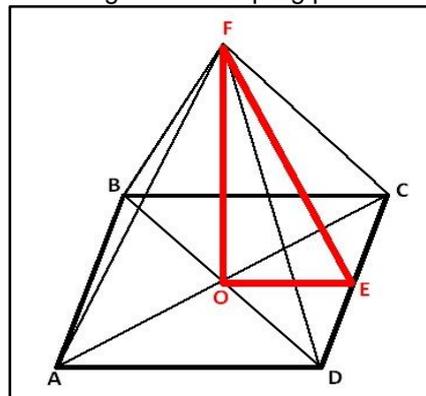
### 5.1. INTRODUÇÃO AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Assim como na Matemática, as origens da Trigonometria também são incertas. Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. Entretanto, embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações existentes entre lados e ângulo dos triângulos para resolverem problemas foi a atração pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.

De acordo com Oliveira (2010), com o passar do tempo, mais especificamente na Babilônia e no Egito, surgiu à necessidade de utilizar mais ainda a Trigonometria para a resolução de problemas sobre a Astronomia, a cronologia do tempo e a agricultura. Nessa investigação mais a fundo para melhor compreender o universo, a Trigonometria foi uma ferramenta importante nas mãos, não só dos babilônios e dos egípcios como também nas dos gregos, hindus e árabes.

A trigonometria teve grande importância nas medições das pirâmides, no qual foi utilizada uma razão trigonométrica chamada *seqt* – o que hoje chamamos de cotangente, e vocês irão estudar esse tópico no conteúdo de trigonometria.

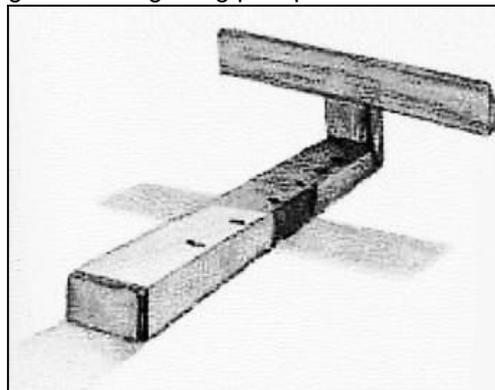
Figura 19: Seqt Egípcio



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Teve contribuição, também, no surgimento do primeiro relógio de sol, chamado *gnômon*, construído e utilizado pelo homem, que consistia em uma coluna que, iluminado pelo sol ou pela lua, projetava sua sombra, que se movia com o passar das horas e entre o seu ponto inicial e seu ponto final havia um espaço que o homem fracionou criando a divisão do tempo. Enquanto os gregos antigos achavam que as horas eram divindades mitológicas, simbolizando as partes do dia, os babilônios e os chineses foram os primeiros que dividiram o dia em horas.

Figura 20: Régua egípcia para medir o tempo



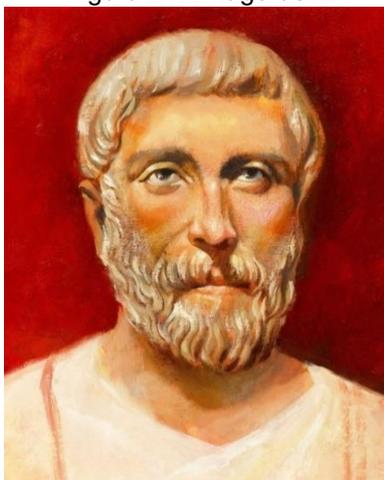
Fonte: Google Imagens (2021)

Como bem já foi mencionado, os primeiros vestígios da Trigonometria não surgiram apenas no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios demonstravam grande interesse pela astronomia, tanto por questões religiosas, quanto pelas vinculações com o calendário e as épocas de plantio. De acordo com Costa (2003) é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidade de medidas e uma

escala. Os babilônios foram extraordinários astrônomos e influenciaram os povos posteriores.

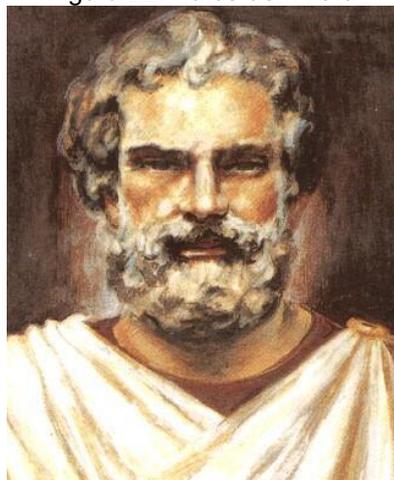
Os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos estavam na Grécia, são eles: Tales de Mileto (625 – 546 a.C.) e seu discípulo Pitágoras (570 – 495 a.C.); ambos foram um dos primeiros a contribuir com o surgimento da trigonometria, Tales com seus estudos de semelhança de triângulos que embasam a trigonometria e Pitágoras ao demonstrar o teorema que leva seu nome: “*Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos*”. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

Figura 21: Pitágoras



Fonte: Google Imagens (2021)

Figura 22: Tales de Mileto



Fonte: Google Imagens (2021)

## ATIVIDADES PROPOSTAS

01. Embora os egípcios e os babilônios tivessem utilizado as relações trigonométricas existentes entre lados e ângulos dos triângulos para resolverem problemas, o que de fato impulsionou a evolução desse conteúdo?
02. Quais foram os primeiros acontecimentos que precisaram utilizar cálculos trigonométricos?
03. Após a explicação de todos os tópicos de Trigonometria, responda: Quais conhecimentos atuais estão relacionados ao que antes foi chamado de *septē gnômon*?
04. De acordo com o texto, quais foram os primeiros personagens a serem reconhecidos como matemáticos e que contribuíram com o surgimento da trigonometria?

## 5.2. A IDEIA DE SENO, COSSENO E TANGENTE

Hiparco de Nicéia (190 a.C. – 120 a.C.), um importante matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da trigonometria, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros, no que pode ter vindo ser a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. A partir de então começaram a surgir às ideias de seno, uma vez que conhecido o comprimento da corda podia-se calcular o seno da metade do arco.

Figura 23: Hiparco de Nicéia



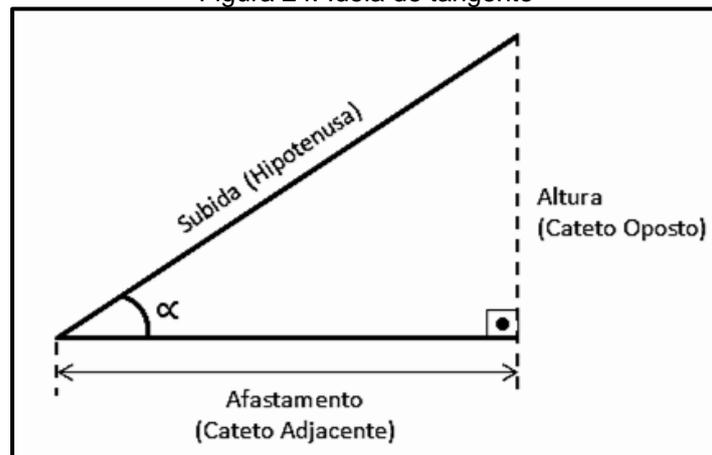
Fonte: Google Imagens (2021)

A tabela trigonométrica de Hiparco, segundo Gillispie (2007), foi baseada em um círculo, cuja circunferência era dividida em 360 graus de 60 minutos e o raio  $R$  expresso em minutos era dado por  $R = 360 \cdot 60' / 2\pi$ , que seria aproximadamente  $3438'$ . Essa tabela das cordas sobreviveu apenas em relação aos senos com  $R = 3438'$  e valores calculados a intervalo de  $3\text{-}3/4^\circ$ .

Já a palavra cosseno surgiu apenas no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Tais conceitos, seno e cosseno, foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, já o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

A ideia de tangente, em muitos livros didáticos, é apresentada como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo e, outros livros, apontam a tangente como a associação da medida do ângulo de subida com o índice na mesma subida, como está posto na figura 24 a seguir:

Figura 24: Ideia de tangente



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ou seja,

$$tg \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \text{índice de subida}$$

De outro lado, a ideia de seno é apresentada como a razão entre a altura e o comprimento da subida, ou seja, cateto oposto pela hipotenusa, enquanto o cosseno é a razão entre o afastamento e o comprimento da subida, cateto adjacente pela hipotenusa. Sendo assim,

$$sen \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } cos \alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

No entanto, antes de surgir tais fórmulas que temos hoje e que encontramos facilmente em livros didáticos, apostilas e internet, houveram muitos caminhos traçados para poder chegar a tais formulações, assim como personagens de diferentes áreas de conhecimento que contribuíram para o desenvolvimento dessas ideias.

De acordo com Costa (2008), Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.) foi um dos primeiros estudiosos gregos a aplicarem matemática na astronomia, apesar de Hiparco ser conhecido como o “pai da trigonometria”, foi Aristarco que forneceu os primeiros passos da trigonometria e, por mais que esses escritos não tenham chegado até nós, eles foram relatados em seu tratado sobre tamanhos e distâncias do sol e lua, o qual ele usou o equivalente, em linguagem atual, a:

$$\frac{sen a}{sen b} < \frac{a}{b} < \frac{tg a}{tg b}$$

Onde  $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$ .

Outro grande personagem que contribuiu para o desenvolvimento do conteúdo em questão foi Cláudio Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C.), considerado o maior astrônomo da antiguidade, no entanto, pouco se sabe sobre ele. Sua obra, *Syntaxis Mathematica*, é popularmente conhecida como Almagesto – “O grande tratado” ou “O Maior”. Um trabalho basicamente de matemática e astronomia, que foi dividida em treze livros e, dentre esses livros, Ptolomeu se dedicou às cordas trigonométricas nos capítulos dez e onze do primeiro livro.

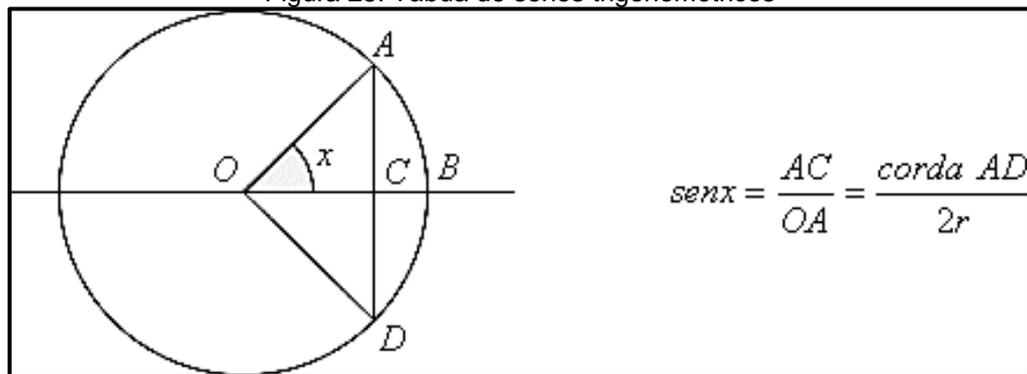
De acordo com Costa (2008), o capítulo onze consiste numa tabela de cordas, já o capítulo dez explica com a tabela pode ser calculada. No Almagesto não existe nenhuma tabela que contenha as funções seno e cosseno, mas, sim, a função *corda do arco*  $x$ , ou *crd*  $x$ , que significa comprimento da corda que corresponde a um arco de  $x$  graus em um círculo cujo raio é igual a 60.

Na teoria de Ptolomeu, segundo Aaboe (1964 apud Costa, 2008), a circunferência foi dividida em 360 partes – o que chamamos hoje de graus – o diâmetro foi dividido em 120 partes e cada uma dessas partes foram divididas em 60 outras partes (minutos) e essas são divididas novamente em mais 60 partes (segundos).

Dessa forma, de acordo com Costa (2008) na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira, listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e, a terceira, que dava o aumento médio de *crd*  $x$  correspondente a um acréscimo de um minuto em  $x$  – valor da corda correspondente a um arco de corda já conhecida acrescido de um minuto de grau. Essa coluna era usada para interpolações, ou seja, para achar o valor de entradas na coluna de arcos *crd* se  $x$  estivesse entre duas. (COSTA, 2008, p. 6)

A figura a seguir ilustra o processo feito por Hiparco e aperfeiçoado por Ptolomeu, na qual evidencia que uma tábua de cordas é equivalente a uma tábua de senos trigonométricos:

Figura 25: Tábua de senos trigonométricos



Fonte: Costa (2008)

Pois,

$$\text{Sen } \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AD}{\text{diâmetro do círculo}} = \frac{\text{crd } 2 \alpha}{120}$$

A tábua de Ptolomeu fornece a medidas das cordas dos ângulos centrais de meio em meio grau até 180°. Sendo assim, a tábua, na realidade, oferece os senos dos ângulos por intervalos de quarto de grau de 0° a 90°.

Quadro 4: Cordas de Ptolomeu

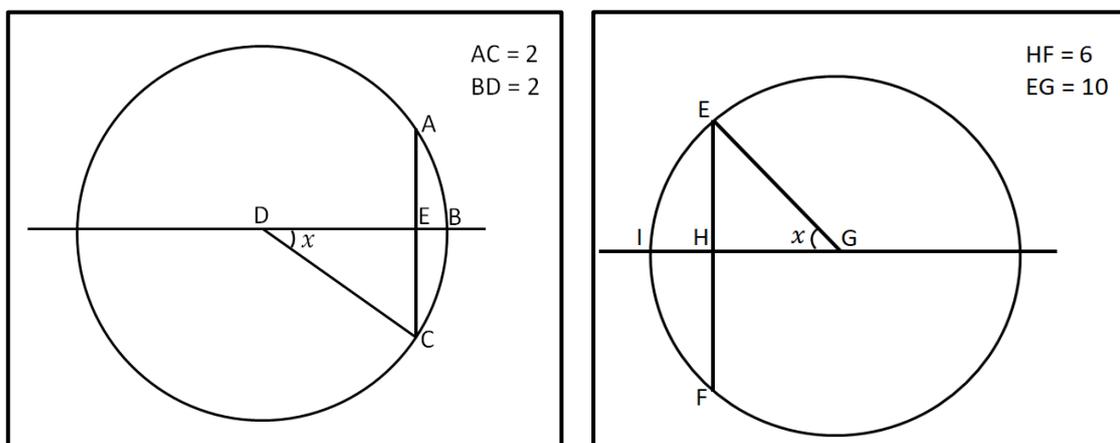
$\alpha$ em graus	Crd ( $\alpha$ )	$\alpha$ em graus	Crd ( $\alpha$ )
$\frac{1^\circ}{2}$	0; 31; 25	40°	41; 2; 33
1°	1; 2; 50	60°	60; 0; 0
$1^\circ \frac{1}{2}$	1; 34; 15	70°	68; 49; 45
2°	2; 5; 40	90°	84; 51; 57
$2^\circ \frac{1}{2}$	2; 37; 4	100°	91; 55; 32
3°	3; 8; 28	120°	103; 55; 23
5°	5; 14; 4	135°	110; 51; 57
10°	10; 27; 32	140°	112; 45; 28
20°	20; 50; 16	160°	118; 10; 37
30°	31; 3; 30	180°	120; 0; 0

Fonte: Oliveira (2010)

## ATIVIDADES PROPOSTAS

1 – De acordo com o texto, quem foi um dos primeiros estudiosos gregos que forneceu os primeiros passos para o cálculo do que hoje chamamos de tabela trigonométrica?

2 – Calcule o seno do ângulo  $x$  de cada figura a seguir, usando o mesmo processo feito por Hiparco e aperfeiçoado por Ptolomeu. Em seguida consulte uma tabela trigonométrica para saber quantos graus, aproximadamente, equivale ao valor de  $x$ .



3 – Com uma tabela de razões trigonométricas atual e a Tábua de Cordas de Ptolomeu, análise suas diferenças e semelhanças e registre aqui a sua percepção.

### 5.3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS À CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA

Apesar da origem da Trigonometria ser considerada como incerta, sabe-se que, durante a sua evolução, houveram muitos personagens que, através de seus conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida, contribuíram para que essa evolução chegasse no que temos hoje, e cada um desses personagens serviu de ponte para que o próximo continuasse seus cálculos e avançasse um passo a mais a frente.

Como exemplo dessa ponte, podemos citar três personagens que foram muito importantes para o desenvolvimento, não só da trigonometria, mas também para outras áreas do conhecimento, como a física e a astronomia. O primeiro deles é Arquimedes (287 – 212 a.C.), que, de acordo com Mol (2013), consagrou-se a matemática quando conseguiu avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo e com seus cálculos ele conseguiu encontrar um valor próximo para  $\pi$ , da seguinte maneira:

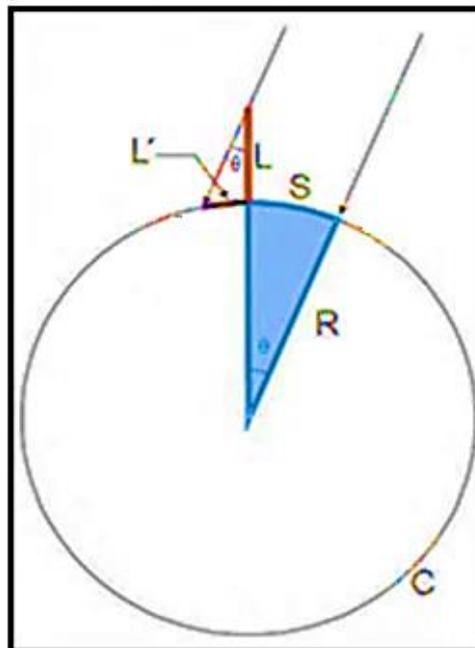
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}, \text{ ou seja, } \frac{3 \cdot 71 + 10}{71} < \pi < \frac{3 \cdot 70 + 10}{70}$$

Logo,  $3,1408 < \pi < 3,1428$  (comparando com o valor  $\pi = 3,14159\dots$ )

Mesmo estudando círculos e retas e aplicando esses resultados na Astronomia, Arquimedes não conseguiu chegar a uma trigonometria sistemática. Porém, seus estudos e suas cartas serviram de ponte para que Erastóstenes (276 – 194 a.C.) começasse a produzir, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, a mais notável medida da circunferência da terra na Antiguidade.

Por volta de  $\pm 240$  a.C., Erastóstenes fez uma medida surpreendentemente correta da circunferência da terra, para isso ele comparou as sombras ao meio-dia entre Alexandria e Siena. Abaixo tem uma análise mais detalhada da ideia de Erastóstenes feita por Vinagre (2002). A partir do esquema, iremos definir as grandezas envolvidas:

Figura 26: Esquema da Ideia de Eratóstenes



Fonte: (Vinagre 2002)

- S é a distância entre Siena e Alexandria;
- $\theta$  é o ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria;
- C é a circunferência da terra;
- D é o diâmetro da terra;

- R é o raio da terra;
- L é o comprimento do poste;
- L' é o comprimento da sombra do poste;

Para calcular a circunferência da terra, de acordo com Vinagre (2002), Eratóstenes utilizou a seguinte razão trigonométrica:  $\frac{S}{C} = \frac{\theta}{2\pi}$ . Ou seja, a razão entre a distância de Alexandria e Siena e a circunferência igual a razão do ângulo formado a partir da distância entre as cidades e o ângulo total da circunferência terrestre ( $2\pi$ ). Isolando C, teremos:  $C = \left(\frac{2\pi}{\theta}\right) \cdot S$ . E a partir dessa relação Eratóstenes fez seus cálculos, substituiu os valores que ele encontrou para  $\theta = (0,02 \cdot 2\pi)$  e o valor de  $S = (5.000 \text{ estádios})$  - que era obtido pelo número de passos dados de Siena até Alexandria pelos Bematistas do Rei, multiplicado pelo comprimento de cada passo que supostamente tinha o mesmo tamanho - E obteve a seguinte equação:

$$C = \left(\frac{2\pi}{0,02 \cdot 2\pi}\right) \cdot 5000; C = \left(\frac{1}{0,02}\right) \cdot 5000; C = 50.5000; C = 250.000 \text{ estádios}$$

E para obter o resultado em quilômetros multiplicamos o resultando obtido em C por 0,157 Km, o que resulta:  $C = 39.250 \text{ Km}$ . A partir desse valor encontrado poderemos também calcular o valor do Raio da terra utilizando a relação  $C = 2\pi R$  e por consequência o valor do Diâmetro (o dobro do Raio).

## ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Observando o esquema da ideia de Eratóstenes, que foi apresentado no texto, diga qual foi a relação trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) utilizada por ele para descobrir o valor do ângulo formado da fração que parte das cidades de Siena e Alexandria?
2. Supondo que você deseja calcular a distância entre duas cidades, e toma como base a mesma ideia que foi apresentada por Eratóstenes, e utiliza um poste que mede 15m e que, o comprimento de sua sombra, em determinado momento do dia, seja igual ao seu tamanho real, então qual será o valor do ângulo, em graus e em radianos, formado entre essas duas cidades?

3. Sabendo que hoje em dia, com a ajuda dos cálculos apresentados por Erastóstenes, temos que a medida da circunferência da terra mede 40.075km. Sendo assim, calcule qual será a distância entre duas cidades que formam o ângulo (em radianos) que você obteve no item anterior, utilizando a fórmula apresentada por Erastóstenes.

## 6. CONSTITUIÇÃO DO PROCESSO DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo será apresentado como foram obtidos os resultados na coleta de dados para a validação dos recortes históricos e atividades, tendo como foco alcançar um número significativo de professores de matemática. Este produto foi aplicado somente para professores de matemática via *Google Forms*, por uma questão de viabilidade.

O questionário contém duas partes, a primeira dela traz o texto histórico, intitulado “**História da Trigonometria**”, e sua respectiva avaliação; a segunda parte traz a “**Apresentação dos Recortes da História da Trigonometria para o ensino**”, no qual contém 3 recortes do texto maior e suas respectivas atividades propostas, além de sua avaliação.

O questionário foi elaborado seguindo as alternativas de múltipla escolha para indicar a percepção do item avaliado de forma percentual, que varia de 0% a 100%, indicado da seguinte maneira: De nenhuma forma (0%); Pontualmente (25%); Em parte (50%); Na Maioria das vezes (75%) e Integralmente (100%). Em cada questão foi deixado, de forma opcional, uma questão aberta, para que o professor pudesse contribuir de forma qualitativa com o intuito de melhorar a utilização deste produto.

### 6.1. AVALIAÇÃO DO TEXTO HISTÓRICO

Por meio do link disponibilizado, o professor fará a leitura do texto que trás um pouco da história da trigonometria e, em seguida, trará sua avaliação e contribuições respondendo os questionamentos:

1. Você acredita que tais textos, que contam a história do conteúdo, podem servir como um recurso didático durante as aulas, podendo contribuir para responder alguns questionamentos feitos por alunos, como: “quem inventou isso?”, “como isso surgiu na matemática?” e outros.

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)

- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

1.1. Você teria alguma outra sugestão de recursos didáticos que são capazes de responder tais indagações feitas por alunos em sala de aula? Em caso de sim, quais?

---

2. Você considera que textos como esses podem contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de Trigonometria?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

2.1. Você teria outras sugestões que pudessem melhorar o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria? Em caso de sim, quais?

---

3. Você acredita que a história da trigonometria pode ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

3.1. Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

---

4. Você acha que a história da trigonometria pode inspirar o aluno a se interessar mais pela matemática?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

5. Você utilizaria recortes dos textos durante a apresentação do conteúdo de trigonometria em sala de aula?

- f) De nenhuma forma (0%)
- g) Pontualmente (25%)
- h) Em parte (50%)
- i) Na maioria das vezes (75%)
- j) Integralmente (100%)

5.1. Caso não, quais outros métodos você utilizaria para apresentar o conteúdo em sala de aula?

---

6. O texto apresentado pode contribuir para a sua formação didática pedagógica?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

6.1. Em caso de não, o que poderá contribuir para a sua formação didática pedagógica?

---

## 6.2. AVALIAÇÃO DOS RECORTES E ATIVIDADES

Nesta parte, foram inseridos três recortes históricos e atividades, retirados do texto principal “**História da Trigonometria**”. A partir dos recortes e das atividades propostas, o professor deve fazer sua avaliação respondendo os questionamentos:

### RECORTE 1: INTRODUÇÃO AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

As atividades aqui apresentadas são sugestões para a introdução do conteúdo de trigonometria no ensino fundamental, mas precisamente no 9º ano. No qual foi feito um recorte do texto supracitado “HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA”.

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link **RECORTE 1**.

1. Você utilizaria o recorte 1 apresentado para introduzir o conteúdo de Trigonometria com os alunos em sala de aula?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

1.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão de como introduzir o conteúdo de Trigonometria em sala de aula?

---

2. O Recorte 1 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

2.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

---

3. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante a introdução do conteúdo de trigonometria?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

3.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria tal recurso didático em sala de aula?

---

3.2. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula?

---

## RECORTE 2: A IDEIA DE SENO, COSSENO E TANGENTE

As atividades aqui apresentadas são sugestões para a incrementação durante o processo de ensino e aprendizagem do tópico de seno, cosseno e tangente, mostrando como surgiu cada ideia e quem contribuiu para esse desenvolvimento. No qual foi feito um recorte do texto supracitado "HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA".

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link **RECORTE 2**.

1. Você utilizaria o recorte2 apresentado para introduzir as ideias de seno, cosseno e tangente com os alunos em sala de aula?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)

- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

1.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para introduzir as ideias de seno, cosseno e tangente em sala de aula?

---

2. O Recorte 2 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

2.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

---

3. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante a introdução das ideias de seno, cosseno e tangente?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

3.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria tal recurso didático em sala de aula?

---

3.2. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula?

---

### RECORTE 3: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS À CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA

As atividades aqui apresentadas são sugestões para a iniciação do tópico Razões Trigonométricas, mostrando como surgiu essa primeira ideia e como a mesma contribuiu para o primeiro cálculo da circunferência da terra. No qual foi feito um recorte do texto supracitado “HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA”.

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link **RECORTE 3**.

1. Você utilizaria o recorte3 apresentado para iniciar o conteúdo de razões trigonométricas com os alunos em sala de aula?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

1.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão de como iniciar o conteúdo de razões trigonométricas em sala de aula?

---

2. O Recorte 3 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

2.1. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

---

3. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante a inicialização do tópico de razões trigonométricas?

- a) De nenhuma forma (0%)

- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

3. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria a atividade proposta em sala de aula?

---

4. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula?

---

Sendo assim, com o preenchimento do questionário, cada professor pode contribuir com a validação da proposta educacional ao apresentarem suas percepções e opiniões a respeito dos textos e das atividades propostas para uso em sala de aula.

## 7. VALIDAÇÃO DOS TEXTOS E DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo será apresentada a análise dos dados coletados por meio dos formulários que foram preenchidos por 32 professores de matemática, via *Google Forms*, com o principal objetivo de responder a questão de pesquisa. Foram extraídas algumas das contribuições mais relevantes e importantes dadas pelos professores e as mesmas foram organizadas em quadros, no qual cada professor é identificado como “P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, ..., P<sub>32</sub>”.

Para termos uma visão mais detalhada do produto educacional, analisaremos cada parte que compõe o questionário respondido pelo professor, no qual serão explorados os aspectos relevantes das percepções dos professores em relação à utilização dos recortes históricos e atividades, buscando identificar, a partir desses dados, os desafios e as oportunidades apresentadas pelos professores no uso desse recurso em sala de aula.

Sendo assim, a análise das respostas será apresentada em três etapas:

7.1. Validação das percepções do Texto Histórico;

7.2. Validação das percepções dos recortes e atividades;

É importante ressaltar que esta análise se baseia em uma abordagem qualitativa, buscando uma compreensão profunda da potencialidade dessa proposta no processo de ensino e aprendizagem, bem como de fornecer sugestões relevantes para melhorar seu potencial. Essa abordagem é de extrema importância para a análise dos resultados, tendo em vista que a mesma permite explorar percepções, opiniões e sugestões dos professores participantes.

### 7.1. VALIDAÇÃO DAS PERCEPÇÕES DO TEXTO HISTÓRICO

Nesse primeiro momento serão analisados os resultados obtidos a partir da avaliação do texto histórico (texto grande), considerado como texto principal, fonte dos recortes I, II e III, intitulado como “Uma História da Trigonometria”. Nessa etapa foram apresentados seis questionamentos, são eles:

**Q<sub>1</sub>:** Você acredita que tais textos, que contam a história do conteúdo, podem servir como um recurso didático durante as aulas, podendo

contribuir para responder alguns questionamentos feitos por alunos, como: “quem inventou isso?”, “como isso surgiu na matemática?” e outros.

**Q<sub>2</sub>:** Você considera que textos como esses podem contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de Trigonometria?

**Q<sub>3</sub>:** Você acredita que a história da trigonometria pode ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante?

**Q<sub>4</sub>:** Você acha que a história da trigonometria pode inspirar o aluno a se interessar mais pela matemática?

**Q<sub>5</sub>:** Você utilizaria recortes dos textos durante a apresentação do conteúdo de trigonometria em sala de aula?

**Q<sub>6</sub>:** O texto apresentado pode contribuir para a sua formação didática pedagógica?

No qual serão analisados de maneira quantitativa, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 5: Validação do Texto Principal – Uma História da Trigonometria

Questões	De nenhuma forma (0%)	Pontualmente (25%)	Em Parte (50%)	Na maioria das vezes (75%)	Integralmente (100%)
Q <sub>1</sub>	-	3,1%	4,9%	42,0%	50,0%
Q <sub>2</sub>	-	-	7,1%	28,6%	64,3%
Q <sub>3</sub>	-	-	-	42,9%	57,1%
Q <sub>4</sub>	-	2,2%	6,8%	35,1%	55,9%
Q <sub>5</sub>	-	7,1%	21,4%	35,7%	35,7%
Q <sub>6</sub>	-	-	-	42,9%	57,1%

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

A partir dos dados apresentados no quadro 5, nota-se que, de alguma forma, o texto que aborda a História da Trigonometria no Ensino de Matemática é um recurso aceitável pela maioria dos professores que responderam ao questionário. Aos professores que marcaram as opções “*De nenhuma forma*”, “*Pontualmente*”, “*Em parte*” e “*Na maioria das vezes*” além de contribuírem dando sugestões de como melhorar o texto histórico e o seu uso em sala de aula.

O primeiro questionamento foi referente ao uso da história da matemática em sala de aula como um possível recurso didático, a fim de responder as indagações que podem ser feitas pelos alunos durante as aulas de trigonometria. A seguir foram elencadas algumas das contribuições de como essas indagações podem ser respondidas além do uso da história da Matemática.

Quadro 6: Contribuição dos professores – Questão 1

<b>Professores</b>	<b>Contribuições</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	Além de slides, poderia ser utilizado gameficação para algumas escolas com internet.
<b>P<sub>8</sub></b>	Além da história a construção das figuras de números 8, 9, 10, 11, 13 e 14 com materiais manipuláveis e ou com a utilização de App como o GeoGebra.
<b>P<sub>9</sub></b>	Não somente o uso de textos que fazem menções da história, mas poderiam passar filmes, documentários, que abordassem a história dos conteúdos matemáticos.
<b>P<sub>12</sub></b>	O texto com a História do conteúdo pode ajudar a responder determinadas perguntas, mas infelizmente muitos alunos não fazem essas indagações, apenas se conformam em ter que aprender o conteúdo para passar de ano.
<b>P<sub>18</sub></b>	O uso de Quizz e jogos envolvendo a história da trigonometria podem ajudar a responder essas indagações e ainda é atrativo e divertido.
<b>P<sub>31</sub></b>	O uso da história é um bom recurso, e essa história pode ser contada através de histórias em quadrinhos, que talvez seja mais atrativo para o aluno.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Ao analisar as sugestões apresentadas pelos professores pode-se perceber que os professores 8, 9, 18 e 31 ao invés de apresentarem outros recursos didáticos, eles apenas incrementaram algo que possa melhorar ainda mais a utilização da história da matemática em sala de aula, com o intuito de tornar a sua utilização mais atrativa para os alunos.

Recursos didáticos como materiais manipuláveis, o uso de Software, Quizz, histórias em quadrinhos, entre outros, são fundamentais para que ocorra um ensino de qualidade, a fim de mostrar ao aluno que a matemática é uma área de conhecimento acessível a todos, além de proporcionar o desenvolvimento da prática de observação e construção de significados. Juntando esses outros recursos com o uso da história da matemática, o processo de ensino de aprendizagem pode se tornar ainda mais eficaz dentro e fora da sala de aula.

No quadro 7, foram apresentados algumas sugestões dos professores a respeito de como melhorar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de trigonometria, tendo em vista que 7,1% dos professores marcaram a opção “*Em parte*” e 28,6% a opção “*Na maioria das vezes*” quando lhes foi questionado se

textos com a história da matemática poderiam contribuir para o processo de ensino e aprendizagem no conteúdo de trigonometria.

Quadro 7: Contribuição dos professores – Questão 2

<b>Professores</b>	<b>Contribuições</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	Sequências Didáticas e Tecnologias Educacionais.
<b>P<sub>5</sub></b>	Prática fora da escola, utilizando monumentos reais.
<b>P<sub>7</sub></b>	Para o processo de construção de aprendizagem a história contribui positivamente para o conhecimento, mas por si só não garante que o conteúdo será assimilado pelo aluno. O professor deve estar atento para utilizar recursos e/ou metodologias que possa garantir aprendizado. Uma delas são as sequências didáticas, que podem ser baseadas nos estudos realizadas por Cabral (2017), desenvolvidas por meio de Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual.
<b>P<sub>8</sub></b>	Além da história a construção das figuras de números 8, 9, 10, 11, 13 e 14 com materiais manipuláveis e ou com a utilização de App como o GeoGebra.
<b>P<sub>22</sub></b>	Materiais Lúdicos, jogos, o uso de softwares e outros.
<b>P<sub>26</sub></b>	Usar Sequências Didáticas
<b>P<sub>29</sub></b>	Utilizar situações problemas do cotidiano, levando o aluno à percepção de que a trigonometria está presente em muitas situações do seu dia a dia, como a inclinação de uma escada, a altura de prédios, a distância percorrida por um avião, e outros.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

O processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de trigonometria muitas das vezes pode se tornar desafiador tanto para os alunos quanto para os professores, que tem como missão principal transferir esse conhecimento. No entanto, existem meios que podem ajudar a melhorar esse processo e fazer com que o seu ensino e aprendizado se torne eficaz e eficiente.

Um dos métodos mais citados pelos professores foram as sequências didáticas, no qual trata de um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa até o professor conseguir alcançar o seu objetivo. Para se aprofundar mais nessa metodologia, recomendo os estudos feitos por Cabral (2017) intitulada como “*Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração*”, no qual retrata mais detalhadamente o seu uso.

Além do uso de sequências didáticas, foi apontado também a prática fora da escola e a associação do conteúdo de trigonometria com o cotidiano do aluno, a fim de mostrar-lhe que a trigonometria vai além de fórmulas que estão postas

nos livros didáticos, mas também está presentes em muitas situações que os acompanham no seu dia a dia. Essa associação é considerada como um potencializador do processo de ensino e aprendizagem por ampliar a visão do aluno em relação a tudo que o cerca, podendo relacionar com os seus conhecimentos matemáticos.

No quadro seguinte são apresentadas as sugestões dos professores de como melhorar o produto educacional para ser utilizado em sala de aula por eles, com o intuito de torná-los durante o ensino do conteúdo de trigonometria, tendo em vista a utilização da história do conteúdo.

Quadro 8: Contribuição dos professores – Questão 3

<b>Professores</b>	<b>Contribuições</b>
<b>P<sub>1</sub></b>	Dar uma roupagem mais jovial e menos acadêmica.
<b>P<sub>9</sub></b>	Poderia ser mais interativo, ilustrativo e dinâmico.
<b>P<sub>2</sub></b>	Associar o conhecimento antigo ao conhecimento novo, para que os alunos construam de maneira intuitiva através da história contada, modelos matemáticos semelhantes aos dos livros didáticos.
<b>P<sub>5</sub></b>	Motivar os alunos para que busquem mais conhecimento sobre o assunto.
<b>P<sub>7</sub></b>	Conhecer a história sempre instiga a curiosidade e ajuda a compreender os motivos da existência do conteúdo. Recortes da história portanto pode ser utilizada ao iniciarmos um conteúdo, acredito que não deva ser algo muito completo e sim resumido, e demais recortes podem ser utilizados também durante atividades para introduzir questões.
<b>P<sub>22</sub></b>	A História pode aguçar uma curiosidade no aluno, fazendo ele querer saber um pouco mais sobre o conteúdo. No entanto, a abordagem histórica poderia ser mais dinâmica.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

As sugestões apresentadas pelos professores no quadro 8 podem ser associadas as outras sugestões que foram apresentadas no quadro 6, por exemplo, os professores 1, 9 e 22 (quadro 8) sugerem uma maneira diferente de abordar a história, com o intuito de torná-la mais atrativa, interessante e jovial, os professores 5, 18 e 31 (quadro 6) apontam o uso de recursos que junto com a história da trigonometria podem fazer com que o texto seja mais atrativo, interessante e jovial.

No entanto, deve-se ressaltar que a forma como a história da trigonometria é explorada em sala de aula fará toda diferença para que haja enriquecimento no

aprendizado e o texto histórico pode servir de grande auxílio para o professor, podendo fazer suas adaptações, mas sempre verificando suas veracidades, com o intuito de fornecer ao aluno uma visão mais ampla do conteúdo, mas que também aborde fatos históricos reais.

Na questão 4, foi questionado ao professor se a história da trigonometria pode inspirar o aluno a se interessar mais pela matemática. 2,2% dos professores marcaram a opção “*Pontualmente*”, ou seja, em determinadas situações a história pode contribuir para o interesse do aluno pela disciplina. 6,8% marcou “*Em parte*” e 35,1% “*Na maioria das vezes*”. 55,9% marcou a opção “*Integralmente*”. Para tal questionamento não houve contribuições dos professores.

No entanto, vale ressaltar, que muitos autores como Chaquiam (2017), Mendes (2001, 2010, 2016), Miguel (1993), Lima (2019), já citados ao longo do trabalho, defendem a ideia de que a História da Matemática durante o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de trigonometria pode ajudar a inspirar o aluno a aprender mais a matemática e sobre a matemática, levando ao interesse da descoberta pelos caminhos traçados por diversos personagens matemáticos para chegar no que temos hoje.

Adiante, no quadro 9, foram elencadas algumas respostas referente a maneira como os professores costumam abordar o conteúdo de trigonometria em sala de aula:

Quadro 9: Contribuição dos professores – Questão 5

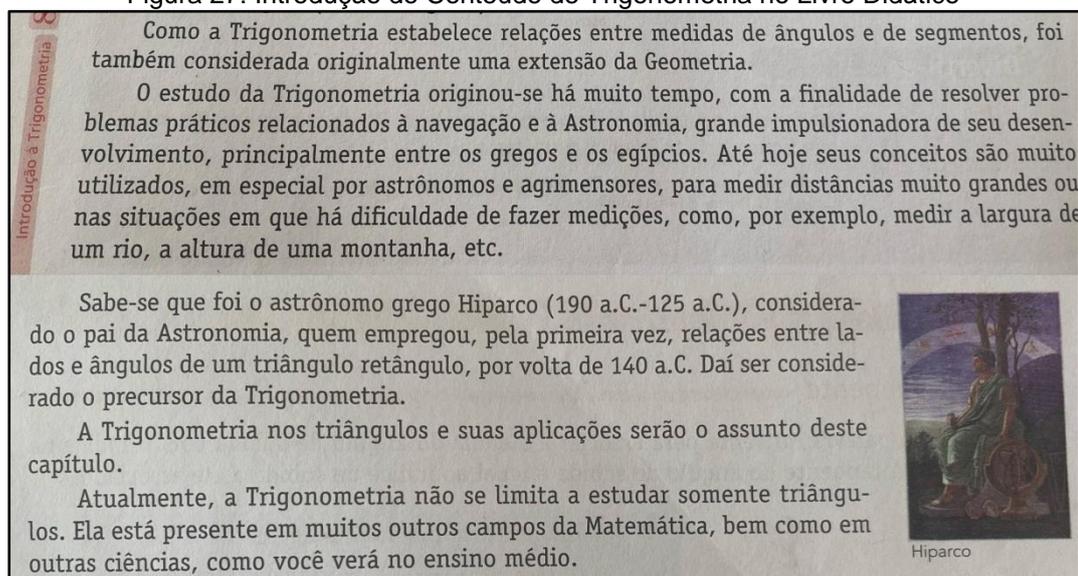
<b>Professores</b>	<b>Contribuições</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	Por vezes inicio com questionamentos, problemas, após as interações, quando possível, relato algum recorte e se possível também levo imagens para que o aluno se aproxime ainda mais do que foi dito.
<b>P<sub>19</sub></b>	Usaria sim a história em algumas situações para introduzir determinados tópicos do conteúdo, mas em determinados tópicos acredito que seja difícil conseguir explicar o seu surgimento.
<b>P<sub>12</sub></b>	O tempo que temos é curto demais até mesmo para explicar o conteúdo, sendo assim, uso o método tradicional de explicar o conteúdo utilizando a abordagem do livro didático.
<b>P<sub>14</sub></b>	Apresento o conteúdo a partir do uso do livro didático, seguido explicação, exemplificação e avaliação do aluno.
<b>P<sub>22</sub></b>	Costumo elaborar minhas próprias apostilas, introduzindo o conteúdo com exemplificação relacionando o dia a dia e em seguida resolvo exemplos sobre o tema abordado
<b>P<sub>27</sub></b>	Houve um tempo em que eu utilizava um livro do Dante, no 9º

	ano, e o mesmo fazia um breve relato sobre o surgimento da trigonometria, mas era algo breve, de 2 parágrafos, onde fazia citações de nomes de personagens importantes como Hiparco e Ptolomeu, mas não se aprofundava na história desses matemáticos. Hoje em dia, o livro que eu utilizo em sala de aula não faz menções históricas e como é o livro adotado pela escola eu apenas o sigo.
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Podemos perceber no quadro 9 que os professores estão presos aos métodos tradicionais e ao uso de livros didáticos. Como foi citado pelo professor 27, há livros que fazem menção a história do conteúdo, contando de forma resumida para assim fazer uma introdução. Sendo assim, contatei o professor 27 e recolhi mais informações sobre o livro que ele citou em sua resposta. O Livro no qual ele faz menção é de Dante (2011) da coleção “*Tudo é matemática*” e a história é utilizada da seguinte maneira no livro:

Figura 27: Introdução do Conteúdo de Trigonometria no Livro Didático



Fonte: Dante (2011, p.188 e 189)

Nota-se que para a trigonometria se faz menção apenas de um matemático, Hiparco, sendo considerado como o pai da astronomia, no entanto, a partir do texto histórico que foi apresentado aos professores podemos perceber que a Trigonometria passou por muitas transformações e houve inúmeras contribuições de diferentes personagens, não só da matemática como de outras áreas do conhecimento. Ou seja, a história no livro é utilizada de uma maneira bastante

resumida, o que não é capaz nem de conseguir aguçar um pouco mais a curiosidade do aluno pela história do conteúdo.

Para o 6º questionamento feito aos professores, 100% considerou que o texto pode contribuir de alguma maneira à sua formação didática pedagógica. Foram destacadas, no quadro 10, algumas das contribuições que esse tipo de texto pode oferecer.

Quadro 10: Contribuição dos professores – Questão 6

<b>Professores</b>	<b>Contribuições</b>
<b>P<sub>14</sub></b>	A História da Matemática pode ajudar não somente com os conteúdos de Trigonometria, assim como outros conteúdos, podendo garantir uma melhor introdução do conteúdo.
<b>P<sub>22</sub></b>	O texto pode contribuir para abranger o conhecimento do professor, que muitas das vezes não conseguem responder as indagações feitas pelos alunos em sala de aula.
<b>P<sub>12</sub></b>	O texto ajuda a entender melhor a história conteúdo, mesmo que não consigamos utilizar em sala de aula por falta de tempo e de recursos.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Houve poucas contribuições referente à questão 6, no entanto, foram elencadas 3 das respostas que eram similares as demais, no qual ressaltam que textos históricos podem ser inseridos em outros conteúdos matemáticos, que tais textos podem ajudar a responder as famosas indagações que são feitas em sala de aula pelos alunos, e também o fato de textos como esses serem importantes para entender melhor a história do conteúdo matemático, mas que apesar de seus benefícios, não há uma carga horária suficiente para que o professor consiga abordar essa história em sala de aula, a não ser que seja de uma maneira extremamente resumida, como foi apresentado na figura 27.

## 7.2. VALIDAÇÃO DAS PERCEPÇÕES DOS RECORTES E ATIVIDADES

Neste tópico serão analisados os resultados da avaliação dos Recortes I, II e III, que foram produzidos com base no texto histórico “Uma História da Trigonometria” – já analisado no tópico anterior – juntamente com suas respectivas atividades. O formulário estava composto de três questões, além de

questões opcionais, caso o professor quisesse dar sugestões e contribuições, visando aprimorar o uso destes recortes em sala de aula.

No quadro 11, a seguir, mostram os resultados obtidos referente à questão 1 de cada recorte, quanto a sua possível utilização em sala de aula durante o processo de ensino e aprendizado. Nota-se um percentual significativo de professores que concordam com a utilização deste recurso em sala de aula, principalmente o recorte I, que trata sobre a introdução do conteúdo de trigonometria.

Quadro 11: Validação do Recorte (Questão 1)

QUESTÃO	De nenhuma forma (0%)	Pontualmente (25%)	Em Parte (50%)	Na maioria das vezes (75%)	Integralmente (100%)
RECORTE I	-	-	14,3%	35,7%	50,0%
RECORTE II	-	7,1%	35,7%	21,4%	42,9%
RECORTE III	-	7,1%	14,3%	21,4%	50,0%

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Os Recortes II e III tiveram o mesmo percentual quanto a opção “pontualmente”, e notei que os mesmos professores que marcaram essa opção no recorte II foram os mesmo que, também, marcaram essa opção no recorte III, e ambos estão no grupo que escolheu a opção “Na maioria das vezes” no Recorte I.

No quadro 12, estão presentes algumas contribuições dos professores para a questão 1, referente a cada recorte. Algumas das contribuições apresentadas apresentam adaptações e sugestões de como utilizar os recortes em sala de aula.

Quadro 12: Contribuições dos Professores para os recortes I, II e III (Questão 1)

Professores	Contribuições – Recorte I
P <sub>1</sub>	Utilizaria o recorte e adaptaria, trazendo as informações através de vídeos, para ficar mais dinâmico.
P <sub>7</sub>	Inclusive salvei aqui. Podendo ser explicado com explanação e ainda tem atividade no final. Não com o intuito de punir, e sim de ajudar o aluno, inclusive para o mesmo se autoavaliar.
P <sub>9</sub>	Eu utilizaria o texto, pois o texto ajuda a explicar como surgiu a Trigonometria e quem deu o ponto de partida para esse conteúdo, apesar de ser incerto.
P <sub>23</sub>	O aluno já entra na aula de matemática pensando que serão somente cálculos. É interessante introduzir o conteúdo trazendo uma abordagem diferente. Gostei, achei interessante e vou experimentar utilizar essa ideia em minhas aulas.
Professores	Contribuições – Recorte II
P <sub>12</sub>	O texto ajuda a compreender a história de como surgiu esse

	tópico na trigonometria, mas o é difícil de utilizar, pois o tempo que temos em sala de aula é curto para conseguir aprofundar muito.
<b>P<sub>19</sub></b>	Para introduzir esse conteúdo, é necessário voltar aos cálculos de matemática básica, como divisão, razão e proporção, e outros.
<b>P<sub>27</sub></b>	Eu utilizaria pedaços desse recorte, seria como um “recorte do recorte”, pois o mesmo é longo e tem uma linguagem um pouco técnica, onde o aluno não iria conseguir compreender muito bem, além de ter alguns tópicos que não são tão relevantes para o momento da aula, mas sim em outro momento.
<b>P<sub>31</sub></b>	Eu utilizaria, mas antes eu teria que estudar bastante o texto, para conseguir aprender e responder até mesmo minhas próprias dúvidas em relação a origem do conteúdo.
<b>Professores</b>	<b>Contribuições – Recorte III</b>
<b>P<sub>8</sub></b>	Para além do que foi pedido na atividade eu iria pedir com o objetivo de identificar a compreensão do problema a construção geométrica do problema proposto.
<b>P<sub>9</sub></b>	É difícil encontrar esse tópico em livros didáticos.
<b>P<sub>16</sub></b>	Eu utilizaria, pois o texto apresenta algumas curiosidades e fatos importante em relação a história da trigonometria. Acho interessante que os alunos saibam disso.
<b>P<sub>22</sub></b>	Usaria o texto em sala de aula através de apresentação de slides e também incrementaria com mais algumas atividades, podendo propor até mesmo uma pesquisa pra eles ampliarem mais o conhecimento e apresentarem em sala de aula.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

De modo geral, os professores que contribuíram acham pertinente a utilização dos recortes em sala de aula, no entanto, alguns deles sugerem maneiras diferentes de utilizá-los, ou seja, outros recursos que, de acordo com eles, ajudem a tornar os recortes mais eficientes durante o processo de ensino e aprendizagem. Como por exemplos, o P<sub>1</sub>, que sugeriu a apresentação do recorte I em forma de vídeo e o P<sub>22</sub>, que apresentaria o recorte III através de slides durante as aulas de trigonometria.

Além de adaptações, foram apresentados pelos professores os motivos pelos os quais eles utilizariam esses recortes em sala de aula, como é posto pelos professores P<sub>7</sub>, P<sub>9</sub>, P<sub>23</sub> (Recorte I) e P<sub>16</sub> (Recorte III), enfatizando o quanto pode ser interessante mostrar para os alunos os fatos históricos que aconteceram durante a origem da trigonometria.

Por fim, elenquei algumas contribuições que retratam as dificuldades em utilizar os recortes em sala de aula, como foi apontado pelo professor P<sub>12</sub>, P<sub>19</sub>, P<sub>27</sub> e P<sub>31</sub>, no recorte II. Dentre essas dificuldades, temos a falta de tempo, o

conhecimento da matemática básica do aluno e a preparação do professor para utilizar este recurso em sala de aula que, para Mendes (2021), é de suma importância que o professor esteja preparado para fazer abordagens históricas durante o processo de ensino dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

No quadro 13, a seguir, mostram os resultados obtidos referente à questão 2 de cada recorte, quanto a linguagem usada para a construção dos mesmos. Nota-se um percentual significativo de professores que concordam que os textos apresentam uma linguagem acessível, no entanto, nos recortes II e III há um mesmo percentual quanto a opção “em parte”.

Quadro 13: Validação do Recorte (Questão 2)

QUESTÃO	De nenhuma forma (0%)	Pontualmente (25%)	Em Parte (50%)	Na maioria das vezes (75%)	Integralmente (100%)
RECORTE I	-	-	-	21,4%	78,6%
RECORTE II	-	-	14,3%	14,3%	71,4%
RECORTE III	-	-	14,3%	28,6%	57,1%

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Tendo em vista esse percentual apresentado nos recortes II e III, no quadro 14, são apresentadas as contribuições dos professores quanto a linguagem usada na construção dos textos, visando melhorar à sua utilização com os alunos em sala de aula durante o processo de ensino e aprendizagem no conteúdo de trigonometria.

Quadro 14: Contribuições dos Professores para os recortes I, II e III (Questão 2)

Professores	Contribuições – Recorte I
P <sub>13</sub>	O texto é de fácil entendimento.
P <sub>25</sub>	Faltou um pouco de linguagem jovial, para entreter os alunos.
Professores	Contribuições – Recorte II
P <sub>1</sub>	Uma linguagem menos acadêmica
P <sub>4</sub>	A parte que fala da tabela de cordas de Ptolomeu precisa ser mais simplificada, ao meu ver.
P <sub>27</sub>	O texto é de fácil compreensão para o professor, talvez para os alunos seja necessário algumas adaptações para que eles possam compreender melhor.
Professores	Contribuições – Recorte III
P <sub>18</sub>	A linguagem está no padrão de universidade.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Nota-se que, para os professores P<sub>1</sub>, P<sub>27</sub> e P<sub>18</sub>, os recortes II e III estão com uma linguagem científica, de nível acadêmica e de difícil compreensão por parte

dos alunos. Sendo assim, a contribuição do professor P<sub>25</sub>, para o recorte I, também se torna pertinente para os recortes II e III. No entanto, vale ressaltar, que os textos podem ser adaptados pelos professores em sala de aula, da melhor maneira que lhe convêm, com o intuito de facilitar o entendimento do aluno durante as aulas de trigonometria.

No quadro 15, a seguir, mostram os resultados obtidos referente à questão 3 de cada recorte, quanto a possível utilização em sala de aula das atividades propostas. Nota-se que mais da metade dos professores escolheram a opção “Integralmente” em cada recorte. Os recortes II e III apresentam o mesmo percentual na opção “pontualmente”, quanto a utilização das atividades propostas presentes nesses recortes.

Quadro 15: Validação do Recorte (Questão 3)

QUESTÃO	De nenhuma forma (0%)	Pontualmente (25%)	Em Parte (50%)	Na maioria das vezes (75%)	Integralmente (100%)
RECORTE I	-	-	8,6%	29,1%	62,3%
RECORTE II	-	7,1%	14,3%	21,4%	57,1%
RECORTE III	-	7,1%	14,3%	21,4%	57,1%

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

No quadro 16, estão elencadas algumas contribuições dos professores quanto às atividades propostas que estão presentes em cada recorte. As contribuições dadas pelos professores, referente aos recortes II e III, são importantes para melhorar a dinâmica e a apresentação das atividades, pois, de acordo com os professores P<sub>14</sub> e P<sub>19</sub> esses são os pontos que precisam melhorar nas atividades propostas.

Quadro 16: Contribuições dos Professores para os recortes I, II e III (Questão 3)

Professores	Contribuições – Recorte I
P <sub>15</sub>	As atividades estão fáceis e interessantes para os alunos
P <sub>28</sub>	Utilizarias as atividades propostas e tentaria elaborar mais questões a partir do recorte.
Professores	Contribuições – Recorte II
P <sub>14</sub>	As atividades poderiam ser mais dinâmicas.
P <sub>17</sub>	Tentaria associar mais a trigonometria com as atividades.
Professores	Contribuições – Recorte III
P <sub>19</sub>	As atividades estão um pouco complexas para o entendimento do aluno.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Por fim, a última questão do questionário aplicado aos professores, perguntava se os mesmos tinham sugestões para melhorar o recorte com o intuito de ser utilizado em sala de aula por eles e alunos. As contribuições estão apresentadas no quadro 17 abaixo:

Quadro 17: Contribuições dos Professores para os recortes I, II e III (Questão 4)

<b>Professores</b>	<b>Contribuições – Recorte I</b>
<b>P<sub>1</sub></b>	Só mesmo a apresentação que poderia ser menos em formato acadêmico.
<b>P<sub>2</sub></b>	Associar a uma sequência de atividades, para formalizar conceitos e definições caso fosse possível, para que seja ensinado na íntegra um tópico do conteúdo.
<b>P<sub>18</sub></b>	Adaptar para modelos práticos, tais como slides com resumos, interações utilizando recursos tecnológicos, assim, seria possível encaixar no tempo de aula atual, e ficaria menos cansativo a leitura do texto.
<b>P<sub>7</sub></b>	Não levar o texto na íntegra para o aluno. De preferência em slide, se não for possível utilizar tópicos, recortes e imagens, utilizar as interações orais.
<b>P<sub>9</sub></b>	O texto poderia ser mais ilustrativo
<b>Professores</b>	<b>Contribuições – Recorte II</b>
<b>P<sub>1</sub></b>	Colocar mais exemplos práticos que levaram à concepção dessas ideias pelos matemáticos da época
<b>P<sub>4</sub></b>	Explicar de maneira mais simples a parte que discorre sobre a tabela de cordas de Ptolomeu.
<b>P<sub>5</sub></b>	Usar ferramentas disponíveis que existem na escola, datashow, cartazes, objetos reais, etc..
<b>P<sub>8</sub></b>	Após a utilização dos textos históricos iria propor o que foi visto para fazer uma adaptação e construir uma tabela dos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis de olho no aprendizado e nas provas de larga escala.
<b>P<sub>14</sub></b>	O recorte pode ser mais dinâmico. Poderia ter sugestão de atividades que os alunos pudessem interagir mais.
<b>P<sub>10</sub></b>	Poderia trazer um exemplo resolvido com o uso da tábua de senos, para ajudar na resolução da atividade.
<b>Professores</b>	<b>Contribuições – Recorte III</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	Construir o conceito a partir de atividades gradativas através dos recortes históricos
<b>P<sub>8</sub></b>	Propor a construção geométrica dos problemas envolvendo as relações trigonométricas.
<b>P<sub>9</sub></b>	Faltou explicar melhor como foi encontrado o valor próximo de pi
<b>P<sub>10</sub></b>	O texto apresenta fatos curiosos, que até eu mesmo não tinha conhecimento. Levar isso para os alunos poderá ser interessante e bom.
<b>P<sub>4</sub></b>	Explicar um pouco mais a ideia de Erastóstenes para medir a circunferência da terra.

Fonte: Protocolo de pesquisa gerado pelo *Google Forms* (2023)

Todas as contribuições apresentadas pelos professores são pertinentes e de suma importância para melhorar os recortes e as atividades propostas, tendo em vista a sua possível utilização em sala de aula durante o ensino de trigonometria, buscando melhorar o processo de aprendizagem do aluno.

Mudar o formato acadêmico e a linguagem científica, como são sugeridos pelos professores, conseqüentemente também tornaria o texto mais dinâmico e atrativo para os alunos, como também é proposto por eles. Além disso, buscar atividades que façam os alunos interagir mais, como é indicado pelo professor P<sub>14</sub>, poderia tornar a aula mais interessantes, podendo facilitar o entendimento do aluno quanto a atividade.

O professor P<sub>10</sub> ressalta a importância de trazer um exemplo de como resolver a atividade, com o intuito de ajudar o aluno no momento da resolução. Outros professores, como P<sub>2</sub>, P<sub>8</sub>, e P<sub>14</sub> também fazem contribuições referente a apresentação e utilização das atividades, com o intuito de incrementar e ajudar na compreensão dos recortes apresentados pelo professor.

Outras contribuições, referente à estrutura do texto, são apontadas pelos professores, P<sub>1</sub>, P<sub>4</sub> e P<sub>9</sub>. No qual, os professores apontam a deficiência de alguns tópicos considerados importantes por eles, como a explicação melhorada da tábua de cordas de Ptolomeu, explicar melhor sobre a ideia de Erastóstenes para medir a circunferência da terra e se aprofundar um pouco mais em como o valor de Pi foi encontrado.

Essa análise destacou os pontos que precisam melhorar, na perspectiva dos professores, referente aos recortes e as atividades propostas. Nesse sentido, os resultados obtidos nessa última questão do questionário contribuem na construção de futuros recortes e atividades propostas.

## CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, tivemos o intuito de responder a seguinte questão de pesquisa “*Que recortes históricos podem ser realizados a partir de uma história da trigonometria de modo a integrar história e matemática num contexto didático-pedagógico para uso no processo de ensino na Educação Básica?*”. Para obter respostas favoráveis e que corroborassem para a questão, foram elencados alguns objetivos, como identificar em literaturas o uso da história da matemática como recurso didático, apresentar as percepções de professores a respeito do ensino e aprendizagem da trigonometria, efetuar revisão bibliográfica a respeito da história da trigonometria, elaborar textos que envolvam a história da trigonometria de acordo com o modelo proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022), apresentar recortes dos conteúdos trigonométricos destacados nos textos elaborados e, por fim, validar as propostas apresentadas a partir das manifestações dos professores, tendo em vista a elaboração de um produto educacional<sup>3</sup>.

Nesse sentido, a utilização do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022) foi fundamental para conseguir atingir todos os objetivos específicos, além de conseguir responder a questão de pesquisa. O diagrama ajudou, não somente na elaboração do texto histórico, mas também na elaboração de cada recorte, no qual foi elencado os pontos mais importantes do texto, personagens mais relevantes e acontecimentos históricos que influenciaram no desenvolvimento da trigonometria.

Com a revisão bibliográfica foi possível analisar diferentes perspectivas quanto ao uso da História da Matemática no ensino de trigonometria, apontando tanto argumentos favoráveis quanto argumentos contra ao uso desse recurso didático em sala de aula durante o processo de ensino e aprendizagem. Além da revisão sobre o uso da história da matemática, foi de suma importância trazer à discussão as dificuldades presentes durante o ensino de trigonometria, tanto de acordo com as literaturas quanto nas perspectivas dos professores.

Tendo em vista os levantamentos feitos, nota-se algumas dificuldades quanto a utilização da História da matemática durante as aulas de matemática, mais especificamente do conteúdo de trigonometria. Pudemos notar que a

---

<sup>3</sup> Link do produto educacional.

escasses de recursos que utilizam a história é um dos pontos mais citados pelos professores e pelas literaturas. Sendo assim, podemos concluir que os recortes feitos podem ajudar a suprir essa escassez, derrubando barreiras quanto ao uso de um novo recurso em sala de aula, com o intuito de incrementar e inovar o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Uma história da trigonometria é abordada ao longo desta pesquisa, mostrando os caminhos traçados por diferentes personagens, não somente da matemática, que colaboraram de maneira significativa para o desenvolvimento da trigonometria. Trouxe à discussão o desenvolvimento da trigonometria desde o século XVII a.C. até o século XIX, havendo a possibilidade de estender esses estudos até os dias atuais, pois sabe-se que a matemática é uma ciência que pode haver transformações e novas descobertas ao longo dos anos.

Os recortes elaborados a partir dessa história da trigonometria, juntamente com as atividades propostas, visam ajudar a melhorar o planejamento didático do professor de matemática para as aulas de trigonometria, que pode utilizar esse recurso como uma maneira de inovar o processo de ensino e ajudar o aluno a fazer novas descobertas a respeito da história da matemática, especificamente do conteúdo de trigonometria, que pouco eles sabem.

Para avaliar o texto histórico, os recortes e as atividades, foi desenvolvido um questionário, no qual foi aplicado via *Google Forms*, onde contou com a participação de 32 professores de matemática. Vale ressaltar que, tal metodologia foi adotada em razão da COVID-19, pois a validação, em primeiro momento, seria feita de maneira presencial, cujo os professores iriam receber o material e iriam utilizar em uma de suas aulas de trigonometria, com o intuito de testar a sua eficiência. No entanto, as contribuições feitas através do formulário virtual foi de suma importância para conseguir atingir o nosso objetivo.

A validação do texto histórico, dos recortes e das atividades apresentaram, de modo geral, um resultado positivo quanto ao seu possível uso durante as aulas de trigonometria, ressaltamos ainda que, em nenhum momento os professores marcaram a opção “de nenhuma forma” presente no questionário, que representa 0% de aceitação do recorte e da atividade apresentada, apesar de haverem pontos importantes que precisam melhorar e serem incluídos na elaboração tanto dos recortes quanto das atividades, pontos esses que podem ser adaptados para

poderem utilizar em sala de aula, com o intuito de deixar o texto adequado para cada turma.

Sendo assim, as avaliações feitas pelos professores ressaltam a importância de adaptar, reorganizar, integrar os recortes com outros recursos, além de apresentá-lo com outras metodologias de ensino. Levando em consideração que as contribuições foram dadas por diferentes professores, com diferentes experiências, no qual visaram sua prática na sala de aula. Todas as contribuições foram relevantes e de suma importância para o aperfeiçoamento dos recortes e das atividades, além de contribuírem para as possíveis futuras elaborações de recortes como os que foram apresentados.

Portanto, de acordo com as validações e as sugestões dos professores, nota-se a potencialidade do produto educacional, no qual tem como objetivo incrementar o ensino de trigonometria por meio de textos históricos e atividades que também usam a história em sua resolução. Cada colaboração dada pelos professores proporcionou uma ligação de ideias e sugestões que fortalecem ainda mais a proposta desse produto, tornando-o adaptado com as demandas dos alunos e proporcionando maior qualidade e significado para o professor ao utilizar em seu planejamento. Vale ressaltar ainda que a proposta do recorte é adaptável e a partir do texto principal podem ser gerados novos produtos educacionais, com novos recortes e novas atividades propostas.

Diante desse contexto, acreditamos que a História da Matemática visa melhorar o processo de ensino e aprendizagem, no entanto, não é um recurso que vai sanar com todas as dificuldades que os alunos sentem na disciplina, mas vai ajudá-lo a se tornar mais curioso, criativo e, principalmente, desmistificar a ideia de que a matemática nasceu pronta e acaba. Acreditamos que esse recurso didático possa ser utilizado pelos professores com o intuito de fugir de um ensino tradicional, visando formar alunos que tenham conhecimento das origens e dos caminhos traçados que trouxeram a matemática que temos hoje.

A História da Matemática, mais especificamente da trigonometria, pode mostrar ao aluno a importância de valorizar o que ele está aprendendo, mostrando que não foi fácil chegar às definições e fórmulas matemática que se têm hoje. Além de proporcionar ao aluno uma visão ampla de seu conhecimento, a História da Matemática é capaz de responder diversas indagações que são feitas por eles

mesmos durante as aulas: “Quem inventou isso?”, “De onde surgiu essa fórmula?”, “Quem realmente chegou a esse resultado?”.

O Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) ofertado pela Universidade do Estado do Pará (UEPA) foi fundamental para o desenvolvimento dessa pesquisa, sejam pelas disciplinas ofertadas ou pelas contribuições sugeridas por cada professor que faz parte da grade curricular do curso. Além disso, com a troca de experiências com os meus colegas de turma, foi possível novos conhecimentos com professores que já possuíam a vivência, docente, algo que até o começo do curso eu ainda não tinha, e que no qual me possibilitou amadurecer as minhas ideias quanto à prática na docência.

Poder fazer parte de um programa como esse, me proporcionou uma nova visão quanto ao processo de ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula, me mostrou o quanto o ensino pode ser inovador e eficaz para o aluno, proporcionando a eles uma nova visão da matemática ao utilizar diferentes recursos e metodologias durante as aulas. Além do mais, essa pesquisa me mostrou como eu poderia iniciar a minha vida docente, buscando mostrar aos meus alunos a origem do que eles estão estudando e proporcionar a eles o ensino diferente do tradicional.

Por fim, como desdobramento desse trabalho e tomando como base as contribuições dos professores quanto ao ensino de trigonometria, as contribuições a respeito do texto histórico, dos recortes e das atividades e a importância do uso da História da matemática no ensino de matemática, outros estudos podem ser realizados, outros recortes podem ser produzidos, de acordo com a necessidade do ensino e, conseqüentemente, a elaboração de novas atividades históricas, fazendo adaptações coniventes e que ajudem a melhorar no processo de ensino do professor para o aluno. Além disso, diante da impossibilidade da aplicação presencial, devido à pandemia, recomenda-se que os novos recortes realizados sejam validados de maneira presencial.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, A. O. **Pitágoras**. I Seemat - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. Vitória da Conquista – Bahia - Brasil, 2009
- ANDRADE, K. F. e SILVA, A. P. P. N. **Al-kashi e kazi-zadear-rumi: desvendando a relação entre eles através de duas cartas**. IV Seminário Cearense de História da Matemática. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – volume 07, Número 20, 211 – 220 - CE, 2020.
- BALESTRI, R. D. **A participação da História da Matemática na Formação de Professores de Matemática na Óptica de Professores/Pesquisadores**. Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2008.
- BORTOLI, G. **Uma abordagem histórica no ensino da trigonometria /** GlabisBortoli, Miriam Ines Marchi, Ieda Maria Giongo. – 1. Ed. – Curitiba: Appris, 2016.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.
- CHAQUIAM, M. **Ensaio Temáticos: história e matemática em sala de aula –** SBEM-PA, 2017.
- CHAQUIAM, M. **História e Matemática dos Contextos às Atividades**. X BIENAL de Matemática. Belém, 2022.
- CHAQUIAM, M. **História e Matemática integradas por meio de um diagrama Metodológico**. Revista Paradigma. Vol. XLI, Nº Extra 1; Abril de 2020/ 197 – 211.
- CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história – V. 2**. São Paulo: Editora da Física, 2006.
- COSTA, B. P; PEQUENO, P. I. E; PEREIRA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem da trigonometria**. VI Congresso Nacional Educação. Fortaleza – CE, 2019.
- COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria**. São Paulo – PUCSP, 2003.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL. Disponível em <<https://translate.google.com.br/translate?hl=pt-BR&sl=en&u=http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Roberval.html&prev=search>>. Acesso em: 18 de março de 2019

GILLISPIE, C, C. **Dicionário de biografias científicas**. Vol II. Rio de Janeiro: Contraponto: 2007.

GODOY, E. V., SANTOS, V. M. **O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de Matemática**. Práxis Educacionais. Vitória da Conquista, v. 8, n. 13, p. 253-280, 2012.

JÚNIOR, D. O. A; OLIVEIRA, M. A. P. **Trigonometria: recortes da história da sua evolução** – Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

LIMA, J. H. S. **A trigonometria na Grécia Antiga**: Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio e Hiparco de Nicéia. XIII Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM, 2019b.

LIMA, J. H. S. **As contribuições à trigonometria nos séculos XVII, XVIII e XIX**. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2019c.

LIMA, J. H. S. **Contribuições à trigonometria**: Al-Battani, Bhaskara Akaria, Fibonacci e Nicoled’Oresme. XII Encontro Paraense de Educação Matemática – EPAEM, 2019d.

LIMA, J. H. S. **História da Matemática no Ensino de Matemática**: O caso da Trigonometria. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado do Pará, 2019a.

LOPES, L. S; FERREIRA, A. L. A. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, 2013.

MEDEIROS, A. R. H. **A História de Juros e seu ensino**. Universidade do Estado do Pará – UEPA. Belém, 2022

MENDES, I, A. **O uso da história no ensino da Matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém (PA): EDUEPA, 2001.

MENDES, I, A; CHAQUIAN, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém (PA): SBHMat, 2016.

MENDES, M, J, F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática**: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium* – Natal, RN, 2010.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. Campinas, São Paulo 1993. 274p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.

MOL, R, S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOREIRA, F. R. S. **Trigonometria**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, 2005.

MOREIRA, Marco Antonio. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OLIVEIRA, J. **Tópicos selecionados de trigonometria e sua história**. Trabalho de conclusão de curso. Departamento de Matemática/CCET. Universidade Federal de São Carlos – SP, 2010.

OLIVEIRA, R. L. **Aritmética e artefatos antigos: uma proposta interdisciplinar**. 2009. 217f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

PEREIRA, A. C. C. **A História da Trigonometria sob o olhar de Regiomontanus**. Universidade Estadual do Ceará e Universidade de Fortaleza. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM. 2011.

PRADO, E. L. B. **História da Matemática: um estudo de seus significados na educação matemática**. Rio Claro, 1990. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro, 1990.

ROBERVAL, GILLES PERSONNE DE. Disponível em <http://matheusmathica.blogspot.com/2011/08/roberval-gilles-personne-de.html>.> Acesso em: 18 de março de 2021.

SANTOS, F. J. **Introdução às Séries de Fourier**. Minas Gerais: Edição PUCMINAS, 2004.

SEVERINO, J, S. **Metodologia do Trabalho Científico**. 21ª Edição - Revista e Ampliada. São Paulo, 1941.

SILVA, W. **O ensino de trigonometria: perspectiva do ensino fundamental ao médio**. Universidade Estadual

SILVEIRA, D. T. CÓRDOVA, F. P. **A Pesquisa Científica**. In: EAD, Unidade 2, p.32.

SILVEIRA, F. S., FILHO, I. F. B. **Uma proposta para o ensino de Trigonometria por meio da História da Matemática**. UNOPAR Cient. Exatas Tecnol., Londrina, v. 12, n. 1, p. 51-60, Nov. 2013.

STRASBURG, E. B., SPEROTTO, F. A., MENEGHETTI, C. M. S. **Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o uso do software GeoGebra.** Ciência e natureza, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, p. 617-635, 2015.

TALES DE MILETO. Disponível em <[https://www.ebiografia.com/tales\\_de\\_mileto/](https://www.ebiografia.com/tales_de_mileto/)> Acesso em : 05 de julho de 2022.

VASCONCELOS, V. B. **Recortes da História da Matemática para o Ensino de Probabilidade.** Universidade do Estado do Pará – UEPA. Belém, 2023.

VIANA, M. C. V; SILVA, C. M. **Concepções de professores de matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem.** In: Encontro Nacional de História da Matemática, Belo Horizonte. B.H, 2007.

VIANA, M. **Tales de Mileto foi o primeiro matemático.** Folha de São Paulo, 2019.

VINAGRE, A. L. M. **Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra.** UNICAMP, 2002.

## APÊNDICE

### Apêndice A – Questionário de pesquisa para professores de matemática.

Questionário aplicado via *Google Forms*.

#### QUESTIONÁRIO DE PESQUISA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Prezados (as) professores (as),

Sou estudante do curso de Mestrado Profissional do ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Estou desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de matemática, com a finalidade de futuramente elaborar produtos educacionais que possam ajudar no ensino mais dinâmico de matemática na educação básica, em especial para o ensino de Trigonometria.

Para a efetivação da referida pesquisa, é importante sua participação ao responder às questões a seguir. Ressalto que sua identificação será preservada e que as informações serão utilizadas para fins acadêmicos.

\* Indica uma pergunta obrigatória

---

1. E-mail \*

---

#### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Aceito participar do projeto citado, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido da pesquisa intitulada: O uso da História da Matemática no Ensino de Matemática: o caso da Trigonometria, sob a responsabilidade dos pesquisadores: professor Doutor Miguel Chaquiam (orientador) e Professora Jessie Heveny Saraiva Lima (orientando) à Universidade do Estado do Pará. Estou ciente que esta pesquisa busca realizar diagnóstico do ensino de Trigonometria a partir da opinião de professores de matemática. Tenho clareza que minha colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras importantes para a realização da pesquisa. Em nenhum momento serei identificado. Estou ciente que resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim minha identidade será preservada.

2. Você está de acordo com o termo de consentimento livre e esclarecido? \*

Sim

Não

## QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

A partir de agora você responderá alguns questionamentos simples que usaremos para o desenvolvimento da pesquisa já citada.

3. Qual o seu sexo? \*

Feminino

Masculino

4. Qual a sua faixa etária? \*

15-20 anos

20-30 anos

30-40 anos

40-50 anos

mais de 50 anos

5. Qual seu grau de formação? \*

Ensino Médio

Ensino Superior completo Especialização.

Mestrado.

Doutorado.

6. Qual seu tempo de serviço como professor? \*

menos de 1 ano

1-5 anos

6-10 anos

11-15 anos

16-20 anos

21-25 anos

mais de 25 anos

7. Atualmente em qual tipo de instituição você trabalha? (marque mais de uma opção, se preciso) \*

- Pública Municipal
- Pública Estadual
- Pública Federal
- Privada
- Não trabalho em escolas

8. Como você costuma iniciar suas aulas de matemática a partir do conteúdo de Trigonometria?

- Pelo conceito de Trigonometria seguido de exemplos e exercícios;
- Com uma situação problema para depois introduzir o assunto de Trigonometria;
- Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
- Com jogos para depois sistematizar os conceitos trigonométricos;
- Falando um pouco sobre a história e origem da Trigonometria.

9. Você seleciona os tópicos que serão trabalhados em sala de aulas, a respeito do conteúdo de Trigonometria, a partir de que? \*

- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN;
- Livro Didático;
- Caderno de Orientações da Rede de ensino;
- Base Nacional Comum Curricular – BNCC;

10. Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/ utilizar após a conclusão do conteúdo de Trigonometria? (Marque mais de uma opção, se necessário) \*

- Prova oral;
- Prova escrita;
- Autoavaliação;

- Trabalhos em grupo ou individuais;
- Produções no caderno;
- Outro: \_\_\_\_\_

11. Para a melhor compreensão dos alunos a partir do conteúdo de Trigonometria, você costuma... (marque mais de uma opção, se necessário) \*

- Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
- Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- Mandar resolver os exercícios do livro didático;
- Utilizar a História da Matemática como um recurso incrementador durante o ensino;
- Não propor questões de fixação;
- Propõe a resolução de questões por meio de softwares.
- Outro: \_\_\_\_\_

12. Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de matemática, especialmente o conteúdo de Trigonometria? (marque mais de uma opção, se necessário). \*

- Formação inicial sólida;
- Domínio de classe;
- Compreensão dos conceitos matemáticos;
- Formação continuada;
- Metodologias diferenciadas de ensino;
- Recursos didáticos e pedagógicos;
- Outro: \_\_\_\_\_

13. Você considera o conteúdo de Trigonometria difícil de ser ensinado? \*

- Sim
- Não

14. Alguns de seus alunos têm afinidade com o conteúdo de Trigonometria? \*

- Todos
- A maioria
- A minoria
- Nenhum

15. Quais as maiores dificuldades dos seus alunos durante as aulas de Trigonometria? (marque mais de uma opção, se preciso) \*

- Compreensão dos conceitos/ideias;
- Compreensão das regras;
- Resolução dos problemas;
- Realizar cálculo;
- Outro: \_\_\_\_\_

16. Em que momento você consegue perceber as dificuldades que os alunos apresentam com o conteúdo de Trigonometria?(marque mais de uma opção,se preciso)

- No momento da explicação do conteúdo;
- No momento da realização de atividades;
- Somente durante as correções de provas;
- Fazem muitos questionamentos durante as aulas;
- Outro: \_\_\_\_

**Com base na sua experiência de professor do 9° ano do Ensino Fundamental responda os questionamentos a seguir a partir dos conteúdos de Trigonometria ensinado em sala de aula:**

17. Você costuma ensinar as Razões Trigonométricas? \*

- Sim
- Não

18. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem Razões Trigonométricas?

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

19. Você costuma ensinar a ideia de tangente? \*

- Sim
- Não

20. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a ideia de tangente?

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

21. Você costuma ensinar a ideia de seno e de cosseno? \*

- Sim
- Não

22. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a ideia de seno e de cosseno?

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil

Muito Difícil

23. Você costuma ensinar a definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos? \*

Sim

Não

24. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a definição de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos? \*

Muito Fácil

Fácil

Difícil

Muito Difícil

25. Você costuma ensinar a relação entre seno, cosseno e tangente? \*

Sim

Não

26. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a relação entre seno, cosseno e tangente?

Muito Fácil

Fácil

Difícil

Muito Difícil

27. Você costuma ensinar razões trigonométricas para ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ? \*

Sim

Não

28. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem razões trigonométricas para ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ?

Muito Fácil

Fácil

Difícil

Muito Difícil

29. Você costuma ensinar a tabela das razões trigonométricas em um triângulo qualquer? \*

Sim

Não

30. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a tabela das razões trigonométricas em um triângulo qualquer?

Muito Fácil

Fácil

Difícil

Muito Difícil

31. Você costuma ensinar a Lei dos Cossenos? \*

sim

Não

32. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a Lei dos Cossenos?

Muito Fácil

Fácil

- Difícil
- Muito Difícil

33. Você costuma ensinar a Lei dos Senos? \*

- Sim
- Não

34. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem a Lei dos Senos?

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

35. Você costuma ensinar o uso das relações trigonométricas em polígonos regulares inscritos em uma circunferência? \*

- sim
- Não

36. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem as relações trigonométricas em polígonos regulares inscritos em uma circunferência?

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

37. Você costuma ensinar as medidas do raio, do lado e do apótema em um polígono regular? \*

sim

Não

38. (Para sim) Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem as medidas do raio, do lado e do apótema em um polígono regulares?

Muito Fácil

Fácil

Difícil

Muito Difícil

39. Você utiliza ou já utilizou a História da Matemática como um recurso didático para ensinar o conteúdo de Trigonometria?

sim

Não

40. (Para Sim) você percebeu algum benefício ao usar História da Matemática como um recurso didático durante as aulas de Trigonometria?

sim

Não

41. (Para Não) por qual desses motivos você não faz ou nunca fez uso da História da Matemática no ensino de Trigonometria? (marque mais de uma opção, se preciso)

Não considerar relevante para o ensino de trigonometria;

Falta de materiais de apoio que utilizem a História da Matemática;

O tempo é curto para fazer uso da História da Matemática;

Não tenho afinidade com a História da Matemática;

Outro: \_\_\_\_\_

## Apêndice B: Validação do Produto Educacional

Questionário aplicado via *Google Forms*.

### Recortes da História da Matemática para o Ensino de Trigonometria.

Me chamo Jessie Heveny Saraiva Lima, sou discente do Programa de Pós-Graduação em

Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Apresento a você, docente de matemática do ensino fundamental maior, um Produto Educacional composto de três recortes e atividades para uso durante o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Trigonometria, usando como base o Diagrama Metodológico proposto por *Chaquiam (2022)*, para que você possa avaliar e contribuir para o desenvolvimento do meu trabalho.

\* Indica uma pergunta obrigatória

---

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO \*

Confirmando minha participação na avaliação do produto educacional intitulado "Recortes da História da Matemática para o Ensino de Trigonometria", com o objetivo de validar e coletar dados para responder a questão de pesquisa e defesa da dissertação de Jessie Heveny Saraiva Lima, do programa de Mestrado em Ensino de Matemática.

### PERFIL DO PROFESSOR

1. Nome:

---

2. Idade: \*

---

3. Nível de formação (Titulação Máxima): \*

- Graduação
- Especialização
- Mestrado
- Doutorado

4. Nível de Ensino que atua: \*

- Fundamental
- Médio
- Superior

5. Rede de Ensino que atua \*

- Pública
- Privada

6. Tempo de serviço como professor de matemática \*

- até 5 anos
- entre 5 e 10 anos
- entre 10 e 15 anos
- entre 15 e 20 anos
- entre 20 e 25 anos
- entre 25 e 30
- anos mais de 30  
anos

**Uma História da Trigonometria balizada pelo Diagrama Metodológico proposto por Chaquiam (2022)**

Por meio do link, faça a leitura do texto que trás um pouco da história da trigonometria e, em seguida, faça sua avaliação e contribuições.

Clique no Link para ser direcionado ao texto: [HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA](#)

7. Você acredita que tais textos, que contam a história do conteúdo, podem servir como um recurso didático durante as aulas, podendo contribuir para responder alguns questionamentos feitos por alunos, como: “quem inventou isso?”, “como isso surgiu na matemática?” e outros. \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

8. Você teria alguma outra sugestão de recursos didáticos que são capazes de responder tais indagações feitas por alunos em sala de aula? Em caso de sim, quais?
- 
- 

9. Você considera que textos como esses podem contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de Trigonometria? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

10. Você teria outras sugestões que pudessem melhorar o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria? Em caso de sim, quais?

---

---

11. Você acredita que a história da trigonometria pode ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

12. Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

---

---

13. Você acha que a história da trigonometria pode inspirar o aluno a se interessar \*  
mais pela matemática?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

14. Você utilizaria recortes dos textos durante a apresentação do conteúdo de trigonometria em sala de aula? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

15. Caso não, quais outros métodos você utilizaria para apresentar o conteúdo em sala de aula?

---

---

16. O texto apresentado pode contribuir para a sua formação didática pedagógica? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

17. Em caso de não, o que poderá contribuir para a sua formação didática pedagógica?

---

---

### **RECORTE 1: INTRODUÇÃO AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA**

O texto e as atividades aqui apresentadas são sugestões para a introdução do conteúdo de trigonometria no ensino fundamental, mas precisamente no 9º ano.

No qual foi feito um recorte do texto supracitado “**HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA**”.

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link [RECORTE 1.](#)

18. Você utilizaria o recorte 1 apresentado para introduzir o conteúdo de \*  
Trigonometria com os alunos em sala de aula?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

19. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão de como introduzir o conteúdo de Trigonometria em sala de aula?

---

---

20. O Recorte 1 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

21. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

22. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante a introdução do conteúdo de trigonometria? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

23. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria tal recursodidático em sala de aula?

---

24. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula? \*

---

## RECORTE 2: A IDEIA DE SENO, COSSENO E TANGENTE

As atividades aqui apresentadas são sugestões para incrementar o processo de ensino e aprendizagem do tópico de seno, cosseno e tangente, mostrando como surgiu cada ideia e quem contribuiu para esse desenvolvimento. No qual foi feito um recorte do texto supracitado “**HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA**”.

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link

[RECORTE 2](#)

25. Você utilizaria o recorte 2 apresentado para introduzir as ideias de seno, cosseno e tangente com os alunos em sala de aula? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)

- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

26. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para introduzir as ideias de seno, cosseno e tangente em sala de aula?

---

---

27. O Recorte 2 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

28. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

---

---

29. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante \* a introdução das ideias de seno, cosseno e tangente?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

30. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria tal recursodidático em sala de aula?

---

---

31. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula? \*

---

---

### RECORTE 3: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS À CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA

O texto e as atividades aqui apresentadas são sugestões para a iniciação do tópico Razões Trigonométricas, mostrando como surgiu essa primeira ideia e como a mesma contribuiu para o primeiro cálculo da circunferência da terra. No qual foi feito um recorte do texto supracitado “**HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA**”.

Para fazer a leitura do texto e analisar as atividades propostas, clique no link [RECORTE 3](#).

32. Você utilizaria o recorte 3 apresentado para iniciar o conteúdo de razões trigonométricas com os alunos em sala de aula? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

33. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão de como iniciar o conteúdo de razões trigonométricas em sala de aula?

---

---

34. O Recorte 3 apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

35. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual sua sugestão para melhorar a linguagem utilizada no recorte?

---

---

36. A atividade proposta é de possível utilização por você em sala de aula durante a inicialização do tópico de razões trigonométricas? \*

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

37. Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), por qual motivo você não utilizaria tal recurso didático em sala de aula?

---

---

38. Qual a sua sugestão para melhorar o recorte para ser utilizado em sala de aula?

---

---



Universidade do Estado do Pará  
Centro de Ciências Sociais e Educação  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200  
Belém-Pa