Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

LUCAS BENJAMIN BARBOSA SOUZA

Raízes Racionais de Equações Polinomiais:
uma abordagem didática à luz da UARC

Belém-PA
2023

Lucas Benjamin Barbosa Souza

Raízes Racionais de Equações Polinomiais:
uma abordagem didática à luz da UARC

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Ensino de Matemática. Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Belém – PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Souza, Lucas Benjamin Barbosa

Raízes racionais de equações polinomiais: uma abordagem didática à luz da UARC / Lucas Benjamin Barboza Souza; orientador Natanael Freitas Cabral. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém. 2023.

1.Algebra-Estudo e ensino.2.Polinômios-Estudo e ensino.3.Ensino médio I. Cabral, Natanael Freitas Cabral (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 512

Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

LUCAS BENJAMIN BARBOSA SOUZA

RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UMA ABORDAGEM DE ENSINO A PARTIR DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DAS UARC'S

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data de aprovação: 27/10/2023

Banca examinadora

__________________________________. Orientador
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

__________________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

__________________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Alailson Silva de Lira
Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologua do Pará / IFPA

Belém – PA

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus por conduzir e guardar a minha vida (Maranata!).

Ao meu falecido pai Roberto Patrick de Souza, famoso Capitão Patrick, lhe amo desde aqui até a eternidade.

À minha mãe que sempre cuidou incondicionalmente de mim e me deu apoio para a finalização deste trabalho.

Ao meu irmão Bryan Barbosa por todo incentivo e preocupação comigo.

Ao meu sobrinho John ao qual amo tanto e quero dedicar mais tempo e minha sobrinha Alice que nascida neste no mesmo período de defesa dessa dissertação.

À minha prima-irmã Blessing Verduijn e meus sobrinhos Lorenzo e Cecilia.

Amo todos vocês hoje e sempre!

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho é o resultado de um longo percurso repleto de aprendizados, desafios, dificuldades, perdas e superações. Não teria sido possível sem a colaboração, apoio e encorajamento de diversas pessoas, às quais gostaria de expressar minha mais profunda gratidão.

Agradeço primeiramente a Deus por até aqui teres me ajudado, obrigado por todas as benções proporcionadas e pelo cuidado com a minha vida.

Agradeço ao meu amado orientador Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral pelos ensinamentos não só acadêmicos, mas também saberes que guardo no coração e levo para a vida. Obrigado pela paciência e por não teres desistido de mim quando eu mesmo pensei em desistir. Obrigado Tio Natan!

Agradeço também aos Professores Miguel Chaquiam e Pedro Franco de Sá pelas contribuições e pela amizade desde minha graduação. Vocês também são referências as quais me espelho nesse percurso profissional.

À Universidade do Estado do Pará por me acolher e proporcionar condições e recursos para realização de estudos e pesquisa.

Neste momento quero agradecer a minha família pelo apoio e por confiarem em mim durante todo este percurso, que foi árduo. Minha Mãe Marta Barbosa, Meu irmão Bryan Barbosa, minha prima Blessing Verduin, meus sobrinhos John Barbosa; Alice Barbosa; Lorenzo Verduijn e Cecilia Verduijn. Agradecer em especial ao meu falecido pai Roberto Patrick de Souza

Agradecer também aos meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente para que eu realizasse a produção desta dissertação. A estes: Ellen Rodrigues; Renata Silva; Igor Fonseca; Guiler Junior; Karene Miranda; Adriane Brito; Leonardo Axl e Robertyson Catro meu agradecimento direcionado.

Mas o fruto do Espírito Santo é amor, alegria, paz, paciência, amabilidade, bondade, fidelidade, mansidão e domínio próprio. Contra essas coisas não há lei.

(Bíblia – Gálatas 5, v. 22-23).

RESUMO

SOUZA, L. B. B. **Raízes racionais de equações polinomiais**: uma abordagem de ensino a partir de sequência didática a luz das UARCs. 2023, 155 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Belém, 2023.

Neste trabalho buscamos responder a seguinte questão: em que aspectos uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) potencializa o processo de ensino e aprendizagem do teorema das raízes racionais de equações polinomiais? Deste modo nossa pesquisa teve por objetivo estudar as potencialidades de uma sequência didática elaborada nesse constructo para o ensino deste teorema. Para isso, elencamos como aportes teóricos a teoria sociocultural da aprendizagem de Vygotsky (1984); a teoria das situações didáticas de Brousseau (1978) e os pressupostos da sequência didática centrado em Zabala (1999) com enfoque na UARC de Cabral (2017). A fim investigar este objeto matemático no processo de ensino e aprendizagem realizamos estudos preliminares composto de fundamentação matemática; consulta dos documentos oficiais; revisão de estudos; análise de livros didáticos; considerações de alunos e professores. A partir disto foi elaborada uma sequência didática segundo o modelo estruturante das UARC para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais para ser aplicada com uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Todavia decorrente dos eventos da pandemia do Covid-19, houve o redirecionamento da pesquisa para o processo de validação da proposta metodológica a partir da contribuição de professores. Os resultados obtidos a partir da consulta dos professores permitiram estabelecer a validação da sequência didática bem como foi possível destacar as suas potencialidades no ensino deste objeto matemático em sala de aula, por fim, foi possível elaborar um produto educacional para acesso e utilização por parte dos professores da Educação Básica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Equações Polinomiais. Raízes Racionais. Sequência Didática. Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual.

ABSTRACT

SOUZA, L. B. B. **Rational roots of polynomial equations**: a teaching approach based on didactic sequence in the light of UARCs. 2023, 155 f. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) – Graduate Program in Mathematics Teaching, State University of Pará. Belém, 2023.

In this work we seek to answer the following question: in what aspects does a Didactic Sequence prepared according to the structuring model of the Articulating Units of Conceptual Reconstruction (UARC) enhance the process of teaching and learning the theorem of rational roots of polynomial equations? Therefore, our research aimed to study the potential of a didactic sequence developed in this construct for teaching this theorem. To do this, we list Vygotsky's sociocultural theory of learning (1984) as theoretical contributions; the theory of didactic situations by Brousseau (1978) and the assumptions of the didactic sequence centered on Zabala (1999) with a focus on UARC by Cabral (2017). In order to investigate this mathematical object in the teaching and learning process, we carried out preliminary studies consisting of mathematical foundations; consultation of official documents; review of studies; textbook analysis; considerations from students and teachers. From this, a didactic sequence was created according to the UARC structuring model for teaching the rational roots of polynomial equations to be applied to a 3rd year high school class. However, due to the events of the Covid-19 pandemic, the research was redirected to the process of validating the methodological proposal based on the contribution of teachers. The results obtained from the teachers' consultation made it possible to establish the validation of the didactic sequence, as well as highlighting its potential in teaching this mathematical object in the classroom. Finally, it was possible to develop an educational product for access and use by students. Basic Education teachers.

Key-words: Mathematics Teaching. Following teaching. Articulable Unit of Conceptual Reconstruction. Polynomial Equations. Rational Roots Theorem**.**

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRAFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante o período da graduação, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), os estudos e pesquisas no âmbito da Educação Matemática e o desejo de desenvolver minha prática docente levaram-me ao interesse pela área da Didática da Matemática, especificamente pelo processo de ensino e aprendizagem. A investigação de como o professor ensina, como melhor poderia ensinar e de como o aluno aprende e o processo descrito para o alcance desta aprendizagem constituíram temáticas que deleitaram meus olhos e me motivaram a seguir o caminho da pesquisa nesta linha.

A Matemática está presente em todo o entorno social de qualquer ser humano. Todas as profissões da atualidade necessitam do conhecimento matemático para criar, gerir, representar, descrever, organizar, quantificar informações, dados e fenômenos nos mais diversos. Diversas áreas do conhecimento pedem algum conhecimento matemático para o exercício de atividades do oficio, mas nem sempre os indivíduos desse ofício aprenderam essa matemática para resolver seus problemas nas salas de aula das escolas.

Uma reflexão inicial consiste no fato de que ainda temos enraizado em nossa sociedade a ideia da Matemática enquanto ciência, por assim dizer, exata, isto é, “uma área do conhecimento pronta, acabada, perfeita, pertencente apenas ao mundo das idéias e cuja estrutura de sistematização serve de modelo para outras ciências” (CARVALHO, 1994, p. 15).

A visão da matemática como alicerce de outras ciências é um fato além de a tendência com o tempo como afirma D’Ambrósio (1996, p. 31). “a tendência de todas as ciências é cada vez mais de se matematizarem em função do desenvolvimento de modelos matemáticos que desenvolvem fenômenos naturais de maneiras adequadas”, no entanto o olhar para matemática quanto um conhecimento pronto, acabado e até mesmo isento de erros é um equívoco.

Embora as colocações de Carvalho (1994) sejam do século XX essa concepção ainda é realidade hoje. Diante disso, as pesquisas no âmbito da Didática da Matemática têm buscado desconstruir e desmistificar a Matemática colocando-a como um conhecimento construído, fruto das necessidades humanas, cercado de avanços e retrocessos, estando sempre em desenvolvimento como qualquer outra ciência.

A ideia inicialmente descrita do conhecimento matemático na sociedade acaba por acarretar num pré-conceito da Matemática cujo acesso não seria possível por todos e assim nem todos teriam capacidade de aprender matemática. Acredito na existência de matemáticas e, tratando especificamente, da matemática escolar, o pensamento que precisa ser disseminado é de que todos tem capacidade de aprender matemática, uns com maior afinidade que outros, com maior facilidade a partir de uma determinada metodologia, diferente de outro e cabe o professor ter um olhar atento e incentivar seus alunos para aprendizagem.

Assim, enquanto missão, partilho das considerações postas na Constituição, em seu Artigo 205, ao afirmar que

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1988, p. 123).

Deste modo, devemos enquanto professores ver este saber como instrumento de formação do indivíduo em seu sentido pleno, ou seja, para promoção de alunos que, futuramente, serão pessoas matematicamente letradas com capacidade de utilizar a Matemática quando necessário, para o desenvolvimento de determinados trabalhos e para o bem estar social. Não obstante, a Matemática também deve servir para que nossos alunos possam aprofundar seus conhecimentos e darem prosseguimentos aos estudos para o nível superior, caso queriam.

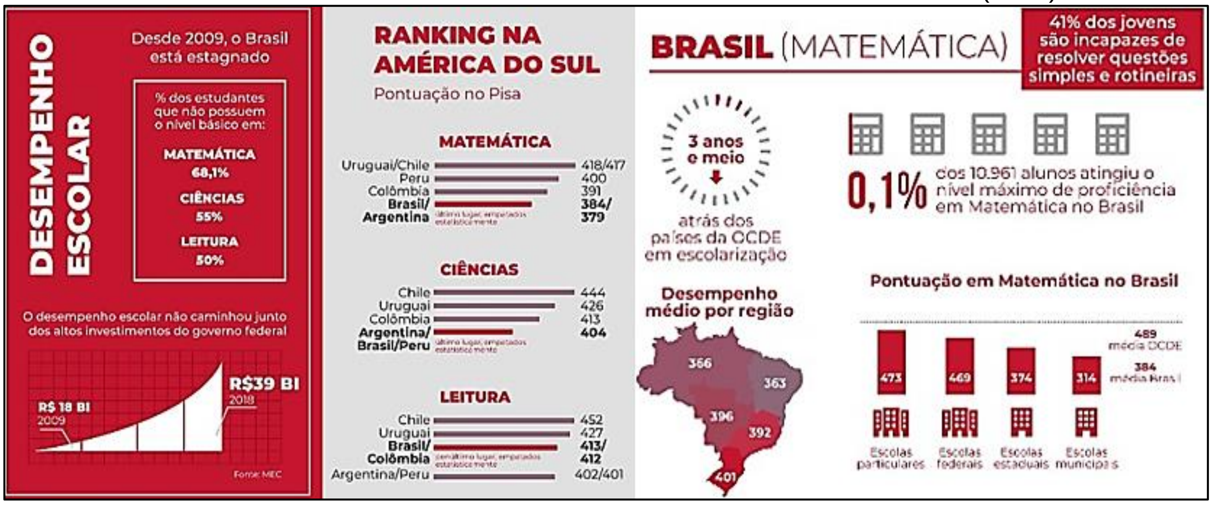
De todo exposto não consigo conceber melhor qualidade para a Matemática se não como um fator de transformação social e da realidade, pois a partir dela diversas ciências se desenvolvem e permitem o avanço da humanidade, além de proporcionar aos alunos uma mudança de sua realidade por meio da Educação.

No entanto, uma considerável parte dos alunos, nos mais variados níveis educacionais, principalmente da esfera pública, apresentam dificuldades na aprendizagem desta disciplina.

> É sabido que a matemática é ainda um “nó” para muitos educandos da educação básica. Muitos deles enfrentam dificuldades na aprendizagem desta disciplina, mesmo com toda a nova formatação do ensino-aprendizagem e dos próprios Livros Didáticos que valorizam os conhecimentos prévios, o erro e a construção do conhecimento pelo aluno, bem como, esteticamente, colaboram, em muito, para a contextualização matemática no dia a dia (SILVA, 2013, p. 7).

Em consequência temos constatado nossos alunos com baixos rendimentos nas avaliações de larga escala como PISA[1], Saeb[2] e ENEM[3]. O gráfico 1 retrata este cenário de forma global a partir de dados do PISA (2018).

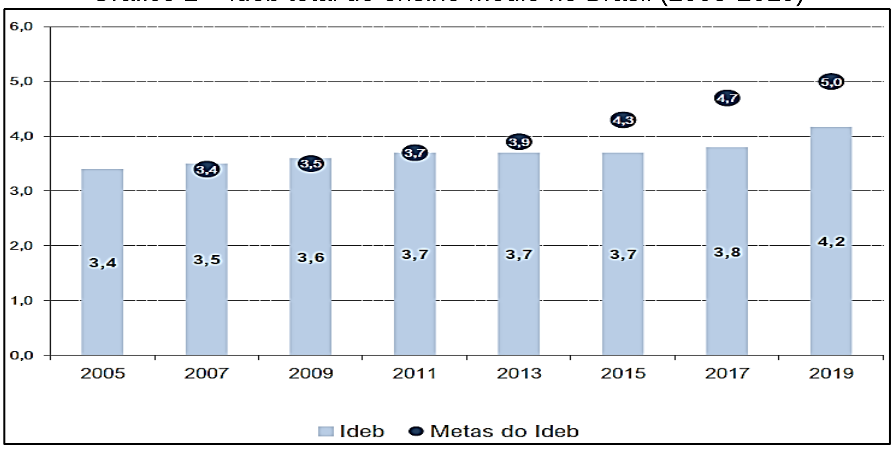
Gráfico 1 – Recorte dos resultados do Brasil em Matemática no PISA (2018)



Fonte: Inep (2018).

Os resultados retratam uma estagnação no desempenho escolar dos alunos no Brasil, baixo rendimento em relação à média e em comparação com outros países e ainda nível mínimo de proficiência na Matemática, isto é, um percentual quase geral dos alunos não conseguem resolver problemas simples envolvendo a matemática. Os resultados do Saeb confirmam esse cenário. Nesta avaliação, temos o Brasil com nota estagnada desde 2011, como vemos no gráfico 2.

Gráfico 2 – Ideb total do ensino médio no Brasil (2005-2019)



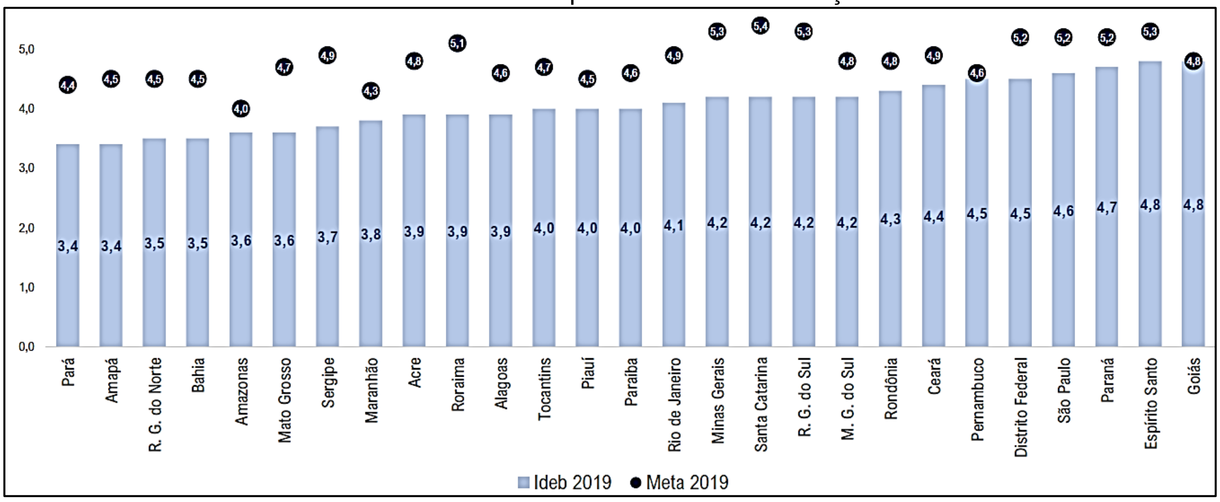
Fonte: Inep (2020).

[1] O Programme for International Student Assessment (PISA)
[2] O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).
[3] O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O resultado no ultimo Saeb, realizado em 2019 nos mostra uma melhoria do desempenho dos alunos e uma mudança em relação a estagnação apresentada. Devemos ter esses dados como motivadores para busca da melhoria do ensino na Educação Básica do nosso país.

No entanto, especificamente em relação a Matemática no nosso estado do Pará, os resultados convergem para o mesmo cenário problematizado, isto é, temos notas abaixo da meta estabelecida. Isto nos 3 níveis que o sistema avalia (5º ano, 9º ano e 3º ano do Ensino Médio). No entanto, damos destaque na última etapa da escolaridade, como podemos observar no gráfico 2 a seguir.

Gráfico 3 – Recorte do Ideb e metas por unidade da federação no Ensino Médio



Fonte: Inep (2019).

Dando enfoque em nosso local da pesquisa deste trabalhamos, o estado do Pará, os resultados indicam que o Pará ainda se encontra consideravelmente abaixo da meta estabelecida pelo Inep e da média nacional. Sendo o Ensino Médio a última etapa da escolarização da Educação Básica, devemos nos questionar se temos realizado a missão de formar nossos alunos matematicamente, de modo que eles saibam pensar matematicamente, utilizar a matemática no seu cotidiano para as mais variadas situações.

No Ensino Médio, temos o ensino de modo geral sobre influência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Assim, embora, em 2009, o Ministério da Educação (MEC) tenha publicado o “Ensino Médio Inovador” que volta o ensino a preparação dos alunos para o mercado profissionalizante e para continuidade dos estudos no ensino superior. O que temos visto em prática e que os resultados inferem é o enfoque do primeiro em detrimento ao segundo.

O discurso em sua maioria acaba por se restringir ao documento e acabamos por possuir um Ensino Médio cujas escolas particulares (e públicas também) vem preparando seus “clientes” estritamente para o ENEM e os incentivando, consequentemente, a obtenção de vagas cursos de elite para fim comercial.

A proposta inicial para o Ensino Médio não enfatiza essa restrição, muito pelo contrário, temos a valorizações de outros elementos como a interdisciplinaridade, cultura, informática, computação, linguagem, de modo a promover o desenvolvimento pleno do indivíduo a partir do aprimoramento de habilidades e competências.

Esta etapa da escolarização prevê para o aluno a proximidade com as tecnologias e sua manipulação, a vinculação dos conhecimentos científicos ao cotidiano, à cultura e a leitura do mundo a partir de uma ótica científica. Entendemos que a Matemática no Ensino Médio deve buscar “estabelecer relações com a ciência e a tecnologia: o conhecimento matemático enquanto saberes, competências, valores e práticas.” (SILVA, 2013, p. 82). Como afirmam os documentos oficiais

> Dessa forma, propõe-se estimular novas formas de organização das disciplinas articuladas com atividades integradoras, a partir das inter-relações existentes entre os eixos constituintes do ensino médio, ou seja, o trabalho, a ciência, a tecnologia e a cultura. (BRASIL, 2009, p. 3).

Assim, exige-se do professor de matemática uma visão geral da Educação Matemática e da Educação de modo que seja possível instrumentalizar suas aulas para promoção de situações didáticas que desenvolvam o conhecimento dos alunos, isto é, torná-lo apto a quantificar, expressar, representar, comparar, relacionar, testar, verificar, generalizar, etc. o conhecimento matemático e os saberes relacionados.

As problemáticas levantadas acima moldam-se em buscas de justificativas do porquê isto acontece e numa forma de intervenção. Todavia, é fato que o processo de ensino e aprendizagem é composto de diversas variáveis em que não se é possível dar conta de todas elas, deste modo as tendências da Educação Matemática, bem como suas pesquisas, as teorias, os modelos propostos constituem formas de estabelecer um controle e facilitar o processo a ação educativa.

Dentre as tendências da Educação Matemática, temos cada vez mais presente nas salas de aula o uso das tecnologias da informação, esta tendencia discute acerca do uso de aplicativos para o ensino de matemática, estes, acabam por se constituir ferramentas que auxiliam na compreensão de conceitos e na resolução de problemas. Os *softwares* de matemática e *Applets*, a exemplo do Mathway, permite que os estudantes resolvam equações polinomiais de maneira interativa, explorando as propriedades dessas equações e observando suas soluções.

Dentre as teorias, ressalto a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e a Teoria Sociocultural do Desenvolvimento Cognitivo de Vygotsky. A Teoria das Situações Didáticas tem como intuito investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática e o estudo das condições que favoreçam a sua aquisição pelos alunos, considerando e relacionando os atores envolvidos.

A Teoria Sociocultural do Desenvolvimento Cognitivo, também vai discutir o processo de aprendizagem, todavia, em um sentido mais amplo, estudando a influência do meio e das interações sociais para que o sujeito tenha um determinado conhecimento apreendido, sendo considerado como parte do processo as crenças e atitudes culturais, isto é, as particularidades do indivíduo.

Dentre as abordagens metodológicas destaco o uso de Sequências Didáticas em sala de aula. Essa metodologia, que possui sua gênese da linguística, teve suas adaptações elaboradas para o ensino em diferentes áreas do conhecimento. Sua adesão foi bem quista, uma vez que, os livros didáticos apresentavam limitações em aspectos formativos e metodológicos.

> [...] o livro didático ainda figura como a principal - ou único - recurso metodológico utilizado por professores em sala de aula. Esse fator pode indicar a necessidade do desenvolvimento de novas propostas metodológicas que possam proporcionar ambientes mais favoráveis para a aprendizagem [...] (PEREIRA, 2017, p. 15).

Em essência, as Sequências Didáticas configuram-se como um conjunto de atividades organizadas de forma estruturada com o objetivo do ensino de um determinado saber (ZABALA, 1998).

Na literatura podemos observar diversas propostas de orientações para construção de um Sequência Didática. Neste trabalho utilizo das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) propostas por Cabral (2017) que apresentam uma proposta de modelo estruturador de Sequências Didáticas, com possibilidades de relação com as mais variadas teorias e tendências da Educação Matemática, sem ferir a liberdade e autonomia do Professor em sua produção.

Nas metodologias supracitadas, o professor passa a ser um mediador na relação entre seus educandos e o saber ensinado; deve ter competência para promover situações de aprendizagem (situações didáticas) cujo conhecimento esteja adequado as condições do aluno e voltado sua formação (transposição didática) e, por fim, deve considerar que as variáveis presentes em sala de aula estão para além da metodologia empregada, isto é, levar em consideração que a aprendizagem é complexa, depende também de “fenômenos ligados a problemas de comunicação, sociológicos, antropológicos,...” (D’AMORE, 2007, p. 2) intrínsecos a sala de aula.

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), esteve, desde sua gênese em 2017, dirigindo suas atenções na promoção de propostas metodológicas de Sequências Didáticas para o Ensino de Matemática, no nível fundamental e médio, de modo a proporcionar aos professores da Educação Básica materiais e produtos educacionais de acesso gratuito.

Os objetos de pesquisa eram selecionados a cada ano pelos professores do programa e distribuídos entre os alunos conforme a linha de pesquisa escolhida por estes. Assim, foi compelido a mim a investigar o Teorema das Raízes Racionais de Equações Polinomiais.[4]

O Conteúdo de Equações Polinomiais (ou Equações Algébricas) é ensinado nas escolas, na maioria dos casos, na 3ª série do Ensino Médio. Os alunos são conduzidos a aprofundarem os conhecimentos obtidos nos estudos de polinômios, agora dentro do contexto dos números complexos, são retomadas as operações com polinômios com apresentação de novos algoritmos para o cálculo algébrico, não obstante, os estudos das raízes são aprofundados e os procedimentos de determinação se mostram variados, sendo o Teorema das Raízes Racionais um desses mecanismos disponíveis para uso dos alunos.

Nesse ponto, ressalto considerar que uma pesquisa nunca é desenvolvida sozinha. Direta e indiretamente tenho muitas “mãos” que me auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho. Deste modo, a partir daqui utilizo o texto em terceira pessoa do plural. Além disso, tivemos interesse em proporcionar uma linguagem mais objetiva e, portanto, para alguns conceitos são apresentados, em notas de rodapé, obras para o aprofundamento, uma vez que, alguns deles serão considerados como já de conhecimento do leitor.

Nossa pesquisa consistiu na investigação das potencialidades do uso de uma Sequência Didática elaborada com base nos conceitos da Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) – supracitada – cujo modelo tem seus princípios embasados na Psicologia Histórico-Cultural e no conceito de Zona de

---

[4] Consideramos por Equações Polinomiais ou Equações Algébricas toda equação expressa na forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky e nas noções de Análise Microgenética e Análise do Discurso referente as contribuições das interações verbais na construção do conhecimento.

Desde modo, busco responder nessa pesquisa a seguinte questão: *Em que aspectos uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) potencializa o processo de ensino e aprendizagem do teorema das raízes racionais de equações polinomiais?*

Para obtenção de respostas dos questionamentos e indagações levantadas, estabeleci como objetivo geral de pesquisa *estudar as potencialidades de uma sequência didática elaborada a partir dos conceitos das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) para o ensino e aprendizagem de raízes racionais de equações polinomiais.*

Não obstante, a partir dessa problemática, é de interesse neste trabalho compreender os conhecimentos de professores e alunos em relação ao objeto matemático de estudo, tanto em sua abordagem na pratica docente e manuais didáticos como no processo de ensino e aprendizagem em si. Diante disto, estabeleço os seguintes objetivos específicos que serviram de balizadores para o desenvolvimento da pesquisa:

- Realizar o estudo das equações polinomiais, com enfoque no teorema das raízes racionais na perspectiva da ciência, de pesquisas relacionadas e das considerações de livros didáticos.
- Verificar as impressões de professores e alunos egressos no que concerne ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de equações polinomiais, com enfoque no teorema de raízes racionais de equações polinomiais para obtenção de informações que auxiliem na elaboração da sequência didática.
- Analisar a apresentação do conteúdo de Equações Polinomiais segundo os livros didáticos para somar aos referenciais das atividades propostas na sequência didática.
- Elaborar uma sequência didática para o ensino do teorema das raízes racionais de equações polinomiais estruturada a partir das UARC para a superação das dificuldades identificadas no decorrer da revisão bibliográfica, análise de livros didáticos e percepção de professores e alunos.

- Apontar os indícios de aprendizagem identificados por parte dos alunos investigados durante a aplicação da sequência didática elaborada, confrontando com os resultados obtidos na turma de controle.
- Apresentar as contribuições da utilização de uma sequência didática organizada a partir dos preceitos das UARC bem como do uso de aplicativos no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

A fim de proporcionar uma melhor leitura e compreensão desta pesquisa, organizamos este trabalho em capítulos, descritos brevemente a seguir.

No capítulo 1 intitulado “referenciais teóricos” apresentamos os aportes da pesquisa. Assim, versamos acerca da teoria sociocultural da aprendizagem de Vygotsky, a teoria das situações didáticas desenvolvida por Brousseau, discutimos a ideia de sequência didática em específico sua organização segundo as unidades articuláveis de reconstrução conceitual de Cabral. Por fim, descrevemos sobre os referenciais utilizados para a análise dos dados coletados, isto é, a análise microgenética de Góes a análise do discurso na perspectiva de Mortimer e Scott.

O capitulo 2 diz respeito a nossos estudos preliminares, assim realizamos o estudo do teorema das raízes racionais, presente nas equações polinomiais, no contexto científico em que damos destaque a dois aspectos: o histórico, buscando discorrer sobre a construção deste teorema e matemático, fazendo o estudo deste objeto matemático e os objetos que o fundamenta.

Apresentamos as considerações dos documentos oficiais em destaque a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PNC’s) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) em relação ao ensino e aprendizagem das equações polinomiais.

Não obstante, apresentamos as considerações da literatura acerca das equações polinomiais no âmbito didático, a partir da revisão de estudos teóricos e pesquisas experimentais, dando olhar a nosso objeto matemático de estudo, o teorema das raízes racionais.

Por conseguinte, consideramos pertinente a realização de análise de manuais didáticos a fim de obter informações atualizadas no que concerne a abordagem dos livros didáticos no ensino do teorema das raízes racionais e das equações polinomiais como um todo. E para obter um panorama completo trazemos as considerações de alunos egressos e professores em relação ao trabalho das equações polinomiais em sala de aula.

No capítulo 3 “Metodologia da pesquisa”, descrevemos as características da pesquisa, os instrumentos de investigação utilizados em nosso trabalho, apresentamos nossa proposta metodológica de sequência didática e as análises prévias estabelecidas segundo nossos estudos preliminares.

Por fim, no capitulo 4, temos a “Análise e discussão dos resultados”, iniciada pelas considerações da aplicação com a turma experimental e de controle, descrevemos os indícios de aprendizagem identificados em cada uma das UARCs aplicadas aos alunos e ao final sistematizamos e confrontamos nossas conclusões com os questionamentos e objetivos definidos na pesquisa.

Ao final, compartilhamos com vocês as considerações finais desta pesquisa, elencamos a visão geral da pesquisa, desafios e obstáculos enfrentados em seu desenvolvimento, apresentamos nossas conclusões, delimitações e possíveis desdobramentos da pesquisa.

Temos por expectativa que este trabalho some à formação de muitos professores e professores de matemática da Educação Básica a fim de melhorar nossa prática docente e nossa visão enquanto educador, corroborando assim, para reinvenção das formas de ensinar e aprender Matemática.

1. REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo descrevemos acerca das concepções teóricas e metodológicas adotadas para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Como supracitado, nossos aportes teóricos embasam a proposta metodológica da sequência didática para o ensino do teorema das raízes racionais, bem como dos procedimentos de análise dos dados obtidos na experimentação.

Assim, compõem nossos referenciais teóricos, a teoria sociocultural da aprendizagem, com enfoque na zona de desenvolvimento proximal (ZDP), os pressupostos da teoria das situações didáticas, os conceitos relacionados ao uso da sequência didática em especifico a sua estruturação segundo as Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC). Para análise temos como suporte preceitos da Análise Microgenética e da Análise do Discurso.

Todos estes referenciais são descritos a seguir a fim de deixar você leitor inteirado da sua contribuição e importância para a realização da pesquisa.

1.1. TEORIA SOCIOCULTURAL DA APRENDIZAGEM

O século XX foi marcando por grandes discussões em relação ao pensamento humano e seu desenvolvimento, principalmente na fase inicial da vida cujo enfoque se deu nas situações que precedessem uma determinada aprendizagem. Assim, no âmbito educacional, temos diversas pesquisas e teorias que surgiram com o intuito de investigar como os alunos constroem o seu conhecimento e os utilizam nas mais variadas situações.

A teoria sociocultural da aprendizagem é um dos legados dos estudos realizados por Lev Vygotsky que buscou estabelecer conexões entre o homem e o meio no sentido de compreender como esta interação corrobora para aprendizagem. Em sua perspectiva, o educador possui um papel fundamental no desenvolvimento intelectual dos alunos sendo este papel de mediação envolvendo o aluno e o saber, enquanto que o social e a atividade possuem lugar de destaque. O social constitui a fonte do desenvolvimento conceitual e requer atividades organizadas para a aprendizagem por parte do aluno.

Nessa perspectiva, a participação e a colaboração entre os entes do processo de ensino e aprendizagem e o meio ao qual estão inseridos são o que dão origem ao motor do desenvolvimento cognitivo (VYGOTSKY, 1981). Vygotsky passa então a ser um dos primeiros a considerar mecanismos que colocam a cultura como parte de cada pessoa e do seu desenvolvimento.

Assim, na teoria sociocultural os desenvolvimentos social e cognitivo estão relacionados. O homem tem seu conhecimento formado a partir da sua interação com o meio que está inserido, sendo essa relação mediada por sistemas simbólicos de elementos mediadores, em especial a linguagem (VYGOTSKY, 1999).

Duas funções básicas da linguagem são trabalhadas por Vygotsky, o intercambio social caracterizado pela ação realizada para estabelecer uma comunicação e o pensamento generalizante, caracterizado pela utilização de sistema de signos para tornar a linguagem um instrumento de pensamento. Essas duas funções são aplicadas por nós, mesmo que inconscientemente, e compõem os mecanismos que usamos na atividade mental para aprendizagem (*Ibid.*).

Consideramos por atividade mental, toda ação realizada pelo sujeito em interação com o meio ao qual está posto. Neste sentido, a construção do conhecimento segue uma linha que vai do social para o individual, do externo para o interno. A apreensão de um conhecimento acontece segundo o que Vygotsky chama de “lei genética geral do desenvolvimento cultural”, cuja afirmativa consiste que

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (*id*., 1981, p.163).

O processo de internalização supracitado decorre das interações sociais, logo, estas se constituem— como elemento *sine qua non* para o desenvolvimento cognitivo, que por sua vez apresentaria quatro estágios no que concerne as operações mentais envolvendo o uso de signos: natural ou primitivo; psicologia ingênua; signos exteriores e crescimento interior (VYGOTSKY, *op. cit.).*

Em síntese, essas quatro fases descrevem as etapas do processo de desenvolvimento cognitivo, logo, considera o homem um ser racional e que desde o nascimento faz parte de um mundo construído e organizado de forma histórica e cultural pelas gerações anteriores e, portanto, “partilha, incorpora modos de agir, sentir, pensar próprios desta cultura” (SOUZA e ROSSO, 2011, p. 5896).

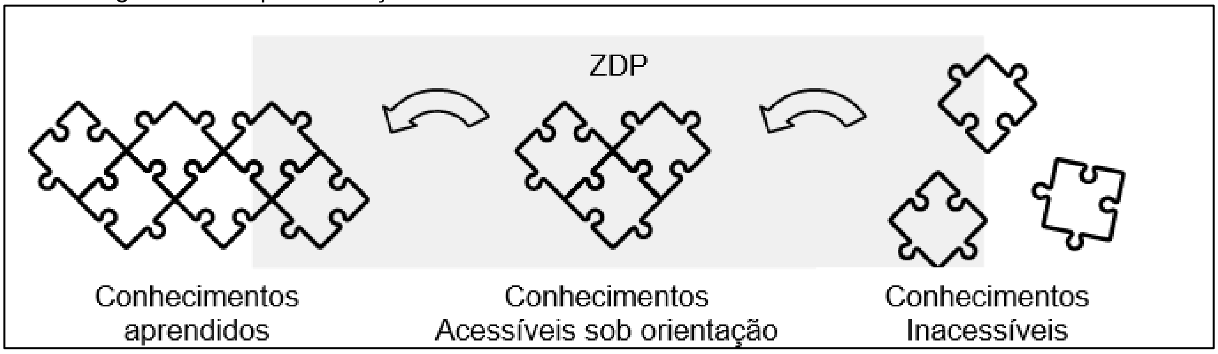
No âmbito escolar percebemos a importância da interação dos alunos entre si e destes com o professor. É nesse ponto que entra um conceito de destaque na teoria sociocultural de Vygotsky, a noção de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) definida como

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento atual (efetivo), determinado pela capacidade de resolver tarefas de forma independente e o nível de desenvolvimento potencial (gama de possibilidades), determinado pela solução de problemas, sob orientação de pessoas mais capazes ou mais experientes (VYGOTSKY, 1984, p. 97).

A partir de Vygotsky (1984) temos o Nível de Desenvolvimento Real (NDR) como as habilidades próprias que um indivíduo possui e utiliza para realizar com sucesso determinada tarefa/atividade sem precisar de ajuda enquanto que o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) refere a solução acontece sob orientação de outra pessoa com mais habilidade/experiência em determinada tarefa.

Nesse sentido o conhecimento pode estar em um dos três ambientes, sendo eles a região dos conhecimentos que ele já detém (ou pode aprender de forma autônoma), isto é, a Zona de Desenvolvimento Real; a região dos conhecimentos que ele pode aprender sob orientação, ou seja, Zona de Desenvolvimento Proximal e, por fim, o conhecimento pode estar em uma região fora da Zona de Desenvolvimento Proximal em que o indivíduo não é capaz, até então, de adquirir. Podemos compreender melhor o funcionamento da ZDP a partir da figura 1, a seguir.

Figura 1 – Esquematização dos conhecimentos na Zona de Desenvolvimento Proximal



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Podemos perceber na figura 1 que a região abrangida pela ZDP compreende os conhecimentos aprendidos e os inacessíveis adquiridos via mediação, interação e internalizados. Nesse sentido, conhecimentos que até então eram inacessíveis passam a ser possível de apreensão uma vez que estes entram na região compreendida pela ZDP.

Nesse sentido, a ZDP trata-se precisamente do campo intermediário entre os níveis de desenvolvimento cujo desenvolvimento potencial é desconhecido, uma vez que não foi ainda atingido. Consequentemente ela fornece os indícios potencial do indivíduo o que permite os processos educativos serem realizados de forma sistemática e individualizada (FINO, 2001)

Podemos tomar nosso objeto de conhecimento como exemplo. O Teorema das Raízes Racionais é parte dos estudos das Equações Polinomiais e seu conhecimento pode ser inacessível para que o aluno aprenda sozinho. O conteúdo de Equações Polinomiais, no entanto, pode ser aprendido sob mediação de um professor e na interação com outros alunos na ação educativa. Desde modo, o conhecimento do Teorema das Raízes Racionais que até então era inacessível passa a integrar os conhecimentos dentro da ZDP.

Nesse processo, Vigotsky (1999) destaca três fatores de influência, são eles: o mediador, representado na figura do professor; as interações sociais, que dizem respeitos as interrelações entre os alunos e o aluno e meio e, por fim, os andaimes, que correspondem as atividades de apoio para concretização da aprendizagem na ação educativa.

> [...] a ZDP remete, deste modo, para a pertinência da estimulação da aprendizagem com base em tarefas que promovam o desenvolvimento, constituindo-se essencial no modo como o indivíduo adquire progressivamente controle e responsabilidade individual pela resolução de problemas. Assim, o processo de desenvolvimento implica que o indivíduo seja orientado e guiado, aprendendo através da observação e interação com outros mais experientes na resolução de atividades (adequadas a sua Zona de Desenvolvimento Proximal), num processo que se torna progressivamente interiorizado e autorregulado (CONCEIÇÃO, 2016. p. 1).

Nas colocações de Conceição (2016) supracitadas podemos perceber os três fatores mencionados e como estes interagem para o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Especificamente, em relação as atividades, no âmbito educativo, devemos ter estas adequadas a zona de desenvolvimento proximal do aluno, isto é, a utilização de uma metodologia que atenda às necessidades e seja favorável para a aprendizagem. Quanto a esta promoção de um ambiente inclinado para o didático que temos as contribuições da Teoria das Situações Didáticas.

1.2. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A didática da matemática enquanto campo de pesquisa investiga o processo de aprendizagem considerando as diversas variáveis existentes na ação educativa, os atores presentes nesse processo, os meios, tanto externos quanto internos ao aluno, isto é, seu sistema cognitivo. Assim, consideramos a didática da matemática como a ciência das formas de apropriação e transmissão do saber matemático de utilização da humanidade e suas instituições. (BROUSSEAU, 2008).

Nesse sentido, destacamos a concepção de que o ser humano possui o que chamamos de consciência racional, temos a habilidade de aprender e adquirir conhecimentos a partir das experiências vivenciadas. Logo, devemos tomar como primícia que podemos aprender independentemente de estar em um meio inclinado para uma determinada aprendizagem.

Guy Brousseau, se debruçou a estudar a produção do conhecimento presente no âmbito didático e adidático a partir das interações entre professor, aluno e o saber em um *milieu*[5] (ALMOULOUD, 2007), ou seja, a modelagem da transmissão de conhecimentos especificamente quando munidos de intenções didáticas. A sistematização dessas concepções deu origem a Teoria das Situações Didáticas ao qual utilizaremos como suporte para o desenvolvimento de nossa investigação.

Esta teoria tem por objetivo “caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos” (ibid., p. 32). Segundo o autor, essa modificação configura-se justamente pela apreensão de conhecimentos presentes numa aprendizagem significativa[6].

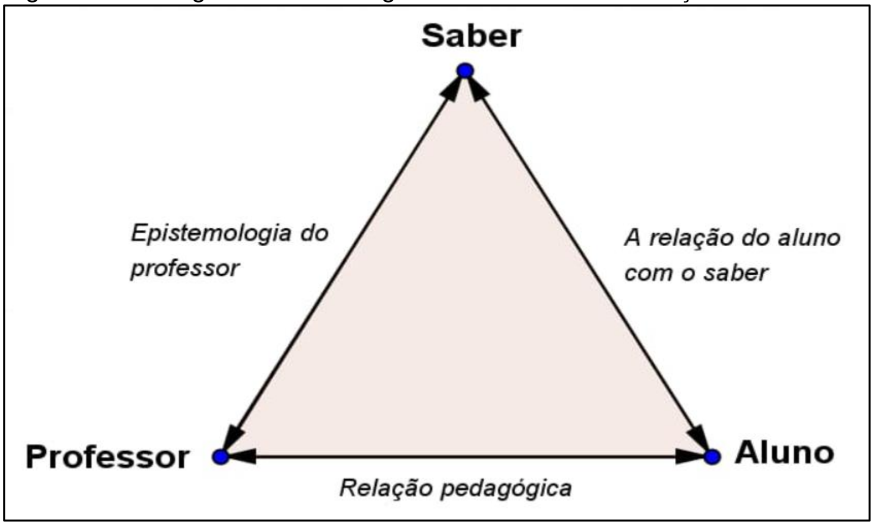
Nesse sentido, seu enfoque está na situação didática, considerando também, no entanto, as situações adidáticas, sua importância e contribuições no processo de ensino e aprendizagem, investiga as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Esses três constituem os pilares da Teoria das Situações Didáticas e se relacionam esquematicamente segundo o modelo a seguir (figura 2).

---

[5] Brousseau considera *milieu* como o ambiente em que ocorre o processo de aprendizagem que pode ser caracterizado quanto a sua organização, intenções didáticas, estrutura, sendo sempre externo ao aluno, porém estimulador de sua interação com o saber.

[6] Neste trabalho consideramos aprendizagem significativa sob os conceitos de Ausubel, isto é, em que o conhecimento possuí importância para o aluno e o processo se dá a partir de conhecimentos já presentes para a aprendizagens mais complexas. Ver: MOREIRA, M. A. e MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa:** a teoria de aprendizagem de David Ausubel. São Paulo: Editora Moraes, 1982.

Figura 2 – Triangulo Didático segundo a Teoria das Situações Didáticas



Fonte: Almouloud (2007, p. 32).

Portanto, considera como discussões pertinentes: a aprendizagem segundo a adaptação ao *milieu*; as condições do *milieu* para o processo de aprendizagem e a abordagem do saber no *milieu.* Brousseau (1978, p. 1) define situação didática como

> o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contento eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, p. 1).

No entanto, na ação educativa, o aluno pode ter conhecimento ou não da intenção de ensinar do professor. Não obstante, podem ocorrer (e ocorrem) situações das quais não estava no planejamento didático, neste ponto, adentramos em outro conceito importante, o de situação adidática.

Segundo Almouloud (2007) a situação adidática é uma situação em que a intenção didática não é revelada ao aprendiz, toda via, foi organizada pelo professor para promover o ensino. Destaca como parte essencial da situação didática e como fator que corrobora para a apropriação de um novo saber.

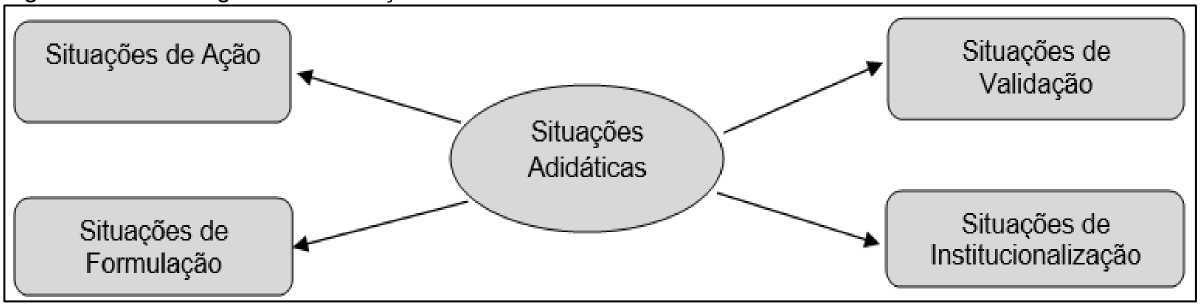
Nas situações adidáticas deparamos o aluno com situações que fazem agir por iniciativa própria, refletir e atuar de forma autônoma sem apelo as razões didáticas, o que Brousseau (1986) destaca como aprendizagem por necessidade não condicionada a ação do professor ou da escola. Não obstante, nesse tipo de situação o professor assume papel de mediador para criar condições de o aluno construir seus conhecimentos a partir da interação com o problema e os demais colegas ou mesmo com o próprio professor.

Assim, compõem a estruturação teórica das situações didáticas os conceitos de contrato didático; obstáculos epistemológicos; Dialética ferramenta-objeto e a transposição didática. O contrato-didático pode ser entendido como as concepções que irão nortear a prática educativa, podendo ser de conscientização implícita, nele está envolvido a divisão de responsabilidades, a construção da comunicação dialética e a forma de relação com o saber no *milieu* em que acontece a situação.

Brousseau (1986) destaca em relação ao contrato didático, paradoxos que podem ser desencadeados segundo as situações desenvolvidas no *milieu*, são elas: o paradoxo da devolução e da adaptação às situações, que podem resultar na inadaptação a exatidão e a inadaptação a uma situação posterior e o paradoxo da adaptação que pode desencadear na negação do saber, isto é, à significação, bem como pode desencadear a destruição da causa.

Os paradoxos apontados por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas vão depender de diversos fatores, entre eles, a modelagem das situações. As situações adidáticas em especifico podem ser compreendidas sob quatro perspectivas no processo de aprendizagem (que podem ocorrer por adaptação; formal e resolução de problemas), apresentadas na figura a seguir.

Figura 3 – Modelagem das situações adidáticas



Fonte: Brousseau (1986).

As situações ou dialética de ação, são aquelas em que o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional (ALMOULOUD, 2007).

Situações de formulação diz respeito às que o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar ouso da teoria (*ibid*.).

A dialética de validação, por sua vez, consiste nas situações em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade. Nessa ação de validação, podemos ter diferentes conceitos como base do processo, podemos destacar a exemplo a utilização de procedimentos, explicação, provas e demonstrações (ALMOULOUD, 2007).

Enfim, as situações de institucionalização dizem respeito as situações que tem por finalidade estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento a ser desenvolvido no *milieu*. Assim, consiste na socialização consensualmente estabelecida acerca de determinado objeto de conhecimento.

As situações didáticas possibilitam uma melhor definição do significado do conhecimento para o aluno. Elas podem ainda ser planejadas adequadamente pelo professor, mesmo que o professor não o forneça a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração do conhecimento.

Não é difícil perceber princípios da teoria sociocultural do desenvolvimento, bem como da teoria construtivista, e elas fazem parte dos conceitos que sustentam a Teoria das Situações Didáticas, nesse sentido a organização da pratica docente por meio de situações didáticas e adidáticas constitui uma metodologia de ensino que favorece uma aprendizagem significativa, uma vez que, esses conceitos em ação em um *milieu* consolida o saber para que o aluno possa ter capacidade de utilizá-los com maestria, isto é, para além das situações abordadas em sala.

Todavia, a forma como essa prática será desenvolvida em toda sua estruturação requer um norteador que nem sempre a própria Teoria das Situações Didáticas comporta completamente, isto é, a abordagem metodologia tem sua eficiência didática potencializada quando o tipo e forma de abordagem apresentação, desenvolvimento e avaliação estão bem definidos. Foram essas reflexões acerca da pratica docente que levaram ao conceito de sequência didática.

1.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Pesquisas no âmbito da didática da matemática tem, dentre outros enfoques, apontado para a investigação da utilização de sequências didáticas no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Esta abordagem de ensino, que estão atreladas as tendências da educação matemática, acaba por se constituir uma alterativa metodológica para a melhoria da ação educativa.

Na literatura, podemos encontrar diversas concepções no que diz respeito a definição de sequência didática, uma vez que o termo possuí caráter polissêmico e apresenta diferentes características a partir da área de conhecimento adotada. Neste trabalho, estabelecemos a concepção de sequência didática a partir das ideias de Zabala (1998), Almouloud (2007) e Cabral (2017).

Segundo Zabala (1998) a sequência didática é um conjunto de atividades organizadas e estruturadas com um objetivo educacional cujo princípio e fim são conhecidos pelo professor e pelos alunos. Neste sentido, ação educativa acontece na interação entre o professor, o aluno e o saber a ser (re)construído por meio de processo de transposição didática[7] em que o professor desenvolve estratégias de ensino de modo a desenvolver o conhecimento do aluno por meio dos aspectos conceituais e procedimentais como vemos na definição de Cabral (2017), segundo o autor, a sequência didática se constitui

> [...] um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática <u>a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas</u> (CABRAL, 2017, p. 12, grifo nosso).

Nesse sentido, a interação então acaba por ser fator determinante no processo de ensino e aprendizagem por meio da utilização de sequências didáticas, Zabala (1998) destaca, nesse sentido, a necessidade de adaptação da proposta metodológica às necessidade e realidade dos alunos; a consideração dos conhecimentos prévios dos alunos; a atuação do professor enquanto mediador do processo de apreensão do conhecimento por parte do aluno; estabelecer um ambiente comunicativo para fomentar e raciocínio e a argumentação dos educandos.

Em encontro com os destaques de Zabala (1998), Almouloud (2007) ressalta que a construção da sequência didática deve levar em consideração aspectos intrínsecos ao processo de aprendizagem. Para além do que já foi supracitado, destacamos o estabelecimento do campo conceitual que se deseja explorar, a necessidade da mobilização do conhecimento para resolução de determina situação

[7] O conceito de transposição didática foi introduzido pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, e foi aprofundado e apresentado pelo educador e pesquisador francês Yves Chevallard, na década de oitenta. De maneira ampla podemos considerar que a transposição didática é o conjunto de adaptações que o saber científico sofre para transformar-se em saber escolar, ou saber a ser ensinado.

e, por fim, que as situações exploradas podem envolver diferentes campos do conhecimento matemático.

Percebemos então, que a sequência didática exige do professor não só um planejamento prévio, mas também domínio do objeto matemático no seu sentido epistemológico e o conhecimento dos alunos e sua realidade de modo que possa tornar o aluno protagonista da construção do seu conhecimento e atuar como mediador deste processo. As atividades a serem desenvolvidas podem ser variadas no sentido de estratégia, como vemos nas palavras de Mantovani.

> [...] As atividades que fazem parte da sequência são ordenadas de maneira a aprofundar o tema que está sendo estudado e são variadas em termos de estratégia: leituras, aula dialogada, simulações computacionais, experimentos, etc. (MANTOVANI, S. R. 2015, p. 17).

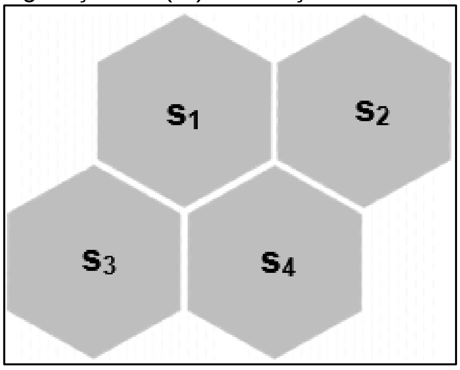
Deste modo, ela pode ter diferentes elementos em sua organização e desenvolvimento metodológico, isto é, ter uso de variados recursos das descritas tendências da educação matemática, porém, independente da estratégia adotada, as atividades devem ser elaboradas com a intencionalidade de desenvolver a autonomia do aluno, ou seja, de modo a permitir que este possa "agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). No que concerne a sua organização das sequências didáticas, Cabral (2017) apresenta em sua obra um constructo teórico para elaboração de sequências didática, um modelo estruturante o qual é descrito a seguir.

1.4. UNIDADES ARTICULÁVEIS DE RECONTRUÇÃO CONCEITUAL

As Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual – UARC desenvolvidas por Cabral (2017) caracterizam um modelo estruturante para a elaboração de sequências didáticas que visam a (re)construção de um conceito matemático, tem como finalidade apresentar uma alternativa de ensino diferente do modelo tradicional (constituído de definição exemplo e exercício), apresenta assim, um viés para estabelecer a aprendizagem a partir de "uma prática discursiva dialógica promotora de interações verbais e reflexivas" (CABRAL, 2017, p. 39).

De acordo com Cabral (2017) o processo de (re)construção de um conceito seria análogo a sedimentação de uma superfície "S" a partir da utilização de pisos estruturados "s" em que "S" corresponde ao objeto de conhecimento a ser aprendido pelo aluno e “s” o conjunto atividades para a aprendizagem deste objeto conforme a figura a seguir.

Figura 4 – Configuração da (re)construção de um conhecimento

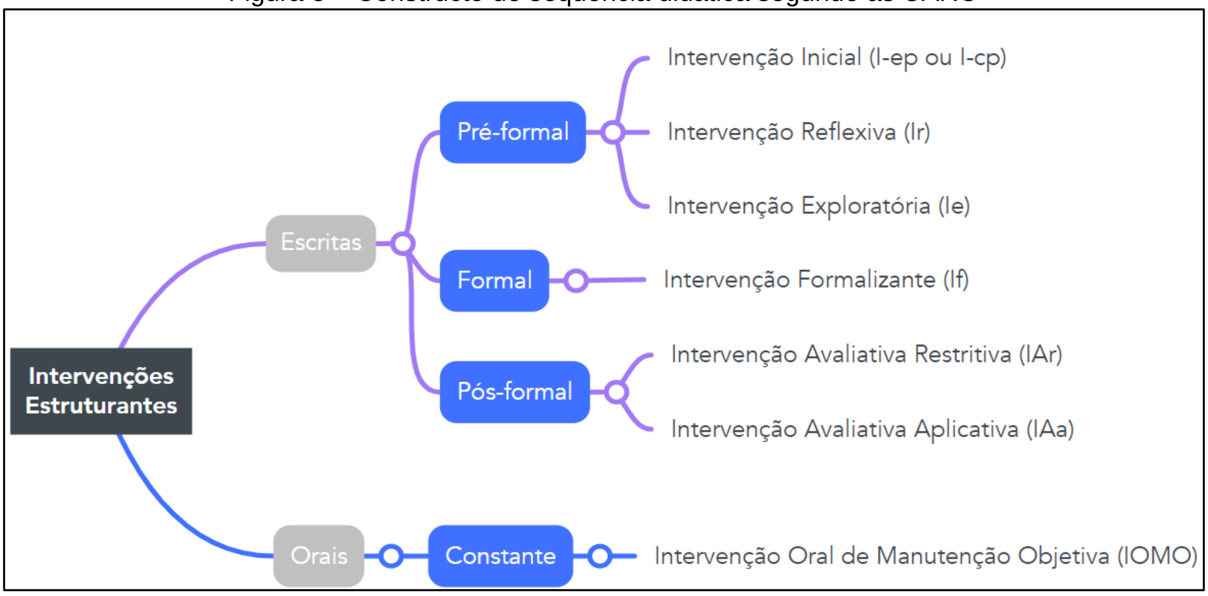


Fonte: Cabral (2017).

Nesse sentido, o conhecimento apreendido “S” seria dado pela composição te todas as atividades s_1, s_2, s_3, s_4... Assim, cada UARC possuí um objetivo com início, meio e fim com definidos, a sua organização se dá por meio das chamadas de intervenções estruturantes, estas sistematizam e organizam a sequência didática, são elas: a Intervenção inicial (I_i); Intervenção reflexiva (I_r); Intervenção exploratória (I_e); Intervenção formalizante (I_f); Intervenção avaliativa restrita (IA_r); intervenção avaliativa aplicativa (IA_a) e por fim, a Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO).

Cabral nos apresenta didaticamente a organização dessas intervenções estruturantes a partir de categorias pré-formal, formal e pós-formal e, o que destaco nessa pesquisa, constante.

Figura 5 – Constructo de sequência didática segundo as UARC



Fonte: Cabral (2017).

As UARC enquanto conjunto de atividades “s” para aprendizagem de um conhecimento matemático “S”, conforme supracitado, se encerra na intervenção formalizante. As intervenções avaliativas então possuem objetivos próprios. Vale ressaltar que consideramos a intervenção oral de manutenção objetivo como elemento constante, pois está presente durante todo o percurso do processo de aprendizagem (CABRAL, 2017).

As intervenções estruturantes se relacionam entre si e estão relacionadas à intervenção inicial (I_i). Esta representa o primeiro contato do aluno com o conhecimento, desse modo, deve focar em instigar o interesse dos alunos e a busca para resolução ou argumentação sobre o que fora apresentado. De acordo com a intencionalidade do professor a intervenção inicial pode assumir duas modalidades distintas, quais sejam: a exploração potencial e a conexão pontual, respectivamente.

A intervenção inicial na modalidade de exploração potencial (I_i-EP) é apresentada por Cabral (2017) como uma situação problema, um jogo, um desafio, etc. que permite com que o processor desperte no aluno ações investigativas fazendo com que este realize simulações, levante hipóteses, analise dados.

Ainda segundo Cabral (2017), temos a intervenção inicial na modalidade de conexão pontual (I_i-CP) que se materializa a partir de “pequenas tarefas” definidas pelo autor como os “comandos de curta duração”. São viáveis para despertar no aluno a percepção de regularidades e o estabelecimento de generalizações a partir de conhecimentos prévios do aluno.

Relacionadas a intervenção inicial estão as Intervenções reflexivas (I_r) e exploratórias (I_e) que aparecem no texto de maneira caótica, porém organizadamente didática, ou seja, não necessariamente uma após a outra, mas sempre com a finalidade de conduzir o aluno para a Intervenção formalizante (I_f).

Na intervenção reflexiva o aluno é conduzido a pensar em relação ao conceito do objeto de conhecimento trabalhado. Segundo Cabral (2017) o Professor deve instigar esse pensamento por meio de perguntas, indagações, nesse sentido no contexto da intervenção reflexiva (I_r) “o aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve” (p. 41).

A intervenção exploratória (I_e), por sua vez, tem como enfoque na execução de procedimentos pelo aluno, nesse sentido, recebem comandos para realização de resoluções, simulações, experimentações, observações, trabalhos com gráficos e tabelas, entre outros. Nessas atividades o aluno deverá utilizar de seus conhecimentos intuitivos e prévios para sua resolução, dentro do contexto do que foi solicitado. É neste ponto que Cabral (2017) destaca a relação entre as intervenções exploratória e reflexiva. Embora a intervenção exploratória instigue o conhecimento do aluno ela não possibilita, diretamente, a reflexão em relação ao que foi feito ou a realização de observações como é a intervenção reflexiva.

> As intervenções estruturantes (reflexivas e exploratórias) são capazes de produzir um conjunto de interações verbais que revelam, em tese, as formas de pensamento dos aprendizes. Os aprendizes verbalizam seus pensamentos e ao professor cabe a retomada das principais afirmações em torno dos objetos e deve disponibilizar a toda classe, reorganizando tais proposições de modo formal usando o rigor adequado ao formalizar os resultados (ibid. p.33).

A ação de formalização desses conhecimentos é devida ao professor e é nela que ocorre a (re)construção do conceito matemático. Essa intervenção do professor representa a intervenção formalizante (I_f) dentro do constructo e é por ela que se encerra uma unidade articulada de reconstrução conceitual – UARC, nesse sentido, composta de 1 intervenção inicial + n intervenções exploratórias + m intervenções reflexivas + intervenção formalizante.

Nesse ponto, no âmbito da sequência didática, é essencial destacar a independência de cada UARC, isto é, cada uma tem sua organização definida e conduzem a uma aprendizagem, mencionado por Cabral (2017) como conquistas parciais do objeto de aprendizagem. Com esse mesmo pensamento uma sequência didática pode ser composta de um conjunto de aulas ou apenas uma aula ou ainda uma fração de aula e, por fim, por uma única UARC.

Após cada intervenção formalizante em uma UARC temos as intervenções avaliativas que Cabral (2017) as definem com o objetivo de consolidar o aprendizado e confirmar a apreensão do conhecimento que compõem o objeto matemático.

A Intervenção avaliativa restrita (IA_r) permite com que o professor possa aferir a aprendizagem em dois aspectos do saber matemático: o que é o objeto de conhecimento estudado e as propriedades e algoritmos relacionados a este, ou seja, dá ao professor informações do que o aluno compreendeu do objeto matemático estudado e se sabe opera-lo.

A intervenção avaliativa aplicativa [IA_a] já caminha para a utilização desses conhecimentos na resolução de problemas, aqui

> o aprendiz precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmo) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao nível de ensino (Costa e Cabral, 2019, p. 35).

Temos a intervenção avaliativa aplicativa como um nível mais elevado de avaliação do processo de aprendizagem, permite que o professor verifique se o aluno sabe lidar sabe manipular o conhecimento para além da própria matemática.

No uso das UARCs, há uma intervenção estruturante que segue todo o percurso do processo de ensino e aprendizagem, esta é a intervenção oral de manutenção objetiva (IOMO), de característica constante. Para Cabral (2017):

> [...] essa última categoria de intervenção pode ser entendida como uma espécie de Sequência Didática implícita complementar que é sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitáveis no processo de reconstrução conceitual. Essas intervenções são importantes, sobretudo por dois aspectos. Por um lado, permitem as modulações do professor no sentido de estimular o aluno em direção aos objetivos estabelecidos pela Sequência Didática e, por outro lado, em possibilitar futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem (CABRAL, 2017, p. 45-46).

Portanto, a IOMO atua como uma intervenção oculta ao texto da Sequência Didática, sustentadas pelo discurso do professor durante toda a ação educativa, o permite fazer as reformulações emergências necessárias que são inevitáveis no processo de reconstrução conceitual.

A importância da IOMO no desenvolvimento da sequência didática é tão importante quanto a própria. Independente da estrutura adotada, isto é, se usa de texto escrito, material manipulável, aplicativo ou *software* é a intervenção oral de manutenção objetiva que irá direcionar os alunos apara a aprendizagem.

A exemplo, as próprias intervenções reflexivas têm as IOMO como suporte para conduzir o aluno em seus pensamentos a cada questionamento em relação ao conceito ou algoritmo do objeto de conhecimento estudado. Não obstante, dentro a proposta de pesquisa, é a partir dessa intervenção estruturante que será possível ter um incentivador do raciocínio dos alunos, logo, a observação dos indícios de aprendizagem a cada UARC sob o aporte teórico da análise microgenética e da análise do discurso.

1.5. ANÁLISE MICROGENÉTICA

Os conceitos relacionados à teoria da psicologia histórico-cultural são a base da teoria das UARCs. Assim, consideramos que o desenvolvimento e a aprendizagem acontecem a partir de internalizações das interações do sujeito com o meio. Embora Vygotsky não tenha finalizado sua teoria, pesquisadores contemporâneos deram continuidade aos estudos os quais estacam o desenvolvimento humano em diferentes panoramas segundo um determinado referencial, são elas: filogenético, sociogenético, ontogenético e microgenético.

Cabral (2017) exemplifica estes panoramas de forma bem didática exibindo a história da humanidade como macro, um panorama filogenético enquanto que um pequeno recorte de modo específico, seria um momento da história, em um panorama microgenético. Relacionando com sua teoria, as UARCs seriam um conjunto de momentos voltados para o desenvolvimento (aprendizagem) de novos conhecimentos por parte de um grupo de sujeitos.

A análise microgenética vem, por sua vez, ser o conjunto de estratégias para realizar um estudo, uma investigação, desses momentos de aprendizagem, da microgênese, que segundo Moura *et al.* (2016) é considerado por Vygotsky como situações particulares vivenciadas por um sujeito e que possibilitam a modificação de funções superiores, isto é, o desenvolvimento do indivíduo.

Nesse estudo teórico, utilizamos como referenciais as considerações de Moura (2016) e Góes (2000). O primeiro coloca a analise microgenética como “um recurso metodológico que avalia processos afetivo-cognitivos e que investiga a compreensão dos processos psíquicos superiores, tais como: pensamento, linguagem, atenção voluntária entre outros” (MOURA, 2016, p. 112). Góes (2000) complementa ao afirmar que a análise microgenética investiga as minucias da formação de um processo, ou seja, considera as ações, interações, verbalizações dos sujeitos envolvidos em intervalos curtos de tempo.

Não obstante, Góes (2000) destaca que a análise microgenética tem seu nome “micro” justamente por fazer uma investigação detalhada fazendo relação de parte-todo com qualidade descritiva dos eventos e “genética” por estudar a gênese dos indícios de aprendizagem, bem como a história do objeto de conhecimento de modo a relacionar o presente com as condições do passado, estabelecendo projeções futuras de desenvolvimento.

A análise microgenética tem interesse no processo, procura relacionar interação, discurso e construção do conhecimento. Seu palco são as interações verbais e escritas que acontecem durante todo percurso didático. Considerando desde os conhecimentos prévios dos alunos, a própria formação do professor, passando pela experimentação em si, até a finalização da avaliação da proposta. Nesse sentido,

> por considerar o processo e não o produto todos os personagens envolvidos na construção do conhecimento são importantes. Com isso, torna-se dispensável a neutralidade do pesquisador (o professor), facultando-lhe a oportunidade de intervir sempre que necessário, auxiliando os discentes na formulação (ou reformulação) de algum argumento, alguma ideia (GAMA, 2020, p. 23).

No que concerne aos instrumentos metodológicos dentro da análise microgenética, as informações podem ser obtidas por meio da análise de falas em áudio, comportamentos (expressões) em vídeos e as manifestações escritas dos sujeitos investigados o que torna esse instrumento de análise um mecanismo rico no desenvolvimento de pesquisas com teor tanto qualitativo com ênfase nas diversas variáveis que compõem o jogo de ensinar e aprender quanto quantitativo na quantificação e interpretação estatística dos resultados (GÓES, 2000).

Quanto a apresentação desses resultados, realiza-se a transcrição de todas as falas obtidas em áudio ou videogravação, esses procedimentos são essenciais pois permitem ser reproduzido a quantidade de vezes necessária para a identificação de informações pertinentes ou não, validas para discussão dos resultados. Na análise microgenética trabalha-se com os conceitos de turno, segmento e episódio (*ibid.)*

Tomando as considerações de Moura *et al.* (2016) um turno corresponde a uma fala dita por um dos sujeitos do meio, em maior escala, temos um segmento como conjunto de turnos, todavia, um segmento corresponde a um conjunto de turnos relacionados ao desenvolvimento de uma determinada atividade ou relacionado a momentos no desenvolvimento da experimentação de modo a destacar uma mudança de significação. Por fim, temos o episódio que diz respeito a consolidação de um conjunto de segmentos com enfoque nas conquistas obtidas ao final do processo.

Fazendo relação com as UARCs, Cabral (2017) coloca a sequência didática como um instrumento que em análise é composta de vários episódios, assim, cada UARC presente na sequência didática diz respeito a um episódio selecionado a um conhecimento que compõe o conceito do objeto de estudo. Os segmentos então dizem respeito às diversas etapas para a compreensão daquele conhecimento, tais como primeiras impressões, percepções, avanços e retrocessos. Por fim, os turnos como os diálogos e falas das interações em cada um desses momentos na aplicação da sequência didática em sala de aula.

Vale destacar que, embora a pesquisa tenha um enfoque no desenvolvimento do aluno e o processo de construção do conhecimento, a análise microgenética permite com que o professor possa (re)avaliar a sua própria prática docente, no sentido de que este pode investigar suas abordagens, intervenções e principalmente os tipos de linguagem que utiliza nos diversos momentos da ação educativa.

Cabral (2017) reforça dentro das UARCs a importância dessas falas (tanto do aluno quanto do professor) no processo de construção do conhecimento e principalmente a forma como se fala. Decorrente disso, trabalha com a análise do discurso como outro suporte para a obtenção e estudo de dados nas pesquisas envolvendo as sequências didática a partir das UARCs.

1.6. ANÁLISE DO DISCURSO

A fala é nosso principal canal de comunicação, permite a manifestação de ideias e pensamentos. Existem diversas pesquisas relacionadas a fala nos mais variados nichos, porém independente da área de estudo é indiscutível sua importância no desenvolvimento humano. No âmbito do didático, a própria psicologia histórico cultural e a teoria das situações destacam a participação ativa da linguagem no processo de construção do conhecimento e as influências do discurso no alcance dos objetivos de ensino no ambiente escolar.

Segundo Mortimer e Scott (2000) toda fala, e consequentemente texto, é dotado de duas funções que podem se manifestar simultaneamente ou não, são elas, a função unívoca, estabelecida quando os códigos do emissor e receptor coincidem em níveis quase completos o que dá ao texto um grau máximo de univocidade e a função dialógica estabelecida quando novos significados são construídos, isto é, quando o texto deixa de ser um conector passivo de transmissão de informações entre o emissor e o receptor.

A partir disto Cabral (2019) considera que todo texto é munido de tensão entre essas funções, deste modo, qualquer texto apresenta em maior ou menor grau as funções unívocas e dialógicas, sendo então, atributos universais.

Outros dois conceitos destacados são a polissemia e polifonia na reconstrução do conceito. Estes elementos estão presentes no processo de apreensão do conhecimento, uma vez que, o desenvolvimento cognitivo se dá a partir do processo de significação das coisas e os significados atribuídos, por sua vez, podem ser polifônicos e polissêmicos dentro de um mesmo discurso.

Logo, para Mortimer e Scott (2000), o processo de aprendizagem acontece numa negociação de novos significados, num espaço comunicativo em que se encontram diferentes concepções e culturas que interagem em um processo de crescimento mútuo. Nesse sentido, destaca quatro tipos de abordagens comunicativas apresentadas a seguir.

Quadro 1 – Abordagens comunicativas do discurso

Tipo de Abordagem	Característica	Esquematização
Discurso não interativo	De autoridade	Ciência
	Dialógico	Ciência/Ciência
Discurso interativo	De autoridade	Senso Comum/Ciência/Senso Comum
	Dialógico	Senso Comum/Ciência

Fonte: Mortimer e Scott (2002).

A iniciar pelo discurso não interativo de autoridade, este diz respeito a comunicação que se estabelece apenas com um falante, o professor e este apresenta um discurso baseado na ciência. Nessa categoria, o conhecimento é colocado de maneira axiomática. É um ainda bastante vigente no processo de ensino e aprendizagem e sofre críticas negativas, uma vez que, não promove a participação do aluno, tão pouco favorece a aprendizagem de forma significativa.

O discurso não interativo dialógico por sua vez, embora não realize a interação com os alunos, ele dialoga com a própria ciência em diferentes pontos de vista destacando as similaridades e diferenças acerca daquele conhecimento. Cabral (2017) considera essa abordagem positiva para determinadas situações, a exemplo, apresenta ser essencial para a realização da formalização de um conhecimento.

O discurso interativo de autoridade, já trazer o aluno para participação na comunicação dialógica, porém o aluno atua de forma passiva, ou seja, é abordado por indagações do professor, nessa abordagem comunicativa o professor conduz os alunos por meio de perguntas e respostas de modo a atingir uma concepção especifica (desejada) do objeto de conhecimento em estudo.

Por fim, o discurso interativo dialógico considera o professor e aluno como sujeitos ativos na comunicação, exploram e formulam perguntas, fazem considerações e comparam pontos de vistas no processo de construção do conhecimento. Deste modo relacionada o conhecimento cultural dos alunos (senso comum) com o saber cientifico do professor (ciência).

Cabral (2017) apresenta as UARC como estruturas metodológicas que, por terem bases na psicologia histórico-cultural, consideram principalmente as categorias comunicativas interativas. Não obstante, ressalta que esses discursos acontecem de forma alternada no processo de ensino e aprendizagem e que se deve evitar a restrição ao uso de uma única abordagem comunicativa.

Especificamente em relação a estrutura dos discursos, Mortimer e Scott (2002) pontuam que o diálogo se dá a partir das interações entre o professor e o aluno. A perspectiva ideal é dada pela tríade I-R-A (intervenção, resposta, avaliação). Nela, o professor realiza uma intervenção acerca do saber, o aluno responde de forma positiva e em seguida o professor avalia essa resposta.

No entanto, sabemos que o processo de aprendizagem é composto de diversos obstáculos e a resposta positiva imediatamente. Muitas vezes é necessária uma proposta de procedimento (P) ou a apresentação de um feedback (F) por parte do professor. A proposta de procedimento visa conduzir o aluno para uma resposta positiva, enquanto o feedback do professor busca lapidar a resposta do aluno para a modelo positivo desejado. Porém, nem sempre é necessária uma única intervenção ou apenas um feedback no caminho para aprendizagem. Logo, em esquematização teríamos configurações como I-R-P-R-P... e I-R-F-R-F...

Dando enfoque a abordagem do professor, Scott (1998, *apud* Vivian 2006) destacam seis formas que especificam o foco e ações docente na ação educativa. O quadro a seguir descreve cada uma delas.

Quadro 2 – Formas de ações do discurso docente

Objetivo do discurso	Descrição
"Dar forma ao significado"	Visa explorar as ideias dos alunos, o professor introduz um novo termo, parafraseia fala do aluno ou mesmo mostra diferença entre dois significados de um conhecimento.
"Selecionar significados"	Foca em trabalhar com os significados no desenvolvimento do conhecimento. Caracterizada pela ação de considerar ou ignorar resposta apresentadas pelos alunos.
"Marcar significado chaves"	Foco de acordo com a situação, voltada para evidenciar respostas de um aluno, se dá a partir do estabelecimento de um diálogo em I-R-A.
"Compartilhar significados"	Foco em tornar os significados disponíveis para conhecimento de toda classe, compartilhando ou destacando resposta de um aluno ou solicitando que este as organize e socialize com a turma.
"Checar entendimentos"	Busca constatar as concepções dos alunos acerca de um conhecimento, o professor pode pedir explicação do ponto de vista do aluno ou solicitar que transcrevam organizadamente a resposta.
"Rever o progresso da estória cientifica"	Voltado para recapitulação e ratificação dos significados ideais relacionados ao objeto de conhecimento. O professor pode usar de sintetizar as respostas apresentadas, rever atividades realizadas ou ainda rever o progresso do desenvolvimento daquele saber historicamente.

Fonte: SCOTT (1998, apud VIVIAN, 2006, p. 26).

Embora haja a previa organização didática do professor em relação a sua aula, a construção do conhecimento se dá a partir de situações didática e adidáticas, como visto anteriormente. Assim, o discurso do professor se modificar para cada situação de modo a atingir o objetivo didático de aprendizagem por parte dos alunos.

As formas de ações de discurso do professor acontecem de forma, em parte, imprevisível, uma vez que, por exemplo, não temos como ter certeza de que o aluno dará uma resposta positiva de imediato ao receber uma intervenção. Todavia, Scott (1998, *apud* Vivian 2006) destaca a presença corriqueira do uso das três ultimas formas de intervenção do professor no ensino de um saber.

Dentro da perspectiva das UARC, percebemos a importância do uso combinado da análise microgenética e a análise do discurso como instrumentos de análise de dados. A partir desses mecanismos é possível fazer aferições quantitativas e principalmente qualitativas com enfoque no processo de construção do conhecimento dado a partir desta metodologia. Findado nossos abortes teóricos, realizamos em seguida estudos preliminares relacionados ao objeto matemático tanto no âmbito cientifico como didático, sendo apresentados no capitulo a seguir.

2. ESTUDOS PRELIMINARES

O Conteúdo de equações polinomiais (ou equações algébricas) é ensinado nas escolas, na maioria dos casos, na 3ª série do Ensino Médio. Os alunos são conduzidos a aprofundarem os conhecimentos obtidos nos estudos de polinômios, agora dentro do contexto dos números complexos. São retomadas as operações com polinômios com apresentação de novos algoritmos para o cálculo algébrico, não obstante, os estudos das raízes são aprofundados e os procedimentos de determinação se mostram variados.

Com enfoque nas questões acerca do ensino de raízes racionais de equações polinomiais, nos propomos a realizar inicialmente a verificação das considerações dos documentos oficiais, em seguida realizamos um levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas ao tema, analisamos a abordagem de livros didáticos e, por fim, buscamos identificar as concepções de professores e alunos acerca do tema.

Acreditamos que tais procedimentos acabam por fornecer uma melhor reflexão do objeto matemático estudado no âmbito do seu processo de ensino e aprendizagem, contribuindo, assim, como subsídios na elaboração da sequência didática voltada para o ensino de raízes racionais de equações polinomiais. Deste modo, este capitulo tem por objetivo apresentar um panorama relativo ao ensino e a aprendizagem do tema a partir do que a ciência dos apresenta, as considerações da comunidade científica e das informações coletadas de alunos e professores sobre este saber.

2.1. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico abordaremos o que a ciência nos apresenta em relação as raízes racionais de equações polinomiais. Para isso, iremos explorar alguns tópicos que se tornam base deste teorema e sustentam as os corolários decorrentes deste.

A obra Fundamentos da Matemática Elementar, no seu sexto volume, nos traz o estudo dos números complexos, polinômios e das equações polinomiais define-as da seguinte maneira: “Dadas duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta $f(x) = g(x)$” (IEZZI, 2013, p. 109). Logo se, por exemplo, temos $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ e $g(x) = x^2 - 8$ a sentença $x^3 + 2x^2 - 6x = x^2 - 4$ configura uma equação polinomial.

A raiz de uma equação polinomial é o valor dado a incógnita x que torna na sentença verdadeira. Considerando o exemplo dado acima para $x = 0$, temos que

$0^3 + 2.0^2 - 6.0 = 0^2 - 4$, consequentemente temos $0 = -4$ (falsa). Por outro lado, para $x = 1$, temos $1^3 + 2.1^2 - 6.1 = 1^2 - 4$, consequentemente temos $-3 = -3$ (verdadeira) e, portanto, $x = 1$ se configura como uma raiz da equação polinomial.

O conjunto solução ou conjunto verdade de uma equação polinomial $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{C}$, é o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas de uma equação polinomial. Considerando a equação polinomial em estudo $x^3 + 2x^2 - 6x = x^2 - 4$, o conjunto solução é dado por $S = \{-1 - \sqrt{5},\ 1, -1 + \sqrt{5}\}$.

Assim, quando se fala em resolver uma equação polinomial significa obter o seu conjunto solução a partir de uma linha de raciocínio lógico-matemático, sem o uso da intuição ou adivinhação. Para isso, trabalhamos com a equação polinomial em uma forma equivalente de modo que a sentença seja igual a zero, portanto, uma equação polinomial pode ser escrita na forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Disso, decorre o teorema fundamental da álgebra, cujo qual afirma que todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa e o teorema da decomposição o qual apresenta a decomposição de um polinômio P de grau $n \geq 1$ a partir de n fatores do primeiro grau, isto é, $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, em que r_1, r_2, r_3, $\dots r_n$ são as raízes de P.

Em consequência do teorema da decomposição, temos que um polinômio P de grau $n(n \geq 1)$ admite raízes que são distintas ou não, deste modo temos a possibilidade da multiplicidade de raízes no conjunto solução de uma equação polinomial, neste caso o polinômio P pode ser escrito na forma $P = (x - r)^m . Q$, sendo $Q(r) \neq 0$, um polinômio fator que constitui P.

Assim adentramos nas relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial. Essas relações foram estudadas por anos e nos levaram ao que conhecemos como relações de Girard, um matemático francês que nos proporcionou métodos para determinação de raízes de equações algébricas para qualquer grau, embora seja usada para equações de 3º, 4º e, por vezes 5º grau.

Tomando como ponto de partida a equação do 2º grau, temos sua forma canônica dada por $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$, cujas raízes são r_1 e r_2. Vimos que essa equação pode ser escrita a partir do produto do coeficiente do termo dominante e suas raízes, isto é, $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$. Umas vezes equivalentes, vale a igualdade a seguir $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$. Desenvolvendo de ambos os lados temos que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2,\ \forall x$. Portanto, concluímos que $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e

$r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ que vemos no método de soma e produto ensinado no estudo da equação polinomial do 2º grau.

De modo análogo faremos o mesmo para equação do 3º grau. Assim, dado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$ e as raízes r_1, r_2 e r_3, podemos escrever a equação na forma $a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$, de modo equivalente segue a expressão $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$, desenvolvendo de ambos os lados temos a igualdade a seguir

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)x - r_1 r_2 r_3, \forall x.$$

Portanto, temos $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$, $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = \frac{c}{a}$ e $r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$. Essas são as relações Girard para equações do 3º grau.

Em continuidade é possível deduzir as relações para uma equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$. Para isso considere uma equação polinomial dada por

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ cujas raízes são r_1, r_2, $r_3, \dots, r_n$, temos a identidade $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots r_n)x^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n)x^{n-2} - a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)x^{n-3} + \cdots + (-1)^h a_n S_n x^{n-h} + \cdots + (-1)^n a_n (r_1 r_2 r_3 \cdot \dots \cdot r_n), \forall x$.

Sendo

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$S_2 = (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$S_3 = (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n) = \frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$S_h = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \text{ e, enfim,}$$

$$S_n = r_1 r_2 r_3 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

As relações de Girard apresentadas acima constituem um método de relações entre coeficientes e raízes de equações polinomiais. No entanto, as n relações para uma equação polinomial de grau n não são suficientes para obter $r_1, r_2, r_3 \cdot \dots \cdot r_n$. Tomando r_1 para determinação temos no fim das substituições $a_n {r_1}^n + a_{n-1} {r_1}^{n-1} + a_{n-2} {r_1}^{n-2} + \cdots + a_1 r_1 + a_0 = 0$ $(*)$ (IEZZI, 2013). Porém esse modelo será necessário para demonstração do teorema das raízes racionais, vamos a ele.

O teorema das raízes racionais aponta se uma equação polinomial de grau n dada por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ com p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Para Demonstrar o teorema, partirmos de $(*)$, se $\frac{p}{q}$ é uma raiz de $P(x) = 0$, temos $a_n.\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}.\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}.\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_1.\frac{p}{q} + a_0 = 0$, multiplicando a equação por q^n obtemos $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$. Isolando a_np^n e, em seguida a_0q^n, temos

$$(1)\ a_np^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}]$$

$$(2)\ a_0q^n = -p[a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1q^{n-1}]$$

Como $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, p\ e\ q$ são todos inteiros, decorre que

$$\alpha = [a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}] \text{ é inteiro.}$$

$$\beta = [a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1q^{n-1}] \text{ é inteiro.}$$

Assim, retomando (1) e (2), vem

$$(1) = \frac{a_np^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} \text{ e } (2) = \frac{a_0q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$$

a_np^n é divisível por q e como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q.

a_0q^n é divisível por p e como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p.

Sua utilização acontece na identificação de todas as possíveis raízes racionais $\frac{p}{q}$ a partir dos divisores de a_0 e a_n, respectivamente. A exemplo, considere a equação $P(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$. Por ser uma equação polinomial do 3º grau, temos que $P(x)$ admite 3 raízes. Se existe(m) raiz(es) racionais $\frac{p}{q}$, temos que p é divisor de $a_0 = 6$ e q é divisor de $a_n = 1$. A tabela a seguir mostra o conjunto de possibilidades de raízes racionais para esta equação polinomial em estudo.

$q \backslash p$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
-1	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
1	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6

Deste modo se a equação polinomial $x^3 - 7x + 6 = 0$ tiver raízes racionai, estas estarão no conjunto $\frac{p}{q} = \{-1,1,-2,2,-3,3,-6,6\}$. Fazendo a verificação para os 8 elementos do conjunto é possível identificar que $P(x)$ possui suas três raízes números racionais, são eles $-3, 1$ e 2, afinal temos

$$P(-3) = (-3)^3 - 7.(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = -27 + 27 = 0$$

$$P(1) = 1^3 - 7.1 + 6 = 1 - 7 + 6 = -7 + 7 = 0$$
$$P(2) = 2^3 - 7.2 + 6 = 8 - 14 + 6 = -14 + 14 = 0$$

Nessa pesquisa daremos enfoque no ensino do teorema das raízes racionais sob a metodologia do desenvolvimento de sequência didática à luz das UARC. Nesse sentido, é intencional da pesquisa tornar o aluno um pesquisador para que este, com espirito investigativo, consiga deduzir este teorema e possa utiliza-lo na resolução de equações polinomiais e problemas traduzidos em modelos matemáticos polinomiais.

Não obstante, desenvolveremos previamente os corolários de confirmação de -1,0 e 1 como raízes de uma equação polinomial, uma vez que, estes corolários desenvolvem a familiaridade do aluno com os termos de uma equação polinomial e consequentemente auxiliam na compreensão do teorema das raízes racionais.

Em suma, descrevemos a seguir os três corolários: (I) Uma equação polinomial que possui o termo independente nulo, isto é, $a_0 = 0$ admite o 0 (zero) como uma de suas raízes. (II) Uma equação polinomial que tem a soma de seus coeficientes igual a 0 (zero), admite 1 (um) como uma de suas raízes. E por fim, (III) Uma equação polinomial que tiver a soma dos coeficientes de termos de expoente par igual à soma dos coeficientes de termos de expoente ímpar, admite -1 como uma de suas raízes.

2.2. OS DOCUMENTOS OFICIAIS

No que concerne ao processo de aprendizagem em Matemática por parte dos alunos na Educação Básica, podemos considerar diversos fatores exógenos ou não à sala de aula que atuam como barreiras nesse processo e dificultam a assimilação e compreensão do conteúdo pelo alunado. Nesse sentido, os documentos oficiais buscam auxiliar a pratica docente no âmbito de metodologias e o currículo a ser trabalhado. Descrevemos a seguir as considerações de documentos oficiais referente ao conteúdo de Equações Polinomiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) sistematizam o ensino de matemática em três eixos: álgebra (números e funções), geometria e medidas, e análise de dados. O conteúdo de equações polinomiais está imerso no eixo da álgebra, referente a este há uma atenção especial ao estudo das funções (o que incluem funções polinomiais) por estas proporcionarem o desenvolvimento da linguagem algébrica. Não obstante por meio desse conhecimento é possível resolver problemas, criar modelos descritivos de fenômenos e estabelecer conexão com outras áreas (BRASIL, 2002, p. 121).

Ainda nos parâmetros, observamos o destaque para o estudo de equações polinomiais até o segundo grau e a resolução de sistemas de equações lineares até o estilo 3 x 3. O aprofundamento do estudo das Equações Polinomiais (bem como dos polinômios e funções polinomiais) devem constar na parte flexível do currículo, ou seja, ficam a critério de escolha da escola o seu ensino.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) versam acerca do conteúdo de funções polinomiais com olhar as funções de grau até 2 e as exponenciais. Com relação ao tratamento de equações de ordem superiores o documento ressalta dificuldades de abordagem e até de representação gráfica. No entanto, ressalta a pertinência do estudo de funções polinomiais em produto de funções polinomiais de grau 1 por expressarem propriedades notáveis interessantes. (BRASIL, 2006, p. 74).

De modo a confirmar o cenário em construção, na leitura do documento de contribuições da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (2014) para discussão do currículo de Matemática no Ensino Médio, não foi identificado a menção ao estudo aprofundado de equações polinomiais versando em suas considerações o tratamento das equações de primeiro e segundo grau relacionados ao modelo funcional.

Por fim, observamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por ser o norteador vigente dos currículos das Escolas de rede pública e privada de ensino. A BNCC corresponde a parte do currículo do Ensino Médio, sendo este composto além dela por itinerários formativos que podem variar conforme o contexto local. Deste modo temos uma parte fixa representada pelo documento e uma parte flexível estabelecida por cada Escola, Secretarias e Municípios. O conteúdo de Equações Polinomiais consta na parte flexível do currículo.

Percebemos do exposto que não há menção ao estudo das raízes racionais e as equações polinomiais no seu sentido mais aprofundado estão enquadrados como conteúdo da parte flexível dos currículos educacionais, fato que justifica sua abordagem no 1º e 2º ano, em anos anteriores e até mesmo a sua ausência deste objeto matemático no currículo escolar.

2.3. REVISÃO DE ESTUDOS

Pesquisas desenvolvidas na área da Didática da Matemática têm mostrado que os alunos tem apresentado maiores dificuldades na aprendizagem de conteúdos algébricos. No que concerne ao conteúdo de equações polinomiais, as dificuldades centram-se nos "conceitos, definições, teoremas e aplicações [...] falta de compreensão do processo de fatoração e de sua relação com as raízes de polinômios. Mais ainda, pouco se discute sobre os gráficos de funções polinomiais." (DIERINGS, 2014, p.13).

As equações polinomiais são ministradas, na maioria das vezes, no 3º ano do Ensino Médio em que os alunos são conduzidos a aprofundarem os conhecimentos obtidos nos estudos de polinômios a partir da apresentação de novos teoremas e algoritmos voltados no estudo das características dos polinômios, operações e na determinação de suas raízes (SOUZA e SILVA, 2019).

Neste tópico visamos apresentar as observações obtidas na revisão de estudos acerca do teorema das raízes racionais de equações polinomiais no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, sendo nosso enfoque tanto em pesquisas teóricas como experimentais. As pesquisas foram coletadas de repositórios online de instituições de ensino superior e de bibliotecas digitais segundo os filtros de "equações polinomiais", "ensino de equações polinomiais", "polinômios e livro didático" e "raízes de equações polinomiais". Uma vez que não foi identificada em nossas buscas pesquisas que versassem especificamente do tema de raízes racionais.

Em seguida selecionamos as pesquisas segundo critérios de inclusão e exclusão estabelecidos pelo período dado (2014-2018) e pelas categorias de revisão referente ao tipo de pesquisa desenvolvidas, são elas: pesquisas teóricas (PT) e pesquisas experimentais (PE) conforme o quadro 3 e 4 respectivamente.

Quadro 3 – Relação de pesquisas teóricas da revisão de estudos

TÍTULO	AUTOR	TIPO	IES	ANO	CATEG.
Polinômios, equações algébricas e suas resoluções	Joel Marcelo Becker	D	UFMS	2014	PT
Equações Polinomiais	Jonas Eduardo Carraschi	D	USP	2014	PT
Polinômios, equações algébricas e estudo das suas raízes reais	Carlos Kleber Alves do Nascimento	D	UFC	2015	PT
Método para determinação de raízes de equações polinomiais uma abordagem voltada para o ensino médio	Diógenes Silva dos Santos	D	UFRPE	2016	PT
Polinômios, funções polinomiais, fatoração e algumas aplicações	Ricardo Dutra Abreu	D	UERJ	2016	PT
Métodos resolutivos de equações algébricas e análise das raízes de funções polinomiais	Adílio Titoneli dos Santos	D	PUC-Rio	2017	PT
Números complexos, polinômios e equações algébricas	Ferdinando Caíque Genghini Dantas Lobo	D	UNICAMP	2017	PT

Fonte: Souza e Cabral (2019).

Quadro 4 – Relação de pesquisas experimentais da revisão de estudos

TÍTULO	AUTOR	TIPO	IES	ANO	CATEG.
Ensino de polinômios no ensino médio – uma nova abordagem	André Ricardo Dierings	D	UFSM	2014	PE
Equações polinomiais: um estudo aplicado ao ensino médio	Oséas Arruda Ciriaco	D	UEMS	2016	PE
O estudo das funções polinomiais no Ensino médio.	Tuane Gomes de Oliveira Fuly de Mattos	D	UENF	2017	PE
Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio	Bruna Fernanda Sato Lopes	D	UFMT	2018	PE
Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem	Edson Vander da Silva	D	USP	2018	PE

Fonte: Souza e Cabral (2019).

Em cada pesquisa, destacamos questão de pesquisa, objetivo, metodologia e resultados obtidos estabelecendo relações e realizando discussões no que tange ao processo de ensino e aprendizagem de equações polinomiais.

2.3.1. Observações acerca das pesquisas teóricas

Foram selecionadas 7 pesquisas de caráter teórico (PT), estes estudos possuem estruturas próprias e tópicos discutidos a partir do objetivo estabelecido. A pesquisa de Becker (2014) teve por objetivo apresentar os métodos de resolução de equações cúbicas e quárticas, comentando também acerca da não solubilidade por radicais das equações de grau maior ou igual a cinco. Além disso, retrata a teoria dos grupos que sustenta a construção dos polinômios, estudo das raízes e, por fim, apresenta uma sugestão didática.

Carraschi (2014) buscou realizar um estudo das equações polinomiais em sua abrangência, desde as equações quadráticas às quárticas e seus métodos de resoluções, a limitações das raízes, tendo discutido também acerca dos coeficientes de equações polinomiais.

A pesquisa de Nascimento (2015), cujo objetivo foi contribuir para que alunos e professores possam aprimorar seus conhecimentos matemáticos em números complexos, polinômios e equações polinomiais. Destaca inicialmente o contexto histórico dos números complexos. Em seguida adentra no estudo dos polinômios e das equações polinomiais dando enfoque nos métodos de resolução e estudo das raízes a partir dos teoremas de Descartes, Bolzano e Lagrange.

Santos (2016) teve como objetivo de pesquisa estudar os polinômios e suas equações algébricas de modo a produzir um material de apoio a professores da educação básica. Assim, discute em seu trabalho o desenvolvimento de definições e teoremas, propriedades operatórias relacionadas as equações polinomiais. Não obstante, discute as raízes racionais com coeficientes inteiros.

A pesquisa de Abreu (2016) versa acerca do conceito de polinômios e funções polinomiais. Tendo como objetivo contribuir para o ensino da matemática elementar no Brasil, o autor realiza um estudo aprofundado desses conceitos transitando nos estudos da teoria dos grupos; álgebra dos polinômios e suas aplicações além de dar enfoque a contribuição do processo de fatoração de polinômios sobre variados conjuntos. O autor encerra apresentando uma proposta de atividade com base nos estudos realizados na pesquisa.

Santos (2017) realizou uma pesquisa cujo objetivo foi estudar as equações algébricas e os conceitos relacionados a este. Assim, aborda as equações e suas soluções do 1º ao 4º grau, seguindo para os polinômios de graus maiores ou iguais a cinco, retratando os métodos de determinação das raízes, dentre eles o teorema das raízes racionais. Discute demonstrações presentes no estudo deste tema.

Por fim, temos o trabalho de Lobo (2017). Sua pesquisa teve por objetivo apresentar um estudo da teoria dos números complexos de modo aprofundado, dando ênfase na resolução de problemas que possam ser desenvolvidos no Ensino Médio. Além disso versa acerca das equações polinomiais com coeficientes e raízes complexas destacando algorítmicos e teoremas para a pesquisas destas raízes. Por fim, disponibiliza uma lista de exercício para utilização por parte dos professores da educação básica em sala de aula.

Em nossa revisão observamos que os trabalhos pesquisados apresentam uma estrutura de discussão própria em que foi possível organizar os tópicos discutidos e observar sua presença nos trabalhos revisados. O quadro 5, a seguir apresenta os tópicos presentes nas pesquisas teóricas.

Quadro 5 – Relação de tópicos abordados nas pesquisas teóricas

Tópico da pesquisa	Código
História – Equações polinomiais	A1
História – Números complexos	A2
Estrutura – Teoria (grupos, corpos e anéis)	B
Conteúdo matemático – Números complexos	C1
Conteúdo matemático – Polinômios	C2
Conteúdo matemático – Equações do 1º e 2º grau	C3
Conteúdo matemático – Equações do 3º e 4º grau	C4
Conteúdo matemático – Equações polinomiais (definições, teorema e algoritmos)	C5
Conteúdo matemático – Estudo das raízes	C6
Didática – Proposta de atividades	D

Fonte: Souza e Cabral (2019).

Cada tópico presente no quadro acima recebeu um código correspondente. Por meio destes códigos foi possível sistematizar os conteúdos abordados e discutidos em cada pesquisa, bem como se estas apresentavam propostas de atividades. O quadro 6 abaixo apresenta, por meio dos códigos, os tópicos discutidos em cada uma das pesquisas teóricas desta revisão de estudos.

Quadro 6 – Tópicos de discussão x Pesquisas teóricas

Cód.	Pesquisas teóricas (PT)						
	Becker (2014)	Carraschi (2014)	Nascimento (2015)	Santos (2016)	Abreu (2016)	Santos (2017)	Lobo (2017)
A1	x				x		
A2			x				
B	x				x		
C1			x				x
C2		x	x	x	x		x
C3		x				x	x
C4	x	x				x	x
C5		x	x	x	x		x
C6	x	x	x	x	x	x	x
D	x			x	x		x

Fonte: Souza e Cabral (2019)

Em síntese constatamos que os trabalhos teóricos investigados visam discutir variados objetos matemáticos, no entanto fica perceptível uma abordagem contemplante ao rigor matemático, o que acaba por pouco discutir questões metodológicas de ensino ou formas de aprendizagem no que tange as equações polinomiais. As pesquisas acabam por responder mais a questões matemáticas, logo, permitindo um estudo aprofundado do tema sendo este domínio do objeto essencial para a elaboração de uma proposta didática.

2.3.2. Observações acerca das pesquisas experimentais

A pesquisa de Dierings (2014) teve por objetivo propor uma nova forma de abordagem para o ensino de polinômios no ensino médio que desse enfoque na preparação para os estudos no Ensino Superior. A proposta metodológica é composta de 7 atividades que, segundo o autor, trabalha as habilidades de investigação e intuição dos alunos sem deixar de dar ênfase às definições e teoremas sendo aplicadas com uma turma do 3º ano do nível técnico em informática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS).

No desenvolvimento da atividade o autor destaca preocupação com relação ao tempo de aplicação da proposta metodológicas e o tempo dos alunos devida à preparação para o vestibular a ser realizado ao final do ano letivo. As atividades eram desenvolvidas com a utilização do software GeoGebra e com a planilha de cálculo do Excel e discutiam diversos tópicos do conteúdo de polinômios no Ensino Médio, dando enfoque no estudo gráfico das funções polinomiais, a determinação de raízes e na operação de divisão de polinômios.

Após o desenvolvimento das atividades foi percebido um maior domínio do conteúdo de polinômios nesse nível de ensino e um bom desempenho por parte dos alunos na resolução tanto de exercícios do livro didático e quanto questões de vestibular. Além disso, os alunos apresentam ter interesse no estudo do conteúdo gerando um melhor entendimento dos teoremas e de questões comparada as outras turmas ensinadas no modelo tradicional.

Nas conclusões é confirmada a viabilidade da proposta metodológica e sua contribuição para com o desenvolvimento de habilidades no conteúdo de polinômios de modo a preparar para estes, caso queiram, prosseguir os estudos na área de ciências exatas e tecnologias.

Por conseguinte, temos a pesquisa de Ciriaco (2016) cujo objetivo foi apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino de equações polinomiais de grau até quatro. Dando atenção especial a fórmula de Cardano-Tartaglia. A sequência era composta de 3 blocos de atividades.

A primeira com relação a situações problemas envolvendo polinômios e algumas questões procedimentais; no segundo bloco foi desenvolvido por meio de atividades a fórmula de Cardano-Tartaglia e explorado exercícios envolvendo polinômios de 3º grau e no terceiro bloco de atividades o autor deu enfoque em questões de aplicação de polinômios em diferentes contextos de modo a verificar e aprofundar os conhecimentos detidos pelos alunos no desenvolvimento das atividades; Por fim, foi realizada uma avaliação da aprendizagem com relação ao conteúdo abordado.

As atividades foram desenvolvidas com uma turma de 3º ano do Ensino Médio ao longo de 15 aulas de 50 minutos cada, foi inicialmente realizada uma avaliação diagnóstica para verificar os conhecimentos da turma acerca do tema. A turma foi dividia em equipes formadas pelos próprios alunos e foi solicitado a estes realizassem as atividades individualmente, mas que realizassem discussão com seu grupo diante das questões, além disso foi pedido aos alunos que registrassem as atividades e as anotações feitas para sua resolução.

Nos resultados, observou-se que os alunos apresentaram dificuldades com relação a questões envolvendo situações reais e no tratamento das questões relacionadas a demonstração da solução de polinômios de 3º grau. É destacado pelo autor como possíveis justificativas a organização do currículo e o sistema de ensino estabelecido e ressalta a necessidade relacionar o estudo das equações polinomiais, às equações já conhecidas e que os alunos detêm maior afinidade e esclarecer que os conteúdos não são diferentes.

A pesquisa de Mattos (2017) teve por objetivo propor uma sequência de atividades que contribuísse para a compreensão de conceitos, propriedades e características das funções polinomiais por meio da visualização e aplicação.

Para isso elaborou atividades pautada na resolução de problemas com o auxilio do *Software* GeoGebra. As atividades foram aplicadas com uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do Rio de Janeiro.

Nos resultados foi constatado a importância da contextualização no processo de construção do conhecimento além da utilização de recursos tecnológicos no ensino das funções polinomiais. Não obstante, a autora destaca que a proposta proporcionou uma aprendizagem significativa a partir das aulas diferenciadas, o que reduziu as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos.

Lopes (2018) realizou uma pesquisa com alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentaram maior dificuldade no conteúdo de funções polinomiais, teve por objetivo de investigar as contribuições de uma metodologia apoiada na resolução de problemas com auxílio do software GeoGebra para o ensino de funções polinomiais. Para isso, a autora elaborou uma sequência de atividades desenvolvidas com os alunos durante aulas de reforço realizadas no contra turno escolar.

Foram desenvolvidas 13 atividades que versaram o conteúdo de funções polinomiais, trabalhando com polinômios de grau menor que 4, em específico a definição de modelos polinomiais, valores numéricos, identificação de raízes a partir de gráficos elaborados via GeoGebra.

Nos resultados, a autora identificou que os alunos apresentaram inicialmente resistência na proposta a partir da utilização dos recursos computacionais GeoGebra por estarem acostumados com atividades mecânicas e expositivas, gerando assim dificuldades na utilização do software e dos resultados, apresentaram melhor desempenho nas questões relativas à função polinomial do 1º e 2º grau.

O trabalho de Silva (2018) teve por objetivo analisar polinômios da forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com condições sobre os coeficientes, para solução de equações polinomiais de grau até quatro. Para isso, o autor realizou um estudo epistemológico dos polinômios, das considerações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e das abordagens presentes em manuais didáticos. Tais informações foram necessárias para elaboração de uma proposta metodologia de intervenção para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos polinômios.

A proposta consistia em 6 atividades (de aplicação e situação problema) relacionadas a resolução de equações polinomiais e com utilização do programa computacional Graphmatica que foram aplicadas a turma de 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Pública da rede estadual. Após a realização de aulas para o ensino de conteúdos pré-requisitados, tais como números complexos, polinômios e expressões algébricas, foi realizado uma avaliação composta de 4 questões para resolução por parte dos alunos e verificação da aprendizagem sendo ambos os momentos analisados quantitativamente e qualitativamente segundo as observações realizadas pelo autor.

Nas análises o autor identificou que os alunos souberam aplicar os conhecimentos obtidos nas aulas dos conteúdos pré-requisitados para a resolução das atividades apresentando desempenho assertivo de 50% a 100% das questões. Toda via, chama atenção a algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nas operações com números reais e complexos; reconhecer termos de funções polinomiais e multiplicidade de raízes, interpretar geometricamente polinômios e resolução de problemas com raízes complexas.

Deste modo, Silva (2018) confirma a eficácia da proposta metodológica com o recurso computacional para o processo de ensino e aprendizagem de polinômios e equações polinomiais e destaca sua utilização como fator motivador para o estudo de polinômios da $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por parte dos estudantes.

Considerando nosso enfoque nos resultados de nossa pesquisa, relatamos que em síntese as pesquisas correlatas apresentam propostas metodológicas elaboradas a partir da utilização de softwares computacionais voltados ao ensino de matemática, como o GeoGebra e o Graphmatica, em que os alunos de modo geral apresentaram algumas dificuldades na utilização dos programas, porém abertos a proposta. Nos resultados identificamos que os alunos investigados apresentaram dificuldades de aprendizagem em questões envolvendo situações reais, reconhecimento de funções polinomiais, multiplicidade de raízes, interpretação geométrica de polinômios e resolução de problemas com raízes complexas.

2.3.3. Síntese da revisão de estudos

O levantamento dessas pesquisas nos possibilitou uma melhor compreensão acerca das Equações Polinomiais no âmbito do seu processo de ensino e aprendizagem. A partir desse levantamento bibliográfico podemos aprofundar os conhecimentos acerca do objeto matemático, identificar dificuldades apresentadas pelos alunos, fazer reflexões no que concerne a metodologia de ensino empregada e refletir sobre novas possibilidades e abordagem de modo a concretizar o processo de aprendizagem por parte do aluno.

Concordamos com Dierings (2014) no sentido de que o estudo das equações polinomiais em seu sentido mais amplo proporciona o desenvolvimento do pensamento algébrico além de proporcionar um amadurecimento matemático no que diz respeito a utilização de definições e teoremas e suas consequências para resolução de problemas, isto é, a abordagem do conteúdo em sala de aula não compromete o currículo, muito pelo contrário é importante para o desenvolvimento de competências matemáticas por parte dos alunos.

Observamos que as pesquisas apontam um ensino de equações polinomiais dado de maneira superficial e mecânica, sofrendo influência do currículo, em que há a necessidade de metodologias alternativas para sua aprendizagem. Além de ressaltarem sua contribuição no desenvolvimento do pensamento algébricos. Concluímos que é preciso refletirmos na importância do ensino de equações polinomiais, de forma atualizada e de modo aprofundado.

Deste modo, acreditamos que as constatações feitas irão server de subsídios para a elaboração de uma proposta metodológica de ensino que busque explorar o conteúdo de forma mais dinâmica, com uso de recursos e que possibilite a verificação de indícios de aprendizagem.

2.4. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Compondo nosso estudo do objeto matemático na perspectiva do seu processo de ensino e aprendizagem, nos propomos a realização da análise de livros didáticos a fim de identificar a abordagem desses manuais em relação ao conteúdo de equações polinomiais, especificamente em relação ao teorema das raízes racionais. Para isso, elencamos três livros didáticos aprovados no PNLD de 2018-2020.

Os livros selecionados para análise foram: Matemática: contexto e aplicação de Dante (2016); Contato matemática de Souza e Garcia (2016) e Matemática: ciência e aplicações de Iezzi *et al.* (2016). Realizamos uma análise diretiva relacionada, assim sendo, em cada obra focamos na análise da abordagem do conteúdo de equações polinomiais dando enfoque na apresentação do teorema das raízes racionais e os exercícios e atividades propostas por cada obra.

2.4.1. Análise do livro didático Matemática: contexto e aplicação

Na obra de Dante (2016), o conteúdo de equações polinomiais é apresentado no capítulo 9 da obra titulado de equações algébricas. Com o recurso da história da matemática o autor inicia o estudo do capitulo explorando métodos geométricos históricos de resolução de modelos de equações quadráticas e de terceiro grau. A figura 6 apresenta registro da discussão presente na obra.

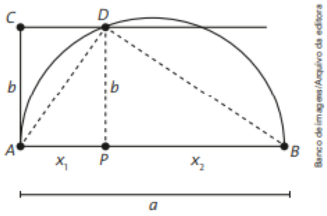
Figura 6 – Introdução do conteúdo de equações polinomiais em Dante (2016)

Grécia (300 a.C.)

Resolver a equação (em notação moderna) $x^2 + b^2 = ax$, em que a e b são medidas de segmentos de reta dadas.

As instruções eram as seguintes:

- Desenhe a circunferência de diâmetro $AB = a$.
- Trace $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ com $AC = b$.
- A paralela a $\overline{AB}$ por C corta a circunferência em D.
- A projeção de D sobre $\overline{AB}$ é P.
- As raízes são $x_1 = AP$ e $x_2 = PB$.



Por que esse desenho constrói as raízes da equação $x^2 + b^2 = ax$?

Observando a figura acima, note que a soma das duas raízes é a e que APD, BPD e ADB são triângulos retângulos (os dois primeiros em $\hat{P}$ e o terceiro em $\hat{D}$). Então, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$AB = x_1 + x_2 = a$, $AD = \sqrt{x_1^2 + b^2}$ e $DB = \sqrt{x_2^2 + b^2}$.

Logo:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + b^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 - x_1^2 + b^2 + x_2^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1^2} + 2x_1x_2 + \cancel{x_2^2} = \cancel{x_1^2} + 2b^2 + \cancel{x_2^2} \Rightarrow 2x_1x_2 = 2b^2 \Rightarrow x_1x_2 = b^2$$

Fonte: Dante (2016, p. 218).

A transição dessa discussão inicial acerca da resolução de equações polinomiais para sua definição se dá de maneira brusca, este problema didático é bastante presente não somente em manuais didáticos, mas em diversos materiais que se propõem a utilização da história da matemática no âmbito didático.

No entanto, a questão da utilização da história da matemática no ensino, não é o enfoque de nossa pesquisa. Não obstante, não podemos excluir em todo a contribuição dessas leituras para a familiarização do aluno com o conceito de equações algébricas e consequentemente as noções de coeficientes e raízes, essenciais para compreensão das propriedades e teoremas deste objeto matemático.

Dante (2016) define equação polinomial da seguinte forma

Figura 7 – Definição de equação polinomial em Dante (2016)

Denomina-se **equação algébrica** ou **polinomial** toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0\text{)}$$

em que os a_i (a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0) são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in \mathbb{N}^*$ e n é o grau da equação.

Fonte: Dante (2016, p. 220).

Nesta definição temos o estabelecimento da linguagem matemática que o autor pretende utilizar ao tratar desse objeto matemático, nos referimos a polissemia das equações polinomiais e as funções polinomiais. Dante (2016) não aborda a perspectiva da função em sua definição, mas utiliza a notação $P(x)$ para elencar equações polinomiais.

Após isto até o teorema das raízes racionais são abordados os conceitos de raiz de equação polinomial; conjunto solução; teorema fundamental da álgebra; decomposição em fatores de 1º grau; multiplicidade de raiz; relações de Girard. Os tópicos são trabalhados de forma estritamente algébrica e temos apenas uma correlação funcional na discussão levantada acerca de equações de graus maiores que 3, em que é apresentado corolário do teorema fundamental da álgebra (figura 8).

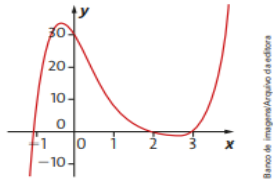
Figura 8 – Conclusões do estudo de equações polinomiais

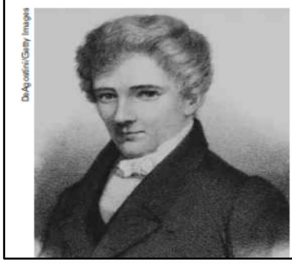
Capa do livro *Nova invenção em Álgebra* (tradução livre).

A história das equações polinomiais avança quando, em 1801, Carl Gauss (reveja página 175) publica o livro *Disquisitiones Arithmetica* (Investigações Aritméticas), no qual, entre outras coisas, foi demonstrado o Teorema fundamental da Álgebra. Esse teorema tem como consequência a afirmação:

Toda equação polinomial de grau n com coeficientes complexos possui exatamente n raízes reais ou complexas.

Por exemplo, a equação $x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 18x^2 - 19x + 30 = 0$ é do grau 5 e, portanto, possui cinco raízes. Ela possui três raízes reais e duas complexas e o conjunto solução dessa equação é $\{-1, 2, 3, 2 - i, 2 + i\}$. Nessa época, os matemáticos já sabiam que as raízes reais de uma equação polinomial eram os pontos nos quais o gráfico da função correspondente corta o eixo x. Por exemplo, as raízes reais da equação anterior podem ser vistas no gráfico ao lado.





O desfecho dessa história deve-se a um dos matemáticos mais talentosos do século XIX, o norueguês Niels Henrik Abel. Abel viveu apenas 26 anos, mas fez descobertas importantíssimas. Desde o século XVI, eram conhecidos os métodos para a resolução das equações polinomiais de graus 3 e 4, mas por três séculos ninguém tinha conseguido obter um método geral para resolver uma equação do 5º grau ou de grau maior. Em 1824, Abel deu fim a essa procura publicando um artigo com a demonstração de um dos mais famosos teoremas da Matemática:

Fonte: Dante (2016, p. 227).

Por conseguinte, o autor destaca a inexistência de formulas de resolução direta de equações polinomiais de grau maior que quatro. Não obstante, ressaltamos que Dante (2016) coloca como caixa de observação presente no livro didático, o corolário para a obtenção de número 1 como raiz de uma equação polinomial. Outras conclusões como as condições para 0 e -1 como raízes não são mencionadas.

Enfim, o tópico 7 do capitulo trás o teorema das raízes racionais como um recurso para a resolução de equações polinomiais de grau maior que 2 a partir da obtenção de raízes racionais (figura 9).

Figura 9 – Teorema das raízes racionais em Dante (2016)

7 Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Assunto opcional

As equações polinomiais de grau maior do que 2 não têm um processo determinado de resolução por meio de fórmulas. Devemos procurar, então, uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes.

Neste item vamos estudar uma propriedade que nos auxiliará na pesquisa das raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

então p é divisor de a_0, e q é divisor de a_n.

Fique atento!

Dizer que o número racional $\frac{p}{q}$ tem p e q inteiros e primos entre si equivale a dizer que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

Fonte; Dante (2016, p. 228).

Apesar de sua importância no estudo desse objeto matemático, o teorema das raízes racionais é colocado como assunto opcional no âmbito do didático. Discordamos, uma vez que, este método pode ser mais hábil na resolução de algumas equações quadráticas que a formula de Bhaskara além de ser uma ótima ferramenta para auxiliar na resolução de equações polinomiais.

Vale ressaltar também que a equação do terceiro grau apresenta a formula de Cardano-Tartaglia, porém pode ter sido opção do autor não a mencionar. No que concerne as atividades, temos exercícios voltados diretamente ao uso do teorema das raízes racionais e outros em que a pesquisa de raízes racionais entra como ferramenta complementar para resolução da questão. Como podemos ver na figura 10, a seguir.

Figura 10 - Exemplos de exercício sobre teorema das raízes racionais em Dante (2016)

26. Pesquise as raízes racionais das equações algébricas:

a) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ $1, -1, \frac{1}{2}$

b) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ $1, -1, \frac{1}{2}$

c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$ 1

d) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ $1, 2, \frac{1}{2}$

27. (PUC-SP) Quais são as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$? $1, 3, \frac{1}{3}$

28. (FEI-SP) Resolva a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$. $S = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

29. (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$? -2

Fonte: Dante (2016, p. 229).

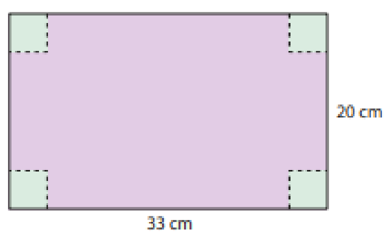
Nesse sentido as atividades são voltadas a resolução de equações polinomiais, ora pela investigação direta das raízes racionais, ora pela sua utilização como ferramenta para em seguir aplicar Bhaskara ou o dispositivo Briot-Ruffini para sua redução e solução. O livro apresenta alguns problemas, neles, as situações descritas tem sua natureza representada matematicamente por equações polinomiais, nesse sentido visam desenvolver a habilidade dos alunos em aplicar os conhecimentos obtidos dentro do conteúdo de equações polinomiais para sua resolução.

2.4.2. Análise do livro didático Matemática: ciência e aplicações

Obra de Iezzi *et al.* (2016), este livro apresenta o conteúdo de equações polinomiais em seu capitulo 9, sendo titulado "equações algébricas". A abordagem inicial se dá a partir da resolução de problemas, diferente de Dante (2016) que utilizou da história da matemática. A situação inicial consiste num problema envolvendo o cotidiano do aluno, como vemos na figura a seguir.

Figura 11 – Introdução do conteúdo de equações polinomiais em Iezzi *et al*. (2016)

Eduardo construiu uma caixa em forma de bloco retangular, sem tampa, a partir de uma folha retangular de cartolina que media 33 cm por 20 cm, recortando um quadrado em cada vértice do retângulo, conforme mostra a figura.



Pronta a caixa, seu colega Toninho perguntou qual era a medida do lado do quadrado recortado. Eduardo respondeu: "Vou lhe dar uma pista: a caixa fica completamente cheia se você despejar um saco de 1,05 litro (1 050 cm³) de areia".

Fonte: Iezzi *et al.* (2016).

O problema envolve a construção de uma caixa a partir de uma folha retangular cortando-se quadrados em cada vértice. A intensão seria determinar a medida do lado do quadrado recortado dado o volume da caixa a ser construída. Considerando o cálculo para determinação do volume da caixa e adotando x como a medida do lado do quadrado, temos que $V = (comp).(larg).(alt)$, logo $V = (33 - 2x).(20 - 2x).x$. Por fim, como temos $V = 1050cm^3$, temos a expressão $4x^3 - 106x^2 + 660x = 1050$ sendo apresentada como uma equação algébrica ou equação polinomial.

Sua definição já traz a forma de representação funcional. Assim, “Equação polinomial ou algébrica é toda equação redutível à forma $P(x) = 0$, em que: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ é um polinômio de grau n, sendo $n \geq 1$, com coeficientes em $\mathbb{C}$ e cuja incógnita x pode assumir um valor qualquer em $\mathbb{C}$” (IEZZI *et al.,* 2016, p. 218).

Após temos a abordagem de tópicos relacionados a este objeto matemático, isto é: ideia de raízes; conjunto solução; teorema fundamental da álgebra; teorema da decomposição; multiplicidade de raiz; relações de Girard; raízes complexas e, por fim, o teorema das raízes racionais. Cada tópico também possui uma abordagem algébrica própria do objeto de conhecimento em questão, porém é bastante explorado a forma de representação funcional, focando assim no trabalho com funções polinomiais.

No capitulo temos apenas um quadro em que as equações polinomiais são apresentadas a partir de outro recurso, a história da matemática, porém é abordado de modo restritamente informativo. Quanto a definição do teorema das raízes racionais, temos apenas uma mudança com relação a redação.

Figura 12 – Teorema das raízes racionais em Iezzi *et al.* (2016)

Teorema das raízes racionais

O teorema seguinte nos ajudará a pesquisar possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

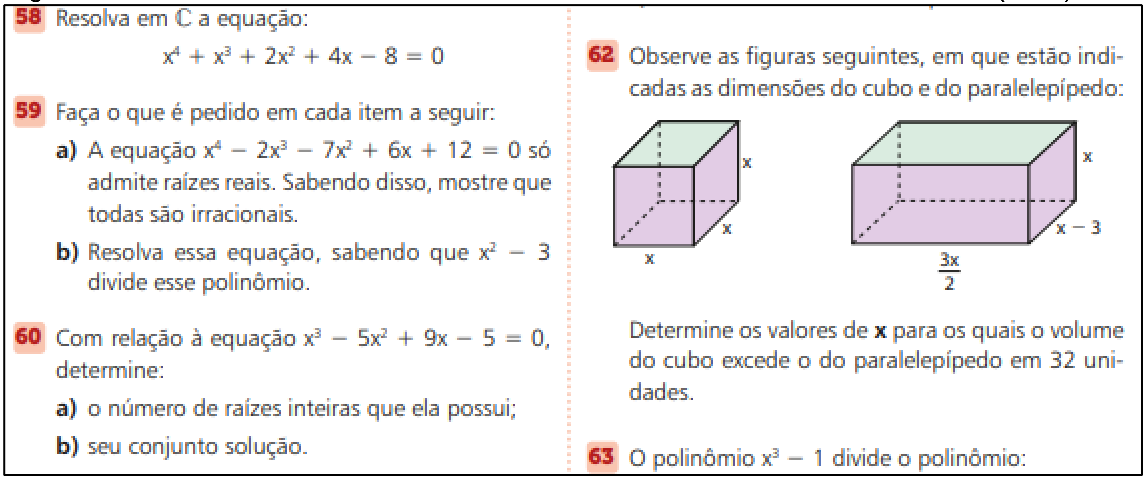
Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com **p** e **q** primos entre si, é raiz dessa equação, então **p** é divisor de $\mathbf{a_0}$ e **q** é divisor de $\mathbf{a_n}$.

Fonte: Iezzi *et al*. (2016).

A obra também apresenta a demonstração do teorema, o que destacamos ser válido para que o aluno possa desenvolver seu conhecimento matemático no âmbito algébrico, o que possibilita ter maior facilidade com outros objetos matemáticos.

Em relação as atividades temos exercícios resolvidos e propostos, ambos trabalham com atividades relacionadas diretamente a pesquisa de raízes racionais, mas também com atividades em que este teorema se torna um recurso para outros fins, tais como obtenção de conjunto solução; estudo de funções polinomiais e mesmo a resolução de problemas. A figura 13 a seguir apresenta alguns exemplos.

Figura 13 – Atividades relacionadas ao teorema das raízes racionais em Iezzi et al. (2016)



58 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

59 Faça o que é pedido em cada item a seguir:

a) A equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$ só admite raízes reais. Sabendo disso, mostre que todas são irracionais.

b) Resolva essa equação, sabendo que $x^2 - 3$ divide esse polinômio.

60 Com relação à equação $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, determine:

a) o número de raízes inteiras que ela possui;

b) seu conjunto solução.

62 Observe as figuras seguintes, em que estão indicadas as dimensões do cubo e do paralelepípedo:

Determine os valores de **x** para os quais o volume do cubo excede o do paralelepípedo em 32 unidades.

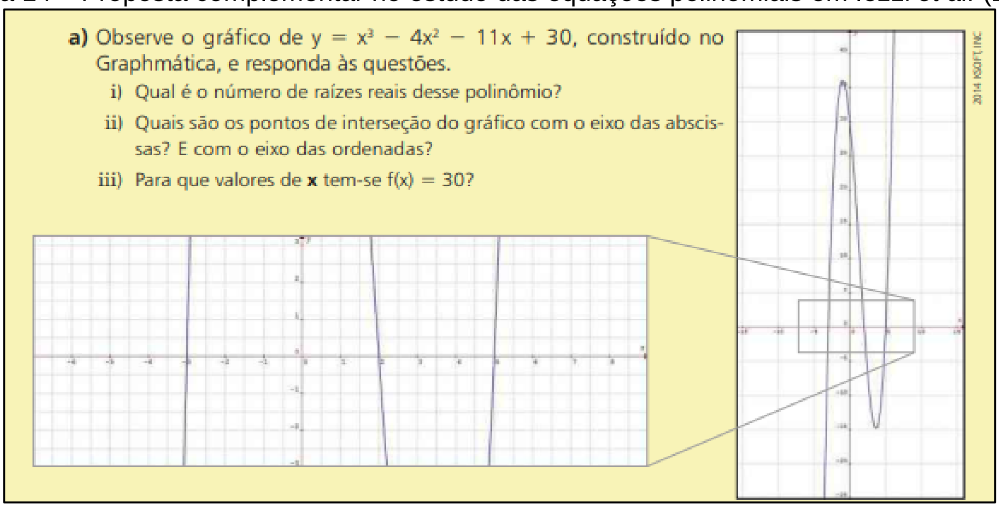
63 O polinômio $x^3 - 1$ divide o polinômio:

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 236).

As atividades nesse capitulo permeiam dentro da própria matemática, assim fazem aplicações dentro dela mesma, isto é, relacionam com outros objetos matemáticos dessa área de conhecimento. As questões relacionadas ao teorema das raízes racionais apresentam este conteúdo principalmente como suporte na determinação de raízes racionais quando estudamos equações polinomiais em $\mathbb{C}$.

Vale destacar o aprofundamento que o livro estabelece por meio do estudo das equações polinomiais numa perspectiva funcional (figura 14).

Figura 14 – Proposta complementar no estudo das equações polinomiais em Iezzi *et al.* (2016)



a) Observe o gráfico de $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, construído no Graphmática, e responda às questões.

i) Qual é o número de raízes reais desse polinômio?

ii) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com o eixo das ordenadas?

iii) Para que valores de **x** tem-se $f(x) = 30$?

Fonte: Iezzi *et al*. (2016, p. 237).

O livro apresenta o uso do Graphmática, um *software* com potencial para plotagem de gráfico e estudo numérico e algébrico do cálculo, tais como: funções cartesianas, relações, desigualdades, equações, equações diferenciais, dentre outros. Assim, torna-se um mecanismo que permite observar graficamente funções e complementar o estudo de equações para o desenvolvimento de habilidades e competências que são exigidas para o aluno em sua formação.

2.4.3. Análise do livro didático #Contato Matemática

Com autoria de Souza e Garcia (2016), o livro #Contato Matemática apresenta o tema das equações polinomiais no volume para o 3º ano, no capitulo 6. Diferente das obras anteriores este livro integra no mesmo capitulo o estudo dos polinômios e das equações polinomiais, todavia, os tópicos abordados se ajustam aos demais.

Assim, estudamos acerca dos polinômios e suas operações, equações, o teorema fundamental da álgebra, relações de Girard, multiplicidade de raízes, raízes complexas, e, enfim, a pesquisa de raízes racionais.

O livro apresenta desde início o conceito de equação polinomial, para isso utiliza de duas situações: a primeira o recurso da história da matemática a partir da história de disputa entre Nicolas Tartaglia e Girolamo Cardano acerca de resoluções de equações cubicas. Na segunda situação os autores fazem resgatam a ideia de representação funcional de situações reais, no capitulo em questão, com a equação da queda livre dada por $d(t) = k.t^2$.

Figura 15 – definição de função polinomial em Souza e Garcia (2016)

Neste capítulo, estudaremos as funções polinomiais mais detalhadamente, assim como aquelas de graus maiores que dois. Para isso, inicialmente, definiremos função polinomial.

Sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} e a_n pertencentes a $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e x uma variável complexa.

Denominamos **função polinomial** ou **polinômio na variável x** a função p de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, definida por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} e a_n são denominados **coeficientes**;
- cada parcela $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, $a_{n-2} x^{n-2}$, $a_{n-3} x^{n-3}$, ..., $a_2 x^2$, $a_1 x$, a_0 é um **termo**, sendo a_0 o termo **independente** da variável.

Fonte: Souza e Garcia (2016).

Devemos ressaltar que a obra opta pela utilização de uma perspectiva funcional para o estudo dos polinômios, conforme discutido em nossa fundamentação matemática, temos uma correlação entre equação e função polinomial. A compreensão dessa correlação é essencial para aprendizagem uma vez que podemos interpretar equações de modo funcional.

Outro ponto interessante é o resumo no estudo dos polinômios quanto a suas classificações como monômio, binômio, trinômio e polinômio. Estas ficam apenas como uma observação para o leitor em caixa próxima a definição acima.

Em relação especificamente ao teorema das raízes racionais, a obra antes da definição desenvolve uma ideia da contrapositiva com exemplos de equações cujas raízes não são racionais para em seguida apresentar trazer a definição (figura 16).

Figura 16 – Teorema das raízes racionais em Santos e Garcia (2016)

O teorema a seguir não nos permite prever se uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite raízes racionais. Porém, caso existam, esse teorema determina as possibilidades para essas raízes.

Considere uma equação polinomial de coeficientes inteiros, com $a_n \neq 0$, definida por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

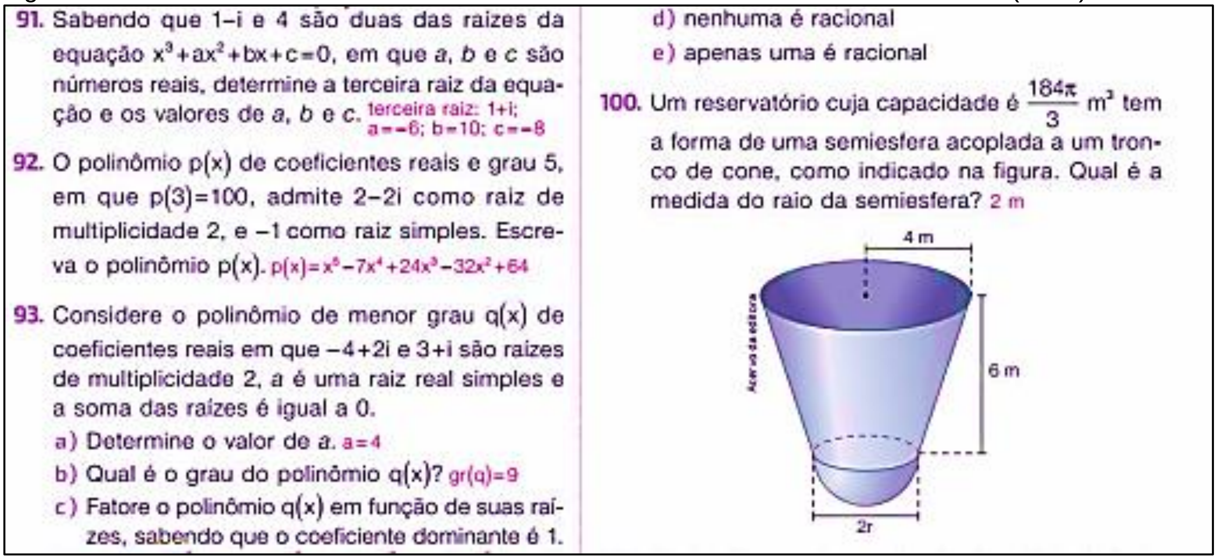
Se $\frac{p}{q}$ é raiz dessa equação, tal que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Fonte: Souza e Garcia (2016).

O autor não traz a demonstração deste teorema, assim como não apresenta a demonstração da relação de Girard. Consideramos que este seja de escolha do autor, uma vez que, no ensino da matemática as demonstrações são uma área ainda pouco explorada, no entanto, ressaltamos a sua importância para o desenvolvimento do conhecimento matemático no âmbito dos conceitos e da lógica.

Quanto as atividades, em análise também foi identificado que Souza e Garcia (2016) buscaram relacionar o estudo das equações polinomiais para além do próprio objeto, sendo assim, abordada em conjunto principalmente das funções e da geometria espacial como vemos a seguir.

Figura 17 – Atividades relacionados ao teorema das raízes racionais Souza e Garcia (2016)



91. Sabendo que $1-i$ e 4 são duas das raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais, determine a terceira raiz da equação e os valores de *a*, *b* e *c*. terceira raiz: $1+i$; $a=-6$; $b=10$; $c=-8$

92. O polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e grau 5, em que $p(3)=100$, admite $2-2i$ como raiz de multiplicidade 2, e -1 como raiz simples. Escreva o polinômio $p(x)$. $p(x)=x^5-7x^4+24x^3-32x^2+64$

93. Considere o polinômio de menor grau $q(x)$ de coeficientes reais em que $-4+2i$ e $3+i$ são raízes de multiplicidade 2, *a* é uma raiz real simples e a soma das raízes é igual a 0.

a) Determine o valor de *a*. $a=4$

b) Qual é o grau do polinômio $q(x)$? $gr(q)=9$

c) Fatore o polinômio $q(x)$ em função de suas raízes, sabendo que o coeficiente dominante é 1.

d) nenhuma é racional

e) apenas uma é racional

100. Um reservatório cuja capacidade é $\frac{184\pi}{3}$ m³ tem a forma de uma semiesfera acoplada a um tronco de cone, como indicado na figura. Qual é a medida do raio da semiesfera? 2 m

Fonte: Souza e Garcia (2016).

Neste sentido, podemos perceber que as correlações buscam também realizar a contextualização do conteúdo de equações polinomiais. Não obstante, assim como os livros anteriores, também foi identificado questões que trabalha o teorema de forma direta e como recurso para obtenção de solução de problemas.

Enfim, o capítulo apresenta boxes adicionais para o aprofundamento de estudos. Souza e Garcia também fazem uso de tecnologias da informação, nesta obra, temos o trabalho com o GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica que buscar trabalhar a álgebra e a geometria de forma interativa e o *LibreOffice Calc*, uma planilha eletrônica que permite edição de texto, apresentações, organização de dados e recursos pra realizar cálculo, construir gráficos com restrições e prescrições automáticas, sendo assim habilitado com diversas funções.

2.4.4. Síntese das análises dos livros

A análise de livros didáticos permite com que seja possível a verificação de como um objeto de conhecimento está organizado didaticamente. Aliando esta análise à revisão de estudos constatamos na evolução no que concerne as metodologias de ensino das equações polinomiais e sua abordagem em sala de aula.

Nesse sentido, temos um desenvolvimento de uma abordagem estritamente teórica e algébrica para o trabalho de forma contextualizada e mais além aliado a utilização de tecnologias. Esta organização didática visa contemplar a discussões já até então a se consolidar acerca do currículo de matemática na educação básica.

Conforme identificado em análise, temos que as obras buscam trabalhar as equações algébricas numa perspectiva funcional relacionando com outros objetos matemáticos, outras áreas do conhecimento em diferentes tendencias, sempre voltada para o desenvolvimento de habilidades e competências. Esta estruturação perpassa também, em especifico, o teorema das raízes racionais, este acaba por ser trabalhado para além da matemática com enfoque na resolução de problemas.

Assim, nesse contexto, a abordagem deste conteúdo no processo de ensino e aprendizagem de matemática possui sua relevância. Embora a BNCC coloque este conteúdo na parte flexível do currículo, seu trabalho em sala de aula deve ser considerado, principalmente quando for possível a utilização de tecnologias, quando não, pode-se optar pela realização de pesquisas por meio de projeto.

2.5. CONSIDERAÇÕES DE SUJEITOS DA PESQUISA

A fim de observar o processo de ensino e aprendizagem das equações polinomiais em diferentes perspectivas, nesse tópico adentraremos nas considerações de alunos em relação a nosso objeto matemático de pesquisa. Para isso, consultamos alunos egressos, visto que o teorema das raízes racionais constitui em geral como o último assunto a ser abordado dentro das equações polinomiais que, por sua vez, é o último capitulo em estudo no ensino médio previa à BNCC.

Nesta etapa foram investigados 100 alunos egressos do 3º ano do Ensino Médio que cursavam os cursos de Licenciatura em Matemática e Biologia (sendo 89 de matemática e 11 de biologia) em uma universidade pública localizada no município de Belém-PA.

Optamos pela consulta dos alunos que estavam no primeiro período, pois possibilita, de certo modo, contemplarmos um variado quantitativo de escolas tanto públicas quanto privadas a fim de identificarmos informações relativas ao ensino e a aprendizagem de equações polinomiais na grande Belém.

Para os devidos fins éticos foram distribuídos previamente aos coordenadores de curso a minuta da pesquisa desenvolvida e aos alunos investigados foi solicitado o preenchimento de um termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE), quando maiores de 18 anos e para preenchimento pelos pais aos alunos menores de 18 anos. A aplicação dos instrumentos de pesquisa se deu nos dias 29 de abril de 2019 e no dia 05 de maio do mesmo ano.

Utilizamos em nossa pesquisa de campo 3 instrumentos de coleta de dados relacionados, sendo eles: um questionário composto de 20 questões para formulação de perfil socio econômico dos indivíduos investigados e dos pais/responsáveis e para obtenção de informações da metodologia de ensino, currículo e avaliação.

Uma grade de múltipla escolha, sendo esta, a última questão do questionário, para construção de um quadro das dificuldades da aprendizagem de equações polinomiais. Os itens componentes do quadro foram construídos a partir dos conteúdos do tema e preliminares relacionados a este.

Por fim, um teste diagnóstico composto de 10 questões sendo 4 de múltipla escolha e 6 discursivas que teve por objetivo constatar a situação da aprendizagem dos alunos em relação ao conteúdo de equações polinomiais.

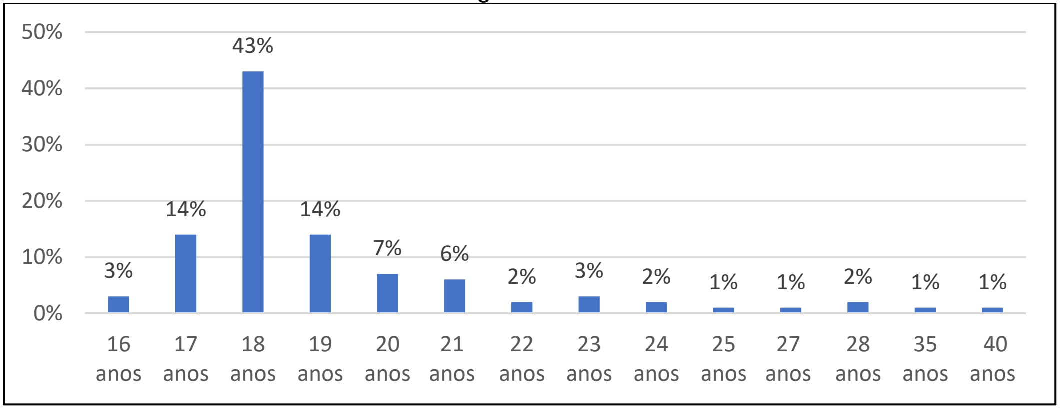
Após a coleta dos dados, analisamos as informações segundo 4 categorias estabelecidas conforme as questões do questionário, o quadro de dificuldades e o teste diagnóstico. As categorias foram: o perfil socioeconômico; o currículo; impressões metodológicas do ensino e a avaliação da aprendizagem, apresentadas a seguir nas análises.

2.5.1. Do perfil socioeconômico dos estudantes

Esta categoria teve por objetivo investigar o perfil socioeconômico dos 100 estudantes, bem como de seus familiares destacando os traços relacionados a suas afinidades com a disciplina de Matemática quando estudados na Educação Básica.

Dentre os estudantes investigados 71 eram do sexo masculino o que confirma a majoritariedade de homens nos cursos de exatas. Tal quadro é questionado pelo Plano Nacional de Educação – PNE, sendo um de seus objetivos na meta 14.8. estimular o ingresso de mulheres nos programas de pós-graduação principalmente nas áreas de engenharia, matemática, física, dentre outros ocupados por uma maioria masculina. Com relação a idade dos sujeitos investigado, temos uma faixa etária entre 16 e 40 anos, conforme o gráfico a seguir.

Gráfico 4 – Idade dos estudantes investigados.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Podemos considerar do gráfico dois grupos, os alunos com idade maior ou igual a 18 anos e com idade menor que 18. Nesse sentido temos um total de 74% de alunos que concluirão a etapa da Educação Básica em conformidade com os censos, uma vez que, segundo a Lei de Diretrizes e Bases o Ensino Médio (etapa imediatamente anterior ao ensino superior) deve ser compreendido por alunos entre 15 e 17 anos.

No que concerne ao tipo de escola que os sujeitos investigados estudaram no 3º ano do Ensino Médio, 52% informaram ter estudado em escola de rede pública estadual; 46% informaram ter estudado em escola particular e somente 2% em escola da rede municipal, valores que estão em consonância com os percentuais presentes na Lei nº 12.711/2012 com relação as cotas destinadas a estudantes que cursaram o ensino médio integralmente em escola pública.

Ainda nesta categoria, buscamos saber a escolaridade dos responsáveis dos estudantes, as informações foram tabuladas e apresentamos a seguir os percentuais de escolaridade identificados na pesquisa.

Tabela 1 – Escolaridade dos responsáveis femininos e masculinos

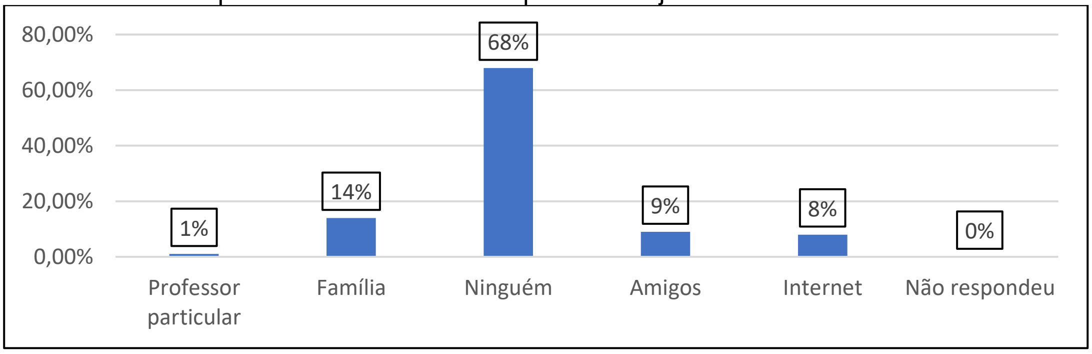
Escolaridade	**Responsável Feminino**	**Responsável Masculino**
Ensino Superior	30%	30%
Ensino Médio	43%	41%
Ensino Fundamental	12%	8%
Ensino Fundamental incompleto	15%	18%
Não estudou	-	1%
Não respondeu	-	2%

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Estabelecendo um comparativo percebemos, ainda que ligeiramente, que o percentual de escolaridade dos responsáveis femininos sobressai a dos responsáveis masculinos. Estes resultados vão em encontro com dados de pesquisas nacionais, pois de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (2018), por meio de sua pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua, identificou que o percentual da população de 25 anos a 44 anos de idade com ensino superior completo chega aos 15,6% no sexo masculino e 21,5% no sexo feminino. Para faixa etária acima de 45 anos ou mais o comportamento continua o mesmo, com um percentual de 11,6% dos homens com ensino superior completo e de 12,9% das mulheres.

Do exposto percebemos um certo equilíbrio percentual no que concerne a origem escolar dos alunos cujos pais em maioria possuem escolaridade de nível médio ou superior. Acreditamos que a escolaridade constitui um fator que influi no interesse dos alunos e na realização de seus estudos quando estes cumprem, por exemplo, com o art. 205 da Constituição Federal de 1988 em que “a Educação é dever do Estado e da família”. Por isso consultamos os alunos quanto a quem lhes ajudavam nas tarefas de matemática e a frequência que estudavam matemática fora da escola. Os gráficos 5 e 6 apresenta os resultados obtidos.

Gráfico 5 – Respostas dos alunos sobre quem lhes ajudava nas tarefas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O gráfico exibe que a grande maioria dos alunos alegaram não possuir qualquer ajuda nas tarefas de matemática, fato este que pode influenciar no desempenho dos alunos e no seu interesse pelo estudo da disciplina uma vez que, quando não incentivados, há maiores chances de não verem importância na matemática acarretando no desinteresse pela sua aprendizagem.

Ressaltamos assim a importância da participação ativa dos pais nos estudos de seus filhos. Concordamos com Fevorni (2009) por “o acompanhamento de vida escolar dos filhos pelos pais é um fator importante para a aprendizagem e para o sucesso acadêmico da criança e do jovem” (pp. 11-12).

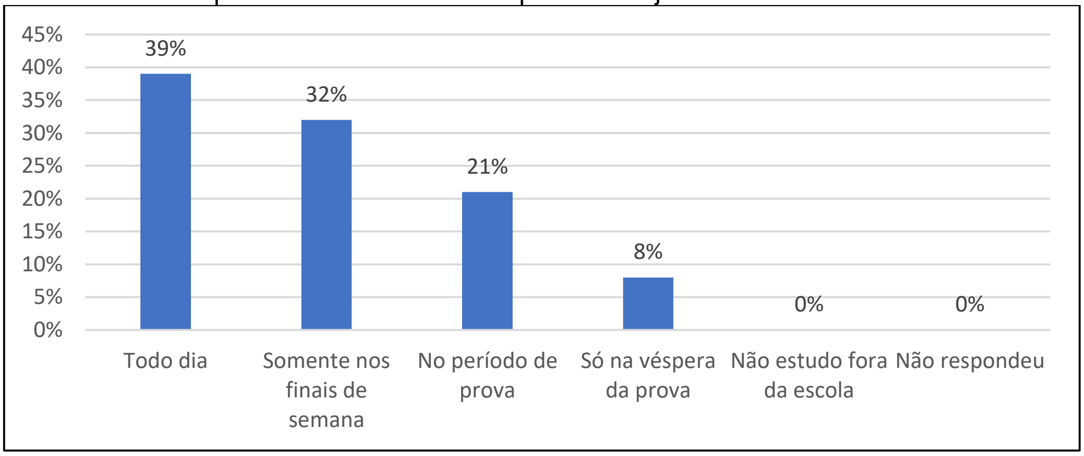
No entanto, os resultados confirmam outras pesquisas que indicam que o índice de participação ativa dos pais na educação escolar dos filhos é inverso ao nível/série do aluno, ou seja, nossa pesquisa foi realizada com alunos egressos do Ensino Médio que tendem a receber menos ajuda que os alunos da primeira etapa do Ensino Fundamenta, por exemplo.

Além disso vale ressaltar que 8% alegaram que quem os auxilia nas tarefas de matemática é a internet. As respostas foram variadas as quais agrupamos nesta categoria “internet”. Dentre as respostas houveram menção a sites de estudo dos conteúdos, bem como as videoaulas.

Não obstante, não é aconselhável fazer juízo de valor com relação aos números obtidos, mas devemos refletir na intencionalidade da pergunta, isto é, este percentual poderia ser maior caso a questão de nosso questionário não especificasse exatamente “quem” ajudava nas tarefas, mas sim que de onde viria esta ajuda.

Outro ponto importante é que embora a maioria dos investigados acionaram não receber ajuda nas tarefas de matemática, estes estudam pelo menos nos finais de semana a disciplina, conforme a seguir.

Gráfico 6 – Respostas dos alunos sobre quem lhes ajudava nas tarefas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Arrisco pontuar o fato de que os alunos investigados são específicos no sentido de que é uma amostra que venceu um processo seletivo maçante e conseguiram realizar o sonho de ingressar em uma universidade pública, deste modo não é tão inesperado observar que estes alunos realizavam uma rotina de estudo com relação a matemática (e provavelmente com outras disciplinas), sendo a aprovação nada mais que consequência de seus esforços e méritos deles próprios.

A caracterização e construção do perfil socioeconômico dos alunos foi de fundamental importância para esta pesquisa, esta categoria em específico acaba por estar estritamente relacionada as demais e podem ser analisadas em diversas perspectivas. Com vistas disso, confirmamos a importância de o professor, no exercício de sua prática docente, buscar conhecer e se iterar da realidade e cultura de seus alunos, este passo, sem dúvida é grande valor para o processor e principalmente para o aluno, centro do processo de aprendizagem.

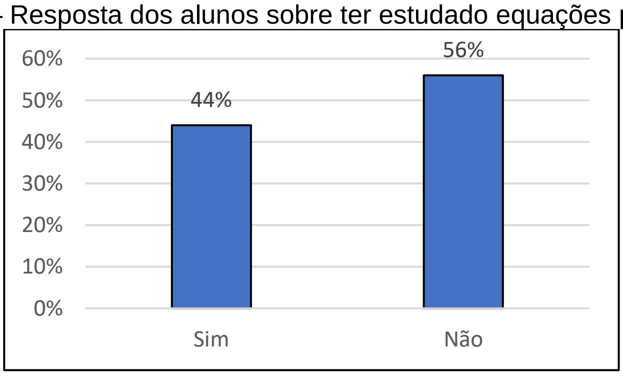
2.5.2. O currículo no âmbito do ensino de equações polinomiais

Nesta categoria buscamos relacionar o currículo de matemática em específico com nosso objeto matemático de estudo. Conforme supracitado, confirmamos a necessidade de um currículo volátil e consistente baseado no desenvolvimento de habilidades e competências. O conceito de currículo está para além de um documento, possui relação com aspectos do ensino e também da avaliação. Deste modo o currículo de matemática deve contemplar os objetivos da Educação Matemática que tem seu enfoque na aprendizagem matemática em que

> [...] deverão ser as características desejadas em um professor de matemática no século XXI [...] 1. Visão do que vem a ser a matemática; 2. Visão do que constitui a atividade matemática; 3. Visão do que constitui a aprendizagem da matemática; 4. Visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem da matemática. (D'Ambrósio, 1996, p. 87 apud SILVA[8], 2013, p.35).

Reiteramos que nosso tema é as raízes racionais e que não podemos dissocia-las das equações polinomiais. Além disso, buscamos ver como estes conteúdos se comportam e são reconhecidos (ou não) no desenrolar do processo de aprendizagem por parte dos alunos. Para isso perguntamos aos sujeitos investigados se já haviam estudado o conteúdo de equações polinomiais conforme o gráfico a seguir

Gráfico 7 – Resposta dos alunos sobre ter estudado equações polinomiais

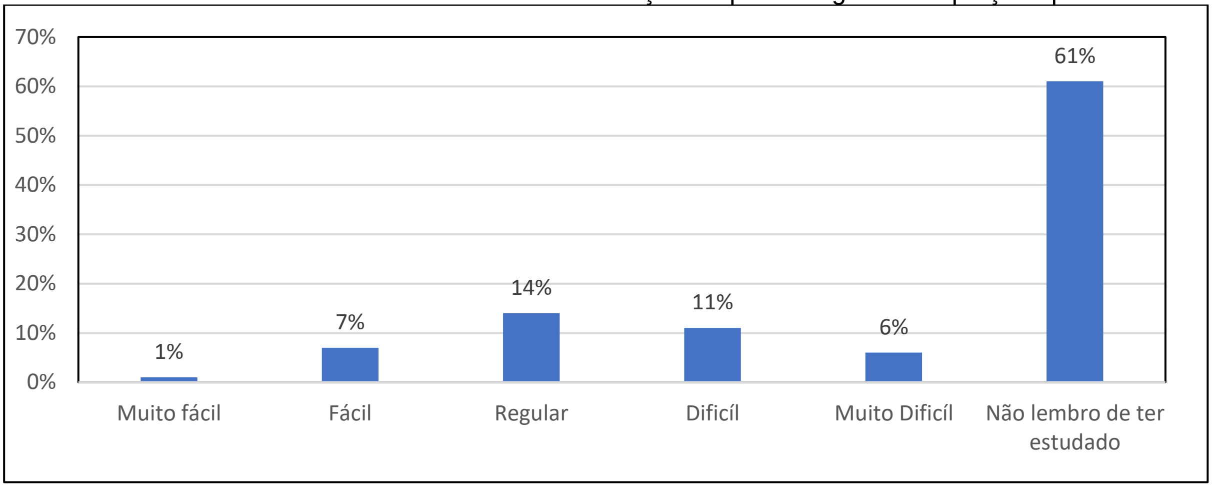


Fonte: Pesquisa de campo (2019).

[8] Destaco esta obra por sua discussão acerca da formação de professores em variados eixos como o currículo; a gestão de classe; os recursos; a avaliação no âmbito da Didática da Matemática para o cumprimento dos objetivos d educação matemática.

Nas respostas obtemos um percentual de 44% referente aos alunos que mencionaram ter estuda o conteúdo, no entanto, fazendo comparação com o item 14 de nosso quadro de dificuldades percebemos que 61% dos alunos responderam não ter estudado o conteúdo.

Gráfico 8 – Grau de dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem de equações polinomiais



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Temos um cenário preocupante em que mais de 50% dos alunos afirmaram não ter estudado equações polinomiais durante seu percurso escolar. Diversos fatores influem e podem refletir o percentual apresentado e nesta categoria temos o intuito de problematizar alguns destes fatores que inclusive foram observamos a partir das análises realizada dos instrumentos de pesquisa aplicados.

Um deles corresponde a abordagem do conteúdo por parte das escolas uma vez que, como vimos anteriormente, o assunto está enquadrado na parte flexível do currículo. Outro ponto, refere a própria constituição dos conteúdos nos currículos escolares de matemática, tanto que este tema tem sido discussão nos últimos anos, pois os professores ora não conseguem cumprir todos os conteúdos previstos para determinado ano escolar ora o ensino é feito às pressas e os alunos acabam por ver os conteúdos sem, no entanto, ter sua aprendizagem concretizada e, por vezes, sem nem mesmo lembrar de ter visto os assuntos.

Ainda assim, vale ressaltar a importância do estudo das equações polinomiais. Concordamos com Silva (2018) ao afirmar que

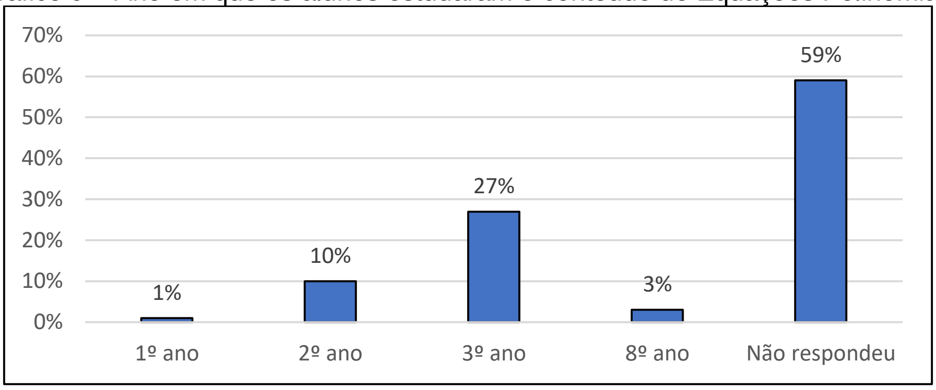
> Os estudos de polinômios e de equações algébricas são muito importantes para o currículo escolar e devem ser estudados para aperfeiçoar a formação adquirida na graduação. [...] fortalecendo competências e habilidades a fim de garantir um ensino de boa qualidade, atendendo às diferentes

> necessidades dos alunos e, assim, efetivar uma prática pedagógica em concordância com as propostas atuais para o ensino da Matemática (p. 100).

As equações polinomiais quando bem exploradas pelo professor em sala de aula, permitem ao aluno desenvolver diversos conhecimentos inclusive relacionados às noções de conjuntos numéricos, funções, dentre outros. Além de, quando abordado, capacita-los de resolver diversos problemas relacionados a situações reais.

Ainda referente ao estudo das Equações Polinomiais, foi solicitado aos alunos que responderam ter estudado o assunto que informassem em que ano aconteceu o ensino. As respostas nos chamaram atenção como podemos observar no gráfico 6 que apresenta as respostas nesta questão.

Gráfico 9 – Ano em que os alunos estudaram o conteúdo de Equações Polinomiais



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Observamos uma discrepância do percentual total de alunos que responderam em que ano estudaram, igual a 41% com o percentual de 44% que acionaram ter estudado equações polinomiais na questão anterior (ver gráfico 3), isto é, 3% dos alunos investigados podem não recordar em que ano estudaram o assunto.

A partir de nossos estudos preliminares e dos documentos oficiais concluímos ser compreensível o aparecimento da abordagem do conteúdo nos diferentes anos do ensino médio. Assim, embora nos últimos anos temos tido uma maior abordagem do conteúdo na última etapa do ensino médio, ainda há a liberdade das escolas com relação a este conteúdo no currículo.

É interessante a manifestação de resposta referente ao estudo das equações polinomiais no 8º ano. Este evento acrescido da discrepância observada nos gráficos 4 e 5 nos levou a considerar que parte dos alunos associou o conteúdo de equações polinomiais ao conteúdo de polinômios em si, estudado geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, outros restringiram este conhecimento às equações polinomiais mais conhecidas, do 1º e 2º grau trabalhadas em grande parte da vida escolar dos alunos. Passamos então a nos debruçar no quadro de dificuldades aplicados aos alunos afim de confirmar estas e outras possíveis informações acerca da aprendizagem dos alunos neste tópico matemático. Os graus estabelecidos foram: muito fácil (MF); fácil (F); regular (R); difícil (D) e muito difícil (MD).

Quadro 7 – Quadro de dificuldades em relação aos conteúdos de Equações Polinomiais

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender? (**Para sim**)				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
Definição de Números Racionais	81%	19%	21%	30%	29%	1%	0%
Frações irredutíveis	53%	47%	10%	14%	24%	5%	0%
Equações do 1º grau	96%	4%	26%	46%	22%	1%	1%
Equações do 2º grau	93%	7%	20%	34%	36%	2%	1%
Definição de Polinômios	47%	53%	3%	13%	28%	3%	0%
Classificação dos Polinômios	46%	54%	7%	15%	20%	4%	0%
Grau de polinômios	42%	58%	13%	7%	12%	9%	1%
Valor numérico de polinômios	38%	62%	3%	12%	14%	9%	0%
Raiz de polinômio	33%	67%	1%	6%	15%	11%	0%
Operações com polinômios	40%	60%	4%	6%	17%	11%	2%
Teorema de D'Alembert	12%	88%	1%	1%	5%	4%	1%
Divisão de polinômios por binômio $(x-a)$	26%	74%	3%	3%	11%	7%	2%
Divisão de polinômios pelo dispositivo Briot-Ruffini	22%	78%	3%	3%	6%	8%	2%
Equações polinomiais	39%	61%	1%	7%	14%	11%	6%
Teorema Fundamental da Álgebra	22%	78%	1%	4%	9%	8%	0%
Teorema da Decomposição	14%	86%	2%	4%	4%	4%	0%
Multiplicidade de uma raiz	29%	71%	2%	6%	16%	4%	1%
Relações de Girard	19%	81%	1%	4%	8%	5%	1%
Teorema das raízes imaginarias	16%	84%	1%	3%	7%	4%	1%
Teorema para pesquisa de raízes racionais	10%	90%	1%	2%	4%	2%	1%

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Em nossas análises do referido quadro e seus índices percentuais foi possível agrupar os alunos em 3 categorias de saberes, cujas quais elencamos como saberes I, II e III, cada uma abrangendo em ordem um determinado número de itens.

A categoria de saberes I, representada pelos itens 1 a 4 do quadro de dificuldades em que os índices de lembrança dos conteúdos são superiores a 50%. A partir desta categoria podemos inferir que alguns alunos tem seus conhecimentos de equações polinomiais restritos as equações do 1º e 2º grau, sem conseguir relacionar estes assuntos com outros tópicos como o grau de polinômios e suas raízes.

A segunda categoria, saberes II, é composta pelos itens 5 a 10, em que os índices de lembrança dos conteúdos variam entre 30% e 50%. Diferente da primeira categoria, os alunos nesta possuem em seus conhecimentos, lembranças relativas ao conteúdo de polinômios, toda via, em sua maioria apenas dos elementos envolto aos tópicos ensinados no 8º ano, afinal podemos observar pelo quadro de dificuldades que os índices percentuais de lembrança dos conteúdos decaem consideravelmente a partir do item 11 (Teorema de D'Alembert).

A terceira categoria corresponde aos itens 11 em diante, dado pelos saberes III, discutidos exclusivamente no conteúdo de Equações Polinomiais, também apresentado como equações algébricas, no 3º ano do Ensino Médio. Com exceção do tópico de equações polinomiais no quadro, os demais temos um percentual superior a 70% de alunos que não lembram ter estudado o conteúdo.

Especificamente em nosso objeto matemático de pesquisa, isto é, as raízes racionais de Equações Polinomiais, consta o maior percentual de alunos que não recordam ter estudado, o que supera os 56% de alunos que afirmaram não terem estudado o conteúdo (gráfico 4), nesse sentido podemos questionarmos em questões como: o conteúdo foi abordado pelo professor? Se sim, foi de forma significativa? Afim de evitar evasões, a partir do teste de verificação da aprendizagem destinamos uma das questões especificamente para este tópico, cujos resultados apresentaremos mais adiante em nossa última categoria de análise.

Ressaltamos que são objetivos do Ensino Médio a partir do aprofundamento dos estudos feitos no Ensino Fundamental, preparar o aluno para a vida profissional e a possibilidade de continuidade de seus estudos a partir do ingresso no Ensino Superior. Assim "[...] a maioria das escolas brasileiras trabalha, ou pelo menos deveria trabalhar, na 'preparação' de um aluno com condições mínimas de acompanhar um Ensino Superior, qualquer que seja a área" (DIERINGS, 2014 pp. 18-19).

Temos dado enfoque, nesta categoria, na importância do estudo desse objeto matemático em sala de aula pelos alunos, no entanto, devemos é essencial estabelecermos a discussão no que concerne à como é (ou deveria ser) realizado o ensino de Equações Polinomiais, este e outros pontos pertinentes são apresentados na próxima categoria.

2.5.3. Impressões metodológicas de ensino

A categoria de impressões metodologias de ensino estabelecida em nossa pesquisa tem por função justamente propiciar a discussão do como tem sido (se tem sido) feito o ensino de Equações Polinomiais. É importante lembrar que esta categoria buscou identificar as impressões dos alunos com relação a metodologia do Professor.

Assim, solicitamos que os alunos respondessem a partir de suas concepções se o professor, ao ministrar o conteúdo de Equações Polinomiais, apresentava domínio do conteúdo. 43% dos alunos afirmaram que sim, enquanto que 42% disseram que não, com um percentual de 15% que não responderam à questão.

Foi observado que a grande maioria dos alunos se manifestaram nesta questão o que entra em contradição com a informação obtida dos resultados referentes ao percentual de alunos que estudaram o conteúdo. Inferimos que alguns dos alunos investigados podem ter expressado suas respostas numa perspectiva geral da prática docente do professor ou pode ter, como dito anteriormente, considerado como referência algum conteúdo relacionado como as equações polinomiais estudadas e até mesmo o estudo de polinômios de nível fundamental.

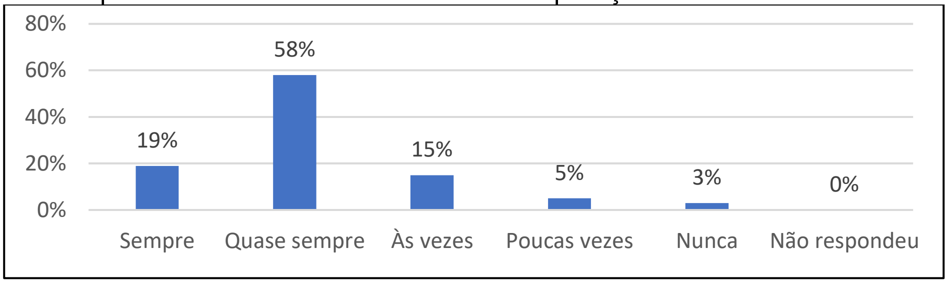
De todo modo não podemos deixar de considerar expressivo o percentual de alunos que consideraram que o professor não havia domínio do conteúdo. Desta resposta destacamos dois pontos importantes para discussão: um é com relação a epistemologia do objeto matemático, outra é relacionada a didática do professor.

Com relação a questão epistemológica do objeto matemático, no caso das Equações Polinomiais, sua natureza por si só é de característica algébrica e durante muitos anos o seu ensino foi realizado de forma estritamente formal, na realidade a abordagem matemática pura desse conteúdo ainda é presente nas escolas até hoje.

Ligado esse fator, temos a questão da didática do professor, que acaba por aderir a este algebrismo que, atrelado a um sistema de ensino prioritariamente tradicional e mecânico, faz com que as aulas aconteçam de forma expositiva com simples transferência de informação por parte do professor e de memorização por parte do aluno. Considerando estes fatores trazemos as respostas dos alunos com relação as aulas de matemática.

Com relação a compreensão dos alunos nas aulas de matemática foi constatado que grande percentual dos investigados compreendem as explicações dadas pelo professor durante as aulas de matemática, conforme o gráfico a seguir.

Gráfico 10 – Respostas dos alunos se entendiam as explicações dadas nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Os dados mostram um cenário positivo nesse sentido e confirmam os esforços realizados por diversos entes para melhoria do processo de ensino e aprendizagem em matemática. Porém a nível geral majoritariamente temos em nossas salas de aula alunos que apresentam dificuldades em compreender os ensinamentos matemáticos. A ação didática segundo Libâneo (1994) é concebida a partir da relação entre Professor, conteúdo, método e aluno, isto é, a interação entre casa elemento se faz necessário para que a aprendizagem aconteça.

Ainda com enfoque no método perguntamos aos alunos se as aulas de Matemática despertavam sua atenção para aprendizagem dos conteúdos e se eles conseguiam relacionar estes conteúdos ensinados em sala de aula com seu dia a dia. Apresentamos a seguir as respostas e nossas considerações diante delas.

Tabela 2 – Resposta dos alunos acerca do interesse pelas aulas e relação com o dia-a-dia

	Respostas dos alunos sobre as aulas de Matemática despertar a atenção para aprendizagem	Respostas dos alunos se conseguiam relacionar os conteúdos com seu dia-a-dia
Sim	67%	35%
Não	6%	15%
Às vezes	27%	50%

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Os resultados mostram que quase todos os alunos afirmaram que as aulas de Matemática despertavam usa atenção. Destacamos a importância deste fato no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, principalmente em conteúdos com maior rigor e algebrismo, como é o caso das Equações Polinomiais.

Com os altos índices de reprovação em Matemática e de evasão no Ensino Médio, despertar o interesse dos alunos para aprendizagem deve ser um dos focos do Professor de Matemática. Para isso é necessário criar situações que provoquem e desafiem os alunos, pois estas

> Situações-problema mobilizam o aluno, colocam-no em uma interação ativa consigo mesmo e com o professor; criam necessidades, provocam um saudável conflito; desestabilizam a situação e paulatina e sucessivamente o vão auxiliando a organizar seu pensamento. (BRASIL, 2002, p. 55).

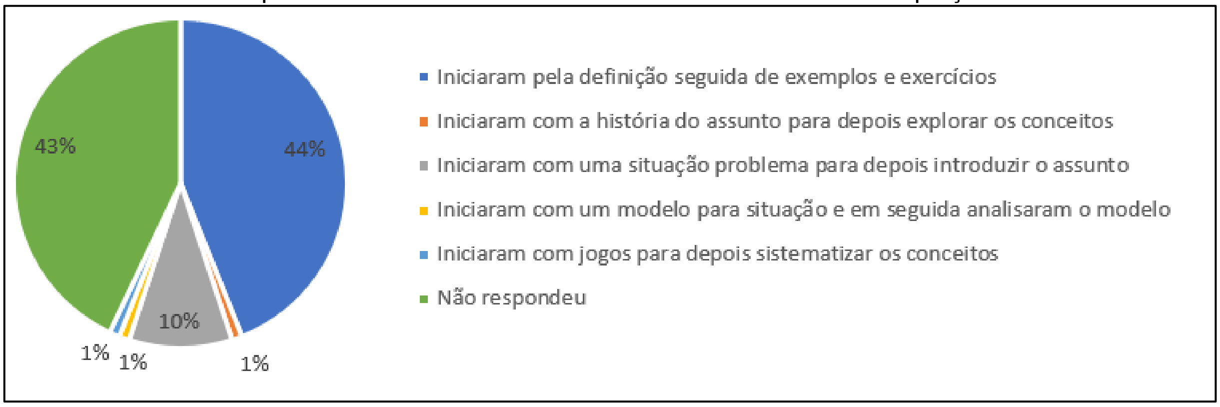
Assim podemos confirmar as vantagens de explorar diferentes situações de aprendizagem para o desenvolvimento de habilidades e competências por parte do aluno. São justamente estas habilidades e competências que confirmam a capacidade de o aluno estabelecer relação do saber ensinado com sua realidade cultural.

Na tabela acima podemos observar que o percentual de alunos que conseguem estabelecer esta relação é inferior ao do item anterior, isto é, embora grande parte dos alunos tenham interesse em aprender os conteúdos, nem todos conseguem relacionar eles com o seu dia-a-dia, somente em alguns conteúdos como podemos ver nos 50% apresentado pelo “às vezes”.

Diante disto destacamos a atuação do professor como mediador do processo que deve, por meio de alternativas metodológicas, usar a seu favor o interesse do aluno para propiciar a eles o conhecimento de modo que consigam fazer uma leitura de mundo diante disso.

Estabelecendo link com nosso objeto matemático investigação, percebemos barreiras em sua aprendizagem pelos dois fatores supracitados (questão epistemológica do objeto e questão didática do professor). Diante disto consultamos os alunos acerca de como as aulas desse conteúdo iniciavam e que metodologia o Professor utilizava para prática deste conteúdo.

Gráfico 11 – Respostas dos alunos sobre como iniciaram as aulas de Equações Polinomiais

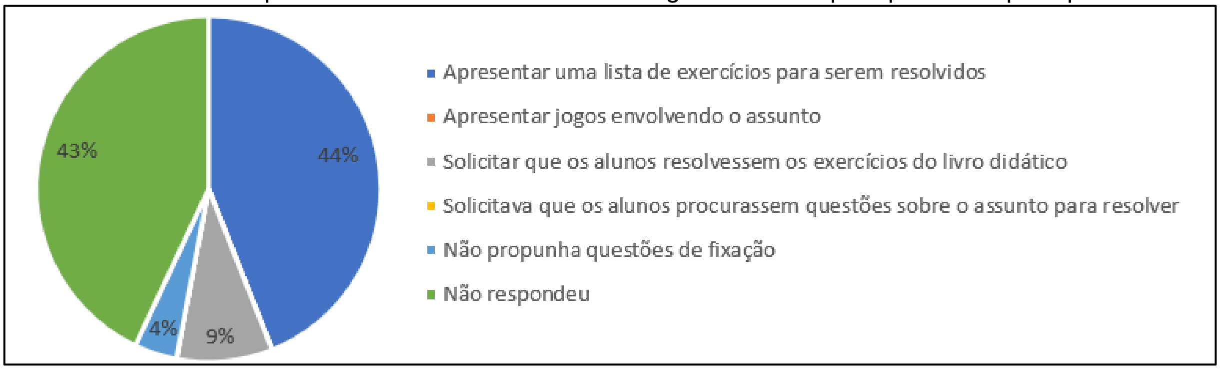


Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O gráfico 11 apresenta que um percentual de 43% dos alunos não respondeu à questão, o mesmo percentual consta no próximo gráfico. Este valor ainda está em discrepância, mesmo que pequena, com o percentual de alunos que acionaram não ter estudado o conteúdo de Equações Polinomiais (ver gráfico 7), uma vez que partimos do pressuposto que somente os alunos que estudaram o conteúdo deveriam se manifestar diante das questões metodológicas presentes durante seu ensino.

No entanto, a principal discussão em relação as respostas apresentadas acima é a confirmação das discussões estabelecidas na revisão de estudo dos trabalhos de Dierings (2014), Ciriaco (2016) e Lopes (2018) em que os autores ressaltam o ensino de Equações Polinomiais dado ainda prioritariamente a partir de uma aula puramente tradicional, isto é, na tríade da aula expositiva dada por definição, exemplo e exercícios, este último confirmado a seguir.

Gráfico 12 – Respostas dos alunos sobre a abordagem utilizada pelo professor para prática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Percebemos que os professores utilizam para prática e fixação da "aprendizagem" listas de exercícios seja própria dele ou presente nos livros didáticos. Este método tradicional de ensino acaba por se apresentar também no método de avaliação adotado, como veremos a seguir. Sobre estes fatos Santos (2007, p.29) afirma que

> [...] alguns desses professores, é dada a missão de ministrar aulas para o Ensino Médio, onde os alunos deparam com expressões dificílimas de calcular. Não há dúvida, no entanto, o aluno vai calculando sem menor interesse em aprender, simplesmente, aprende no momento para fazer prova, depois esquece, pois não faz sentido para ele.

Assim compete ao professor buscar novas formas de abordar, não só o conteúdo de Equações Polinomiais, mas todos conteúdos matemáticos, principalmente aqueles que trazem em sua natureza epistemológica um maior teor algébrico. Os PCN's confirmam a falhar do método tradicional:

> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (BRASIL, 1998, p. 37).

Logo uma das alternativas metodológicas para a aprendizagem de Equações Polinomiais, e que foi identificado na revisão de estudos, é a utilização das tendências resolução de problemas de modo a atribuir significação aos tratamentos realizados nas questões.

Outra e a utilização das tecnologias da comunicação e informação (TIC's). A utilização de *softwares* computacionais de aplicativos de geometria dinâmica, permitem uma melhor observação e estudo das equações polinomiais, permitindo que os alunos explorem diversos tópicos do conteúdo a partir da manipulação gráfica do objeto matemático.

O fato é que "devido a multiplicidade dos fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem, nem a psicologia nem a didática podem oferecer "receitas infalíveis" para as situações cotidianas em sala de aula" Carvalho (1994, p.103). Ainda assim o estudo e pesquisas no âmbito da Educação Matemática tem mostrado fatores que contribuem positivamente, e principalmente negativamente, para que a aprendizagem aconteça.

Concordamos com D'Ambrósio (1990) pois o papel do professor diante deste cenário será justamente de um facilitador da aprendizagem e mediador do conhecimento dando possibilidades e condições de o aluno gerar seus próprios conhecimentos a partir da atuação diante de situações reais.

2.5.4. Avaliação da aprendizagem sobre equações polinomiais

Ainda temos a nossa quarta e última categoria referente a avaliação da aprendizagem dos alunos em Matemática e especificamente no conteúdo de Equações Polinomiais. Para isso, ressaltamos a necessidades das discussões feitas com relação ao currículo e a aprendizagem matemática na seção 2 deste artigo.

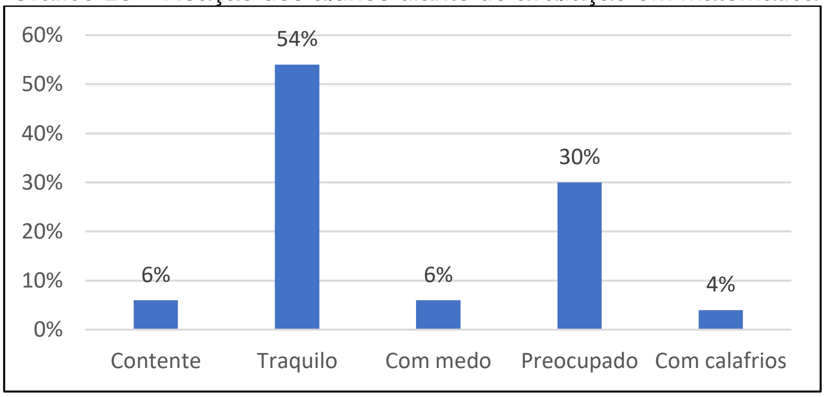
A aprendizagem esta estritamente relacionada a avaliação, estas concepções caminham juntas, uma vez que existe uma implicação entre ambas. Diante disso é essencial que o professor utilize para avaliação da aprendizagem dos alunos instrumentos que cumpram os objetivos previamente estabelecidos. Além disso, estes instrumentos não devem fugir na proposta metodológica e do plano de aula do professor (contrato didático), uma vez comprometido acaba por afetar no desempenho dos alunos nas avaliações acarretando e reprovação e dependência.

Embora a disciplina de Matemática tenha destaque a nível nacional com relação a dependência escolar, em nossa pesquisa identificamos que, dos 100 alunos investigados, apenas 13 afirmaram ter ficado em dependência, destes apenas 8 em Matemática. Considerando nossa amostra, vale pontuar acerca da diminuição da reprovação escolar dado pelo "empurrão", fato que era mais presente nas Escolas Particulares, mas que nos últimos anos tem se repercutido nas Escolas Públicas.

Especificamente no ensino de Equações Polinomiais perguntamos aos alunos quais atividades e/ou trabalhos o professor de matemática mais utilizava para avaliação (de sua aprendizagem). As respostas obtidas geraram um percentual expressivo de 90% para a utilização de provas e simulados como instrumento de avaliação, seguido de 7% dado por testes semanais e 3% correspondente a atividades do livro didático, fechando assim, um modelo de ensino dado por aulas expositivas e uma avaliação pontual dada prioritariamente por provas e simulados.

No entanto ao perguntar aos alunos como estes se sentiam diante de uma avaliação em Matemática percebemos uma dualidade entre aqueles que lidam de forma tranquila e os que ficam preocupados, conforme o gráfico a seguir.

Gráfico 13 – Reação dos alunos diante de avaliação em matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

A avaliação deve possuir característica formativa, sendo assim contínua que permita verificar o desenvolvimento dos alunos e se eles conseguiram cumprir os objetivos de aprendizagem. Assim a avaliação

> [...] concebe-se como importante instrumento que possa subsidiar a prática pedagógica do professor. Compreende-se também que ela deve fazer parte de todo o processo educacional, assumindo o importante papel de orientar o planejamento do professor e também de reorganizá-lo quando for necessário. (AMARAL E COSTA, 2017. p. 2).

Além disso, é preciso que o professor quebre o medo dos alunos do processo de avaliação. Medo este muitas vezes justificado por muitos professores utilizarem a avaliação mais como acerto de contas do que como verificador da aprendizagem. O professor deve buscar produzir em vez do medo, o senso de responsabilidade e compromisso com o processo avaliativo.

Justamente para diagnosticar a situação da aprendizagem aplicamos nosso terceiro instrumento de pesquisa, dado por um teste composto de 10 questões, sendo 4 objetivas e 6 discursivas classificadas em nível fácil, médio e difícil referente ao conteúdo de Equações Polinomiais e assuntos prévios e relacionados a este, em que cada questão apresenta ligação com tópicos do quadro de dificuldades. As respostas dos alunos foram agrupadas em: não fez; fez e errou totalmente; fez e acertou parcialmente e, por fim, fez e acertou totalmente.

Apresentamos neste trabalho, de forma sintética, os pontos mais pertinentes em que buscamos relacionar as respostas com as informações obtidas do questionário do quadro de dificuldades. O quadro 8, a seguir, apresenta a relação do teste de verificação com o quadro de dificuldades.

Quadro 8 – Comparativo: teste de verificação x quadro de dificuldades

Conteúdo (Questões)	Lembrança de estudo	Teste de verificação		
		Acerto	Erro	Branco
Equações Polinomiais	39%	45%	32%	23%
Grau de polinômio	42%	31%	46%	23%
Valor numérico	38%	18%	40%	42%
Equação do 1º e 2º grau	95%	52%	2%	46%
Divisão de polinômio	40%	12%	15%	73%
Teorema D'Alembert	12%	2%	7%	91%
Teorema da decomposição	14%	27%	29%	44%
Multiplicidade de uma raiz	29%	23%	26%	51%
Teorema de raízes imaginárias	16%	1%	4%	95%
Teorema de raízes racionais	10%	0%	5%	95%

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Inicialmente podemos observar que as respostas manifestadas pelos alunos nos questionários são confirmadas no resultado do teste de verificação, isto é, obtivemos um grande percentual de questões em branco.

Além disso, em nossas análises confirmamos que os resultados vão em encontro com as categorias de saberes estabelecidas no quadro de dificuldades, do exposto fica perceptível que os alunos apresentaram, mesmo baixo, um percentual de acertos nas questões relativas aos saberes I e II, no entanto, em relação aos saberes III, específicos do conteúdo de Equações Polinomiais os resultados são desfavoráveis.

Especificamente em nosso objeto matemático de pesquisa, o conhecimento do teorema de pesquisa de raízes racionais de Equações Polinomiais, a questão teve como comando “A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma única raiz racional não-inteira, determine-a”, cujos acertos foram nulos e apresentou o maior percentual de questões em branco junto a questão referente ao teorema de pesquisa de raízes imaginárias.

Segundo Dierings (2014), a busca pelas raízes geralmente é feita através das relações de Girard ou pela pesquisa das raízes racionais (ambos os métodos poderiam ser utilizados na questão) quando as equações possuem coeficientes inteiros. Aos que estudaram o conteúdo, inferimos a partir do questionário que o conhecimento não foi consolidado, talvez, pela falta de incentivo do uso de tecnologias e o trabalho com os gráficos de equações polinomiais nessa parte do conteúdo.

Desta forma concluímos uma fragilidade no que tange a aprendizagem de Equações Polinomiais, no caso dos sujeitos investigados, observamos que poucos tiveram aulas desse conteúdo e os que tiveram não efetivaram sua aprendizagem, uma vez que a aprendizagem é “[...] um processo que se dá continuamente e repousa na variedade de experiências que se incorporam à história do indivíduo” (VARELA et. al, 1991 *apud D’AMBRÓSIO*, 1993, p.12).

Por fim, vale ressaltar que os alunos investigados são das mais variadas escolas (pública e particular) da região metropolitana de Belém-PA, sendo alguns de outros municípios o que confirma um cenário preocupante no que concerne ao ensino de matemática em nossa região.

Percebemos diante disso pontos importância que devem ser de conhecimentos do Professor no exercício de sua prática docente, dentre eles a importância da utilização de instrumentos de avaliação que cumpram os objetivos do ensino de matemática e principalmente a importância do conhecimento de seus alunos, suas realidades e culturas, nesta pesquisa descrita na categoria socioeconômica.

Compete ao professor da vez ao aluno para construção de seu conhecimento e auxilia-lo neste processo e a fim de dar maiores subsídios ao estudo deste objeto que buscamos realizar a consulta dos professores da educação básica.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Este Capitulo tem por função apresentar a metodologia executava. Nesse sentido, estabelecemos como referência as o percurso utilizado por Silva, Chaquiam e Cabral (2022) e assim destacamos neste tópico as características da pesquisa bem como os instrumentos de investigação adotados, isto é, o teste diagnóstico e teste de verificação de aprendizagem, a oficina de nivelamento e, por fim, a sequência didática a ser desenvolvida com os alunos.

3.1. CARACTERISTICAS DA PESQUISA

Conforme supracitado nossa pesquisa tem por objetivo geral estudar as potencialidades de uma sequência didática elaborada a partir dos conceitos das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARCs) para o ensino e aprendizagem do teorema das raízes racionais de equações polinomiais, logo a natureza de nossa pesquisa é aplicada no intuito de gerar conhecimentos “dirigidos à solução de problemas específicos” (GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p. 35) e seu procedimento experimental, pois

> A pesquisa experimental seleciona grupos de assuntos coincidentes, submete-os a tratamentos diferentes, verificando as variáveis estranhas e checando se as diferenças observadas nas respostas são estatisticamente significantes. [...] Os efeitos observados são relacionados com as variações nos estímulos, pois o propósito da pesquisa experimental é apreender as relações de causa e efeito ao eliminar explicações conflitantes das descobertas realizadas. (FONSECA, 2002, p. 38).

Em relação com nossa pesquisa, corresponde ao trabalho com duas turmas, chamada de turma experimental e turma de controle, descritas mais adiante.

Quanto ao objetivo, a pesquisa é do tipo descritiva que segundo Triviños (1987) corresponde as investigações em que se deseja descrever os fatos e os fenômenos, dando ênfase as características observadas a partir de análises.

Por adotarmos também em nosso levantamento de dados e análise instrumentos qualitativos, nossa pesquisa possui uma abordagem quali-quatitativa pois “a utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente.” (FONSECA, 2002, p.20).

Assim, não só consideramos as informações obtidas dos resultados tabulados, como buscamos aprofundar as análises e a discussão a partir da consideração das variáveis presentes no fenômeno.

Deste modo, embora apresente um planejamento rígido, ela adota um enfoque fenomenológico, uma vez que, os dados coletados serão analisados de forma relativizada, considerando interpretados a luz de elementos qualitativos, isto é, consideramos que os indícios de aprendizagem podem (e devem) ser identificados e discutidos para além de respostas quantitativas, considerando no fenômeno os significados e os sentidos (GIL, 2007) que envolvem os sujeitos da pesquisa.

Em relação a este último, compõem os sujeitos de nossa pesquisa: 100 professores colaboradores que atuam na educação básica e que tiveram experiência ministrando o conteúdo de equações polinomiais. Estes foram consultados acerca da sua prática docente no ensino do conteúdo de equações polinomiais, especificamente do teorema das raízes racionais.

Além destes, 100 alunos egressos que da educação básica que foram investigados para obtenção de suas concepções referente ao seu conhecimento do conteúdo de equações polinomiais, a metodologia empregada a eles, a avaliação feita durante a aprendizagem do conteúdo de equações polinomiais.

E por fim, dois grupos de alunos do 3º ano do ensino médio que participarão da pesquisa como turma experimental e turma de controle. A turma experimental corresponde aos alunos que receberão a aplicação da sequência didática elaborada para o ensino do teorema das raízes racionais e a turma de controle, os alunos que terão a o ensino deste conteúdo feito da forma tradicional do professor regente. O lócus estabelecido será uma escola pública de ensino médio da rede estadual de ensino em que as turmas mencionadas estão presentes.

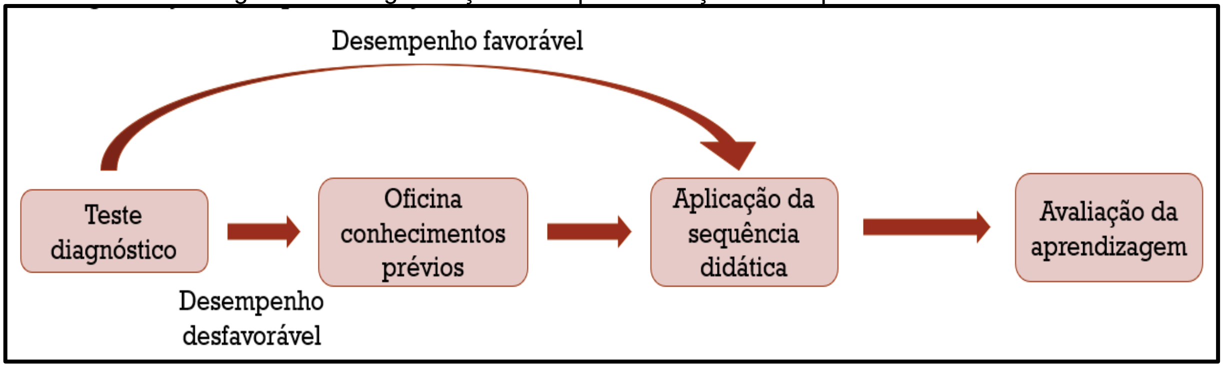
3.2. INSTUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

No desenvolvimento da pesquisa utilizamos diversos instrumentos de investigação com finalidades específicas voltadas para o alcance dos objetivos estabelecidos e na busca da resolução da questão de pesquisa.

Compõem nossos instrumentos de coleta de dados: Formulário de consulta aos professores colaboradores (anexo x); questionário de pesquisa dos alunos egressos (anexo x); teste de verificação da aprendizagem dos alunos egressos (Apêndice A); a sequência didática proposta (apêndice B). teste de avaliação aplicativa (Apêndice C);

De todo modo o seu desenvolvimento se dará conforma a figura x a seguir.

Figura 18 – Organização da experimentação da sequência didática



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

3.2.1. Sobre o teste diagnóstico, nivelamento e avaliação aplicativa

Como vimos na figura x, o processo de ensino das raízes racionais será composto de uma etapa diagnóstica; uma etapa de nivelamento (se necessário); etapa de aplicação da proposta didática e a etapa de avaliação da aprendizagem. Estabelecemos como teste diagnóstico o teste dos alunos egressos (Apêndice A), caso os alunos não apresentem desempenho favorável o professor é livre para abordar os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento das atividades da sequência didática. A sequência didática esta apresentada a seguir, porém apresentamos uma proposta de avaliação aplicativa a ser aplicada ao final do desenvolvimento das atividades (vide apêndice C).

3.2.2. Estrutura da sequência didática e análises prévias

A sequência didática apresentada a seguir foi elaborada com base nas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) propostas por Cabral (2017) e, portanto, estão organizadas a partir de suas intervenções estruturantes apresentadas em nossos aportes teóricos.

Consideramos também as contribuições da Teoria das Situações Didáticas, em foco principalmente no triângulo didático e os obstáculos didáticos observados dentro dos estudos preliminares, isto é, estudo matemático; estudo dos documentos oficiais; análise de livros didáticos e as considerações dos alunos egressos.

Assim, à luz de todos os elementos supracitados, foi desenvolvida uma sequência didática composta de 5 atividades (UARCs) voltada para o estudo das raízes racionais de equações polinomiais. Cada atividade aborda um tópico para compreensão micro e macro da aprendizagem desse objeto matemático. Abordamos na sequência didática proposta: Estudo dos termos de uma equação polinomial; O teorema das raízes racionais de uma equação polinomial e as condições para que o 0 (zero), 1 (um) e o -1 (menos um) sejam raízes de uma equação polinomial. No quadro 9 a seguir apresentamos esses tópicos de forma detalhada quando ao tempo estimado de desenvolvimento da atividade. Consideramos 1 aula ao tempo de 45 min.

Quadro 9 – Proposta de organização das atividades

Sessão	Título da Atividade	Tempo estimado
1ª	Diagnóstico inicial e Nivelamento (se necessário)	1 aula
2ª	Os atores principais: a_0 e a_n.	2 aulas
3ª	As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.	
4ª	Identificação do 0 (zero) como raiz de uma equação polinomial	1 aula
5ª	Identificação do 1 (um) como raiz de uma equação polinomial	
6ª	Identificação do –1 (menos um) como raiz de uma equação polinomial	
7ª	Avaliação Aplicativa	1 aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As atividades da 1ª e 7ª sessão dizem respeito a abertura e fechamento do processo de aprendizagem de nosso objeto matemático, como foi apresentado anteriormente. As demais sessões referem as cinco UARCs que compõem a sequência didática, as quais apresentamos a seguir. Vale ressaltar que para cada atividade destacamos: objetivo; material; procedimento e análises preliminares.

UARC 1 – os atores principais: a_0 e a_n.

A atividade inicial tem por objetivo que o aluno seja capaz de reconhecer o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0) de uma equação polinomial dada. O material utilizado será o próprio protocolo impresso da sequência didática, caneta, lápis, borracha. O professor deverá orientar os alunos no que diz respeito aos comandos das atividades e no esclarecimento de dúvidas, de modo a permitir que o aluno se comunique com o material e expresse nele seus pensamentos resolutivos.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Toda equação polinomial pode ser escrita na forma de coeficientes inteiros na ordem decrescente de seus expoentes $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, em que $a_n \neq 0$. Desde modo, escreva as equações polinomiais no modelo descrito.

I) $-7x + x^3 + 6 = 0$ R:______________________________

II) $-13t^2 + 36 + t^4 = 0$ R:______________________________

III) $2u^5 + 19u + 12u^3 = 14u^2 + 9u^4 + 1$ R:______________________________

IV) $-5v^2 = -v^4 - 4$R:______________________________

V) $23w + 10 = -3w^3 + 20w^2$ R: ______________________________

$[\mathrm{I_r}]$. Observe as equações que você organizou, todas possuem um termo de maior e menor expoente?

R:____

$[\mathrm{I_e}]$. Identifique em cada equação polinomial reescritas acima o valor dos coeficientes do termo de maior expoente ($\mathrm{a_n}$) e de menor expoente ($\mathrm{a_0}$).

Equação	I	II	III	IV	V
a_n					
a_0					

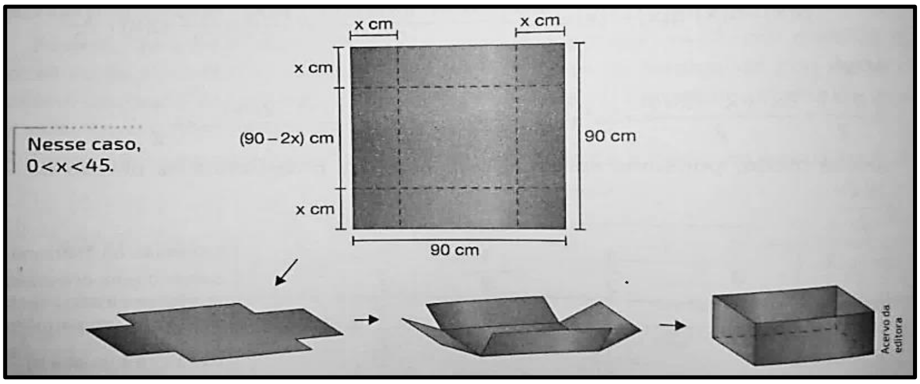
$[\mathrm{I_f}]$. Em todo polinômio na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ chamamos o coeficiente da incógnita de maior grau de **coeficiente líder** representado por $\boldsymbol{a_n}$ e o coeficiente da incógnita de menor grau de **termo independente** identificado em $\boldsymbol{a_0}$.

$[\mathrm{IA_r}]$. Complete a tabela a seguir identificando o coeficiente líder e o termo independente em cada equação.

I. $2x^2 + 3x = -10 - x^3$
II. $-4y^4 + 2y - 5 = 2y^7 - 4y^3 + y^2$
III. $z^4 - 3z^3 - 7z^2 + 31z - 10 = 0$
IV. $6t^3 + 4t = -3t^5$
V. $u^5 + 3u^3 + u + 3 = 0$

Equação Polinomial	I	II	III	IV	V
Coeficiente Líder					
Termo independente					

$[\mathrm{IA_a}]$. (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 184. Adaptado). Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de $90cm$ de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado $x\ cm$. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.184).

A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a $50.000\ cm^3$, desconsiderando a espessura do material.

a) De acordo com as exigências, qual a expressão para a determinação da medida x do lado de cada quadrado?

b) Identifique o coeficiente líder e o termo independente da equação polinomial encontrada.

R:____

Nesta atividade o aluno é incentivado recorrer a seus conhecimentos prévios para o desenvolvimento dos produtos que compõem a equação polinomial, sendo este o fator principal para resolução da questão proposta.

Destacamos a importância da orientação ao aluno para que siga o que foi proposto no desenvolvimento das atividades anteriores, uma vez que a organização da equação polinomial na ordem decrescente de seus expoentes permite maior facilidade para identificação do coeficiente líder e o termo independente.

UARC 2 - As raízes racionais a partir dos divisores de a_0 e a_n.

Tem por objetivo o aluno compreender as propriedades em volta a uma raiz racional de uma equação polinomial, além do protocolo impresso utilizaremos como auxilio o aplicativo Mathway (a ser baixado nos celulares dos alunos para a experimentação), o aplicativo determina as reais de uma equação polinomial fotografada em letra legível e serão utilizadas para confirmação de informações essenciais do teorema das raízes racionais. Assim, os alunos desenvolverão o protocolo da sequência didática e na questão solicitada utilizarão o *software.*

$[\mathrm{I}_i - EP]$. Utilize o *software* Mathway nas equações abaixo e transcreva as raízes presentes em cada uma.

Equação Polinomial	Raízes				
$x^3 - 7x + 6 = 0$	-3	1	2		
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$					
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$					
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$					
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$					

$[\mathrm{I}_e]$. Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_o em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_o					
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1	-1	2	-2	3	-3
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\mathrm{I}_e]$. Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_n em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_n					
$x^3 - 7x + 6 = 0$						
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\mathrm{I}_e]$. A partir dos quadros anteriores, escreva os números racionais que podemos obter fazendo $\frac{D(a_o)}{D(a_n)}$ em cada equação polinomial de coeficientes inteiros, sendo $D(a_0)$ os divisores de a_0 e $D(a_n)$ os divisores de a_n. Em seguida, substitua os valores nas equações polinomiais e marque "x" àqueles que satisfizerem a igualdade.

Equação Polinomial	Números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$							
$x^3 - 7x + 6 = 0$	,							
Satisfez a igualdade?								
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^3 - 20x^2 + 23x - 2 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

$[\mathrm{I}_r]$. Todas as equações polinomiais tiveram números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade?
R:____

$[\mathrm{I}_r]$. Os números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade estão presentes nas raízes identificadas com o *software* Mathway?
R:____

$[\mathrm{I}_r]$. Você percebeu alguma forma de determinar uma raiz racional de equação polinomial por meio do seu coeficiente líder e termo independente? Se sim, descreva com suas palavras.

R: ____

$[I_f]$. Toda equação polinomial de coeficientes inteiros definida por $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ que possuir números racionais em suas raízes, terão elas a forma $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$, sendo $D(a_0)$ divisor de a_0 e $D(a_n)$ divisor de a_n.

$[IA_r]$. A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma raiz racional não inteira, determine-a.

$[IA_a]$. Desde a antiguidade a humanidade discute a resolução de equações polinomiais nos mais variados contextos. Dentre elas, as equações de terceiro grau geraram bastante polêmica no que diz respeito a métodos de resolução. Nicolo Brescia, mais conhecido como Tartaglia teve destaque por desenvolver solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Hoje, temos diversos recursos para utilização. A partir do uso do teorema das raízes racionais determine a(s) raiz(es) racionais da equação polinomial $x^3 - x^2 = 4$.

UARC 3 – Identificação do 0 (zero) como raiz de uma equação polinomial

Esta atividade tem por objetivo fazer com que o aluno possa compreender as condições para o zero ser raiz de uma equação polinomial. Para isto, os alunos também utilizarão o protocolo da sequência didática, lápis, caneta e borracha. Em que o professor atuará como mediador da atividade permitindo que os alunos expressem suas conclusões.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI) e responda: Qual a principal diferença no tange aos termos dos polinômios desses grupos?

I. $x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$

II. $2x^5 + 6x^3 + 3x + 12 = 0$

III. $4x^4 - 8x^2 - 10 = 0$

IV. $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

V. $x^5 - 10x^3 = 0$

VI. $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

R: ____

[I_e]. Complete a tabela calculando o $P(0)$ de cada equação a seguir.

Grupo A		Grupo B	
Polinômio	$P(0)$	Polinômio	$P(0)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$		$P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x + 12$		$P(x) = x^5 - 10x^3$	
$P(x) = 4x^4 - 8x^2 - 10$		$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x$	

[I_r]. Em qual grupo o 0 (zero) apresenta valor numérico nulo?

R:____

[I_r]. Qual a relação entre a presença do termo independente e a raiz nula de um polinômio, considerando a análise anterior?

R:____
____

[I_f]. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 0 (zero) como raiz quando o termo independente for nulo, isto é $a_0 = 0$.

[IA_r]. Segundo o teorema fundamental da álgebra todo o polinômio real pode ser escrito como produto de fatores lineares reais. Deste modo qual das alternativas configura uma equação que possuí o 0 (zero) como raiz racional?

a) $A(x) = (x-1)(x-2)$

b) $B(t) = (t+3)(t+3)(t-1)$

c) $C(m) = (m-\sqrt{5})(m+\sqrt{5})(m-1)(m+1)$

d) $D(s) = (s-2)\,(s+2)\,s$

e) $E(y) = (y-3)(y-2)$

A partir da revisão de estudos identificamos nas pesquisas experimentais que o trabalho com os coeficientes das equações polinomiais não configurou dificuldades por parte dos alunos investigados.

Não obstante, pelo desenvolvimento desta atividade ser após a realização da UARC 1 (que explora o coeficiente líder e o termo independente) inferimos que os alunos não apresentaram dificuldades em seu desenvolvimento.

O fator principal para compreensão das condições do zero ser raiz de uma equação polinomial está na percepção dos valores numéricos obtidos quando uma equação polinomial possui ou não o termo independente. Assim buscamos tratar nesta UARC, bem como as demais (condições para um raiz e menos um raiz), com a utilização de dois grupos de equações, uma que satisfaz as condições e outro que permite a diferenciação.

UARC 4 – Identificação do 1 (um) como raiz de uma equação polinomial

Temos por objetivo levar aluno a identificar quando 1 (um) é raiz de uma equação polinomial sem necessitar utilizar métodos de resolução ou a determinação do valor numérico. os materiais utilizados serão o protocolo da sequência didática, lápis, caneta e borracha. Em que o professor atuará como mediador da atividade prestando esclarecimentos e dando liberdade de os alunos dissertarem suas resoluções e conclusões.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete a tabela com a soma dos coeficientes de cada equação polinomial.

I. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

II. $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$

III. $2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$

IV. $x^3 - 7x + 6 = 0$

V. $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$

VI. $x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$

Grupo A		**Grupo B**	
Equação polinomial	Soma	Equação polinomial	Soma
$2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^3 - 7x + 6 = 0$	
$x^4 + 8x^2 - 20 = 0$		$3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$	
$2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$		$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$	

$[I_r]$. Em relação a soma dos coeficientes da equação polinomial, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

R:____

____

$[I_e]$. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(1)$	Polinômios	$P(1)$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$		$P(x) = x^3 - 7x + 6$	

$P(x) = x^4 + 8x^2 - 20$		$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 - 3x + 12$		$P(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2$	

$[I_r]$. Em qual grupo o 1 foi raiz das equações polinomiais apresentadas? (em qual grupo o 1 teve valor numérico nulo).

R: ____

$[I_r]$. Qual a relação entre a soma dos coeficientes das equações polinomiais descritas e a raiz 1 de um polinômio, considerando a análise anterior?

R:____
____

$[I_f]$. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 1 (um) como raiz quando a soma dos coeficientes de uma equação polinomial for igual a 0 (zero), isto é, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

$[IA_r]$. Qual das equações polinomiais apresentadas a seguir admite 1 como raiz?

(A) $2x^2 - x + 5 = 0$

(B) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$

(C) $x - 2 = 0$

(D) $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

(E) $2x^5 + x^3 - 4x = 0$

A condição para que o 1 (um) seja raiz de uma equação polinomial é a soma de dos coeficientes dessa equação ser igual a zero. Embora algumas pesquisas teóricas que abordaram o conteúdo de equações polinomiais apresentassem a condição do 1 (um) raiz como espécie de corolário, não identificamos atividades que discutissem as condições para 1 (um) ser raiz de uma equação polinomial. Ainda assim, nossos estudos preliminares permitiram inferir que uma possível dificuldade a ser apresentada pelos alunos consiste na percepção do termo independente enquanto coeficiente da potência de grau zero.

UARC 5 – Identificação do -1 (menos um) como raiz de uma equação polinomial

Por fim, temos a UARC 5 que tem por objetivo fazer com que o aluno possa compreender as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial sem a necessidade da resolução da equação ou verificação via cálculo do valor numérico. Os materiais e os procedimentos serão os mesmos descritos nas atividades anteriores e, de modo análogo, não foram identificadas questões específicas relativas a este tópico. Dentre as dificuldades que os alunos possam vir a apresentar destacamos a identificação do termo independente enquanto coeficiente da potência de grau zero.

$[\mathrm{I_i} - \mathrm{CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete os quadros a seguir realizando as seguintes somas.

Soma 1 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente par;
Soma 2 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar;
Resultados – possibilidades: Iguais (=) ou diferentes (≠).

Grupo A			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$			
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$			
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$			
Grupo B			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$			
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$			
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$			

$[I_r]$. Em relação as somas dos coeficientes de expoentes pares e ímpares, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

R:____
____

$[I_e]$. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(-1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		Grupo B	
Polinômios	$P(-1)$	Polinômios	$P(-1)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$		$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$	
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 - 16$		$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$	
$P(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x + 6$		$P(x) = x^5 + 2x^3 + 3$	

$[I_r]$. O que você conseguiu identificar em relação ao valor numérico obtido nas equações do grupo A e nas equações do grupo B?

R:____
____

$[I_e]$. Utilize o aplicativo Mathway e identifique as raízes de cada equação polinomial oriundas dos grupos polinomiais A e B anteriores.

Grupo A					
Equações Polinomiais	Raízes				
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$					
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$					
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$					

Grupo B					
Equações Polinomiais	Raízes				
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$					
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$					
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$					

$\boldsymbol{[I_r - 03]}$**.** Qual grupo apresentou -1 como uma de suas raízes? Qual relação você consegue estabelecer com a questão inicial?

$[I_r]$. Quais suas conclusões em relação as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros?
R:____
____

$[I_f]$. Quando a soma dos coeficientes dos termos de expoente par for igual a soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar, então -1 (menos um) será uma das raízes dessa equação polinomial.

$[IA_a]$. Construa duas equações polinomiais que possua -1 (menos um) como uma de suas raízes e entregue para um colega identificar utilizando o método da soma dos coeficientes de termos de expoente par e ímpar. Utilize o aplicativo Mathway se necessário para confirmação.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capitulo realizamos as análises e discussões dos resultados obtidos da avaliação da sequência apresentada anteriormente por parte de um grupo de professores estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM) que atuam na Educação Básica.

Como mencionado nos capítulos anteriores, a pesquisa teve como propósito inicial realizar a experimentação com turmas de 3º ano do Ensino Médio, entretanto, decorrente da conjuntura estabelecida no período pandêmico, foi realizado um redirecionamento dessa investigação para uma validação a partir da consulta de professores que atuam na Educação Básica.

Ainda assim, por meio do percurso metodológico apresentado por Silva, Chaquiam e Cabral (2022) foi possível a construção de instrumentos de investigação para com os pares docentes e que permitem a verificação de potencialidades e validação da sequência didática constituída.

Foram consultados 20 docentes que já participaram do PPGEM-UEPA a partir de um questionário de validação da sequência didática (Apêndice D). Este questionário é dividido em três etapas, sendo a primeira de avaliação individual das unidades conceituais, a segunda de avaliação do constructo em si, isto é, a sequência didática como um conjunto e por último a etapa referente a avaliação complementar.

AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. **A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)

e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS

1. As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

---

4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

---

5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

1. A Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

---

2. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

---

3. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:
a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

---

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

---

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

---

4. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

O questionário foi reproduzido no GoogleForms e o material da sequência didática com orientações foi compartilhado por link do Google Drive para acesso aos professores participantes. Estes por questão de confidencialidade serão doravante nomeados de P1 a P20.

Assim, apresentamos a seguir os resultados obtidos e as análises realizadas em cada etapa a fim de discutirmos as potencialidades da sequência didática proposta para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais. Conforme solicitado no instrumento de coleta, foi estabelecido de os professores que assinalassem uma das quatro primeiras alternativas deveriam apresentar sugestões para melhoria nas intervenções, assim realizar apontamentos (sejam positivos ou colaborativos) para discussão das possíveis corroborações ou contrapontos relatados.

4.1. AVALIAÇÕES INDIVIDUAIS DAS UARCs

Iniciamos a discussão de nossos resultados a partir desta primeira etapa, isto é, a avaliação individual de cada UARC que compõem nossa sequência didática. Os dados foram analisados quantitativamente, o que gerou a construção de quadros percentuais e qualitativamente a partir das contribuições apresentadas pelos professores participantes da pesquisa.

A UARC 1 teve por objetivo reconhecer em uma equação polinomial o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0), tendo capacidade de organização dos termos da expressão em ordem decrescente para fácil identificação. O quadro 10 apresenta nossa relação percentual das respostas manifestadas pelos professores.

Quadro 10 – Relação percentual de respostas da UARC 1

	a	b	c	d	e
Questão 1				20%	80%
Questão 2					100%
Questão 3					100%
Questão 4			5%	10%	85%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A primeira questão da primeira etapa do questionário refere a organização e utilização das intervenções até o momento da formalização do tópico matemático trabalhado em que 20% dos professores apresentaram considerações neste item. Em nossas análises observou-se que estas considerações giravam em torno dois pontos, sendo eles, a quantidade de questão e a dificuldade de identificação dos termos de maior grau e do termo independente como vemos no quadro 11.

Quadro 11 – Sugestões dos professores para Questão 1 da UARC 1

P3	“Acredito que seja necessário trabalhar com mais questões para fixação”.
P7	“Não sei se os alunos aprenderiam só com uma questão”.
P17	“Passar mais atividades”.
P11	“A definição de equação polinomial não é compreendida pelos alunos”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As três primeiras sugestões apontam que os professores se preocuparam quanto a quantidade de questões presentes na UARC 1 até a sua formalização. Já o P11 acreditamos que pontuou em relação a dificuldade de compreensão da organização genérica de uma equação polinomial na forma apresentada em sua definição, ou seja, a forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Por questão de continuidade faremos reflexão primeiramente na resposta do professor P11. Concordamos com sua colocação, uma vez que, os estudantes apresentam um obstáculo no processo compreensão da linguagem algébrica e o trabalho em suas expressões (DIERINGS, 2014).

Todavia, já nesse momento inicial ressaltamos a importância das Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO), será por meio dessa ferramenta de uso próprio do professor que os alunos serão direcionados a perceber o decrescimento no que concerne ao expoente de cada termo até seu termo independente. De todo modo se estabelece a proposta de apresentação de exemplo antes do desenvolvimento da atividade da intervenção inicial (como é feito na UARC 2).

As considerações dos professores P3, P7 e P17 dizem respeito à quantidade de questões, pela comparação das respostas, considerando que os três pontuam acerca da necessidade de mais atividades ainda nesta primeira UARC. As intervenções reflexivas e exploratórias utilizadas estão relacionadas diretamente a intervenção inicial, sendo composta do trabalho com 5 equações polinomiais. A partir de nossos estudos preliminares consideramos suficiente pelo enfoque ser na percepção de que, quando disposto em rol, temos um termo maior e existe a possibilidade da equação polinomial possuir ou não um termo independente.

A questão 2 remete a consonância da intervenção de formalização com o conhecimento dos professores do objeto matemático, enquanto a questão 3 remete a intervenção avaliativa restritiva, ou seja, se a atividade proposta está em concordância do que se aborda ao longo da UARC em questão. Em ambas as questões tivemos unanimidade por parte dos professores, confirmando positivamente a estruturação das intervenções na configuração da UARC 1.

Por fim, a questão 4 refere ao tempo de execução das atividades propostas na UARC em concordância com o tempo estabelecido na organização didática do elaborador. Como supracitado, em nossa organização as UARCS 1 e 2 devem ser trabalhadas em duas aulas de 45min. Nesse sentido é possível fazer a divisão 40min. por 40min, sendo 10min parte das explicações e utilização da IOMO pra orientação dos alunos. O quadro 12 apresenta as respostas dos professores investigados.

Quadro 12 – Sugestões dos professores para Questão 4 da UARC 1

P3	“Considerando a dificuldade dos alunos seria necessário mais tempo”.
P7	“Deve-se observa o tempo para desenvolvimento”.
P18	Não respondeu.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O P18 embora tenha marcado a letra (d), o que implica na apresentação de sugestão, não se manifestou. Ressaltamos que as resposta para as questões objetivas foram colocadas como obrigatórias no formulário, as questões de contribuições não eram obrigatórias, uma vez que, ao marcar a alternativa (e) o professor concordava integralmente e havia necessidade de apresentar contribuição.

Em analise, não ficou evidente a colocação do P7, todavia, supõem-se que, assim como P3, ambos sugerem há necessidade de mais tempo para o desenvolvimento da UARC 1. Neste ponto aproveito para discutir no que tange ao propósito de uma sequência didática em si. Esta, configura-se como uma proposta de abordagem didática para o ensino de um conhecimento matemático de forma efetiva.

Assim, os pesquisadores que desenvolvem uma pesquisa nesse âmbito não devem olhar a proposta didática de forma mirabolante ou desconexa da própria realidade do próprio professor, do aluno e do *milieu* em que ocorre a ação educativa. As raízes racionais é apenas um tópico – e o ultimo – a ser abordado no ensino de equações polinomiais (ou equações algébricas). Nesse sentido, deve-se ter em mente duas questões, conteúdos prévios já foram abordados o que permitiria que dificuldades apresentadas pelos alunos fossem trabalhadas nas próprias orientações.

Com relação a UARC 2, seu objetivo é de os alunos compreenderem o teorema da raiz racional de uma equação polinomial. Nesta UARC eles utilizarão o aplicativo Mathway nos celulares e pode ser feito em dupla caso algum aluno não possua aparelho celular. A utilização do aplicativo visa facilitar a identificação de raízes (reais ou imaginárias) e serve de confirmação para a aplicação correta do teorema pelos alunos. O quadro 13 apresenta os índices percentuais nesta UARC.

Quadro 13 – Relação percentual de respostas da UARC 2

	a	b	c	d	e
Questão 1			10%	10%	80%
Questão 2					100%
Questão 3			5%	5%	90%
Questão 4			5%	15%	80%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação a questão 1 20% dos professores apontaram observações com relação ao desenvolvimento das intervenções para formalização, no entanto, algumas respostas discreparam no que diz respeito ao objetivo da questão, conforme o quadro de respostas a seguir.

Quadro 14 – Sugestões dos professores para Questão 1 da UARC 2

P3	“Variar a incógnita, na questão anterior variou”.
P7	“São muitas equações polinomiais, fica cansativo”.
P11	“Os alunos apresentarão dificuldade de compreensão”.
P14	“Trabalhar com questões contextualizadas”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ratificamos que a questão pede o olhar em relação a estruturação das intervenções para compreensão da apresentação formal do tópico de conhecimento em questão. A utilização de metodologias e tendencias da educação matemática permitem a variabilidade de práticas docentes. Diante disso, em relação a resposta do P14, demos enfoque a permitir uma melhor e fácil assimilação do aluno em relação ao teorema das raízes racionais e isto pode ser obtido dentro da própria matemática, sem necessidade de contextualizar, são práticas diferentes.

Não obstante, o professor P11 pontua que os alunos apresentarão dificuldade de compreensão, no entanto, não apresenta sugestão para melhoria das intervenções. Por conseguinte, em relação ao P7, supomos que sua sugestão seria a redução de equações polinomiais. Nesses termos, o professor tem a autonomia de reduzir a quantidade de equações polinomiais trabalhadas, bem como mudar as equações trabalhadas. Cabral (2017) justamente propõe isso no cerne dos constructos elaborados à luz da UARC, a possibilidade de o professor ter autonomia do seu material de trabalho, bem como fazer os ajustes necessários. Enfim, as cinco equações polinomiais referem a um quantitativo suficiente para que seja compreendido a mecânica do processo de determinação de raízes racionais.

Por fim, temos a resposta do P3. De fato, apenas na UARC 1 trabalhamos com diferentes incógnitas na configuração da equação polinomial, isto porque nosso enfoque estava no agrupamento da mesma em rol e identificação do coeficiente de maior grau e o termo independente. Nas demais UARCs trabalhamos com outros enfoques o que a mudança de incógnita poderia gerar confusão.

A questão 2 não apresentou sugestões, já na questão 3 temos 10% dos professores participantes destoaram em relação a avaliação restritiva apresentada. O quadro a seguir apresenta as respostas dos professores P3 e P11 que manifestaram sugestões para melhoria das intervenções.

Quadro 15 – Sugestões dos professores para Questão 3 da UARC 2

P3	“trabalhar com mais equações de incógnitas diferentes”.
P11	“já disponibilizar o modelo”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na UARC 2 temos uma intervenção avaliativa restritiva, ou seja, dentro do próprio contexto matemático e uma aplicativa com aporte na história da matemática para fim de exercitar o que fora formalizado e ter a preparação necessária para realizar a avaliação aplicativa ao final da experimentação. Em relação ao trabalho com incógnitas diferentes, não está no enfoque do objetivo dessa UARC. Entendemos que o modelo referido pelo P11 seja as tabelas de intervenção exploratórias utilizadas para aprendizagem da pesquisa de raízes racionais. O aluno deve ficar livre de utilizar sua forma de realizar essa pesquisa, com orientação do professor. Acreditamos que, caso queira, o próprio aluno poderá construir sua tabela.

A questão 4 tange ao tempo para desenvolvimento da UARC. Neste caso, a UARC 2 será desenvolvida em uma aula (45min.). 80% dos professores investigados acharam suficiente para desenvolver este tópico matemático. O quadro 16 apresenta as respostas dos professores que representam os 20%.

Quadro 16 – Sugestões dos professores para Questão 4 da UARC 2

P3	“Desenvolver em duas aulas, com mais calma”.
P7	“Mesmo caso da questão anterior”.
P10	“Não acho o tempo suficiente.”
P18	Não respondeu.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Novamente, o P18 não respondeu embora tenha manifestado sugestão e P10 apontou o tempo não ser suficiente o que implica na sugestão de trabalhar com minimamente mais uma aula assim como o P3. P7 por sua vez aponta ser mesmo caso na questão anterior, que em sua resposta alerta para observar o tempo para desenvolvimento da atividade prevista na UARC.

A partir da UARC 3 até a UARC 5 foi proposto trabalhar nesta sequência didática alguns corolários que estão relacionadas ao conteúdo das raízes racionais de equações polinomiais, são eles os corolários que determinam quando temos os números 0, 1 ou – 1 como raiz de uma equação polinomial.

O procedimento adotado foi o mesmo para as três UARCs subsequentes, assim, trabalhamos com dois grupos de equações polinomiais a fim de que os alunos percebam diferenciações desses dois grupos, ora com relação aos termos, ora com relação aos coeficientes a fim de que os alunos consigam por si só conceber as condições para determinar essas raízes racionais.

A UARC 3 tem como objetivo levar o aluno a compreender as condições para o 0 (zero) ser raiz de uma equação polinomial. O Quadro a seguir apresenta a relação percentual desta unidade conceitual.

Quadro 17 – Relação percentual de respostas da UARC 3

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
Questão 1					100%
Questão 2					100%
Questão 3			10%	5%	85%
Questão 4				10%	90%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Iniciando a discussão pela questão 4, o P18 não apresentou resposta e P7 ressaltou a questão do tempo estabelecido para o desenvolvimento da UARC. Não obstante P7 também fez considerações na questão 3 que diz respeito a intervenção de avaliação restritiva, como vemos no quadro 18.

Quadro 18 – Sugestões dos professores para Questão 3 da UARC 3

P3	“Utilizar equações desenvolvidas”.
P7	“Trabalhar com forma fatorara pode ser um obstáculo’.
P11	“Os alunos terão dificuldade de compreensão para resolver o problema”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Sobre as colocações levantadas no quadro 18, corroboramos com a afirmativa do P7 e acreditamos ser no que o P11 se refere. A forma fatorada, porém é um dos conhecimentos prévios que o aluno terá para que seja abordado o tópico das raízes racionais, é algo a ser estabelecido no próprio contrato didático firmado com os alunos. Não obstante, concordamos também com o P3 que sugere a utilização de equações desenvolvidas, isto é, equações polinomiais com os fatores já desenvolvidos.

De fato, a intervenção restritiva apresentada difere da abordagem utilizada para estabelecer a aprendizagem do corolário, todavia, é neste ponto que temos o reforço da IOMO no sentido de relembrar aos alunos a questão da forma fatorada que por sua vez, já indica diretamente as raízes das equações polinomiais.

A UARC 4 tem como objetivo de o aluno compreender as condições para identificação do 1 (um) ser raiz de uma equação polinomial. O quadro 19 apresenta o percentual de respostas.

Quadro 19 – Relação percentual de respostas da UARC 4

	a	b	c	d	e
Questão 1					100%
Questão 2					100%
Questão 3					100%
Questão 4				10%	90%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As considerações apresentadas nesta UARC dizem respeito ao tempo para o seu desenvolvimento com os alunos (10% dos professores investigados). Não diferente, na UARC 5 as observações acerca do tempo de aplicação da UARC sobem (para 15%), como vemos no quadro 20.

Quadro 20 – Relação percentual de respostas da UARC 5

	a	b	c	d	e
Questão 1			10%	10%	80%
Questão 2					100%
Questão 3				10%	90%
Questão 4				15%	85%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

De fato, a UARC 5 é mais extensa que as demais do trio de identificação de raízes racionais. Ela tem por objetivo de o aluno compreender as condições para que o – 1 seja raiz de uma equação polinomial. No entanto, como supracitado, consideramos – a partir de nossos estudos preliminares – a possibilidade de execução destas três UARCs em uma única aula (45min).

No que concerne a organização das intervenções inicial, reflexiva e exploratória e sua condução à formalização (questão 1), percebemos o levantamento de questões organizacionais da sequência didática, além de questão conceitual do zero e considerações acerca de contextualizações. Destacamos as respostas dos professores consultados no quadro a seguir.

Quadro 21 – Sugestões dos professores para Questão 1 da UARC 5

P3	“É preciso estabelecer na atividade inicial que o termo independente será considerado na soma dos expoentes pares”.
P7	“O Grupo B sempre acaba sendo o grupo destacado, isto pode tendenciar o aluno ao erro”.
P17	“Pode ser interessante variar em uma das UARCs o grupo trabalhado”.
P14	“Sugiro o trabalho com questões contextualizadas, o aluno pode perder o foco”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O P3 sugere que seja estabelecido inicialmente que o termo independente seja considerado na soma dos expoentes pares. As intervenções orais permitem que essa questão seja percebida pelos alunos caso estes tenham dificuldades em recordar ou saibam associar de que o termo independente nada mais é do que o coeficiente de uma incógnita cujo expoente é zero, isto é, por exemplo $4 = 4x^0$.

Vale ressaltar que sobre este último não há discussão: matematicamente, zero é par uma vez que é possível dividi-lo em dois grupos de zero, além de que dentro do conjunto dos inteiros o zero se estabelece entre dois números impares – 1 e 1.

No que tange a organização das equações polinomiais em grupos (resposta dos professores P7 e P17). Não consideramos como prejudicial à aprendizagem o destaque para o grupo B, muito pelo contrário. Ao longo do desenvolvimento da UARC 3, os alunos irão trabalhar as demais UARCs considerando da possibilidade de haver uma característica de destaque no grupo B, o que irá despertar a atenção e concentração na resolução das questões da sequência didática.

Não obstante, também possibilita desenvolver um ponto crucial destacado por Cabral (2017) nos propósitos de uma sequência didática que é a capacidade de argumentação e expressão de ideias proporcionada pelo jogo de intervenções exploratória e reflexiva.

O P14 sugere o trabalho com questões contextualizadas nesta UARC, porém como foi apresentado, as UARCs 3,4 e 5 possuem objetivos similares de identificação de raízes racionais. Neste sentido, optamos por estabelecer um padrão a ser trabalhado a fim de os alunos consigam se apropriar desse conhecimento.

Por fim, a questão 3 de avaliação da intervenção avaliativa restritiva apresentou 90% das respostas favoráveis. Esta intervenção restritiva solicitava que os alunos elaborassem duas equações em que uma das raízes deveria ser o – 1. Nas respostas apresentadas pelos professores investigados (10%), todas destacaram como obstáculo solicitar uma questão de criação por parte dos alunos.

Nesse sentido, concordamos com os levantamentos dos professores e nos próprios estudos preliminares é possível deduzir que os alunos apresentam dificuldades no desenvolvimento de questões. No entanto, é próprio do objetivo da BNCC, em termos das habilidades a serem desenvolvidas nos alunos, que estes seja capaz de resolver e elaborar problemas em relação ao objeto de conhecimento estudado. Fica como proposta o uso na Avaliação Aplicativa caso necessário.

4.2. AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONEITUAIS

Neste momento discutiremos a segunda etapa do questionário de avaliação da sequência didática, correspondente a avaliação das unidades conceituais enquanto conjunto. Essa etapa é composta de cinco questões e buscamos caracterizar as considerações feitas pelos professores participantes para corroborar a validação da proposta didática no ensino das raízes racionais de equações polinomiais.

Quadro 22 – Percentual de respostas dos professores para o conjunto das UARCs

	a	b	c	d	e
Questão 1			20%	10%	70%
Questão 2				10%	90%
Questão 3			10%	10%	80%
Questão 4				5%	95%
Questão 5				20%	80%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em relação a primeira questão desta segunda etapa do questionário, buscamos discutir a caracterização das atividades da sequência didática enquanto tarefas atrativas ao aluno. Não obstante, é de objetivo também dessa primeira questão a análise da linguagem empregada na composição de todo o material e se a mesma se apresenta em nível cognitivo favorável à aprendizagem dos alunos. No quadro 22 notamos que um considerável percentual dos professores concordou com as temáticas utilizadas no constructo, no entanto, temos outros professores que apresentaram considerações em relação as atividades utilizadas na sequência.

Quadro 23 – Sugestão dos professores na questão 1 de avaliação das UARCs

P3	“As atividades estão boas, mas acredito que seja necessário aumentar o número de exercício em algumas UARCs o que levaria a necessidade de mais tempo”.
P7	“Analisar alguns termos adotados para utilizar de uma linguagem mais acessível aos alunos”.
P11	“Sugiro envolver o trabalho com gráficos, deixa mais dinâmico”.
P14	“Propor atividades mais contextualizadas, trabalhar com o cotidiano do aluno”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As sugestões apontadas acima representam o percentual de professores que manifestaram sugestões com relação as atividades utilizadas na sequência didática. Estas sugestões apontam acerca de diferentes tópicos.

O P3 em sua perspectiva corrobora com as atividades propostas na sequência didática, destaca então a necessidade de um aumento no número de exercícios, porém não especifica em qual UARC. Assim ressaltamos na vantagem do uso de sequências didáticas configuradas no constructo das unidades articuláveis, pois estas permitem ao professor ter autonomia de adaptar o material ao seu contexto, buscamos estabelecer o que, em nossa perspectiva, seria o modelo ideal para proporcionar a apreensão deste conhecimento matemático por parte dos alunos.

Outro tópico elencado refere a linguagem empregada no texto da sequência didática a ser proposta aos alunos. O P7 sugere que se dê atenção a linguagem utilizada nas atividades e propõe o uso de uma linguagem mais acessível.

No entanto, conforme vimos na revisão de estudos a linguagem algébrica e de modo geral a linguagem matemática configura-se elemento de resistência para os alunos se apropriarem, isto não implica na implementação de linguagem mais acessível e sim na busca de mecanismos que permitam que os alunos se apropriem dessas linguagens matemáticas.

No que tange a este trabalho, de auxiliar os alunos a compreenderem a linguagem matemática, bem como o suporte necessário no caso de dificuldades de interpretação esta as intervenções orais. Dentro do constructo das UARCs são as IOMO quem detém do papel fundamental de manter o aluno no caminho didático proposto no planejamento do professor.

Ainda em relação as atividades utilizadas na sequência didática, temos um tópico que foi considerado nas análises prévias e até então não havia se manifestado nas respostas dos professores, este tópico foi expresso pelo P11 que sugere o uso de atividades com gráficos para tornar o desenvolvimento da sequência didática mais dinâmico para os alunos.

Pesquisas como a de Becker (2014), Carraschi (2014) e Abreu (2016) de nossa revisão de estudos discutem a abordagem gráfica das equações polinomiais e apresentam em suas propostas didáticas atividades relacionadas a esta forma de representação. No entanto, apesar de existir uma homonomia matemática entre as equações e funções polinomiais, devemos compreender que ambos são conceitos que diferem um do outro, esta associação pode gerar além de confusão, a interpretação equivocada dos dois objetos matemáticos.

Diante disso optou por não conduzir os aspectos gráficos, uma vez que, embora satisfaçam muitas das vezes problemas funcionais são tópicos a serem trabalhados no ensino e aprendizagem de funções polinomiais.

A respeito da resposta do P14, conforme supracitado, o constructo das UARCs permite o trabalho com diferentes tendências da educação matemática bem como a manipulação de diferentes práticas e metodologias de ensino. Consideramos a contextualização da matemática como fator essencial na aprendizagem, mas vale estabelecer a reflexão de até que ponto deve-se forçar essa contextualização.

As equações polinomiais, também conhecidas tematicamente como expressões algébricas tem seu cerne na própria álgebra e sua aprendizagem concretizada no domínio nesse mesmo aspecto (algébrico).

Na questão 2, tivemos duas respostas de considerações dos professores. Foi possível estabelecer uma diferenciação nestas respostas em sentido de perspectiva. Esta questão refere ao uso dos recursos, se são atrativos, fácil operacionalização por parte do aluno e se estes contribuem para a formalização do saber. O quadro 24 apresenta as duas respostas manifestadas pelos professores.

Quadro 24 – Sugestão dos professores na questão 2 de avaliação das UARCs

P3	“Com o celular os alunos podem ver que seu uso pode ir além das redes sociais. Uma proposta seria elaborar um aplicativo com os alunos que fizesse algo similar ao aplicativo”.
P7	“A utilização do celular mesmo sendo uma proposta interessante pode atrapalhar no foco dos alunos nas atividades”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como mencionado, nas respostas dos professores participantes, temos uma diferenciação com relação ao olhar para o uso do celular em sala de aula. Nos estudos preliminares foi levantada questões tais como a dificuldade de utilizar as tecnologias da informação em sala de aula e em especifico na possibilidade do uso do celular por este ser um dos principais elementos de dispersão dos alunos no processo educativo.

Apesar dos revezes, o celular (e o uso das tecnologias em si) apresentam diversas vantagens para a ação educativa como a própria utilização de recursos didáticos como é o aplicativo Mathway. Concordamos com a afirmativa do P3 e ratificamos a importância de apresentar as diversas utilidades educacionais que o celular pode oferecer.

Ainda nas consideramos do P3, ressaltamos que nas diversas discussões para elaboração da sequência didática foi considerada a elaboração de um aplicativo que realizasse a determinação das raízes racionais. A proposta se mantém aberta para que nós e outros possam explorar esta possibilidade futuramente.

A questão 3 refere ao total de atividades da sequência didática proposta e se está adequada ao ensino das raízes racionais de equações polinomiais. Um percentual expressivo considerou a quantidade de atividades adequada para o ensino deste objeto matemático, todas as sugestões apresentadas (correspondente aos 20%) referem ao aumento de atividades.

Não obstante, apenas 5% dos professores investigados questionou a ordenação das atividades, no entanto não foram apresentadas sugestões quanto a isso. Ressaltamos a importância de abordar os corolários para identificação do 0, 1 e – 1 como raízes após o ensino do teorema das raízes racionais, estabelecemos essa sequência com objetivo de uma organização didática para o ensino destes saberes.

Quanto ao tempo total ser compatível com a aplicação da sequência didática (questão 5), estabelecemos um tempo total de 3 aulas para o desenvolvimento das 5 UARCs (e uma aula para a avaliação aplicativa). Apenas 20% dos professores questionaram o tempo estimado e sugeriram a consideração de um tempo maior para o desenvolvimento das atividades.

Consideramos valido relembrar as discussões levantadas em relação ao desenvolvimento da UARC 1 e 2, que valem para o tempo estabelecido para os desenvolvimentos das UARCs 3, 4 e 5. É importante o reconhecimento das sequências didáticas como propostas metodológicas reais, utilizamos este termo no sentido de que os professores possam desenvolve-las dentro do seu planejamento e do currículo da matemática naquela determinada serie.

O teorema das raízes racionais e seus corolários são partes importantes do estudo das equações polinomiais. Consideramos este fato nas reflexões realizadas para elaboração da sequência didática. Alinhando uma proposta metodológica efetiva para ser desenvolvida no tempo necessário dentro do período de ensino de um objeto de conhecimento maior que são as equações polinomiais.

4.3. AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

A terceira etapa do questionário de validação da sequência didática diz respeito a avaliação aplicativa. Neste ponto, resgatamos para fim de conhecimento que as UARCs individualmente podem, segundo a organização didática do professor, apresentar questões de intervenção avaliativa aplicativa, todavia, isto não exclui a importância de realizar um teste de verificação da aprendizagem correspondente a aplicação dos conhecimentos adquiridos no desenvolvimento da sequência didática.

A partir do questionário da avaliação complementar, foi possibilitado aos professores estimar a avaliação aplicativa; as possíveis interações dentro do triângulo didático (Professor-Aluno-Saber) e as potencialidades da sequência didática proposta para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais.

As questões 1 e 2 possuem caráter objetivo. A primeira refere a compatibilidade da avaliação aplicativa com relação a sequência didática. A segunda, se esta sequência didática promove a interação (Professor-Aluno-Saber).

Em ambas as questões os professores concordaram integralmente, assim corroboram da premissa de que avaliação aplicativa elaborada está em consonância com a sequência didática proposta e que, por sua vez, favorece a interação entre professor, aluno e saber.

É essencial que a avaliação aplicativa esteja de acordo com o que foi abordado no estudo do objeto de conhecimento a partir da sequência didática ou que no máximo as atividades propostas apresentem as ferramentas necessárias para que o aluno mobilize seus conhecimentos a fim de resolver os problemas abordados.

Quanto ao triângulo didático, a sequência didática pode ser desenvolvida pelos alunos de forma individual ou coletiva, ambas abertas para possibilidade de interações entre os alunos. A interação entre cada aluno e o saber a ser ensinado se materializa por meio da própria sequência didática em suas intervenções estruturantes e a interação do professor com os alunos deve ser regida a partir das intervenções orais de manutenção objetiva.

Por conseguinte, a questão 3 tem caráter discursivo e busca trazer as percepções dos professores acerca da sequência didática e o triângulo didático. Neste sentido pergunta-se aos professores que contribuições enxergam da sequência didática para com o professor no âmbito da formação matemática/pedagógica; para com o aluno no âmbito de participação ativa e aprendizagem e, por último, para com o conhecimento, isto é, se corrobora para uma construção gradativa do saber matemático ensinado. Destacamos algumas das descrições dos professores para discussão no quadro 25 adiante.

Quadro 25 – Percepção dos professores sobre as contribuições da sequência didática

Professor	P3	“Contribui para o desenvolvimento da prática docente do professor”.
	P7	“A sequência didática é uma metodologia alternativa para o ensino de matemática, além disso promove a interação do professor com os alunos”.
	P14	"Contribui para organização do professor no processo de ensino e aprendizagem de um conhecimento matemático”.
Aluno	P3	“A sequência didática permite com que o aluno construa o próprio conhecimento com a mediação do professor”.
	P7	“O aluno torna-se protagonista do seu processo de aprendizagem e tem uma participação ativa na construção do seu conhecimento”.
	P11	“O aluno aprende de forma dinâmica é conduzido, como afirma Cabral (2017) a reconhecer padrões, estabelecer relações, realizar generalizações para uma aprendizagem significativa”.
Saber	P3	“O conhecimento é construído a partir de conhecimentos prévios e de forma didática por meio do próprio aluno e com mediação do professor”.
	P14	“Permite que o conhecimento seja apreendido de forma organizada por meio de transposição didática materializada na sequência didática”.
	P17	“Contribui para que o objeto matemático seja aprendido em sua completude”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nas respostas acerca das contribuições da sequência didática para ao Professor percebemos o reconhecimento a utilização de sequências didáticas na ação educativa. Concordamos com as contribuições destacadas pelos professores investigados e reforçamos que, no âmbito da formação matemática e pedagógica), as sequências didáticas – com ênfase construção segundo as UARC – promove o desenvolvimento da prática docente, tanto no âmbito das metodologias de ensino como na transposição didática que ocorre de forma dialógica para promover a aprendizagem por parte dos alunos.

Na resposta de P7 há a evidenciação da sequência didática como metodologia de ensino, neste ponto, vale conduzir à tona de que essa forma alternativa de ensino requer que o professor saia de sua zona conforto e estabeleça uma pratica de ensino comunicativa, interativa e de promoção do sentido investigativo nos alunos.

No que concerne as contribuições da sequência didática para com os alunos, os professores investigados manifestaram que a sequência didática se configura como um material que interage com o aluno, permite uma aprendizagem dinâmica e que este, a partir de cada tópico, construa o seu conhecimento em relação ao saber, neste caso, das raízes racionais de equações polinomiais.

Não obstante, percebemos a influência das teorias de aprendizagem que centram o aluno como protagonista da ação educativa e que coloca o professor como mediador deste conhecimento, prorrogativa elucidada pelo P7. Além disso a sequência didática promove por meio das suas intervenções estruturantes que o aluno aprenda de forma dinâmica além de desenvolver conhecimentos essenciais que transversalizam a aprendizagem matemática, conhecimentos estes apontados por Cabral (2017) como favoráveis quando se utiliza os modelos estruturantes.

Com relação ao saber, destacamos as respostas do P3, P14 e P17 por estes ressaltarem que na utilização de sequência didática no processo de ensino e aprendizagem o conhecimento passa por uma transposição didática. Nesse sentido, é essencial o estudo do objeto matemático em seu saber cientifico de modo que este saber seja compreendido pelos alunos nos âmbitos conceitual, procedimental e aplicativo, bem como por meio do conhecimento das propriedades e corolários que regem aquele conhecimento.

Além disso, destacamos que na utilização da sequência didática no modelo estruturante das UARCs um saber matemático (macro) é aprendido a partir de conhecimentos (micro) e a aprendizagem destes em conjunto implica no conhecimento daquele objeto de estudo. Neste sentido, o conhecimento se dá de forma gradual e integrada.

Enfim, na questão 4 solicitamos que os professores relatassem que potencialidades identificaram na sequência didática para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais, cujas respostas apresentamos no quadro a seguir.

Quadro 26 – Percepção dos professores sobre as potencialidades da sequência didática

P3	“A sequência didática possibilita o ensino de equações polinomiais por meio de uma nova metodologia de ensino”.
P7	“Por meio da sequência didática elaborada no modelo das UARCs a aprendizagem é potencializada pois promove a interação de professor, aluno e o conhecimento”.
P11	“Este material permite abordar a conteúdo de forma interativa, destoando o ensino expositivo.”
P14	“As UARCs permitem a (re)construção do conhecimento acerca das raízes racionais”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As respostas apresentadas pelos professores evidenciam diversas contribuições com relação ao uso de sequência didática no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Concordamos com as considerações apresentadas pelos professores e buscamos discuti-las ponto a ponto a seguir de forme que possamos ratificar a validação estabelecida pelos participantes da pesquisa.

Como apresentado pelos professores P3 e P14, a sequência didática, ainda mais, quando elaborada no constructo das UARC possibilita que o professor organize o conteúdo a ser ensinado de forma articulada. Assim, é possível trabalhar conceitos de maneira lógica e progressista destacando as relações dos conhecimentos que envolvem o saber matemático estudado. Ainda na resposta do P14, temos que as UARCs permitem a (re)construção de um conhecimento, isto é, pelo fato de que as atividades estão organizadas em, por assim dizer, sequência didática.

Nas respostas dos professores P7 e P11 é destacada a contribuição da sequência didática elaborada para potencialização da aprendizagem e que esta ocorra de forma interativa. Assim, é possível trabalhar de forma diferenciada, atrativa e com recursos diversos como é o caso de nossa sequência em análise que conta com o uso do celular com proposito educacional.

Para além das respostas apresentadas por nossos participantes, consideramos que a sequência didática elaborada promove uma aprendizagem reflexiva no sentido de que o aluno consegue compreender o saber ensinado e reconhecer o conhecimento não compreendido o que permite o professor trabalhar nas dificuldades pontualmente e individualmente a cada aluno.

Por fim, o material proposto gera um produto educacional que visa estabelecer o ensino de forma motivacional e atrativa ao aluno e permite a realização de uma avaliação formativa da aprendizagem, isto é, a sequência didática permite dar enfoque em identificar e responder às necessidades de aprendizagem dos alunos em tempo real durante o seu desenvolvimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática, como disciplina, apresenta desafios singulares na sua didática, dada a natureza abstrata de muitos de seus conceitos e a necessidade de articulação contínua entre teoria e prática. Nesse cenário, o recurso à sequência didática tem demonstrado ser uma ferramenta de grande valor no processo ensino-aprendizagem.

Esta pesquisa teve por objetivo responder à questão norteadora estabelecida que diz respeito aos aspectos que evidenciam as potencialidades do uso de uma sequência didática no modelo estruturante das UARC no ensino de raízes racionais de equações polinomiais.

Para este estudo, nos aprofundamos no conhecimento de diversos referenciais teóricos em relação a conceitos fundamentais que baseiam a estrutura da sequência didática, são eles: a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky; A teoria das situações didáticas de Brousseau; as reflexões da sequência didática no ensino e, por mim, as unidades articuláveis de reconstrução conceitual de Cabral.

Além disso foi necessário a pesquisa do objeto matemático em estudo a partir de diferentes prismas, isto é, realizamos o seu estudo segundo a própria matemática e dentro da história; revisamos segundo os documentos oficiais; a partir de pesquisas desenvolvidas; por meio da análise de manuais didáticos e por fim a partir dos conhecimentos dos alunos, aqueles a quem lhes será apresentado o saber. Todos os estudos realizados colaboraram para o desenvolvimento da sequência didática apresentada em proposta para o ensino das raízes racionais de equações polinomiais.

O material foi elaborado segundo os modelos estruturantes de Cabral (2017) é composta de 5 UARCs e um teste de avaliação aplicativa e seria desenvolvida com uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino em Belém do Pará e para ser analisado segundo os aportes teóricos da Análise Microgenética e da Análise do discurso aliada as respostas obtidas na resolução da sequência didática elaborada.

Todavia, decorrente da conjuntura pandêmica houve o redirecionamento da pesquisa para o processo de validação da sequência didática. Esta validação se deu por meio de um questionário organizado em três etapas a fim de levantar as considerações e contribuições de professores atuantes na Educação Básica. A primeira etapa refere a avaliação individual das unidades conceituais, a segunda de avaliação do constructo em si e a terceira etapa está relacionada a avaliação complementar da sequência didática.

A abordagem adotada na elaboração e implementação da Sequência Didática, guiada pelas Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual, revelou-se essencial para responder à questão de pesquisa proposta. A estrutura flexível proporcionada pelas UARC permitiu uma abordagem mais dinâmica e adaptativa, levando em consideração as diferentes necessidades e características dos estudantes.

Em um panorama geral identificamos nas análises do questionário nas três etapas que a sequência didática teve boa aceitação por parte dos professores investigados, isto é, os índices percentuais foram elevados e de forma favorável à sua validação. Além disso o instrumento de pesquisa utilizado possibilitou levantar reflexões e receber contribuições dos professores para a melhoria do material.

Nesse sentido ressaltamos na primeira etapa contribuições no que concerte a organização da intervenção inicial em relação as intervenções reflexivas e exploratórias em cada uma das UARCs. Não obstante, percebemos preocupação dos professores acerca do tempo para aplicação da sequência didática com os alunos.

Outras indagações levantadas tais como a dificuldade de compreensão das atividades e a linguagem adotada permitiram que evidenciarmos a importância da Intervenção Oral de Manutenção Objetiva, sendo este, um elemento estruturante essencial para o processo de ensino e aprendizagem que está presente durante todo desenvolvimento da sequência didática.

Os resultados obtidos na segunda e terceira etapa apontam de modo positivo o uso da sequência didática segundo os modelos estruturantes e em especifico valida e sequência proposta para uso no ensino das raízes das equações polinomiais. Por meio das respostas apresentadas pelos professores investigados nas questões subjetivas foi possível identificar a afinidade destes com relação a temática o que nos deixa seguros da confiabilidade das considerações apresentadas nas respostas.

Assim, sintetizamos as contribuições apresentadas em afirmativas de que o uso da sequência didática facilitará a compreensão dos conceitos básicos até os avançados relacionados ao estudo de equações polinomiais e suas raízes racionais. Não obstante, contribui para a aprendizagem de modo interativo dentro das correlações estabelecidas no triângulo didático. Vale ressaltar que o uso do celular enquanto tecnologia educacional deve ser incentivada e só a somar na ação educativa dos alunos e na prática metodológica do professor.

Nossa proposta metodológica em questão tem o intuito de possibilitar uma abordagem diferenciada no ensino das raízes racionais de equação polinomiais, de modo a promover a interação, dinamismo; proporcionar um material motivador e desafiador além de despertar o um olhar de interesse com relação ao conhecimento. Por fim, ressaltamos a flexibilidade que o material possui. Deste modo é possível que o professor possa adapta-lo as condições particulares do seu ambiente e público.

A Sequência Didática proposta mostrou contribuições significativas para os três vértices do triângulo didático. Para os alunos, proporcionou um ambiente de aprendizagem mais participativo e significativo, promovendo uma compreensão mais profunda do teorema das raízes racionais de equações polinomiais. Para os professores, ofereceu uma abordagem estruturada e flexível que facilitou a adaptação ao contexto da sala de aula. No que diz respeito ao saber, a abordagem contribuiu para uma compreensão mais robusta e aplicada do teorema, conectando teoremas e colorarias na resolução de questões e problemas matemáticos.

No âmbito da formação específica, a Sequência Didática contribuiu para uma compreensão mais profunda das relações matemáticas subjacentes ao teorema das raízes racionais. Além disso, fortaleceu a conexão entre os conhecimentos teóricos e as estratégias de ensino, enriquecendo a formação pedagógica.

Em conclusão, enquanto a matemática continua a ser um desafio para muitos alunos, a sequência didática emerge como uma luz orientadora no panorama educacional. Quando bem implementada, essa abordagem tem o poder de transformar a maneira como os alunos veem, interagem e apreciam a matemática.

Diante disso, temos como materialização desta pesquisa um produto educacional que apresenta em exclusividade uma sequência didática elaborada à luz das Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) direcionada ao ensino das raízes racionais de equações polinomiais.

Este produto será voltado para que os professores da Educação Básica possam ter acesso e utilizem em sua prática docente realizando as adaptações, caso necessário. Conta também com discussões didáticas acerta das equações polinomiais e apresenta orientações em relação as intervenções estruturantes que foram base para construção da proposta metodológica.

REFERÊNCIAS

ABREU, R. D. **Polinômios, funções polinomiais, fatoração e algumas aplicações**. 2016. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – 2016.

BECKER, J. M. **Polinômios, equações algébricas e suas resoluções**. 2014. 63 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de ciências exatas – Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas – MS, 2014.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).** Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______, MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 144 p. 2002.

______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, v. 2, 2006.

______, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretários de Educação. União Nacional dos Dirigentes Municipais da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**: Educação é a Base. Brasília – DF, 2017. Disponível em: <568 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2019.

BORGES, A. J. **Polinômios no Ensino Médio:** uma investigação em livros didáticos. 2007. 109 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo – SP, 2007.

BROUSSEAU, G. Exposé au coloque. L'analyse de la didactiques des mathématiques. Compte rendu publié par **1'IREM** de Bordeaux, 13-15 mar. 1975.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**. 1 ed. Ática. São Paulo. 2008.

CABRAL, N. F. **Sequência Didática**: Estrutura e elaboração. 1 ed. Belém-PA. SBEM/ SBEM – Pará, 2017.

CARRASCHI, J. E. **Equações polinomiais**. 2014. 97 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do ensino da Matemática**. 2º ed., São Paulo: Cortez, 1994.

CIRIACO, O. A. **Equações polinomiais:** um estudo aplicado ao ensino médio. 2016. 55 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourado – MS, 2016.

CONCEIÇÃO, C. V. **A teoria da aprendizagem social.** 2016. Disponível em: http://knoow.net/ciencsociaishuman/psicologia/teoria-da-aprendizagem-social/. Aceso em: 25. nov. 2021.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações – ensino médio. 3 ed. São Paulo: Ática. 2016.

DIERINGS, A. R. **Ensino de polinômios no ensino médio – uma nova abordagem.** 2014. 70 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Naturais e Exatas – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2014.

DUVAL, R. **Semioses e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosani Abreu da Siqueira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FINO, C. N. Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. In: **Revista Portuguesa de Educação**, vol. 14, nº 2, pp. 273-291. 2001.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GAMA, P. F. da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno**, 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, 2020.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar 6:** complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática:** ciência e aplicações – volume 3 (ensino médio). 9 ed. São Paulo: Saraiva. 2016.

LOBO, F. C. G. D. **Números complexos, polinômios e equações algébricas**. 2017. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP, 2017.

LOPES, B. F. S. **Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio**. 2018. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e da Terra – Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá – MS, 2018.

MANTOVANI, S. R. **Sequência didática como instrumento para aprendizagem significativa do efeito fotoelétrico**. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física). UNESP. Presidente Prudente – SP, 2015.

MATTOS, T. G. O. F. de. **O estudo das funções polinomiais no ensino médio**. 2017. 112 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciência e Tecnologia – Laboratório de Ciências Matemáticas – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes – RJ, 2017.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências**: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em ensino de Ciências. Porto Alegre (RS), v. 7, n. 3, p. 283-306, 2002.

MOURA, E. A. et al. Os planos genéticos do desenvolvimento humano: A contribuição de Vigotski. **Revista Ciências Humanas**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 106 114, 2016.

NASCIMENTO, C. K. A. do. **Polinômios, equações algébricas e estudo das suas raízes reais**. 2015. 77 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza – CE, 2015.

PEREIRA, M. F. F. **Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. 168 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém – PA, 2017.

SANTOS, D. S. dos. **Métodos para determinação de raízes de equações polinomiais:** uma abordagem voltada para o ensino médio. 2016. 61 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife – PE, 2016.

SANTOS, A. T. dos. **Métodos resolutivos de equações algébricas e análise das raízes de funções polinomiais**. 2017, 120 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2017.

SILVA, E. V. da. **Resolubilidade de polinômios:** da teoria ao ensino-aprendizagem. 2018. 105 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2018.

SILVA, E. M. da.; CHAQUIAM, M.; CABRAL, N. F. Um percurso metodológico para constituição de sequências didáticas: o ensino do conceito de função. **EMD – Ensino da Matemática em Debate**. São Paulo, v. 9, n. 1, p. 17-40, 2022.

SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. da S. R. **Contato matemática – 3º ano**. 1 ed. São Paulo: FTD. 2016.

SOUZA, L. B. B.; SILVA, A. K. M. da. **Uma discussão curricular acerca do ensino de raízes racionais de equações polinomiais**. 2019. In: XII Encontro Paraense de Educação Matemática – Educação Matemática: Teorias, práticas e reflexões. **Anais...** Belém – PA, 2019.

SOUZA, A. P. de; ROSSO, A. J. Mediação e Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) entre pensamentos e práticas docentes. In: I Seminário Internacional de

Representações Sociais, Subjetividade e Educação – SIRSSE. **Anais...** 07 a 10 nov. 2011. Curitiba (PR). 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VYGOTSKY, L.S. **The genesis of higher mental funtions**. In: WERTSCH, James V. (org.). The concepto of activity in sovietic psychology. Nova York: M.E. Sharpe, 1981, pp.144-188.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE A: TESTE DE VERIFICAÇÃO DOS ALUNOS EGRESSOS

1) Equação polinomial ou (algébrica) de grau $n \geq 1$ é toda equação da forma:

$$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$$

Onde a variável x e os coeficientes $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \dots,\ a_1,\ a_0$ pertencem ao conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. (SMOLE e DINIZ, 2013, p. 251). A partir disso, podemos afirmar o polinômio $2x^3 + 4x^4 - 7x + x^2 + 3x^5 - 1 = 0$ possui os coeficientes a_0 e a_n respectivamente iguais a:

(A) 4 e -7

(B) 2 e -1

(C) -1 e 2

(D) -1 e 3

(E) 3 e -1

2) Considere $\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$. O grau de um polinômio é o maior expoente da variável x entre os termos com coeficientes diferentes de zero (MODERNA, 2013, p. 186). Dado os polinômios:

$A(x) = 2x^3 + 4x^4 - 7x + x^2 + 3x^5 - 1$

$B(x) = 0x^3 + x - 2$

$C(x) = -10$

A alternativa que apresenta respectivamente os graus de $A(x), B(x)$ e $C(x)$ é:

(A) 2-3-1

(B) 5-3-0

(C) 5-1-0

(D) 5-1-1

(E) 2-3-0

3) [...] Um número complexo r é raiz de um polinômio $P(x)$ quando $\boldsymbol{P(r) = 0}$. Quais dos seguintes números: $0, -1, 1, \frac{1}{2}, 2, -i, i, 2i$ são soluções da equação polinomial $2x^3 - (1 + 2i)x^2 + (4 + i)x - 2 = 0$.

(A) $2i, -i, \frac{1}{2}$

(B) $0, -1, 1$

(C) $0, -i, i$

(D) $2i, i, 2$

(E) $2i, \frac{1}{2}, 2$

4) O conjunto solução das equações polinomiais abaixo são, respectivamente:

(I): $3x - 5 = 0$

(II): $3x^2 - 2x + 7 = 0$

(A) $S_1 = \left(\frac{5}{3}\right)\ e\ S_2 = \left(\frac{1+2\sqrt{5}}{3} i, \frac{1-2\sqrt{5}}{3} i\right)$

(B) $S_1 = \left(\frac{3}{5}\right)\ e\ S_2 = \left(\frac{1+2\sqrt{5}}{2}, \frac{1-2\sqrt{5}}{2}\right)$

(C) $S_1 = \left(\frac{5}{3}\right)\ e\ S_2 = \left(\frac{-1+2\sqrt{5}}{3} i, \frac{-1-2\sqrt{5}}{3} i\right)$

(D) $S_1 = (2)\ e\ S_2 = \left(\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right)$

(E) $S_1 = (8)\ e\ S_2 = \left(2 + 4\sqrt{5}i, 2 - 4\sqrt{5}i\right)$

5) Dado $P(x) = 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$, marque a alternativa correspondente ao quociente $Q(x)$ da divisão de $P(x)$ por $D(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Utilize o método chave.

(A) $Q(x) = x^2 + x - 1$

(B) $Q(x) = 3x^2 + x - 1$

(C) $Q(x) = -x^2 + x - 1$

(D) $Q(x) = -3x^2 + x - 1$

(E) $Q(x) = 3x^2 - x + 1$

6) Teorema de D'Alembert: Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$, isto é $P(a) = 0$. Sabendo que 4 é raíz do polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, utilizando o dispositivo Briot-Ruffini podemos afirmar que as raízes de $P(x)$ são:
(A) $2, -2,4$
(B) $-4,0,4$
(C) $-1,1,4$
(D) $1,2,4$
(E) $-2,1,4$

7) Teorema da decomposição: todo polinômio $P(x) = \boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots + \boldsymbol{a_1 x + a_0}$ de grau $n \geq 1$, em C pode ser fatorado na forma: $P(x) = a_n(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).\cdots.(x - \alpha_{n-1}).(x - \alpha_n)$. Sendo α_n, o coeficiente dominante e α_1, α_2, ... , α_{n-1}, α_n as raízes desse polinômio. Desta forma, marque a alternativa que apresenta o polinômio $P(x) = -2 + 2x^4$ na forma fatorada, sabendo que suas raízes são $1, -1, i$ e $-i$.
(A) $P(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(B) $P(x) = 2(x + 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(C) $P(x) = 2(x - 1)(x - 1)(x + i)(x + i)$
(D) $P(x) = -2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$
(E) $P(x) = -2(x + 1)(x + 1)(x - i)(x - i)$

8) A multiplicidade de uma raiz corresponde a quantidade de vezes em que um número aparece como raiz de um polinômio. Dato um polinômio $P(x) = 2x^5 + 15x^4 + 40x^3 + 40x^2 - 16$ a multiplicidade da raiz -2 é:
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

9) As raízes da equação polinomial $3x^3 + 10x^2 + 7x - 10 = 0$, sabendo que $-2 - i$ é uma delas, são:
(a) $-2, -2 - i, i$
(b) $-2, i, 2$
(c) $-2 - i, -2 + i, \frac{1}{2}$
(d) $-2 - i, -2 + i, \frac{2}{3}$
(e) $-2 - i, 2 + i, \frac{1}{2}$

10) A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma única raiz racional não-inteira igual a:
(a) $\frac{1}{3}$
(b) $-\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $-\frac{2}{3}$
(e) $\frac{1}{2}$

APÊNDICE B: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

UARC 1

Objetivo: reconhecer em uma equação polinomial o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0), tendo capacidade de organização dos termos da expressão em ordem decrescente para fácil identificação.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel e o protocolo da sequência didática impressa.

Procedimento:
$[\boldsymbol{I_i - CP}]$. Toda equação polinomial pode ser escrita na forma de coeficientes inteiros na ordem decrescente de seus expoentes $\mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = 0$, em que $\mathrm{a_n} \neq 0$. Assim, escreva ao lado das equações polinomiais a seguir sua estrutura no modelo descrito.

I) $-7\mathrm{x} + \mathrm{x}^3 + 6 = 0$
II) $-13\mathrm{t}^2 + 36 + \mathrm{t}^4 = 0$
III) $2\mathrm{u}^5 + 19\mathrm{u} + 12\mathrm{u}^3 = 14\mathrm{u}^2 + 9\mathrm{u}^4 + 1$
IV) $-5\mathrm{v}^2 = -\mathrm{v}^4 - 4$
V) $23\mathrm{w} + 10 = -3\mathrm{w}^3 + 20\mathrm{w}^2$

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$**.** Observe as equações que você organizou, todas possuem um termo de maior e menor expoente?

$[\boldsymbol{I_e - 01}]$**.** Identifique em cada equação polinomial reescritas acima o valor dos coeficientes do termo de maior expoente ($\mathrm{a_n}$) e de menor expoente ($\mathrm{a_0}$).

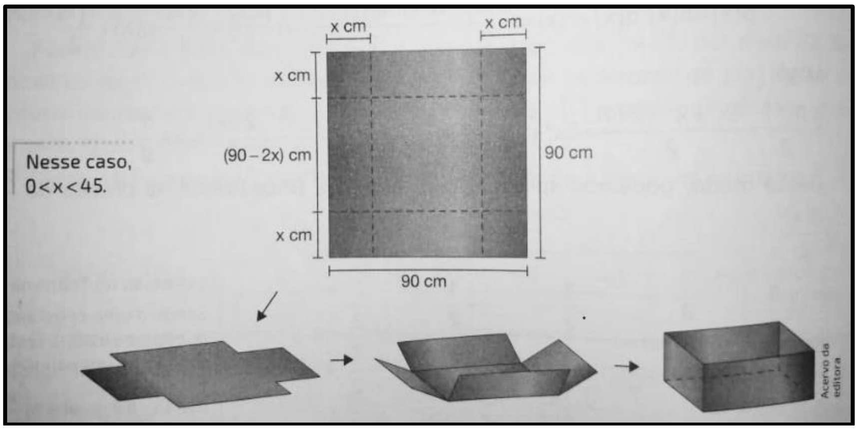
Equação	I	II	III	IV	V
a_n					
a_0					

$[\boldsymbol{I_f}]$**.** Em todo polinômio na forma $\mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} = 0$ chamamos o coeficiente da incógnita de maior grau de **coeficiente líder** representado por $\boldsymbol{a_n}$ e o coeficiente da incógnita de menor grau de **termo independente** identificado em $\boldsymbol{a_0}$.

$[\boldsymbol{IA_r}]$. Complete a tabela a seguir identificando o coeficiente líder e o termo independente em cada equação.
I. $2x^2 + 3x = -10 - x^3$
II. $-4y^4 + 2y - 5 = 2y^7 - 4y^3 + y^2$
III. $z^4 - 3z^3 - 7z^2 + 31z - 10 = 0$
IV. $6t^3 + 4t = -3t^5$
V. $u^5 + 3u^3 + u + 3 = 0$

Equação Polinomial	I	II	III	IV	V
Coeficiente Líder					
Termo independente					

$[\boldsymbol{IA_a}]$. (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 184. Adaptado). Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de $90cm$ de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado $x\ cm$. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.184).

A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a $50.000\ cm^3$, desconsiderando a espessura do material.
a) De acordo com as exigências, qual a expressão para a determinação da medida x do lado de cada quadrado?

b) Identifique o coeficiente líder e o termo independente da equação polinomial encontrada.

UARC 2

Objetivo: compreender as propriedades e o processo relacionado a determinação de uma raiz racional de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e além destes, uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:
$[\boldsymbol{I_i - EP}]$. Utilize o *software* Mathway nas equações abaixo e transcreva as raízes presentes em cada uma.

Equação Polinomial	Raízes				
$x^3 - 7x + 6 = 0$	-3	1	2		
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$					
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$					
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$					
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$					

$[\boldsymbol{I_e - 01}]$**.** Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_o em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	**Divisores de $\boldsymbol{a_o}$**					
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1	-1	2	-2	3	-3
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\boldsymbol{I_e - 02}]$**.** Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_n em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	**Divisores de $\boldsymbol{a_n}$**					
$x^3 - 7x + 6 = 0$						
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\boldsymbol{I_e - 03}]$**.** A partir dos quadros anteriores, escreva os números racionais que podemos obter fazendo $\frac{D(a_o)}{D(a_n)}$ em cada equação polinomial de coeficientes inteiros, sendo $D(a_0)$ os divisores de a_0 e $D(a_n)$ os divisores de a_n. Em seguida, substitua os valores nas equações polinomiais e marque “x” àqueles que satisfizerem a igualdade.

Equação Polinomial	**Números racionais $\boldsymbol{\frac{D(a_0)}{D(a_n)}}$**							
$x^3 - 7x + 6 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^3 - 20x^2 + 23x - 2 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$**.** Todas as equações polinomiais tiveram números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade?

$[\boldsymbol{I_r - 02}]$**.** Os números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade estão presentes nas raízes identificadas com o *software* Mathway?

$[\boldsymbol{I_r - 03}]$**.** Você percebeu alguma forma de determinar uma raiz racional de equação polinomial por meio do seu coeficiente líder e termo independente? Se sim, descreva com suas palavras.

$[\boldsymbol{I_f}]$. Toda equação polinomial de coeficientes inteiros definida por $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ que possuir números racionais em suas raízes, terão elas a forma $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$, sendo $D(a_0)$ divisor de a_0 e $D(a_n)$ divisor de a_n.

[$IA_r - 01$]. A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma raiz racional não inteira, determine-a.

[$IA_a - 01$] Desde a antiguidade a humanidade discute a resolução de equações polinomiais nos mais variados contextos. Dentre elas, as equações de terceiro grau geraram bastante polêmica no que diz respeito a métodos de resolução. Nicolo Brescia, mais conhecido como Tartaglia teve destaque por desenvolver solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Hoje, temos diversos recursos para utilização. A partir do uso do teorema das raízes racionais determine a(s) raiz(es) racionais da equação polinomial $x^3 - x^2 = 4$.

UARC 3

Objetivo: Compreender as condições para identificação do 0 (zero) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa.

Procedimento:

$[\boldsymbol{I_i - CP}]$. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI) e responda: Qual a principal diferença no tange aos termos dos polinômios desses grupos?

I. $x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$
II. $2x^5 + 6x^3 + 3x + 12 = 0$
III. $4x^4 - 8x^2 - 10 = 0$
IV. $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$
V. $x^5 - 10x^3 = 0$
VI. $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

[$I_e - 01$]. Complete a tabela calculando o $P(0)$ de cada equação a seguir.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômio	$P(0)$	Polinômio	$P(0)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$		$P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x + 12$		$P(x) = x^5 - 10x^3$	
$P(x) = 4x^4 - 8x^2 - 10$		$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x$	

[$I_r - 01$]. Em qual grupo o 0 (zero) apresenta valor numérico nulo?

[$I_r - 02$]. Qual a relação entre a presença do termo independente e a raiz nula de um polinômio, considerando a análise anterior?

[I_f]. Uma equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ admite 0 (zero) como raiz quando o termo independente for nulo, isto é $a_0 = 0$.

[IA_r]. Segundo o teorema fundamental da álgebra todo o polinômio real pode ser escrito como produto de fatores lineares reais. Deste modo qual das alternativas configura uma equação que possuí o 0 (zero) como raiz racional?
(A) $A(x) = (x-1)(x-2)$
(B) $B(t) = (t+3)(t+3)(t-1)$
(C) $C(m) = (m-\sqrt{5})(m+\sqrt{5})(m-1)(m+1)$
(D) $D(s) = (s-2)\ (s+2)\ s$
(E) $E(y) = (y-3)(y-2)$

UARC 4

Objetivo: Compreender as condições para identificação do 1 (um) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:

[$I_i - CP$]. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete a tabela com a soma dos coeficientes de cada equação polinomial.

I. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

II. $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$

III. $2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$

IV. $x^3 - 7x + 6 = 0$

V. $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$

VI. $x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$

Grupo A		**Grupo B**	
Equação polinomial	Soma	Equação polinomial	Soma
$2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^3 - 7x + 6 = 0$	
$x^4 + 8x^2 - 20 = 0$		$3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$	
$2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$		$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$	

[$I_r - 01$]. Em relação a soma dos coeficientes da equação polinomial, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

[$I_e - 01$]. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(1)$	Polinômios	$P(1)$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$		$P(x) = x^3 - 7x + 6$	
$P(x) = x^4 + 8x^2 - 20$		$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 - 3x + 12$		$P(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2$	

[$I_r - 02$]. Em qual grupo o 1 foi raiz das equações polinomiais apresentadas? (em qual grupo o 1 teve valor numérico nulo).

[$I_r - 03$]. Qual a relação entre a soma dos coeficientes das equações polinomiais descritas e a raiz 1 de um polinômio, considerando a análise anterior?

[I_f]. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 1 (um) como raiz quando a soma dos coeficientes de uma equação polinomial for igual a 0 (zero), isto é, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

[IA_r]. Qual das equações polinomiais apresentadas a seguir admite 1 como raiz?
(A) $2x^2 - x + 5 = 0$
(B) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$
(C) $x - 2 = 0$
(D) $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$
(E) $2x^5 + x^3 - 4x = 0$

UARC 5

Objetivo: Compreender as condições para identificação do -1 (menos um) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:

[$I_i - CP$]. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete os quadros a seguir realizando as seguintes somas.

Soma 1 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente par;
Soma 2 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar;
Resultados – possibilidades: Iguais = ou diferentes ≠

Grupo A			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$			
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$			
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$			
Grupo B			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$			
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$			
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$			

[$I_r - 01$]. Em relação as somas dos coeficientes de expoentes pares e ímpares, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

[$I_e - 01$]. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(-1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(-1)$	Polinômios	$P(-1)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$		$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$	
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 - 16$		$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$	
$P(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x + 6$		$P(x) = x^5 + 2x^3 + 3$	

[$I_r - 02$]. O que você conseguiu identificar em relação ao valor numérico obtido nas equações do grupo A e nas equações do grupo B?

[$I_e - 02$]. Utilize o aplicativo Mathway e identifique as raízes de cada equação polinomial oriundas dos grupos polinomiais A e B anteriores.

Grupo A					
Equações Polinomiais	Raízes				
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$					
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$					
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$					

Grupo B					
Equações Polinomiais	Raízes				
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$					
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$					
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$					

[$I_r - 03$]. Qual grupo apresentou -1 como uma de suas raízes? Qual relação você consegue estabelecer com a questão inicial?

[$I_r - 04$]. Quais suas conclusões em relação as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros?

[I_f]. Quando a soma dos coeficientes dos termos de expoente par for igual a soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar, então -1 (menos um) será uma das raízes dessa equação polinomial.

[IA_a]. Construa duas equações polinomiais que possua -1 (menos um) como uma de suas raízes e entregue para um colega identificar utilizando o método da soma dos coeficientes de termos de expoente par e ímpar. Utilize o aplicativo Mathway se necessário para confirmação.

APÊNDICE C: AVALIAÇÃO APLICATIVA

1) Ana e Pedro decidiram verificar seus conhecimentos em relação ao estudo de raízes racionais de equações polinomiais. Dada a equação $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$, ajude-os a responder as questões.

a) Quais as possíveis raízes racionais da equação estudada? Utilize o teorema das raízes racionais trabalhado em sala.

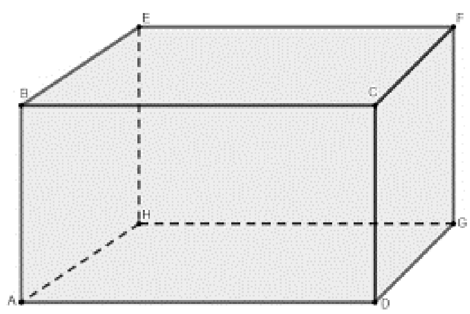
b) Utilize o cálculo do valor numérico das possíveis raízes racionais na equação polinomial. Quais seriam as suas raízes racionais?

c) Essas seriam todas as raízes da equação? Justifique.

2) Considere a equação polinomial $x^3 + 25x = 0$ e verifique a existência de raízes racionais e em seguida identifique-a (s), se houver.

3) A equação $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ apresenta uma raiz racional, determine seu valor.

4) O volume (V) de um molde paralelepípedo está representado na expressão $V = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$. Identifique no desenho a seguir as suas dimensões.



5) Dentre o grupo de equações polinomiais descritos, podemos afirmar que possuem 0 como raiz as equações:

I. $x^4 + 2x^2 - 10 = 0$
II. $x^3 - 2x^2 - x = 0$
III. $4x^2 - 2x = 0$

(A) I apenas.
(B) II apenas.
(C) I e III apenas.
(D) I e II apenas.
(E) II e III apenas.

6) O valor de a para que a equação polinomial $x^5 - 3x^4 + ax^3 - 2ax^2 + 3x = 0$ admita 1 como raiz é:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

7) Dentre as equações do grupo abaixo, admitem -1 como raiz as equações:

I. $-3x + 3 = 0$
II. $x^2 - 3x + 2 = 0$
III. $x^3 + 4x^2 - x - 3 = 0$
IV. $-2x^4 - x^2 + 8 = 0$
V. $-x^5 + 3x^3 + 2x + 4 = 0$

(A) I e II apenas.
(B) I e III apenas.
(C) I, II e IV apenas.
(D) I, II e V apenas.
(E) II, III e V apenas.

8) Ana e Pedro estão analisando a equação polinomial $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$. Ana afirma que -1 é uma das raízes racionais da equação. Pedro afirma que na verdade é 1 quem constitui uma das raízes da equação polinomial. Quem está correto? Porquê?

APÊNDICE D: VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Questionário para avaliação da sequência didática por professores

UARC 1

Objetivo: reconhecer em uma equação polinomial o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0), tendo capacidade de organização dos termos da expressão em ordem decrescente para fácil identificação.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel e o protocolo da sequência didática impressa.

Procedimento:
$[\boldsymbol{I_i - CP}]$. Toda equação polinomial pode ser escrita na forma de coeficientes inteiros na ordem decrescente de seus expoentes $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, em que $a_n \neq 0$. Assim, escreva ao lado das equações polinomiais a seguir sua estrutura no modelo descrito.

I) $-7x + x^3 + 6 = 0$
II) $-13t^2 + 36 + t^4 = 0$
III) $2u^5 + 19u + 12u^3 = 14u^2 + 9u^4 + 1$
IV) $-5v^2 = -v^4 - 4$
V) $23w + 10 = -3w^3 + 20w^2$

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$. Observe as equações que você organizou, todas possuem um termo de maior e menor expoente?

$[\boldsymbol{I_e - 01}]$. Identifique em cada equação polinomial reescritas acima o valor dos coeficientes do termo de maior expoente (a_n) e de menor expoente (a_0).

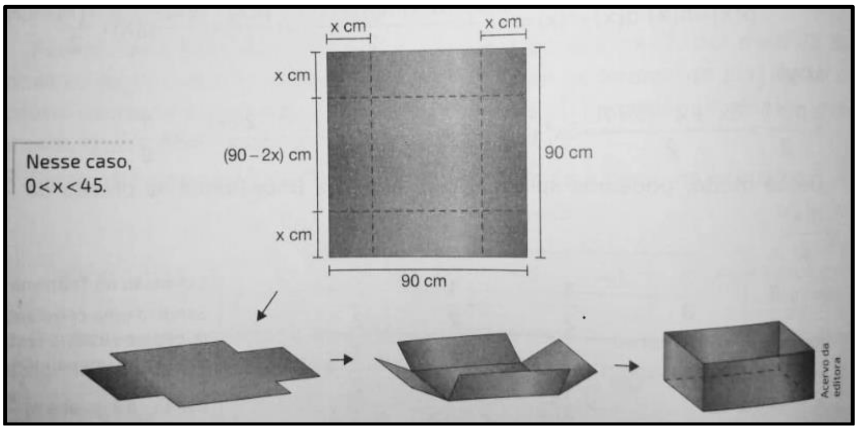
Equação	I	II	III	IV	V
a_n					
a_0					

$[\boldsymbol{I_f}]$. Em todo polinômio na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ chamamos o coeficiente da incógnita de maior grau de **coeficiente líder** representado por $\boldsymbol{a_n}$ e o coeficiente da incógnita de menor grau de **termo independente** identificado em $\boldsymbol{a_0}$.

$[\boldsymbol{IA_r}]$. Complete a tabela a seguir identificando o coeficiente líder e o termo independente em cada equação.
I. $2x^2 + 3x = -10 - x^3$
II. $-4y^4 + 2y - 5 = 2y^7 - 4y^3 + y^2$
III. $z^4 - 3z^3 - 7z^2 + 31z - 10 = 0$
IV. $6t^3 + 4t = -3t^5$
V. $u^5 + 3u^3 + u + 3 = 0$

Equação Polinomial	I	II	III	IV	V
Coeficiente Líder					
Termo independente					

$[\boldsymbol{IA_a}]$. (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 184. Adaptado). Certa indústria deseja fabricar caixas sem tampa, em formato de paralelepípedo, a partir de chapas metálicas quadradas de $90cm$ de lado. Para que seja possível a confecção das caixas, será retirado de cada "canto" da chapa um quadrado de lado $x\ cm$. Depois, os lados serão dobrados e soldados, formando a caixa.



Fonte: Souza e Garcia (2016, p.184).

A intenção do fabricante é que essas caixas, quando prontas, tenham capacidade igual a $50.000\ cm^3$, desconsiderando a espessura do material.

a) De acordo com as exigências, qual a expressão para a determinação da medida x do lado de cada quadrado?

b) Identifique o coeficiente líder e o termo independente da equação polinomial encontrada.

AVALIAÇÃO DA UARC 1

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

2. A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

UARC 2

Objetivo: compreender as propriedades e o processo relacionado a determinação de uma raiz racional de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e além destes, uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:
$[\boldsymbol{I_i - EP}]$**.** Utilize o *software* Mathway nas equações abaixo e transcreva as raízes presentes em cada uma.

Equação Polinomial	Raízes				
$x^3 - 7x + 6 = 0$	-3	1	2		
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$					
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$					
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$					
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$					

$[\boldsymbol{I_e - 01}]$**.** Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_o em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_o					
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1	-1	2	-2	3	-3
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\boldsymbol{I_e - 02}]$**.** Complete a tabela abaixo preenchendo os valores com os divisores de a_n em cada equação polinomial de coeficientes inteiros.

Equação Polinomial	Divisores de a_n					
$x^3 - 7x + 6 = 0$						
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$						
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$						
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$						
$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$						

$[\boldsymbol{I_e - 03}]$**.** A partir dos quadros anteriores, escreva os números racionais que podemos obter fazendo $\frac{D(a_o)}{D(a_n)}$ em cada equação polinomial de coeficientes inteiros, sendo $D(a_0)$ os divisores de a_0 e $D(a_n)$ os divisores de a_n. Em seguida, substitua os valores nas equações polinomiais e marque “x” àqueles que satisfizerem a igualdade.

Equação Polinomial	Números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$							
$x^3 - 7x + 6 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 8 = 0$								
Satisfez a igualdade?								
$3x^3 - 20x^2 + 23x - 2 = 0$								
Satisfez a igualdade?								

$[\boldsymbol{I_r - 01}]$. Todas as equações polinomiais tiveram números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade?

$[\boldsymbol{I_r - 02}]$. Os números racionais $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$ que satisfizeram a igualdade estão presentes nas raízes identificadas com o *software* Mathway?

$[\boldsymbol{I_r - 03}]$. Você percebeu alguma forma de determinar uma raiz racional de equação polinomial por meio do seu coeficiente líder e termo independente? Se sim, descreva com suas palavras.

$[\boldsymbol{I_f}]$. Toda equação polinomial de coeficientes inteiros definida por $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ que possuir números racionais em suas raízes, terão elas a forma $\frac{D(a_0)}{D(a_n)}$, sendo $D(a_0)$ divisor de a_0 e $D(a_n)$ divisor de a_n.

[$IA_r - 01$]. A equação polinomial $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ possuí uma raiz racional não inteira, determine-a.

[$IA_a - 01$] Desde a antiguidade a humanidade discute a resolução de equações polinomiais nos mais variados contextos. Dentre elas, as equações de terceiro grau geraram bastante polêmica no que diz respeito a métodos de resolução. Nicolo Brescia, mais conhecido como Tartaglia teve destaque por desenvolver solução algébrica para equações cúbicas do tipo $x^3 - px^2 = n$. Hoje, temos diversos recursos para utilização. A partir do uso do teorema das raízes racionais determine a(s) raiz(es) racionais da equação polinomial $x^3 - x^2 = 4$.

AVALIAÇÃO DA UARC 2

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. **A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

UARC 3

Objetivo: Compreender as condições para identificação do 0 (zero) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa.

Procedimento:

$[\boldsymbol{I_i - CP}]$**.** Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI) e responda: Qual a principal diferença no tange aos termos dos polinômios desses grupos?

I. $x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = 0$

II. $2x^5 + 6x^3 + 3x + 12 = 0$

III. $4x^4 - 8x^2 - 10 = 0$

IV. $3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

V. $x^5 - 10x^3 = 0$

VI. $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

[$\boldsymbol{I_e - 01}$]. Complete a tabela calculando o $P(0)$ de cada equação a seguir.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômio	$P(0)$	Polinômio	$P(0)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 4$		$P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 + 3x + 12$		$P(x) = x^5 - 10x^3$	
$P(x) = 4x^4 - 8x^2 - 10$		$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x$	

[$\boldsymbol{I_r - 01}$]. Em qual grupo o 0 (zero) apresenta valor numérico nulo?

[$\boldsymbol{I_r - 02}$]. Qual a relação entre a presença do termo independente e a raiz nula de um polinômio, considerando a análise anterior?

> **[$\boldsymbol{I_f}$].** Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 0 (zero) como raiz quando o termo independente for nulo, isto é $a_0 = 0$.

[$\boldsymbol{IA_r}$]. Segundo o teorema fundamental da álgebra todo o polinômio real pode ser escrito como produto de fatores lineares reais. Deste modo qual das alternativas configura uma equação que possuí o 0 (zero) como raiz racional?

(A) $A(x) = (x - 1)(x - 2)$

(B) $B(t) = (t + 3)(t + 3)(t - 1)$

(C) $C(m) = \left(m - \sqrt{5}\right)\left(m + \sqrt{5}\right)(m - 1)(m + 1)$

(D) $D(s) = (s - 2)\ (s + 2)\ s$

(E) $E(y) = (y - 3)(y - 2)$

AVALIAÇÃO DA UARC 3

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

2. **A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

UARC 4

Objetivo: Compreender as condições para identificação do 1 (um) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:
[$I_i - CP$]. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete a tabela com a soma dos coeficientes de cada equação polinomial.

I. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

II. $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$

III. $2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$

IV. $x^3 - 7x + 6 = 0$

V. $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$

VI. $x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$

Grupo A		**Grupo B**	
Equação polinomial	Soma	Equação polinomial	Soma
$2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^3 - 7x + 6 = 0$	
$x^4 + 8x^2 - 20 = 0$		$3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x = 0$	
$2x^5 + 6x^3 - 3x + 12 = 0$		$x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2 = 0$	

[$I_r - 01$]. Em relação a soma dos coeficientes da equação polinomial, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

[$I_e - 01$]. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(1)$	Polinômios	$P(1)$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$		$P(x) = x^3 - 7x + 6$	
$P(x) = x^4 + 8x^2 - 20$		$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x$	
$P(x) = 2x^5 + 6x^3 - 3x + 12$		$P(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x - 2$	

[$I_r - 02$]. Em qual grupo o 1 foi raiz das equações polinomiais apresentadas? (em qual grupo o 1 teve valor numérico nulo).

[$I_r - 03$]. Qual a relação entre a soma dos coeficientes das equações polinomiais descritas e a raiz 1 de um polinômio, considerando a análise anterior?

[I_f]. Uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ admite 1 (um) como raiz quando a soma dos coeficientes de uma equação polinomial for igual a 0 (zero), isto é, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

[IA_r]. Qual das equações polinomiais apresentadas a seguir admite 1 como raiz?
(A) $2x^2 - x + 5 = 0$
(B) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$
(C) $x - 2 = 0$
(D) $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$
(E) $2x^5 + x^3 - 4x = 0$

AVALIAÇÃO DA UARC 4

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. **A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

UARC 5

Objetivo: Compreender as condições para identificação do -1 (menos um) ser raiz de uma equação polinomial.

Material: Caneta, lápis, borracha, papel, o protocolo da sequência didática impressa e uso do celular com o aplicativo Mathway.

Procedimento:

[$I_i - CP$]. Observe as equações polinomiais abaixo e considere dois grupos, sendo eles: grupo A (equações I, II e III) e grupo B (equações IV, V e VI). Em seguida, complete os quadros a seguir realizando as seguintes somas.

Soma 1 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente par;
Soma 2 - Soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar;
Resultados – possibilidades: Iguais = ou diferentes ≠

Grupo A			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$			
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$			
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$			
Grupo B			
Equação polinomial	Soma 1	Soma 2	Resultados
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$			
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$			
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$			

[$I_r - 01$]. Em relação as somas dos coeficientes de expoentes pares e ímpares, há alguma característica exclusiva de algum grupo? Qual?

[$I_e - 01$]. Agora complete o quadro a seguir determinando o $P(-1)$ de cada polinômio das equações polinomiais anteriores.

Grupo A		**Grupo B**	
Polinômios	$P(-1)$	Polinômios	$P(-1)$
$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$		$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$	
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 - 16$		$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$	
$P(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x + 6$		$P(x) = x^5 + 2x^3 + 3$	

[$I_r - 02$]. O que você conseguiu identificar em relação ao valor numérico obtido nas equações do grupo A e nas equações do grupo B?

[$I_e - 02$]. Utilize o aplicativo Mathway e identifique as raízes de cada equação polinomial oriundas dos grupos polinomiais A e B anteriores.

Grupo A					
Equações Polinomiais	Raízes				
$x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$					
$4x^4 + 8x^2 - 16 = 0$					
$3x^5 + 6x^3 - 3x + 6 = 0$					

Grupo B					
Equações Polinomiais	Raízes				
$-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$					
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$					
$x^5 + 2x^3 + 3 = 0$					

[$I_r - 03$]. Qual grupo apresentou -1 como uma de suas raízes? Qual relação você consegue estabelecer com a questão inicial?

[$I_r - 04$]. Quais suas conclusões em relação as condições para que o -1 (menos um) seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros?

[I_f]. Quando a soma dos coeficientes dos termos de expoente par for igual a soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar, então -1 (menos um) será uma das raízes dessa equação polinomial.

[IA_a]. Construa duas equações polinomiais que possua -1 (menos um) como uma de suas raízes e entregue para um colega identificar utilizando o método da soma dos coeficientes de termos de expoente par e ímpar. Utilize o aplicativo Mathway se necessário para confirmação.

AVALIAÇÃO DA UARC 5

1. A estrutura das Intervenções [Inicial (Ii) - Reflexiva (Ir) - Exploratória (Ie)] conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. **A intervenção formalização (If) está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?**
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. A Avaliação Restritiva (IAr) está compatível com o desenvolvido nas Intervenções (Ii–Ir–Ie) e com a Formalização (If) do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

4. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS

1. As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

1. A Avaliação Aplicativa (Aa) está compatível com a Sequência Didática proposta?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

2. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?
a) De nenhuma forma (0%)
b) Pontualmente (25%)
c) Em parte (50%)
d) Na maioria das vezes (75%)
e) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?
____

3. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:
a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?
____
____

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?
____
____

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?
____
____

4. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?
____
____

ANEXOS

ANEXO A – TCLE PARA OS PAIS DOS ALUNOS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **ensino de equações polinomiais** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, Natanael Freitas Cabral, orientadores e orientando Lucas Benjamin Barbosa Souza** vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Problemas Aditivos a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada. Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de equações polinomiais.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando Lucas Benjamin Barbosa Souza** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

__________________, ______ de ________________ de 2019.

____

Assinatura dos pesquisadores

Eu,____ autorizo que meu/minha filho(a)_______________________________________ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do responsável

ANEXO B – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIASSOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade**: _______anos 2- **Gênero**: ☐ Masculino ☐Feminino

3- **Tipo de escola que estudou**? ☐Municipal ☐Estadual ☐Conveniada ☐Particular

4- **Você já ficou em dependência**? ☐Não ☐Sim. Em quais disciplinas?________________

5- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?

☐Superior ☐Médio ☐Fundamental ☐Fundamental incompleto ☐Não estudou

6- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?

☐Superior ☐Médio ☐Fundamental ☐Fundamental incompleto ☐ Não estudou

7- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?

☐Professor particular ☐Família ☐Ninguém ☐Outros. Quem?__________________

8- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?

☐Todo dia ☐Somente nos finais de semana ☐No período de prova ☐Só na véspera da prova

☐Não estudo fora da escola.

9- **Você conseguia entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?

☐Sempre ☐Quase sempre ☐Às vezes ☐Poucas vezes ☐Nunca

10- **As aulas de Matemática despertavam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?

☐sim ☐não ☐às vezes

11- **Você conseguia relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**? ☐Sim ☐Não ☐Às vezes

12-**Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática**?

☐Contente ☐Tranquilo ☐com Medo ☐Preocupado ☐com Raiva □ com Calafrios

13- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utilizava para a avaliação da aprendizagem?**

☐Provas/simulado ☐Testes semanais ☐Seminários ☐Pesquisas ☐Projetos ☐Outros. Quais?

14- **Você já estudou Equações Polinomiais**? ☐Sim ☐Não

15- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série**? ___________

16- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo de Equações Polinomiais**? ☐Sim ☐Não

17. **Como você avalia as explicações do seu professor de matemática**?

☐Ruim ☐Regular ☐Boa ☐Excelente

18- **Quando você estudou Equações Polinomiais a maioria das aulas**:

☐Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

☐Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

☐Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

☐Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

☐Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

19- **Para praticar o conteúdo de Equações Polinomiais seu professor costumava**:

☐Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

☐Apresentar jogos envolvendo o assunto;

☐Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

☐Não propunha questões de fixação;

☐Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

20- Com base na sua experiência q**uando você estudou Equações Polinomiais, preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender? (**Para sim**)				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
Definição de Números Racionais							
Frações irredutíveis							
Equações do 1º grau							
Equações do 2º grau							
Definição de Polinômios							
Classificação dos Polinômios							
Grau de polinômios							
Valor numérico de polinômios							
Raiz de polinômio							
Operações com polinômios							
Teorema de D'Alembert							
Divisão de polinômios por binômio $(x - a)$							
Divisão de polinômios pelo dispositivo Briot-Ruffini							
Equações polinomiais							
Teorema Fundamental da Álgebra							
Teorema da Decomposição							
Multiplicidade de uma raiz							
Relações de Girard							
Teorema das raízes imaginarias							
Teorema para pesquisa de raízes racionais							

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem