INSTITUTO FEDERAL BAIANO - CAMPUS CATU

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO

SALA DE AULA INVERTIDA E O USO DO GEOGEBRA NAS AULAS DE MATEMÁTICA: DESAFIOS E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA EXPLORAR FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO INTEGRADO

Catu

2023

GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO

SALA DE AULA INVERTIDA E O USO DO GEOGEBRA NAS AULAS DE MATEMÁTICA: DESAFIOS E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA EXPLORAR FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO INTEGRADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano - Campus Catu, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Profissional e Tecnológica.

Orientadora: Profa. Dra. Camila Lima Santana e Santana

Catu

2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Ricardo Santos do Carmo Reis - CRB – 5ª / 1649

N244s

Nascimento, Gustavo Pereira

Sala de aula invertida e o uso do Geogebra nas aulas de matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática para explorar função afim no ensino médio integrado/ Gustavo Pereira Nascimento.– Catu, Ba, 2023.

229 p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano. Programa de Pós-graduação em Educação Profissional e Tecnológica – ProfEPT, 2023.

Orientadora: Profa. Dra. Camila Lima Santana e Santana.

1. Sequência didática Geogebra. 2. Sala de aula invertida. 3. Registros de representação. 4. Prática educativa em educação profissional e tecnológica. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano. II. Santana, Camila Lima Santana e (Orient.). III. Título.

CDU: 37.02

GUSTAVO PEREIRA NASCIMENTO

TECNOLOGIAS DIGITAIS E METODOLOGIAS ATIVAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: DESAFIOS E POTENCIALIDADES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO INTEGRADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano - Campus Catu, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Profissional e Tecnológica.

Catu, 05 de outubro de 2023

BANCA EXAMINADORA

____

Drª. Camila Lima Santana e Santana
ProfEPT - IF Baiano - Orientadora/Presidenta da Banca

____

Drª. Maridete Brito Cunha Ferreira
UNEB - Campus II Membro Externo

____

Drª. Joana Fidelis da Paixão
ProfEPT - IF Baiano Membro Interno

____

Drª. Patrícia Oliveira
ProfEPT - IF Baiano Membro Interno

À minha mãe, Lucineide Pereira, que sempre acreditou no meu potencial e se desdobrou em cuidados durante toda a minha vida.

AGRADECIMENTOS

“…Agradecer, ter o que agradecer, louvar e abraçar.”
(Maria Bethânia)

A Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de transitar pelo Orbe Terra a caminho da evolução.

Às minhas mentoras espirituais Juana Rodrigues e Irmã Cemira pelo amparo e assistência.

À Professora Doutora Camila Lima Santana e Santana, a quem carinhosamente chamo de “Ori”, por me acolher na condição de orientando, partilhando conhecimento e fortalecendo a minha caminhada. Gratidão pela presença, amparo, paciência e amizade.

Às Professoras Doutoras Maridete Brito e Joana Fidelis Paixão pelas colaborações, encaminhamentos e sugestões preciosas na qualificação e por aceitarem estar também na banca examinadora.

À Professora Doutora Patrícia Oliveira que aceitou o desafio de compor a banca examinadora a quem carinhosamente chamo de Tia Paty.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional Tecnológica por se colocarem à disposição para compartilhar conhecimentos e experiências exitosas.

Aos amigos encontrados no ProfEPT – Silvana Casais, Milena Vergne, Larissa Queiroz, Graciene Ávila e Márcio Rodrigues – pela jornada, pelos trabalhos em grupo, pela escuta atenta e acolhimento permanente.

À Fundação José Carvalho e ao Núcleo Pedagógico por me permitirem conhecer profundamente os ideais altruístas de um dos maiores educadores baianos do século XX: Doutor José Corgosinho de Carvalho Filho.

À Escola Rural Rolf Weinberg por me permitir mergulhar no processo investigativo para compreender os desdobramentos do ensino de matemática em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância.

À Diretora Educacional Ana Lúcia Araújo, por acreditar no meu trabalho e ser uma parceira presente nessa conquista.

A cada uma das professoras das Escolas Públicas que me forjaram e me permitiram chegar até aqui e sempre me incentivaram a sonhar através da educação pública de qualidade.

À minha mãe Lucineide Pereira, por ser exemplo diário de humildade, amor, devoção, companheirismo e presença, transmutando amor e cuidado em comidinhas para me auxiliar na escrita.

Ao meu marido Raphael Luna, pelo apoio incondicional, pela compreensão das minhas ausências, pela construção do amor através do carinho e da acolhida.

À minha irmã Luciana Oliveira e meu afilhado Ruan Fernandes e meu cunhado Ricardo pela torcida.

Aos meus amigos e família do coração – Adnaiara, Lula, Maria, Carine e Dimas Nonato – por estarem presentes, mesmo quando eu precisei estar ausente.

Aos companheiros de ideal cristão do Centro Espírita Boa Nova – Fabiana Ramos, Cecília Santos e Valdemiro Xavier – pelas vibrações e orações para o êxito desta empreitada.

Aos meus companheiros de trabalho – Gildete Garcez, Leila Magalhães, Antônio Neto e Diego Novais – pelo olhar atento e pelo fortalecimento nos dias mais intensos.

A cada um dos alunos que aceitaram colaborar na pesquisa, que se dedicaram e compreenderam a grandiosidade deste trabalho: vocês são a razão de ser desta dissertação.

“Minha esperança no êxito… funda-se no fato inconteste de que tudo que criei está impregnado de amor”.

José Corgosinho de Carvalho Filho (1979, p. 75)

RESUMO

A presente investigação foi embasada na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para orientar o processo de construção, aplicação e validação de uma sequência didática, que visa articular o uso do software matemático Geogebra com sala de aula invertida. Esta articulação é utilizada para ensinar Função Afim em uma turma da 1ª série do Curso Profissionalizante de Nível Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, em uma escola do campo com pedagogia de alternância. A primeira teoria orienta o processo de construção de uma situação didática levando em consideração as fases de ação, formulação, validação e institucionalização; já a segunda concebe que a aprendizagem de um conceito matemático deve ocorrer a partir da articulação de vários registros de representação semiótica, sendo eles: registro em língua natural, registro simbólico algébrico e registro tabular. Desse modo, a presente pesquisa teve como objetivo avaliar as contribuições de situações didáticas que articulam a utilização do software Geogebra com a sala de aula invertida no processo de ensino e aprendizagem de função afim. O produto técnico tecnológico desta investigação, a sequência didática, contemplou a realização de quatro sessões de ensino, nos moldes da Engenharia Didática, e está atrelado à linha de pesquisa Práticas Educativas em Educação Profissional e Tecnológica. O processo investigativo foi composto de uma análise preliminar, que abarcou um estudo do processo histórico da construção do conceito de função afim e análise dos documentos oficiais: Base Nacional Comum Curricular, Orientações Curriculares para o Ensino Médio no Estado da Bahia e o Plano de Curso Anual da Unidade Escolar. Em seguida houve o processo de concepção da sequência didática, análise *a priori,* experimentação, análise *a posteriori* e validação. As análises *a posteriori* evidenciaram que os participantes da pesquisa passaram a reconhecer a função afim em diferentes registros de representação semiótica, a efetuar transformações do tipo tratamento e do tipo conversão, além de apresentarem desenvolvimento de percepção integrada entre as variáveis visuais de representação no registro gráfico e as suas respectivas unidades simbólicas significativas no registro simbólico algébrico.

Palavras-chave: Sequência Didática Geogebra. Sala de aula Invertida. Registros de Representação. Prática Educativa em Educação Profissional e Tecnológica.

ABSTRACT

The present investigation was based on the Theory of Didactic Situations and the Theory of Registers of Semiotic Representation, to guide the process of construction, application and validation of a didactic sequence, which aims to articulate the use of Geogebra, a mathematical software, using the flipped classroom strategy. The goal is to teach the Affine Function to a 1st grade class of a High School Integrated Technical Course in Agriculture, in a rural school using The Pedagogy of Alternation method. The first theory guides the process of building a didactic situation taking into account the phases of action, formulation, validation and institutionalization; the second theory formulates that the learning of a mathematical concept must occur from the articulation of several semiotic representation records such as: natural language record, symbolic algebraic record and tabular record. Thus, the present research aimed to evaluate the contributions of didactic situations which articulates the use of Geogebra software and the flipped classroom strategy in the process of teaching and learning the affine function. This investigation technical technologic product, the didactic sequence, has contemplated the realization of four teaching sessions, using the approaches of Didactic Engineering, being attached to the line of research Educational Practices on Technical and Professional Education. The investigation process was composed of preliminary analysis that contemplated a study of the historical process of the concept of affine function and the analysis of official documents: Base Nacional Comum Curricular (National Common Curriculum Base), Curriculum Guidelines for High School in the State of Bahia and the Annual Course Plan of the School Unit. Then, there was the conception process of the didactic sequence, a *priori* analysis, the experimentation process, a *posteriori* analysis, and validation. The *posteriori* analyses showed that the research participants began to recognize the affine function in different registers of semiotic representation, to perform treatment-type and conversion-type transformations, in addition to presenting integrated perception development between the visual representation variables in the graphic register and their respective significant symbolic units in the algebraic symbolic register.

Keywords: Geogebra Didactic Sequence. Flipped Classroom. Registers of Semiotic Representation. Educational Practices on Technical and Professional Education

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular
COEF - Coeficiente
EMI - Ensino Médio Integrado
EQ01 - Equipe 01
EQ02 - Equipe 02
EQ03 - Equipe 03
EQ04 - Equipe 04
EQ05 - Equipe 05
EQ06 - Equipe 06
EQ07 - Equipe 07
EQ08 - Equipe 08
LDB - Lei de Diretrizes e Bases
LN - Língua Natural
OCEMB - Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia
RSA - Registro Simbólico Algébrico
RSN - Registro Simbólico Numérico
RGRA - Registro Gráfico
SD - Sequência Didática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A motivação para a realização desta pesquisa está diretamente ligada ao exercício da minha profissão. Sou licenciado em matemática pela Universidade do Estado da Bahia desde 2013, ano em que ingressei na unidade escolar que é *lócus* desse processo investigativo. Aqui desvela-se o primeiro desafio: ensinar matemática em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância, egresso de um curso que não trouxe discussões profundas sobre essa modalidade de ensino.

Em 2014, senti a necessidade de ingressar na Especialização em Educação Matemática, pois fui egresso de uma licenciatura que não incentivava a pesquisa. É na pós-graduação que se inicia o processo de formação do professor-pesquisador, o qual se desdobra na participação de eventos e, consequentemente, na produção de artigos e relatos de experiência.

Em 2016, iniciei o trabalho com sequências didáticas na unidade escolar e, em 2018, tive o primeiro contato com as teorias que embasam esta pesquisa, através de um curso de Didática da Matemática. Em 2019, participei da I Mostra de Boas Práticas Pedagógicas, a qual venci na categoria melhor Sequência Didática da rede Fundação José Carvalho.

Nesses dez anos de exercício docente, sempre priorizei na prática pedagógica o uso de materiais manipulativos, experimentos, e o uso de tecnologias digitais e softwares matemáticos, por perceber que esses recursos podem tornar o ensino de matemática mais prazeroso.

O percurso profissional descrito até aqui dá indicativos de que as tecnologias digitais estão presentes nos mais variados espaços da sociedade de modo mais intenso nas últimas duas décadas. Esse avanço tecnológico fez emergir inovações que foram capazes de revolucionar a forma de interação com os novos recursos. Tomemos como exemplo os *Smartphones* – cada vez mais potentes e arrojados –, notebooks, tablets, *softwares* educacionais de última geração e conexões de internet cada vez mais velozes.

Essas transformações tecnológicas também adentraram o espaço escolar e, surpreendida pela necessidade de incorporar essas tecnologias no seu cotidiano, a escola foi impelida a ampliar o repertório e a tornar a sala de aula um laboratório que cada dia tem explorado as diversas tecnologias digitais, as quais são capazes de interferir positivamente no processo de ensino e aprendizagem.

Estudiosos da área de educação matemática, os autores Fiorentine & Lorenzato afirmam que:

> A atenção dos investigadores e elaboradores de tecnologia computacional e vídeo interativo vem sendo, nas últimas décadas direcionada ao desenvolvimento de projetos/programas para ensino, alguns para alunos e outros para professores, para serem manejados por professores e não por técnicos.
> As TICs permitem aos estudantes não apenas estudar temas tradicionais de maneira nova, mas também explorar temas novos como, por exemplo, a geometria fractal.
> Embora as calculadoras (inclusive as gráficas que produzem gráficos e trabalham com funções algébricas) sejam, no Brasil, ainda pouco utilizadas e investigadas em sala de aula, atualmente, os microcomputadores e a internet vem ganhando cada dia mais espaço e adeptos tanto na prática escolar como na pesquisa educacional. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, pp.45-46)

Nos últimos três anos, essas repercussões e transformações foram potencializadas de forma vertiginosa com a necessidade de lidar intensamente com todo esse arsenal tecnológico, quando o mundo foi obrigado a parar para enfrentar a pandemia causada pela COVID-19 – uma doença altamente infecciosa causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2) – conclamando a humanidade para a necessidade do distanciamento e isolamento social.

Nesse contexto, foi necessário lidar com *lockdown, home office*, escolas fechadas, economia paralisada e milhares de mortes a nível nacional e mundial. O lar passou a ser extensão da escola e consequentemente também o espaço do exercício docente. O processo educativo passou a ser mediado pela tecnologia, que até pouco tempo era utilizada em larga escala pelas instituições de ensino superior que ofereciam Educação a Distância – EaD.

Com esse cenário caótico e de incertezas, o professor precisou mais uma vez se reinventar. Foi necessário refazer o planejamento, compreender a nova conjuntura educacional, adquirir novos saberes, aperfeiçoar outros e reestruturar todo o processo para lidar com as tecnologias na educação.

No segundo semestre de 2022, retornamos às atividades presenciais nas unidades educacionais, ainda de modo híbrido, com um panorama educacional desafiador e uma presença mais forte dos smartphones em sala de aula (se a ferramenta está acessível para todos, por que não a utilizar nas aulas de matemática?).

O cenário estruturado apontava a necessidade de estruturar o trabalho pedagógico através de sequências didáticas, orientação da instituição e atrelar as aulas ao uso de tecnologias digitais, o que nos permitiu evidenciar os potenciais do uso do *software* Geogebra para o ensino de Função Afim em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância e Ensino Médio Integrado.

O Geogebra é um *software* livre construído em linguagem Java (linguagem de programação orientada a objetos), cuja primeira versão foi lançada no ano de 2001. Disponibilizado gratuitamente em diversas línguas, inclusive o português, foi projetado e desenvolvido por Markus Hohenwarter, fruto da sua dissertação de mestrado em Educação Matemática na Universidade de Salzburgo na Áustria. O seu desenvolvimento teve como principal objetivo facilitar o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Logo, há indícios de que o Geogebra é um recurso com potencial para o ensino de função afim.

As pesquisas mais recentes em educação matemática e tecnologias na educação escolar, a exemplo de Oliveira (2020), Fiorentini & Lorenzato (2012), Kenski (2017), Bergmann e Sams (2012), Moran, Mansueto e Behrens (2013) têm apontado para o uso de estratégias didáticas mediadas pelas tecnologias. Podemos citar o software educacional Geogebra para enriquecer a aula de matemática, despertar a curiosidade e o trabalho investigativo, além de fornecer ferramentas para a conversão de registros de representação semiótica.

Segundo Mastroianni e Oliveira,

> Existem, à disposição do professor, programas como jogos, aplicativos específicos para as diversas disciplinas (como o GEOGEBRA, por exemplo, relacionado à Matemática), bem como as plataformas educacionais, que mobilizam diversos recursos, inclusive ligados à gestão do espaço escolar. Tais recursos podem modificar a dinâmica das aulas, inclusive nos anos iniciais do ensino fundamental, desde que integradas a um planejamento crítico e coerente, por parte do professor. (MASTROIANNI; OLIVEIRA, 2020, p.07)

Baseado em nossas experiências, percebemos que o estudo da função afim tem potencial para explorar generalização, estabelecer diferenças entre o significado de equação do 1º grau e de função polinomial do 1º grau. Permite também construir e reconhecer o gráfico de uma função afim, perceber a relação dos coeficientes angulares e lineares com o gráfico, além de ser bastante explorada em *softwares* matemáticos que permitem a coordenação de vários registros de representação semiótica.

Duval (2012) em seus estudos escalrece que para a compreensão de um conceito matemático, é imprescindível que sejam apresentadas aos estudantes as representações semióticas que auxiliarão no desenvolvimento da atividade matemática, pois um objeto matemático só pode ser acessado através de suas representações. O autor destaca, ainda, quatro tipos de registros de representação que devem ser coordenados, quando possível, em uma atividade matemática: Língua Natural, Simbólico algébrico, Simbólico Numérico, gráfico e figural.

Ao se pensar num ensino significativo de matemática, voltado ao desenvolvimento para o exercício consciente e crítico da cidadania, deve-se analisar, dentro de uma perspectiva mais ampla, o trabalho com situações práticas relacionadas a problemas do cotidiano, as quais permitam explorar conhecimentos e procedimentos matemáticos que devem permear a vivência dos alunos. Nesse sentido Fiorentini e Lorenzato afirmam que:

> São inúmeras as pesquisas que procuram investigar a relação entre cultura da matemática escolar com a cultura matemática que o aluno traz pra escola e a cultura matemática produzida pelos trabalhadores (adultos e algumas crianças trabalhadoras) ao realizar suas atividades profissionais.
> Essa é a área de investigação em que o Brasil mais tem se destacado internacionalmente. Este é o caso da etnomatemática - linha de investigação criada e desenvolvida pelo educador matemático brasilero mais reconhecido internacionalmente Ubiratan D'Ambrosio. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 51)

Dessa forma, é importante um olhar direcionado – uma espécie de lupa que deve ser constantemente apurada pelo educador – que identifique e respeite a cultura matemática que o aluno leva para escola e que precisa ser valorizada também, além de refletir sobre a importância da educação matemática em contextos de diversidade cultural e étnica, entre os quais podemos destacar a pluralidade do meio rural, na qual se insere a Educação do Campo.

Em 2015, a Fundação José Carvalho FJC, instituição filantrópica fundada por José Corgosinho de Carvalho Filho em 1975, mantenedora de seis unidades escolares – quatro escolas regulares e duas escolas do campo com pedagogia de alternância – orientou a adoção do uso da Sequência Didática como instrumento do trabalho docente, embasado nas concepções propostas por Antoni Zaballa (1998).

Com o objetivo de aperfeiçoar o nível de conhecimento dos docentes, em 2018, a FJC proporcionou um Curso de Formação Continuada em Didática da Matemática, ministrado pela Associação de Professores e Profissionais em Educação – ASPPE, formação responsável por nos apresentar a Teoria Das Situações Didáticas de Brousseau (2011).

Os reflexos dessa formação foram perceptíveis na profissionalização do docente e em sala de aula. Destaca-se também, a partir dessa formação, o crescimento dos índices na disciplina de Matemática, apresentados na avaliação interna do Programa de Avaliação da Educação Básica – PAEB, em que as metas estabelecidas em percentuais de crescimento avançaram consideravelmente.

O estudo constante para a elaboração de Sequências Didáticas em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância permite ao professor, que neste caso também é o pressor, com base em nossa experiência docente, pensar sistematicamente a forma mais conveniente de ensinar determinado conteúdo matemático, ao considerar todos os desafios propostos por uma escola nesses moldes.

Assim, esta pesquisa permitiu visualizar e compreender melhor cada fase que compôs a Sequência Didática para ensinar Função Afim, ao articular o uso software matemático Geogebra com a sala de aula invertida, com o intuito de potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto até aqui, a presente pesquisa buscou responder à seguinte pergunta: **em que medida, situações que articulam o uso do software matemático Geogebra com sala de aula invertida podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de função afim, no curso técnico em agropecuária integrado ao Ensino Médio?** Para tanto, estabelecemos como objetivo geral deste processo investigativo **avaliar as contribuições de situações didáticas que articulam o**

software matemático Geogebra e sala de aula invertida no processo de ensino e aprendizagem de função afim.

Para elucidar a questão proposta, foi elaborada uma sequência didática que articula a utilização do *software* matemático Geogebra com a sala de aula invertida para explorar o conceito de função afim. A referida sequência foi projetada a partir dos referenciais da Teoria das Situações Didáticas que orienta na elaboração, aplicação e análise, com base nos pressupostos da Engenharia Didática, de modo que as fases que esta metodologia propõe auxiliaram a organização e o processo de desenvolvimento desta pesquisa.

As atividades que compõem as sessões de ensino foram elaboradas com base nas Teorias das Situações Didáticas de Brousseau (2012) e Almouloud (2007) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2011).

O processo de construção da Sequência Didática foi iniciado após a realização das análises preliminares, as quais se detiveram no processo histórico de construção do conceito de função afim, análise dos documentos curriculares a nível nacional e estadual. Munidos deste construto, elaboramos as sessões de ensino e suas análises a *priori.*

O processo investigativo ocorreu em ambiente de sala de aula, com uma turma da 1ª série do Curso Profissionalizante de Nível Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio, em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância em Regime de Internato mantida pela Fundação José Carvalho. Após o processo de experimentação com os estudantes, realizamos as análises a *posteriori,* que permitiram responder ao problema de pesquisa que elencamos nesta investigação.

É importante deixar claro que a escolha da turma de estudantes para a fase da experimentação, que consiste na aplicação da Sequência Didática (SD), baseou-se nos aspectos a seguir: o pesquisador é professor de matemática da turma escolhida e foi levado em consideração o período em que o plano de curso orientava o ensino do objeto matemático em estudo.

Isso posto, segue a apresentação da estrutura desta dissertação, que consta de cinco capítulos: no primeiro capítulo, propomos a introdução, na qual elencamos os motivos que mobilizaram o processo investigativo, o panorama atual que permitiu o pesquisador formular o problema de pesquisa e o objetivo geral deste trabalho.

Também é apresentada a justificativa e uma síntese do contexto e procedimentos teóricos e metodológicos.

No segundo capítulo, contemplamos um estudo sobre os aspectos históricos da evolução do conceito de função, as definições atuais do conceito de função afim e a análise dos documentos oficiais que norteiam o trabalho docente, tais como a Base Nacional Comum Curricular, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio no Estado da Bahia e o plano de curso da Unidade Escolar.

No terceiro capítulo, é apresentado o referencial teórico e metodológico que embasa todo o processo desta pesquisa. Para isso, foi necessário recorrer à compreensão do Ensino Médio Integrado e ao papel pioneiro da Fundação José Carvalho na compreensão do trabalho como princípio educativo. Para subsidiar a investigação e processo de construção da SD, destacamos a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e, por fim, os estudos que orientam o uso do software matemático Geogebra e a sala de aula invertida, embasados nos pressupostos metodológicos da engenharia didática.

No quarto capítulo, por sua vez, apresentamos as variáveis didáticas, o processo de concepção e as análises a *priori* das atividades que compõem o produto técnico tecnológico, a sequência didática, e as respectivas variáveis visuais.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos o local e os participantes da pesquisa, como se deu o processo de coleta de dados no processo de aplicação e a análise a *posteriori* de cada uma das quatro sessões de ensino estruturadas no produto técnico tecnológico. Ao final, apresentamos as considerações finais, momento em que discutimos os resultados obtidos e elencamos ideias para futuras pesquisas.

2 ANÁLISES PRELIMINARES

Apresentamos, neste capítulo, um estudo epistemológico do conceito de função, seu processo de desenvolvimento ao longo da história para compreensão dos conceitos de objetos matemáticos que tiveram alguma influência na sua formação, pois o ensino de matemática em qualquer nível exige do professor conhecimentos específicos sobre os variados objetos matemáticos que serão alvos de estudo em sala de aula.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

No ensino médio integrado, o estudo dos aspectos históricos do conceito de função afim permite fazer relações importantes entre o conhecimento específico da disciplina e como esta pode dialogar com as disciplinas da área técnica de formação profissional. Disso decorre a necessidade de um estudo de como esses conhecimentos chegarão à sala de aula.

Desse modo, torna-se necessária a compreensão dos aspectos históricos e matemáticos da formação da ideia de função, pois, ao construir essa historiografia, será possível compreender o processo de generalização do conceito, bem como compreender o significado concreto que esta ideia incorporou com o processo evolutivo científico e filosófico.

Embasado nos estudos propostos por Caraça (1951), Eves (2011), Ponte (1990), Rossini (2006), e Tinoco (2004), é possível perceber o processo sinuoso de construção do objeto matemático em análise. De acordo com Ponte (1990, p. 3), "o conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda a Matemática" pela sua relevância; torna-se, por isso, imprescindível perceber a sua relação com outras ciências e a sua utilização para modelar estudos de situações da realidade.

Em seus estudos, Rossini (2006) destaca que as principais etapas históricas do desenvolvimento do conceito de função, até a metade do século XIX, eram divididas da seguinte maneira: Antiguidade, Idade Média e a Modernidade. A autora mostra que existem indícios do uso de funções desde a Antiguidade, o que nos permite perceber que esses conceitos se originaram de problemas práticos. Nestes achados, há registros do conceito de funções na civilização Babilônica por volta de 2000 a.C., época em que já eram utilizadas tabelas sexagesimais que exibiam resultados de quadrados, de cubos, além de raízes quadradas e cúbicas para valores de $n = 1,2, \ldots ,30$. A referida autora afirma que:

> Tábuas de funções foram empregadas na astronomia babilônica para a compilação das efemérides do Sol, da Lua e dos planetas. Essas

> tabulações empíricas tornaram-se os fundamentos matemáticos de todo o desenvolvimento posterior da astronomia. (ROSSINI, 2006, p. 33)

Ponte (1990) reforça essa ideia ao elencar como exemplo o estudo de leis naturais, que permitiu representar fenômenos móveis para explicar a realidade. Pelo mesmo viés, Caraça (1951, p. 107) reforça que “o homem, na sua necessidade de lutar contra a Natureza e no seu desejo de a dominar, foi levado, naturalmente, à observação e estudo de fenômenos, procurando descobrir as causas e o seu encadeamento.”

Rossini (2006) esclarece que as tábuas também podem ser encontradas nos estudos de astrônomos ao longo da época de Alexandria, embora seja necessário reconhecer que, nesse período, ainda não existiam a ideia geral de funcionalidade, e a palavra equivalente ainda não tinha sido associada ao termo função, bem como a ideia mais geral e abstrata que unifica dependência entre quantidades ou números sob alguma forma (descrição verbal, gráfico, tabela).

Os egípcios também trouxeram as suas contribuições, e muitos dos registros encontrados foram preservados por meio de papiros, destacando-se os achados mais importantes dessa época, tais como: o papiro de Moscou, o papiro de Kahum e o papiro de Rhind, que datam cerca de dois milênios a.C.

Em comum esses papiros apresentam problemas do cotidiano dos egípcios como preço do pão e da cerveja, o processo de alimentação do gado, o processo de armazenagem de grão de trigo etc. Da análise dos registros desse período, é possível perceber que eles já possuíam a noção de relação de duas grandezas.

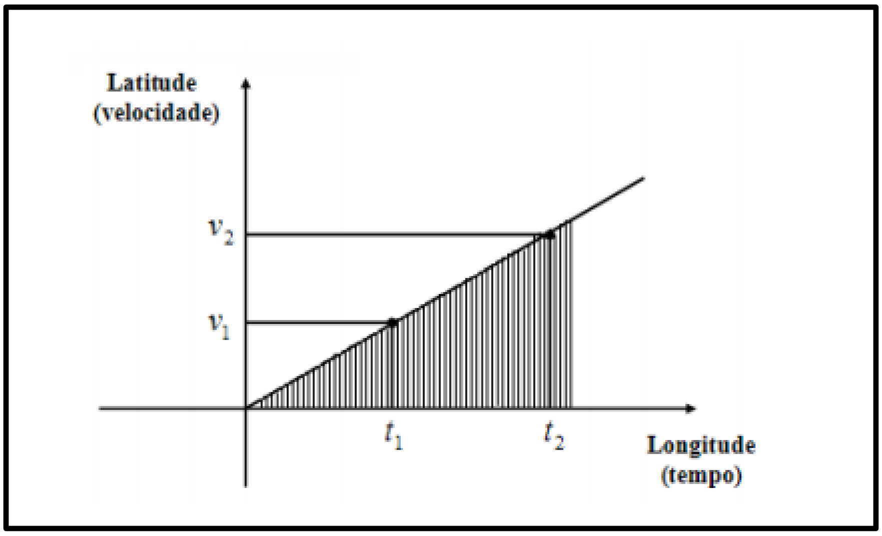
Na Idade Média, por sua vez, citamos como marcos os estudos propostos pelo Bispo Nicolau de Oresme (1323 - 1382), desenvolvidos na Universidade de Paris, os quais colaboraram no desenvolvimento da representação da noção de função. Este estudioso desenvolveu uma teoria geométrica das latitudes e longitudes das formas, que apresentam diferentes graus de intensidade e extensão. Essa teoria pode ser considerada como precursora na representação gráfica de uma função.

É possível encontrar nessa teoria ideias gerais e sinalizadoras sobre variável dependente e independente de certas quantidades, além de perceber em seus estudos a possibilidade de trabalhar com duas variações ao mesmo tempo. Para chegar a essa conclusão, apresentou-se uma representação gráfica da velocidade em relação ao tempo, de um móvel que se move com aceleração constante. De acordo com Rossini,

> Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, Oresme marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes) e, para cada instante, traçou, perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos estão alinhadas e formam a linha do ápice. (ROSSINI, 2006, p. 33)

O modelo descrito por Oresme apresenta-se como apontado na figura (1) abaixo.

Figura 1 - O modelo descrito por Oresme



Fonte: BOYER (1996, p. 09)

Sobre esse tópico, Boyer esclarece que:

> Ao conectar as extremidades dessas perpendicularidades ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo - num dos mais antigos exemplos da na história da matemática do que hoje seria o gráfico de uma função. (BOYER, 1996, p. 9)

Ao analisar a construção geométrica proposta por Oresme, é possível perceber a representação do gráfico de uma função Afim, que permite relacionar velocidade e tempo. Embora em seus estudos não tenha ficado claramente definidas as noções de coordenadas, foi ele quem primeiro utilizou este conceito para representar velocidade em função do tempo. Mesmo de modo intuitivo, essas ideias contribuíram de modo significativo para a representação gráfica de uma função.

Avançamos historicamente para o final do século XVI e, chegando ao período moderno, é possível verificar nesse momento que a noção de função está presente, implicitamente, em todas as teorias que possuem relação com o desenvolvimento do cálculo algébrico. Destacamos nessa época os estudos desenvolvidos por François Viète (1540 - 1603), que é considerado por muitos como o maior e mais brilhante matemático francês deste século.

Na vanguarda dos estudos sobre funções, ele foi o primeiro matemático a utilizar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes.

De acordo com Rossini, esse teórico,

> Coloca em evidência a introdução de numerosos símbolos para as operações e relações matemáticas (em primeiro lugar, aqueles de adição, de subtração, de potência e de igualdade) e, sobretudo, símbolos para quantidades desconhecidas e para os parâmetros, que Viète, 1591, denota respectivamente pelas vogais A, E, I,... e consoantes B, C, D,... do alfabeto latino. O simbolismo de Viète apresentava muitas insuficiências e foi bastante aperfeiçoado por outros matemáticos. O criador da álgebra simbólica não utilizou sua notável descoberta para fazer avançar o conceito de função. (ROSSINI, 2006, p. 36)

Nos estudos propostos por Viète, era comum se usar letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Eves (2011, p. 309) reforça que “Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por A, *A quadratum*, *A cubum*; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para A, A q, A c.”

Tempos depois, Descartes (1596-1650) vai introduzir a convenção atual de se utilizar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes. Este filósofo e matemático francês trouxe em seus estudos a possibilidade de utilizar um sistema de eixos para localizar pontos e representar graficamente as equações.

Destacamos dos estudos propostos por Eves (2011) a singularidade do trabalho de Descartes em “La Géométrie” para a contribuição do conceito de funções, quando ele afirmou que uma equação em duas variáveis, por exemplo, x e y, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre quantidades variáveis. Assim, a ideia da derivada surge como uma maneira de encontrar a tangente em qualquer ponto dessa curva. Nesse sentido, Rossini afirma que:

> A introdução de funções sob a forma de equações teve o efeito de uma revolução no desenvolvimento da matemática e que a utilização de expressões analíticas dará ao estudo das funções um estatuto de verdadeiro cálculo, abrindo horizontes inteiramente novos. Tendo nascido no curso de aplicações da álgebra à geometria, esse método de representar funções foi imediatamente estendido aos outros ramos da matemática e, em primeiro lugar, ao do cálculo infinitesimal. (ROSSINI, 2006, p. 38)

Através de estudos, Descartes desenvolve um sistema de coordenadas, que é obtido no processo de resolução ao problema de Pappus, que permitiu a possibilidade de reduzir o problema a duas retas graduadas, além de possibilitar a construção da base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Atualmente, esse sistema é conhecido como plano cartesiano, em homenagem a Descartes.

Seus estudos prosseguem, para aperfeiçoar métodos geométricos mais gerais que os propostos por Viète, pois exibiu ferramentas algébricas inovadoras, embora seu objetivo estivesse alinhado com o de Viéte, que propunha a resolução de problemas de construção. No entanto, o método escolhido por ele para representar algebricamente problemas geométricos que envolviam equações de qualquer grau ou equações indeterminadas revolucionou a Geometria do Século XVII. Descartes aperfeiçoou o simbolismo de Viète no livro III da “La Geométrie”, ao desenvolver uma notação equivalente àquela que usamos atualmente.

Outro grande matemático que trouxe significativas contribuições e ajudou no desenvolvimento da análise matemática e, de modo consequente, no estudo de funções foi Newton (1642-1727). Em seu trabalho investigativo *Method of Fluxions,* publicado em 1736, vamos encontrar estudos substanciais sobre funções. Sobre essa obra, Eves explica que:

> Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua

> taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por y . Em notação moderna esse fluxo equivale a *dy/dt*, onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de y por y e assim por diante. Por outro lado, denotava o fluente de y pelo próprio y no interior de um pequeno quadrado, ou às vezes por y . Newton introduziu também um outro conceito, chamado por ele de *momento* de um fluente: trata-se do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x , por exemplo, num intervalo de tempo infinitamente pequeno o. Assim, o momento do fluente x é dado por X o. (EVES, 2011, p. 439)

Embora em seus estudos Newton não tenha utilizado o termo função, pode-se perceber através de seus trabalhos que ele já considerava de modo bastante claro a existência de uma relação entre variável dependente e independente. Quanto aos conceitos mecânicos e cinemáticos, usados por ele para expressar as variáveis, na linguagem atual, poderiam ser considerados em função do tempo.

Outro personagem importante foi Leibniz, que chega às noções básicas de cálculo diferencial e integral desenvolvidas a partir da geometria de curvas. Vai ser em seus estudos que a palavra "Função" irá aparecer pela primeira vez, em 1673, mais precisamente no manuscrito intitulado "O método inverso das tangentes sobre as funções" (Methodus tangentium inversa, seu fonctionibus). É tratada nessa obra a determinação da subtangente, da subnormal e de outros segmentos associados aos pontos variáveis de uma curva. Sobre esse fato histórico, Ponte reforça que:

> Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" (em 1673), mas ainda apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e "parâmetro". (PONTE, 1990, p.3)

Foram várias as contribuições para que Johann Bernoulli trouxesse a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica em um artigo intitulado "Remarques sur ce qu´on a donné jusqu´ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres" (Considerações sobre o que se tem até o presente momento, sobre soluções de problemas isoperimétricos), publicado nas memórias da Academia Real de Ciências de Paris, em 1718. De acordo com Eves (2011), encontraremos nos escritos de Jean Bernoulli a seguinte definição: "chamamos função de uma grandeza variável as quantidades compostas, de um modo qualquer, dessa grandeza variável e de constantes" (EVES, 2011, p. 482).

Os estudos de Leibniz e Johann Bernoulli vão embasar as contribuições de Leonhard Euler, que colaborou efetivamente para o desenvolvimento do conceito de função. Em seu trabalho *"Introductio in analysin infinitorum",* que foi publicado em 1748, Euler vai definir a função de uma quantidade variável como sendo "qualquer expressão analítica composta formada de alguma maneira por essa quantidade variável e com números ou quantidades constantes" (EVES, 2011, p. 474)

É importante destacar que Euler fez grandes contribuições à matemática, como a formalização de algumas notações matemática, as quais, de acordo com Eves (2011), foram:

$f(x)$ para funções;

e para a base dos logaritmos naturais;

a, b, c para os lados de um triângulo ABC;

$\sum$ para somatórios;

i para unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

Em seus registros, Euler apresentou a diferença entre as funções explícitas das implícitas e as algébricas das transcendentes. A partir desse período, a ideia de "função" tornou-se imprescindível na análise.

De acordo com Boyer (1996), Euler trouxe a notação mais bem sucedida de todos os tempos e a ele devemos a notação $f(x)$ para uma função em x, utilizada por ele nos "Comentários de Petersburgo" (1734 -1735). Segundo esse autor:

> O quarto parágrafo da Introductio define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". (Às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano). (BOYER, 1996, p. 306.)

Nessa perspectiva, Rossini (2006, p. 42) afirma que "a forma empregada por J. Bernoulli e Euler para definir função como sendo uma expressão analítica, cuja forma mais geral é uma série inteira, foi aceita por outros matemáticos como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)". A definição de função proposta por Lagrange ficou estruturada em sua obra *Théorie des fonctions analytiques*:

> Chama-se função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não de outras quantidades que podem ser vistas como tendo valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, só se consideram as quantidades que se supõem variáveis; sem nenhuma atenção às constantes que podem ser misturadas. (YOUSCHKEVITCH, 1881, p.15 apud ROSSINI, 2006, p. 43)

De um lado temos Euler, que em seus trabalhos preocupava-se com detalhes e liberdade de intuição; de outro, tínhamos Lagrange, que se ocupava detidamente com o rigor matemático. Em sua obra *Theorie des Fonctions Analytiques Contenant lês Príncipes Du Calcul Différentiel,* este propôs a representação de uma função $f(x)$ por uma série de Taylor. A notação $f'(x)$, $f''(x)$,... para derivadas de 1ª, 2ª, …, n-ésima ordem, largamente utilizada na atualidade, foi introduzida por ele. Embora não tenha alcançado seu objetivo, pois equivocou-se em não se atentar para a convergência e divergência que se baseiam na ideia de limite, seus estudos permitiram a definição da **primeira teoria de funções de variável real**.

Eves (2011) e Boyer (1996) corroboram da mesma ideia ao afirmar que o século XIX passa a ser reconhecido como o *"*século do rigor*",* pois nesse período valorizou-se de modo muito intenso a busca pelo rigor matemático. Vários matemáticos desse momento histórico, a exemplo de Cauchy (1789-1857), Lobatchevsky (1792-1856), Weierstrass (1815-1897), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831–1916), Cantor (1845-1918) entre outros contribuíram de modo direto com a produção de trabalhos valiosos e extremamente produtivos, dando ênfase à formalização rigorosa de conceitos matemáticos que pouco antes deles eram abordados de maneira intuitiva.

Como vimos até aqui, vários teóricos colaboraram no processo de construção da definição do conceito de função, mas é preciso fazer um destaque aos trabalhos propostos por Joseph Fourier, que traz grandes contribuições para a formalização da definição de função.

Eves (2011) destaca em seus estudos que, no ano de 1807, Fourier publicou um artigo na Academia de Ciências da França, afirmando que toda função definida em um intervalo finito, por um gráfico qualquer, pode ser representada por uma série de funções seno e cosseno, que hoje é conhecida como série Fourier. Dito de outra forma, se $f(x)$ é uma função definida pelo intervalo $(-\pi, \pi)$, ela pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\frac{a}{2} + \sum_{n-1}^{\infty}(a_n.cos(nx) + b_n.sen(nx))$$

Embora a afirmação exagerada de Fourier, deixasse claro que qualquer função pode ser escrita por meio de uma série trigonométrica, seu pensamento e suas ideias contribuíram de modo efetivo para o desenvolvimento de estudos em diversos campos, tais como: acústica, óptica, termodinâmica, bem como na resolução de equações diferenciais.

Lejeune Dirichilet (1805-1859), outro teórico que trouxe contribuições mais abrangentes e rigorosas sobre a definição do conceito de função, propôs a seguinte definição:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo dos valores da função. (EVES, 2011, p. 661)

Os avanços no conceito de função prosseguem com Georg Cantor, que formaliza os estudos de conjuntos de pontos e, consequentemente, desenvolve a teoria dos conjuntos, que trouxe à baila a definição de função em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente numéricos.

Nos albores do século XX, os matemáticos que publicaram textos científicos buscaram evidenciar a necessidade de formalização dos conceitos matemáticos. É preciso destacar nessa época um grupo de matemáticos da França, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Esse coletivo defendia que muitas definições da matemática moderna deveriam ser repensadas para concretizar esse pensamento. Escreveu uma série de livros, publicados em 1935, que tratavam da apresentação da matemática moderna, com novas terminologias e novos conceitos, dentre eles o conceito de função a partir da relação entre conjuntos numéricos e não numéricos, como podemos observar no trecho a seguir:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe

> um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p. 6 *apud* PIRES, 2016, p. 10).

De acordo com Rossini (2006), com a publicação desta definição, foram sanadas todas as dúvidas a respeito do conceito de função.

Em síntese, a construção desse breve histórico buscou compreender o processo sinuoso da construção do conceito de função, desde a Antiguidade até o momento da revolução estruturalista proposta pelo grupo Bourbaki. Esse processo evolutivo do conceito função permite-nos perceber que foram vários os matemáticos que contribuíram com esse construto, que evoluiu na medida em que as civilizações avançaram científica e filosoficamente.

2.2 DEFINIÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Para trabalhar com o conceito de Função é importante trazer a sua definição, bem como as definições dos elementos que a acompanham. De acordo com Rossini, a definição proposta por Lima vai afirmar que:

> Uma função $f: A \to B$ consta de três partes: com o conjunto A, chamado o domínio da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento de $x \epsilon A$, um único elemento $f(x) \epsilon B,$ chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x). (LIMA, 1989, p. 10 *apud* ROSSINI, 2006, p. 61)

Rossini (2006) prossegue e apresenta uma notação utilizada por Lima (1989): “Usa-se $x \to f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor de $f(x)$” , para isto, traz explicações sobre a natureza arbitrária da regra.

> A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \epsilon B$ quando é dado $x \epsilon A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:
> 1ª Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domíno, a regra deve fornecer $f(x)$ para;
> 2ª Não deve haver ambiguidades: a cada $x \epsilon A,$ a regra deve fazer corresponder um único. (LIMA, 1989, p. 10 *apud* ROSSINI, 2006, p.61)

Rossini (2006) afirma que o autor traz uma crítica sobre o conceito de função como conjuntos de pares ordenados como um conceito estático, pois ele acredita na função como um conceito dinâmico. Por isso, a autora relata que:

> Definir função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitivo e mais acessível ao entendimento do que concebê-la como um conjunto de pares ordenados, que usa uma série de conceitos preliminares, como produto cartesiano, relação binária etc. (ROSSINI, 2006, p.61)

Se o intuito do professor, apresentar um conceito novo, é criar um ambiente favorável para que o aluno possa aprender, é importante que ele possa mostrar de modo mais acessível, para que o processo de apreensão do objeto matemático possa se concretizar.

Na obra "Temas e Problemas", Lima e colaboradores (2010) inicia o capítulo de Proporcionalidade e função afim e conceitua proporcionalidade do seguinte modo:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:
> Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
> Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \epsilon N$.
> Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$, chama-se proporcionalidade. (LIMA *et al.*, 2010, p. 2)

De acordo com Lamon (*apud* PONTE *et al*., 2010, p 3), "o raciocínio proporcional está relacionado à capacidade de analisar relações entre grandezas, o que implica compreensão da relação constante entre estas (invariância) e a noção que ambas variam em conjunto (covariação)", o que permite aos alunos desenvolverem a compreensão de que na equivalência entre razões há algo que varia (quantidades absolutas) e, de modo simultâneo, existe algo que se mantém constante (na mesma proporção).

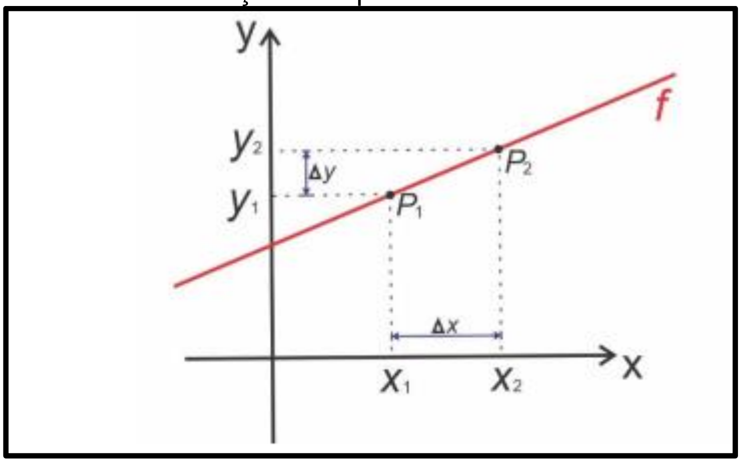
Mais adiante, Lima e colaboradores (2016) definem a Função Afim como uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $a, b \epsilon R$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \epsilon R$. Os coeficientes a e b determinam respectivamente a taxa de variação e o coeficiente linear da função. No caso do segundo coeficiente, pode ser chamado também de valor inicial da função, pois $b = f(0)$ (LIMA *et al*., 2016). Os autores também apresentam a função identidade

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ para todo $x \epsilon R$; as translações $f(x) = x + b$; as funções lineares $f(x) = a.x$ e as funções constantes $f(x) = b$, em que a, b são números reais, como casos particulares da função afim.

Alguns autores, a exemplo de Tinoco (2004) e Miranda (2019), destacam que é importante compreender a taxa de variação a partir da relação entre as variáveis x e y, pois, graficamente, cada unidade de variação em x corresponde a uma variação de a unidades em y. Disso decorre que a taxa de variação pode ser determinada a partir de dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ distintos, de modo que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ e f uma função afim definida por $f(x) = ax + b$. Sabendo que $f(x_1) = a.x_1 + b$ e $f(x_2) = a.x_2 + b$, vamos obter a taxa média de variação a partir de $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 -, x)_1}$.

Miranda (2019) deixa ainda mais claro isso ao afirmar que, para a função afim, “A taxa de variação média é sempre a mesma, por isso é denominada somente de taxa de variação da função” (MIRANDA, 2019, p. 32).

Figura 2 - Gráfico de uma função afim para obter o valor do coeficiente a



Fonte: o autor.

Fica provado, então, que o gráfico de uma função afim é sempre uma linha reta. (LIMA *et al.*, 2016).

Já Iezzi e colaboradores (2020, p. 56) definem que “O gráfico de uma função polinomial de 1º grau, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = a.x + b$ com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos $Ox\ e\ Oy$ (isto é, é uma reta não paralela a qualquer dos eixos coordenados.”

Tanto Lima *et al.* (2016) quanto Iezzi *et al*. (2020) provam essa afirmação demonstrando que três pontos quaisquer, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, com

$x_1 < x_2 < x_3; y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)\ e\ y_3 = f(x_3)$ e f uma função definida por $y = a.x + b$, são colineares. Desse modo, é suficiente verificar que a maior das três distâncias entre os pontos é igual às somas das outras duas distâncias, em síntese: $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

Pela fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, dada por

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

vamos obter:

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(f(x_3) - f(x_1)]^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(a.x_3 + b) - (a.x_1 + b)]^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2}$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

De modo análogo, conclui-se que $d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$. Logo, ao somar as duas distâncias obteremos:

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) =$$

$$(x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2 =}$$

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2 =}$$

$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2 = d(P_1, P_3)}$$

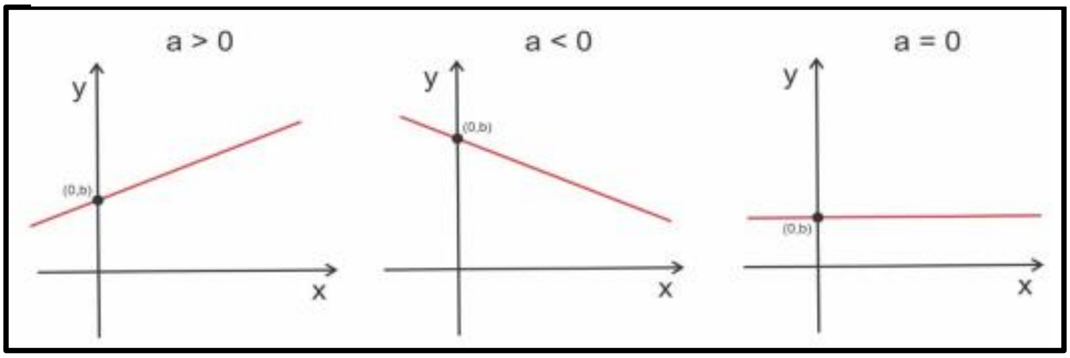
Desse modo, se a soma da $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ corresponde à $d(P_1, P_3)$ e se isso ocorre, é por que P_2 está entre $P_1\ e\ P_3$, ou seja, estão na mesma reta.

Baseado nessas considerações, Lima e colaboradores (2016) concluíram que toda reta "não vertical r é o gráfico de uma função afim" (LIMA *et al.* 2016, p. 94).

Como consequência, na representação gráfica de uma função afim, o coeficiente a, esse autor afirma que "chama-se a inclinação ou coeficiente angular, dessa reta em relação ao eixo horizontal OX" (LIMA *et al.* 2016, p.92); quanto ao coeficiente b, esses mesmos autores esclarecem que "é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f \to a.x + b$, intersecta o eixo OY " (LIMA *et al.* 2016, p. 92).

Quanto ao crescimento ou decrescimento, é possível visualizar a posição da reta, na representação gráfica de uma função afim, uma vez que "uma função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (dada pelo coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$" (LIMA *et al.* 2016, p.91). Como observamos na figura a seguir.

Figura 3 - Gráficos da função afim para diferentes valores do coeficiente a



Fonte: o autor.

Outra observação que pode ser feita com relação ao crescimento ou decrescimento de uma função afim está relacionada com o coeficiente a da função afim, que nos permite realizar previsões quanto ao comportamento dos gráficos.

Lima caracteriza da seguinte forma: "Quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se encaminha para a direita) e quando $a < 0$ a reta é descendente, pois quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal." (LIMA *et al.,* 2016, p.94).

No entanto, esses autores ressaltam que não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f. "O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento)" (LIMA *et al*., 2016, p. 95).

De acordo com esses mesmos autores, o ângulo que o gráfico de uma função f faz com o eixo das abcissas tem relação de dependência com as unidades que foram escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Ademais, o correto é dizer que uma função possui taxa de variação e uma reta possui coeficiente angular.

Sobre os casos particulares que decorrem da função afim, Lima e colaboradores (2016) esclarecem que:

> Uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a.x$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante chama-se *função linear*. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = a.x$ transforma um número real positivo x no número positivo $a.x$, logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f\colon \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$. (LIMA et al., 2016, p. 6)

Pode-se perceber que o caso específico citado anteriormente está relacionado aos problemas de proporcionalidade. Para as funções constantes, temos “outro caso particular da função afim é o das funções constantes $f(x) = b$. " (LIMA *et al*., 2010, p. 12).

Por isso, estudos propostos por Tinoco (2004) têm trazido reflexões importantes que indicam que o ensino de funções, em geral, não tem sido adequado, pois os recursos metodológicos utilizados não vinculam a matemática à realidade, além de alertar que há uma supervalorização apenas dos seus aspectos algébricos, reforçando, portanto a necessidade de explorar esse conceito a partir de situações concretas do cotidiano.

Com o intuito de dar continuidade aos estudos preliminares que deram base para a construção desta pesquisa, apresentamos, no próximo tópico, aspectos sobre o ensino das funções, mais particularmente da função afim, a partir dos documentos curriculares nacionais, estaduais e locais, que norteiam a prática docente dos professores de matemática e como este objeto do conhecimento chega em sala de aula.

2.3 A FUNÇÃO AFIM NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Nesta seção, serão apresentados aspectos sobre a Função Afim a partir dos documentos oficiais: Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) além dos documentos curriculares da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio no Estado da Bahia (BAHIA, 2015), pois esta investigação foi realizada em uma escola do campo, com pedagogia de alternância, mantida por uma instituição de cunho filantrópico regida por esses documentos. Além disso, foi necessário também recorrer a um estudo meticuloso dos documentos curriculares específicos da instituição escolhida para a pesquisa e como estes documentos dialogam com os documentos oficiais.

2.3.1 Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tem como principal propósito assegurar aos estudantes o direito a uma educação com equidade e qualidade. Para que isto se concretize, de fato e de direito, estabelece as competências e habilidades essenciais que os estudantes de todo território brasileiro têm o direito de desenvolver durante a Educação Básica.

Precisamos ter muito claro que as diretrizes que estão amarradas à BNCC, no que diz respeito aos fundamentos, vão se materializar nas chamadas competências pelas áreas para o ensino médio. Este documento traz como foco principal o desenvolvimento de competências, o que está registrado logo no início do texto, que nos coloca diante de um marcador ideológico.

Ao dizer que o Ensino Médio é parte integrante da Educação Básica de jovens, os quais ainda não têm idade suficiente para definir seus projetos de vida, cujo fundamento é o desenvolvimento de competências, é inegavel que o foco do documento está nas necessidades do mercado de trabalho.

É necessário diferenciar o foco no mundo do trabalho do foco no mercado de trabalho, porque seria ingênuo imaginar que ao trabalhar com um ensino médio completamente propedêutico, tradicionalista, livresco, academicista, descolado do movimento da prática social, seria facultada uma formação emancipatória.

Salientamos que uma parte do movimento da prática social é a prática do trabalho, mais especificamente o trabalho como princípio educativo, na sua dimensão ontológica. Aqui, porém, tratamos do mundo do trabalho enquanto totalidade contraditória e não as necessidades do mercado de trabalho.

Pode-se questionar: o mundo do trabalho inclui o mercado de trabalho? Inclui. Mas o faz secundariamente. A nossa luta maior é para integrar o nosso processo educativo às demandas do mundo do trabalho, o que inclui ciência, cultura, linguagens, inclusive práticas laborais que garantam a nossa sobrevivência.

A BNCC está organizada em três tópicos: Introdução, Estrutura da BNCC e Etapa do Ensino Médio. Com base nessa estrutura, norteamos o nosso estudo com foco no Tópico “Ensino Médio”, por compreendermos que a realidade educacional que se desdobra em nosso país mostra que esta etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação (BRASIL, 2018), o que decorre, entre outros fatores, do desempenho insuficiente dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental, além de uma organização curricular do Ensino Médio que se caracterizava pelo excesso de componentes curriculares e uma abordagem pedagógica que se distancia das culturas juvenis e do mundo do trabalho.

Direcionamos o nosso olhar para o campo da álgebra para compreender como este documento orienta o estudo de Matemática para o ensino médio e, de modo mais específico, como é tratada o ensino da Função Afim na 1ª série do Ensino Médio.

A BNCC elenca cinco competências da área de matemática conforme o Quadro 1.

Quadro 1 - Competências Específicas de Matemática e suas tecnologias na BNCC

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO NA BNCC	
Nº	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2	Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprias da Matemática.
3	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na

	busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: o autor (adaptado da BNCC).

Para a competência 1, foram elencadas cinco habilidades; para a competência 2, três habilidades; para a competência 3, dezesseis habilidades; para a competência 4, nove habilidades; e, por fim, para a competência 5, foram elencadas doze habilidades, perfazendo um total de 45 habilidades, das quais dezenove fazem referência ao estudo de funções.

Nas habilidades que possuem relação com o estudo de funções, foi possível identificar um processo de progressão das aprendizagens com relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, através dos mais variados níveis de complexidade exigidos por cada uma das habilidades propostas.

Nesse estudo, foi possível organizar as dezenove habilidades e extrair delas as que possuem relação direta com o estudo de funções, polinomiais do 1º e 2º graus, distribuídas conforme o Quadro 2.

Quadro 2 - Organização das habilidades relacionadas a funções polinomiais do 1º e 2º graus na BNCC

UNIDADE: FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS
(EM13MAT501) investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT401) converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT507) identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT502) investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT402) converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para

representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT503) investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
(EM13MAT302) resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

Fonte: o autor (adaptado da BNCC)

Dentre todas as orientações específicas propostas pela BNCC, devemos considerar as alusivas à necessidade de articular os vários campos da Matemática, com o intuito de construir uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade (BRASIL, 2018), de modo a garantir aos estudantes a consolidação de competências específicas e habilidades relacionadas aos seus processos de reflexão e de abstração, que possam sustentar o modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo, capazes de orientar na tomada de decisões pautadas na ética e no bem comum.

Ao examinar as habilidades relacionadas ao estudo de Funções Afim, foi possível verificar que a BNCC sugere que este objeto seja abordado como relação de dependência entre duas grandezas, associando-as a representações gráficas e algébricas com ou sem o uso de *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

2.3.2 Orientações Curriculares para o Ensino Médio no Estado da Bahia

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia (OCEMB) foram elaboradas em 2015. A proposta deste documento antecede a elaboração da BNCC e tinha como objetivo colaborar com a promoção da formação integral do estudante. O seu intuito é garantir o acesso ao conhecimento que possa favorecer a compreensão das relações sociais e produtivas, que tenha o trabalho como princípio educativo aliado à ciência, cultura e tecnologia, na perspectiva da emancipação humana, vislumbrando uma educação omnilateral, para garantir o direito à educação conforme preconizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/1996).

Este documento sugere que a proposta metodológica deve estar embasada em princípios pedagógicos da interdisciplinaridade e contextualização, para que o aluno possa visualizar os aspectos teóricos-práticos dos conhecimentos para garantir as dimensões conceituais, procedimentais e atitudinais dos conteúdos (BAHIA, 2015).

No que diz respeito à proposta curricular, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia fundamentou-se em quatro dispositivos legais:

> (1) Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996;
> (2) o Parecer CNE/CEB nº 5, de 4 de maio de 2011, que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio;
> (3) a Resolução CNE/CEB nº 2, de 2012, que define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; e a
> (4) Portaria SEC nº 1.128, de 28 de janeiro de 2010, que estabelece orientações sobre a reorganização curricular das escolas da Educação Básica da Rede Pública Estadual. (BAHIA, 2015, p. 35)

As OCEMB propõem reflexões cujo intuito é colaborar com a prática docente. Com relação à construção do currículo das disciplinas específicas, busca estabelecer articulação entre todas as áreas do conhecimento, pois enquanto expressão dinâmica deseja promover o desenvolvimento dos alunos. No que diz respeito aos princípios orientadores, destaca três princípios: o norteador, o educativo e o pedagógico. Nos detemos, aqui, de forma meticulosa ao princípio educativo, o qual destaca:

> O trabalho como princípio educativo – remete à relação entre a educação e o trabalho, no qual se assegura o aspecto formativo do trabalho e da educação como ação humanizadora por meio do desenvolvimento das capacidades individuais. Segundo a Resolução CNE/CEB nº 2, de 2012, "o trabalho é conceituado na sua perspectiva ontológica de transformação da natureza, como realização inerente ao ser humano e como mediação no processo de produção da sua existência." (art. 5º, inciso VIII, § 1º).
> Nessa direção, o trabalho como princípio educativo objetiva "a compreensão do processo histórico de produção científica e tecnológica, desenvolvida e apropriada socialmente para a transformação das condições naturais da vida e a ampliação das capacidades, das potencialidades e dos sentidos humanos" (Resolução CNE/CEB nº 2, de 2012, art. 13, inciso II). Neste sentido, o trabalho é compreendido enquanto humanização; é através do trabalho que o jovem se sente inserido numa sociedade, torna-se um cidadão de valor e referência, pois o trabalho é compreendido não mais como sobrevivência, mas principalmente como realização. (BAHIA, 2015, p. 38)

Destacamos esse trecho por compreendermos que, nesse momento, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Estado da Bahia dão enfoque às proposições do que pressupõe o Ensino Médio Integrado. Outrossim, este documento organiza o currículo de matemática em três eixos embasados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, como vemos a seguir:

1. Álgebra: número e funções;
2. Geometria e medidas;
3. Análise de dados.

Além disso, enfatiza que os eixos integradores devem dialogar com os temas estruturadores do currículo do Ensino Médio, do seguinte modo:

4. Álgebra: número e funções (Linguagem, Estrutura e Abstrações Matemáticas);
5. Geometria e medidas (Modelagem Geométrica no Plano e no Espaço) e
6. Análise de dados (Tratamento da Informação e Probabilidades).

A nossa pesquisa se detém no Eixo 1 – Linguagem, Estruturas e Abstrações Matemáticas – para compreender como o nosso objeto de estudo, Função Afim, pode ser explorado na primeira série do Ensino Médio.

A sugestão é que esse eixo possa ser explorado de modo a ampliar o raciocínio lógico-matemático para que o aluno, na condição de protagonista do processo de aprendizagem, possa encontrar um ambiente de reflexão e crítica, que seja capaz de romper obstáculos didáticos, além de enfatizar a necessidade de experiências interdisciplinares estruturadas para contribuir com a integração.

No quadro 3, encontraremos a competência e as habilidades específicas para o estudo de função afim, atreladas às dimensões estruturantes do currículo: trabalho, ciência, cultura e tecnologia.

Quadro 3 - Organização das habilidades relacionadas a funções nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

<table>
<tr><td colspan="2">Competência: Compreender padrões, relações e funções, representando e analisando situações e estruturas matemáticas algebricamente.</td></tr>
<tr><td></td><td>● Nomear, comparar, medir, e identificar regularidades.
● Generalizar padrões, usando função explícita e recursivamente definida.
● Utilizar relações e funções em diferentes representações que retratem as diversas formas de pensar e manipular objetos matemáticos.
● Fazer o estudo de funções de uma variável, investigando taxas de variações com base em dados gráficos e numéricos.
● Representar e operacionalizar estruturas algébricas em situações práticas.
● Identificar e comparar as propriedades de classes de funções, como as</td></tr>
</table>

	exponenciais, polinomiais, racionais, logarítimicas e periódicas. ● Interpretar algumas situações-problema por equações ou inequações a partir de funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

Fonte: O autor, adaptado a OCEMB, 2015.

Diante do exposto, fica evidente que as OCEMB (BAHIA, 2015) trazem um manancial de informações que o professor de matemática da educação profissional e tecnológica pode utilizar para a atividade docente no Ensino Médio Integrado (EMI), para que, em sua prática, possa articular, dentro do possível, os conteúdos matemáticos com as diversas áreas do conhecimento, o que permitirá que o estudante possa consolidar as competências e habilidades propostas para cada série do EMI. Desse modo, fica perceptível que as OCEMB estimulam o desenvolvimento de prática interdisciplinar para contemplar todas as áreas do conhecimento.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo tem por objetivo apresentar os aspectos teóricos sobre o Ensino Médio Integrado, a Educação do Campo e a Sala de aula invertida, bem como apresentar as Teorias da Situação Didática e dos Registros de Representação Semiótica que embasam o processo de construção da sequência didática, além de apresentar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

3.1 O ENSINO MÉDIO INTEGRADO

O Ensino Médio Integrado (EMI) é uma modalidade de ensino associada diretamente à Educação Profissional e Tecnológica, caracterizada por permitir ao estudante uma formação geral de nível médio com enfoque propedêutico em consonância com a educação profissional técnica de nível médio, com um currículo estruturado para permitir essa conexão.

De acordo com Ciavatta (2014), consubstanciado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação, o ensino médio deveria atender aos anseios da formação geral do estudante, bem como prepará-lo para o exercício de profissões técnicas, ratificando que não se deveria dar maior enfoque à formação profissional em detrimento da formação geral.

De acordo com Ciavatta:

> O termo integrado remete-se, por um lado, à forma de oferta do ensino médio articulado com a educação profissional; mas, por outro lado, também a um tipo de formação que seja integrada, plena, vindo a possibilitar ao educando a compreensão das partes no seu todo ou da unidade no diverso. Tratando-se a educação como uma totalidade social, são as múltiplas mediações históricas que concretizam os processos educativos. (CIAVATTA, 2014, p. 198)

Assim sendo, "Condição e possibilidade, nesse caso, convergem para garantia do direito a dois tipos de formação – básica e profissional – no ensino médio que assegura por isso a legalidade e legitimidade do ensino médio integrado à educação profissional" (CIAVATTA; RAMOS, 2012, p.306).

Vale a pena ressaltar que a formação integrada extrapola a articulação entre o ensino médio e o ensino profissional. Ela visa resgatar, na atual conjuntura histórica e política, a correlação de força entre as classes, o avivamento da politecnia, da educação omnilateral e da escola unitária que permitirá ao estudante uma formação plena, facultando-lhe compreensão das partes no seu todo. De acordo com Frigotto:

> A concepção de educação politécnica relaciona-se de forma direta com os processos educativos e de construção de conhecimentos articulados ao trabalho produtivo, e que afirmam os interesses dos movimentos sociais dos trabalhadores do campo. Trata-se da luta pela superação das perspectivas da educação centradas em modelos abstratos com conteúdos e métodos pedagógicos os quais ignoram que as crianças, os jovens e os adultos do campo são sujeitos de cultura, experiências e saberes. Esses modelos postulam uma formação e educação escolar com conhecimentos elementares "para o campo" e/ou um ensino restrito, localista e particularista de educação para "fixá-los no campo". FRIGOTTO, 2010, pp. 60.)

Para Gramsci (1981), a formação integrada estrutura-se na possibilidade do trabalho como princípio educativo, com vistas a superar o dualismo entre o trabalho manual e o trabalho intelectual, de modo que, ao incorporar a dimensão intelectual ao trabalho produtivo, através dessa articulação, sejamos capazes de formar trabalhadores que possam atuar como dirigentes e cidadãos. Para Marise Ramos:

> Considerar o trabalho como princípio educativo equivale dizer que o ser humano é produtor de sua realidade e, por isto, se apropria dela e pode transformá-la. Equivale dizer, ainda, que nós somos sujeitos de

> nossa história e de nossa realidade. Em síntese, o trabalho é a primeira mediação entre o homem e a realidade material e social. (RAMOS, 2014, p. 90)

Desse modo, o trabalho como princípio educativo, proporcionado através da educação profissional, não é pensado para ensinar a fazer e preparar exclusivamente para o mercado de trabalho, consoante muitos pensam. Para reforçar esse pensamento, Rodrigues nos afirma que:

> A educação - sob qualquer designação ou adjetivação - não pode se reduzir às dimensões ditadas pelo Deus Mercado, pois assim se tornaria um instrumento de unilaterização do homem e transformar-se-ia de caminho à liberdade em funcionalização dos trabalhadores-mercadorias de acordo com as novas demandas da economia capitalista. (RODRIGUES, 1998, p. 140)

Nesse sentido, o trabalho é pensado na sua dimensão ontológica ou ontocriativa, que está associado a um processo intrínseco ao homem e consequentemente constitui a sua especificidade. Adotamos esta concepção para que não venhamos a reduzir a dimensão do trabalho à atividade laborativa ou emprego. Nesse sentido, Frigotto (2010) esclarece que o trabalho como princípio educativo está ligado à

> [...] produção de todas as dimensões da vida humana. Na sua dimensão mais crucial, ele aparece como atividade que responde à produção dos elementos necessários e imperativos à vida biológica dos seres humanos enquanto seres ou animais evoluídos da natureza. Concomitantemente, porém, responde às necessidades de sua vida cultural, social, estética, simbólica, lúdica e efetiva. Trata-se de necessidades, ambas, que, por serem históricas, assumem especificidades no tempo e no espaço. (FRIGOTTO, 2010, pp. 58-59.)

A educação profissional propõe a compreensão das dinâmicas socioprodutivas das sociedades contemporâneas, com seus avanços, conquistas e também os seus retrocessos, além de habilitar os jovens, mais especificamente a classe trabalhadora, para o exercício autônomo e crítico das profissões. É necessário ratificar que estamos considerando a compreensão do trabalho no seu sentido ontológico, enquanto princípio e organizador da base unitária. Segundo Ramos:

> Em um projeto unitário, ao mesmo tempo em que o trabalho se configura como princípio educativo - condensando em si as concepções de ciência e cultura -, também se constitui como contexto econômico (o mundo do trabalho), que justifica a formação específicas para atividades diretamente produtivas. (RAMOS, 2014, p. 92)

O trabalho como princípio educativo está ligado diretamente aos termos da educação politécnica e omnilateral – todas as dimensões – os quais expressam modos de conceber e produzir a vida humana, e modos de viver em sociedade, uma sociedade onde o indivíduo tenha mais tempo livre. Por isso, Frigotto (2010, p. 12.) afirma que “a dimensão ontológica do trabalho, permite circunscrever o trabalho humano na esfera da necessidade e de liberdade, sendo ambas inseparáveis”.

Rodrigues, por sua vez, corrobora com o autor e propõe que:

> Uma prática educativa, e mesmo formação profissional, que se paute na busca da construção omnilateral do educando, não pode estar restrita às limitações impostas pelas demandas dos interesses econômicos imediatos. Em outras palavras, a concepção de educação politécnica se contrapõe firmemente à instrumentalização e redução da formação humana aos desígnios do mercado. (RODRIGUES, 1998, p. 139)

Podemos ampliar o entendimento quando pensamos que a politecnia vincula-se ao que é fundamental do ser humano, já que este se produz no trabalho. Então, de que modo podemos preparar os jovens para enfrentarem os desafios do mundo do trabalho, com uma base mais ampla possível, com a possibilidade de serem socialmente autônomos, sujeitos e, ao mesmo tempo, dominarem a ciência possível do seu tempo para integrá-la nos processos produtivos? O ensino médio integrado aponta caminhos.

3.2 A ESCOLA DO CAMPO E A PEDAGOGIA DE ALTERNÂNCIA

As políticas públicas, defendidas pela Educação do Campo, têm como objetivo materializar e articular, nas Escolas do Campo com Pedagogia de Alternância que ofertam EMI, um movimento perene de resistência. Esse movimento amplia de modo significativo a compreensão do trabalho como princípio educativo. Isto acontece devido à necessidade de fortalecer a identidade campesina, de ampliar a compreensão da dimensão ontocriativa do trabalho do homem do campo e o fortalecimento da formação da classe trabalhadora para o não conformismo.

Nesse sentido, Frigotto afirma que:

> A realidade que produz a Educação do Campo não é nova, mas ela inaugura uma forma de fazer seu enfrentamento. Ao afirmar a luta por políticas públicas que garantam aos trabalhadores do campo o direito

> à educação, especialmente à escola, e a uma educação que seja *no* e *do* campo. (FRIGOTTO, 2010, p. 29)

Ao analisarmos a constituição histórica da educação do campo, pode-se perceber que na condição de prática social é possível destacar algumas características que são capazes de expressar a aura de consciência de mudança. É indubitável que ela se constitui enquanto luta social, por dar acesso à educação aos trabalhadores do campo. Por isso, é preciso salientar que não nos referimos a qualquer educação, mas a que é feita por eles mesmos e não em seus nomes, sem nos esquecermos de que a educação do campo é dos camponeses. Para Caldart (2004):

> A Educação do Campo se constitui a partir de uma contradição que é própria contradição de classe no campo: existe uma incompatibilidade de origem entre a agricultura capitalista e a Educação do Campo, exatamente por que a primeira sobrevive da exclusão e morte dos camponeses, que são os sujeitos principais da segunda. Em nosso debate isto tem sido referido como a principal oposição com a educação rural ou para o meio rural, que historicamente tem sido o nome dado às iniciativas do Estado de pensar a educação da população trabalhadora do campo, de modo a escamotear esta contradição e fazê-la de objeto e instrumento executor de políticas e de modelos de agricultura pensados em outros lugares, e para atender a outros interesses que não os seus como grupo social, classe e pessoas. (CALDART, 2004, p.19)

Além disso, a educação do campo tensiona de modo muito pertinente as discussões por políticas públicas mais abrangentes na política educacional brasileira, carrega em suas práticas o trabalho com a riqueza social e humana, característica da diversidade de seus sujeitos ao considerar as próprias formas de trabalho, valorizar suas raízes, produções culturais, formas de luta e de resistência.

Essa conjuntura nos permite afirmar que o homem do campo é formado no trabalho e pelo trabalho, enquanto necessidade de modificar a natureza que o circunda e dela extrair o que é necessário para a sua sobrevivência. Para Frigotto (2010, p. 59), “Na mesma compreensão da concepção ontocriativa de trabalho também está implícito o sentido de propriedade - intercâmbio material entre o ser humano e a natureza, para poder manter a vida humana.”

Enquanto práxis pedagógica, a educação do campo busca projetar o futuro a partir da recuperação do vínculo essencial entre formação humana e produção material da existência. Quando se compreende a intencionalidade educativa da

Escola do Campo direcionada para os novos padrões de relações sociais, vinculadas às novas formas de produção, com o trabalho associado livre, embasada em novos valores e compromissos políticos, os agentes deste espaço lutam e enfrentam as contradições sociais que estão envolvidas nesse movimento de afirmação da educação do campo. De acordo com Caldart:

> A materialidade de origem da Educação do Campo projeta/constrói uma determinada totalidade de relações que lhes são constitutivas. Antes (ou junto) de uma concepção de educação ela é uma concepção do campo: porque neste caso, como pensamos o campo pensamos a educação. (CALDART, 2004. p. 22)

É nessa perspectiva que surge a escola do campo. Segundo Molina (2012, p. 328):

> A escola do campo, pensada como parte de um projeto maior de educação da classe trabalhadora, se propõe a construir uma prática educativa que efetivamente fortaleça os camponeses para as lutas principais no bojo da constituição histórica dos movimentos de resistência à expansão capitalista em seus territórios.

Fica perceptível que, na escola do campo, a integração é necessária para que possa se alcançar uma formação omnilateral, além de apontar para a necessidade de pensar em um currículo em que o professor de matemática e das outras disciplinas do núcleo comum sejam capazes de conceber a sua práxis não apenas como professor da disciplina específica, mas que vislumbre de que modo esses conhecimentos possam permear a formação profissional desses estudantes.

Diante do exposto, podemos interrogar: de que modo podemos evidenciar e relacionar os conteúdos das áreas do conhecimento escolar com os postulados da educação do campo? Para responder a esta pergunta, é necessário reconhecer que a educação do campo nasce estritamente ligada ao trabalho e à cultura do campo e, em hipótese alguma, pode perder isso em seu projeto.

Diante das ideias apresentadas pelos autores visitados, podemos inferir que a educação do campo precisa resgatar uma tradição pedagógica de valorização do trabalho como princípio educativo, para que a partir desse estreitamento não se perca o vínculo entre educação e produção, para que sejam estimuladas discussões sobre as diferentes dimensões e métodos de formação do trabalhador, de educação profissional.

Além disso, por se tratar de uma escola do campo, é imprescindível que o professor conheça as características do mundo campesino no qual seus alunos estão inseridos e que se expressa pelas atividades camponesas dos seus locais de origem.

Outro fator relevante é que a maioria dos cursos de formação inicial de professores não trazem em seus currículos a realidade do campo brasileiro, muito menos a educação do campo, mesmo quando essas instituições formadoras estão situadas em cidades interioranas e em área rural.

Se o professor não é formado nessa perspectiva, o docente que desenvolve o seu ofício em escolas do campo encontrará dificuldades para fazer um trabalho que traga para dentro da sala de aula as especificidades do campo, já que este não foi formado para atuar nessas escolas. Por isso, a necessidade de se investir em processos de formação continuada para os professores que atuam neste contexto.

Quando pensamos na realidade do aluno campesino, para que a sua realidade seja presente na educação do campo, trazemos como caminho metodológico a alternância pedagógica, originada na França e que, de acordo com Gimonet (2007), traz a possibilidade de:

> Criar uma escola que não mantenha os adolescentes presos entre quatro paredes, mas que lhes permitam aprender através dos ensinamentos da escola, com certeza, mas também através daqueles da vida quotidiana, graças a uma alternância de períodos entre o ambiente familiar e o centro escolar. Tratava-se então de criar uma escola da terra, pelas pessoas da terra e para as pessoas da terra (GIMONET, 2007, p. 22).

Nesse ambiente, em que teoria e prática se entrelaçam, surge a alternância pedagógica enquanto proposta metodológica que é caracterizada pela organização do tempo escolar alternada em momentos na escola e momentos de formação na família.

Esse modelo, permite ao aluno realizar atividades que serão desenvolvidas no tempo escola e no tempo comunidade, a partir da interação de ferramentas pedagógicas que são próprias do campo, ligadas diretamente à realidade escolar do aluno e, consequentemente, da comunidade na qual está inserido.

Enquanto metodologia que se materializa na educação do campo, ela age também como indutor curricular, ao apontar caminhos que podem ser seguidos. De acordo com os autores Fonseca e Medeiros:

> O currículo é pensado como um instrumento de luta, uma forma de contrapor-se à fragmentação do trabalho pedagógico e sua rotina, à dependência e aos seus efeitos negativos do poder autoritário e centralizador dos órgãos administrativos, levando-se em consideração os princípios democráticos, participativos, amplos, motivadores, criativos e eficientes (FONSECA; MEDEIROS, 2006, p.111).

Desse modo, ao se adotar a pedagogia de alternância enquanto alternativa metodológica que proporciona aproximações do aluno com a realidade campesina, é suscitado no professor um posicionamento que vai além da mudança de postura em sala de aula. Isso exige reorganização da escola e do currículo e, portanto, ativa e efetiva participação do coletivo que se encontra envolvido no processo de ensino e de aprendizagem.

Para as autoras Molina (2012) e Caldart (2008), a alternância pedagógica coaduna com os princípios da Educação do Campo, no ponto em que ela traz reivindicações para o reconhecimento da historiografia desses sujeitos, dos modos de vida e produção, de como mobilizam os saberes oriundos da cultura camponesa, de forma que fortalece a adoção dessa metodologia na escola do campo.

3.3 O PIONEIRISMO DA FUNDAÇÃO JOSÉ CARVALHO NA COMPREENSÃO DO ENSINO MÉDIO INTEGRADO E DA EDUCAÇÃO DO CAMPO

A Fundação José Carvalho foi instituída por José Corgosinho de Carvalho Filho em 23 de julho de 1975. Uma entidade educacional, sem fins lucrativos, que recebeu através de doação a transferência do controle acionário da Cia Ferro Ligas da Bahia (FERBASA), que à época, exercia atividades no ramo da mineração e metalurgia e, atualmente, amplia suas atividades nas áreas de recursos florestais e energia renovável.

José Carvalho, engenheiro metalúrgico, tinha uma visão vanguardista e – em um momento onde o conceito de responsabilidade social ainda não era tão difundido no Brasil – decidiu que era preciso devolver à sociedade o que a sociedade havia te concedido, pois fora aluno bolsista de uma escola de jesuítas no Rio de Janeiro. O seu desiderato fica claro no trecho abaixo, quando nos afirma que:

> Durante muitos anos da minha mocidade procurei, ansiosamente, um sentido mais coerente e consistente para minha profissão de minerador e metalurgista. Um dia, tive uma fascinante visão: milhões

> de cristais brutos de cromita, aquele minério nobre que explorávamos, encaminhando-se para uma gigantesca central, como elétrons deslizando num condutor. Desta central, emanava uma luminosa energia, que por sua vez alimentava uma profusão de cérebros de crianças, os quais iam se transformando, paulatinamente, em outros núcleos pensantes de alta potencialidade, numa reação em cadeia.
> A partir daquele instante não tive mais dúvidas sobre o que devia fazer e partir para a ação. Hoje, mais do que nunca, estou convencido de que o fruto das nossas riquezas naturais, mormente as não renováveis, deveria ser empregado em projetos que visassem a constituir um acervo enriquecido para as gerações futuras. E não existe nenhum tesouro mais precioso e nobre do que a Educação, mormente para aqueles talentos menos aquinhoados pela fortuna e pelas oportunidades. (CARVALHO , 1981, p. 2)

Indubitavelmente um garimpeiro de sonhos, com o desejo de intervir na realidade do país que tudo te ofertou e que decidiu fundar uma escola de ensino médio com o técnico profissionalizante em mineração, para jovens “bem dotados” carentes, termo utilizado à época, e que hoje seriam considerados alunos com altas habilidades. Na proposta educacional da instituição, fica claro que:

> É fato que grande parte dos jovens e crianças talentosos e capazes, principalmente aqueles identificados através de testes e escalas de inteligência, encontram-se entre as camadas sociais mais elevadas. Porém a FUNDAÇÃO JOSÉ CARVALHO decidiu que o seu trabalho educacional deverá se concentrar em crianças e jovens de classe pobre e camadas sociais mais baixas. Também essa decisão se apoia em razões muito claras: parece óbvio que as crianças e jovens de classe média e alta têm uma chance maior de cursar uma escola de 2º grau do que os meninos de classe pobre. E de cursar uma escola relativamente melhor. É conhecido, no Brasil, o fenômeno dos dois sistemas de educação, atuando paralelos, porém desiguais, o sistema público e o particular. A rede pública é, de modo geral, mal equipada, mal organizada, funcionando mal e povoada com os alunos mais pobres. Já a rede particular, também de modo geral, apresenta-se melhor organizada e equipada, relativamente mais eficiente, e serve à classe média e alta, com vistas ao exame vestibular. (CARVALHO FILHO, 1985, p. 59)

No livro de sua autoria, O Protótipo, Carvalho Filho (1979) apresenta o modelo educacional que acreditava e que poderia servir de modelo para a sociedade brasileira:

> As escolas técnicas e as universidades deveriam ser dimensionadas na visão de um novo Brasil. Seria muito importante que esses estabelecimentos fossem também células integradas.

> O que você quer dizer, exatamente, com integrada?
> As facilidades reunidas: ensino, alimentação, hospedagem, vestuário, material didático. O aluno não pagaria nada e ainda teria uma verba para manutenção. Essas centenas de células seriam controladas direta ou indiretamente pelo governo e, se possível, com a participação ativa de fundações ou instituições industriais. [...] Só assim, Betty, haveria eficiência e igualdade para todos. (CARVALHO FILHO, 1979, p. 133)

Os princípios que norteiam as ações de uma Escola do campo com Pedagogia de Alternância que oferta Ensino Médio Integrado, tal qual nosso *lócus* de pesquisa, estão consubstanciados na fala do Instituidor em sua obra “O Protótipo”, que já discutia o EMI em 1979, quando essas discussões ainda não tinham ressonância no Brasil.

Um homem à frente de seu tempo, empresário e educador por excelência, fundou quatro escolas regulares e duas escolas do campo com pedagogia de alternância, em quatro municípios onde a Ferbasa atua. Pelos serviços relevantes no campo da educação, tornou-se membro da Academia Baiana de Educação, ocupando a cadeira de número 33 e, no ano de 2000, recebeu o prêmio de Educador do Ano na referida academia.

Em um de seus artigos, José Carvalho afirma que:

> Hoje podemos afirmar que, no Brasil, investiu-se muito em pedra e cal. Os homens públicos esqueceram-se de que, sem educar o povo, a nação fica extremamente debilitada, qualquer ventania mais forte faz ruir o castelo. E é isso exatamente o que está acontecendo no momento, quando o chamado "milagre brasileiro" acaba de se desfazer. No momento atual, a única solução é deixarmos de lado os sonhos de "grandes realizações" e passarmos a resgatar aquela velha dívida que o País tem com a educação. E, principalmente, com a educação básica. Temos necessidade urgente de transformar o nosso território numa grande e única escola. (CARVALHO, 1985, p. 52)

Atualmente a Fundação José Carvalho desenvolve um papel muito importante no campo da educação: são mais de 3500 matrículas anuais e milhares de vidas tocadas pelos ideais altruístas de um educador que acreditou na capacidade de modificar a sociedade brasileira através de processos educacionais libertadores.

A pesquisa foi desenvolvida em uma das escolas do campo com pedagogia de alternância fundada em 1990, na cidade de Pojuca - Bahia. Inicialmente a escola atendia apenas as séries iniciais do Ensino Fundamental, mas em 2002 passou a ofertar os Anos Finais do ensino fundamental e, em 2009, junto com a implantação dos Institutos Federais, foi implantada a primeira turma do Curso Profissionalizante em Agropecuária de Nível Técnico Integrado ao Ensino Médio.

É importante ressaltar que o pioneirismo da ação deste educador permanece materializado e transformando vidas através da oferta de educação de qualidade, pois sempre acreditou na construção de um projeto societário levando em consideração o trabalho como princípio educativo.

É baseado nesse legado que mergulhamos para compreender como o processo de ensino da matemática acontece levando em consideração a necessidade de pensar na formação geral e profissional, articulando os campos, para que tenhamos um EMI de qualidade.

3.4 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A proposta de trabalhar com situações didáticas em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância que oferta Ensino Médio integrado é desafiadora, devido às múltiplas variáveis que se apresentam.

Podemos citar como exemplo o tempo pedagógico organizado em períodos que se alternam, o tempo em que uma situação didática exige para o processo de construção do conhecimento matemático e como essas variáveis podem ser equalizadas, para que o objetivo maior seja alcançado: o aprendizado do aluno.

Neste trabalho, utilizaremos o conceito de Situação Didática definida por Brousseau (2008) que nos afirma que:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos. (BROUSSEAU, 2008, p. 8)

Desse modo, o objetivo de propor uma situação didática permite ao professor caracterizar o processo de aprendizagem através de situações reprodutíveis, que têm por objetivo conduzir a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Brousseau (2008) acredita que a forma didática em que se assenta a estruturação de uma Situação Didática possa influenciar o aluno, em relação aos significados, de modo que ele consiga interiorizar os conteúdos subjacentes quando a situação didática lhe é apresentada.

Assim, a Teoria das Situações Didáticas tem como objetivo o estudo dos fenômenos que vão interferir diretamente no processo de ensino e aprendizagem da matemática, o que permite propor um modelo teórico que vai conduzir o processo de construção, a análise e a experimentação de situações didáticas, além de apresentar um dos pontos mais importantes da teoria, que é a noção de *milieu.*

De acordo com Almouloud (2007, p. 42), “o professor é o organizador dos jogos do aluno com o *milieu*, pois ele escolhe as situações didáticas mais adequadas com as quais os alunos devem interagir para encaminhar o processo de aprendizagem.” De acordo com Almouloud, Brousseau propõe três teses:

> 1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu*, que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem;
> 2. O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens;
> 3. Esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. (ALMOULOUD, 2007, p.32)

Nota-se que o referido autor atribui uma importância significativa à organização do *milieu*. Nesse sentido, uma situação didática elaborada a partir da Teoria das Situações Didáticas apresentará situações adidáticas e situações didáticas. Almouloud esclarece que:

> A *situação adidática*, como parte essencial da *situação* didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. (ALMOULOUD, 2007, p.33)

Nisso reside a importância de o professor conhecer e estabelecer a diferença entre a situação adidática e a situação didática e como elas se imiscuem nas realizações didáticas e, consequentemente, no ato de ensinar matemática. A Teoria das Situações Didáticas propõe quatro fases para que uma situação tenha potencial de ensino. As três primeiras referem-se à situação adidática - caracterizada pela fase da ação, a fase da formulação e a fase da validação. A institucionalização, como última fase, caracteriza-se como uma situação didática.

Situação de ação – Deve permitir que o aluno tenha acesso a uma situação e possa agir sobre ela. Deve ser pensada para que essa ação lhe forneça informações do modo como está agindo.

Para Brousseau (2008, p. 25), "a sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender o método de resolução de um problema". Almouloud (2007, p. 37), por sua vez, ratifica que nesta fase o professor "coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar e o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação".

Situação de formulação – Segundo Almouloud (2007), essa fase deve permitir que o aluno seja capaz de se comunicar. Portanto, essa fase deve ser pensada em criar condições para que o aluno possa construir, de modo progressivo, uma linguagem compreensível por todos e que seja capaz de considerar as relações matemáticas que podem ser estabelecidas e que estão envolvidas na situação proposta.

Situação de validação – Almouloud (2007) esclarece que é a fase na qual o aluno deve mostrar a validade do modelo elaborado por ele, ou seja, o aluno é capaz de utilizar mecanismos de prova, mobilizando o saber com essa finalidade. Nesse momento pode-se contestar ou mesmo rejeitar tais proposições. Nessa fase, busca-se o debate sobre as afirmações que estão sendo feitas.

Situação de institucionalização – Para Almouloud (2007), é definida pelo momento em que o professor vai fixar de modo convencional e explícito o estatuto cognitivo do saber, além de explorar esse conhecimento para sua funcionalidade em situações posteriores.

Há nesse momento uma sistematização por meio do professor que trará definições, propriedades e teoremas. Com isso, é necessário que usem uma linguagem matemática mais formalizada.

Ferreira (2016, p. 59) afirma que, nessa fase, “a intenção do professor é declarada. O conhecimento formulado e validado na situação adidática deve ser oficializado diante de uma sociedade, receber a devida importância cultural, e social e estar disponível para uso em situação posterior”.

A partir desta caracterização, pode-se pensar a situação didática como uma confluência de interações do aluno com os problemas que foram pensados e elaborados pelo professor.

Almouloud (2007, p. 42) afirma que “a forma de propor esses problemas ao aluno é chamada de devolução", a qual consiste em fazer com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem, sendo protagonista desse processo, em que o professor atua como mediador.

Com base nesses argumentos, podemos dizer que a Teoria das Situações Didáticas fornece subsídios necessários para compreensão do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nesta pesquisa, iremos propor a organização de uma situação didática, de modo que os alunos possam vivenciar todas as fases propostas por Brousseau (2008).

3.5 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As atividades matemáticas propostas em sala de aula são elaboradas a partir das habilidades dispostas nos documentos oficiais, a exemplo da Base Nacional Comum Curricular (2018), que permite o direcionamento das ações e o modo como cada objeto do conhecimento deve ser explorado.

Cada habilidade apresenta um verbo de comando. Podemos citar como exemplo: calcular, interpretar, identificar, provar, mostrar, representar e etc. Nos deteremos de modo mais aprofundado no verbo “representar”, o qual, para o ensino de matemática, tem desdobramentos bastante significativos no processo de aprendizagem.

De acordo com os estudos propostos por Duval (2012),

> Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra "representação". Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal "representar". Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor [...]. Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. (DUVAL, 2012, p. 267)

É a partir destas discussões que Raymond Duval vai propor a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. O autor entende que um objeto matemático pode possuir diversas representações semióticas e que o aluno precisa reconhecer e mobilizar todas essas representações, pois um registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente (DUVAL, 1999).

Nos estudos propostos por Ferreira (2016, p. 60), a autora destaca que "as representações semióticas se referem a um sistema específico de *signos*, que no âmbito da matemática incluem a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos e as figuras geométricas". No que tange ao conceito de signo, a autora faz dois destaques:

> De acordo com Santaella (1983) Signo "é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma coisa diferente dele". (SANTAELLA, 1983, p.12 *apud* FERREIRA, 2016, p. 60)

Já de acordo com Duval (2011),

> o que constitui qualquer coisa como signo não é a sua utilização com a finalidade de comunicação; é seu emprego por oposição a uma ou várias outras coisas que poderiam ser empregadas em seu lugar na mesma situação. (DUVAL, 2011, p. 71 *apud* FERREIRA, 2016, p. 60)

Ferreira (2016, p. 60) afirma ainda que "a função de uma representação semiótica vai muito além da comunicação. Ela se presta a representar um objeto que só é acessível por representações, que podem até mesmo ser confundidas com o próprio objeto".

Almouloud (2007, p. 72) reforça essa ideia ao afirmar que: "falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão da matemática". Por isso, é necessário que o professor possa explorar os vários registros de um mesmo objeto matemático nas atividades que serão propostas em sala de aula. Sobre este aspecto Duval afirma que:

> É essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. (DUVAL, 2012, p. 267)

No universo matemático, são vários os exemplos que são capazes de ilustrar a necessidade de utilizar, além do registro algébrico, outros registros de representação semiótica, para que todos os aspectos do objeto matemático em estudo possam ser revelados.

Tomamos como exemplo o objeto do conhecimento Função Afim, que é foco de análise em nossa pesquisa. Se o professor apresenta apenas o registro algébrico, o aluno pode compreender que a Função Afim se resume exclusivamente àquela representação, mas, se por outro lado, ele permite que o aluno tenha acesso aos registros gráficos, tabulares ou em língua natural, esse repertório é nitidamente ampliado.

Almouloud (2007, p. 80) reforça que “o objeto matemático “função” pode ser representado por quatro registros de representação semiótica: registro das tabelas, das fórmulas algébricas, gráfico e simbólico”. É possível visualizar a estruturação deste pensamento na figura a seguir.

Figura 4 - Tipos de registros do objeto matemático “Função”

1 – Função

- registro das tabelas de valores:

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	3	0	-1	1	5,5

- registro das fórmulas: $f(x) = \dfrac{3x + \sqrt{|x - 2|}}{x^2 + 1}$
- registro gráfico ou de desenho
- registro simbólico: $f,\ f + g,\ f' \ldots$

Fonte: Almouloud (2007, p. 81)

Por diversas vezes, Duval (2012) e Almouloud (2007) reforçam a necessidade de explorar os mais diversos registros, para que o aluno não venha a confundir o objeto com as suas representações. Isto permite que o aluno seja capaz de reconhecer todas as representações possíveis de um mesmo objeto.

Duval (2003) classifica os registros de representação semióticas em dois tipos diferentes. Essa diferenciação está ligada à possibilidade das transformações existentes e às diferentes operações que são propiciadas em cada registro. Pode-se observar no quadro abaixo as diferentes classificações estabelecidas pelo autor, as quais nos permitem compreender que cada registro possui pelo menos duas categorias distintas, a saber: discursivas e não discursivas, multifuncionais e monofuncionais.

Quadro 4 - Classificação dos diferentes registros que podem ser mobilizados na atividade matemática

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: ● argumentação a partir de observações, de crenças…; ● dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). ● Apreensão operatória e não somente perceptiva; ● Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: ● Numéricas (binária, decimal, fracionária…); ● Algébricas. ● Simbólica (línguas formais). ● Cálculo	Gráficos cartesianos: ● mudanças de sistemas de coordenadas; ● interpolação e extrapolação.

Fonte: DUVAL (2003, p. 14)

Em síntese, as representações discursivas possuem a articulação do discurso, o que dispensa a necessidade de apoio para a sua compreensão. O mesmo não ocorre com as representações não discursivas que precisam do apoio de outro registro, mas especificamente o registro em Língua Materna, para dar-lhe o sentido desejado.

Nos estudos propostos por Duval, além de destacar a necessidade de explorar as representações semióticas, por considerá-las essenciais à atividade cognitiva do pensamento e por desempenharem o papel na produção do conhecimento e no desenvolvimento das representações mentais, o autor destaca que:

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada **"semiose"** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **"noesis"** a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da **semiose**. (DUVAL, 2012, p. 270)

A partir dos esclarecimentos que esse autor propõe, o artifício de recorrer a vários registros torna-se uma necessidade compreensível, para que os estudantes não confundam o objeto matemático com as suas respectivas representações, além de proporcionar o reconhecimento em cada uma delas.

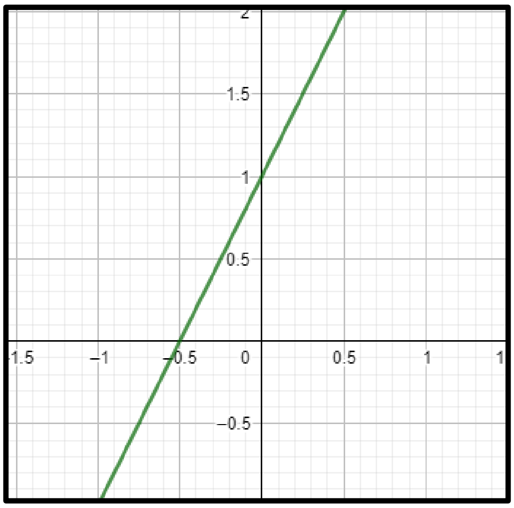
Desse modo, segundo Duval (2012), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, o tratamento e a conversão, definidas por ele como:

> **O tratamento** (grifo nosso) de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. Há, naturalmente, regras de tratamento próprio a cada registro. Sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro a outro: regras de derivação, de coerência temática, associativas de contiguidade e de similitude.
> A **conversão** (grifo nosso) de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conservação é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). A ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. (DUVAL, 2012, p. 272)

Observemos o exemplo a seguir, que pede que seja encontrada a raiz de uma função afim. Esta simples solicitação permite identificar o tratamento acompanhado de uma conversão, com o intuito de evidenciar a diferença entre as duas atividades cognitivas que fazem relação direta com a semiose.

Dada a função $f(x) = 2x + 1$, para encontrar a raiz ou o zero de uma função, $f(x)$ corresponde ao valor de x que anula a função. Então, para encontrarmos a raiz de $y = f(x)$, basta fazer $f(x) = 0$. Nesse caso o aluno precisará fazer um tratamento, que acontece internamente ao registro algébrico.

Quadro 5 - Tratamento acompanhado de conversão

Registro Algébrico		Registro Gráfico
Seja a função $f(x) = 2x + 1$. Para encontrar o zero da função é necessário ter $f(x) = 0$. Substituindo na função temos: $f(x) = 2x + 1$ $0 = 2x + 1$ $2x = -1$ $x = -\frac{1}{2}$ TRATAMENTO	Conversão	

Fonte: o autor.

Na representação gráfica, a raiz da função corresponde à abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo x.

No quadro 05, a função representada algebricamente por $f(x) = 2x + 1$ sofreu uma transformação do tipo tratamento para que fosse possível encontrar a raiz da função igual a $x = -\frac{1}{2}$. É possível perceber que, apesar do tratamento dado na representação algébrica da função, não houve alteração de registro.

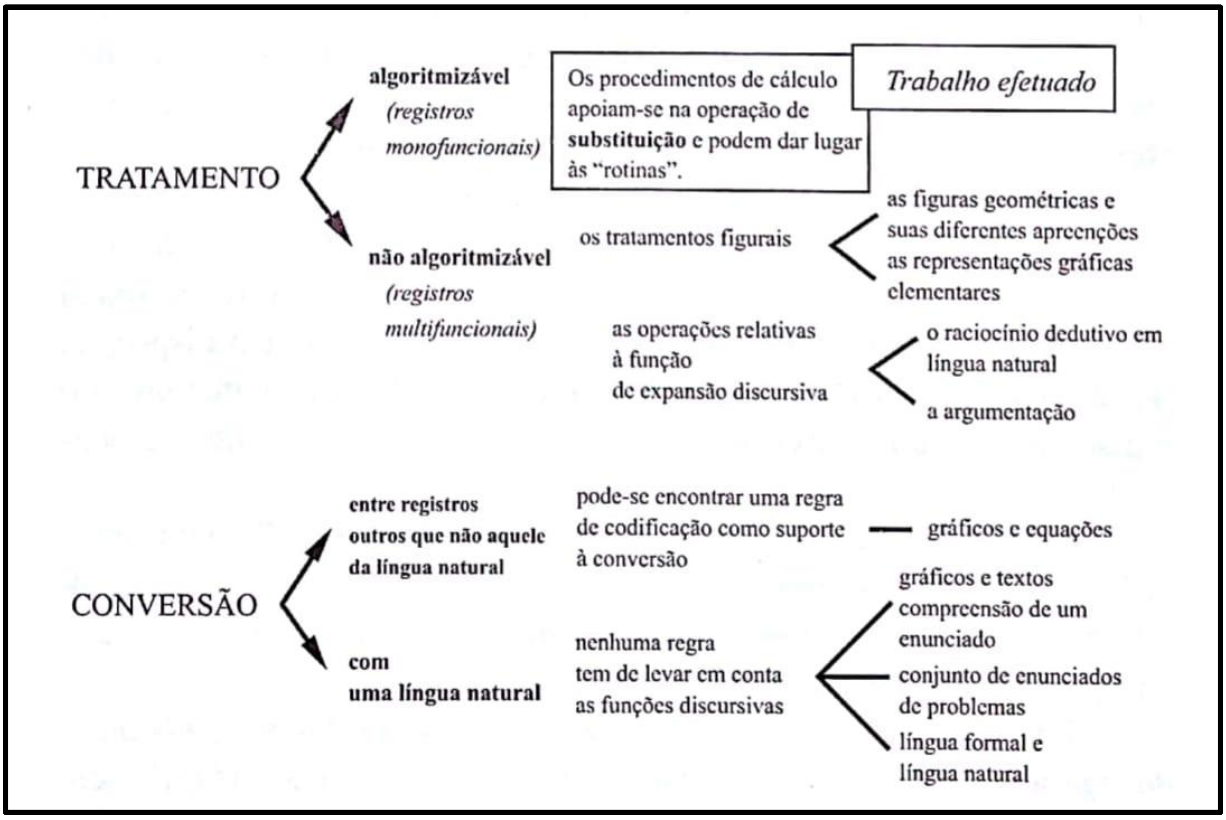
No entanto, quando ocorre a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, o aluno precisa considerar os eixos coordenados. Para encontrar o zero da função no gráfico, será necessário observar o ponto em que a reta intercepta o eixo das abscissas, caracterizado por um par ordenado, e que existe uma relação entre a ordem da abscissa e a da ordenada com os eixos cartesianos.

Para compreender melhor o que é uma conversão, Almouloud (2007) elenca dois aspectos que devem ser levados em consideração:

> 1. Toda conversão tem um sentido a ser considerado. Efetuar a conversão em um sentido não significa que seja possível efetuá-la no sentido inverso. Por essa razão, é necessário sempre indicar qual o registro de partida e o de chegada; caso contrário, haverá risco de abuso de linguagem ou desvio conceitual.
> 2. Não se deve confundir o conteúdo da representação com o objeto representado, embora o registro permita explicitar ou revelar propriedades do objeto. Converter uma representação é, então, mudar o conteúdo e não somente a forma. (ALMOULOUD, 2007, p. 73)

Disso decorre a necessidade de estabelecer as diferenças entre o que de fato é do tratamento e o que pertence à conversão, quando estabelecidos nos processos desenvolvidos na análise cognitiva em didática da matemática. Almoloud (2007) estabelece essas diferenças na figura a seguir.

Figura 5 - Esquema para estabelecer os procedimentos do tratamento e da conversão



Fonte: Almouloud (2007, p. 73)

A figura nos permite compreender que existem tratamentos que podem ser algoritmizáveis e outros que não podem ser reduzidos a algoritmos. Almouloud (2007) constata que no ensino da matemática há uma supervalorização de tratamentos que podem ser transformados em algoritmos, a exemplo de operações aritméticas, como a escrita decimal, resolução de equações, sistema de equações e etc.

Desse modo, fica caracterizado que os tratamentos que não podem ser reduzidos a algoritmos são poucos explorados e geralmente são aqueles que os alunos apresentarão maiores dificuldades ou incompreensão. Referimo-nos aqui aos tratamentos figurais, como as figuras geométricas, gráficos e esquemas.

No que tange à conversão, Duval (2012) destaca que casos de congruência e não congruência entre registros de representação semióticas são o que determina o caráter natural ou arbitrário de uma conversão. Sobre este conceito, Almouloud (2007, p. 74) esclarece que: "Pode-se dizer que a congruência corresponde ao fato de a representação de partida ser mais ou menos 'transparente' em relação à representação de chegada."

Duval, por sua vez, elencou três critérios que permitem a determinação do grau de congruência ou de não congruência entre os registros, são eles:

> 1. A possibilidade de uma correspondência "semântica" de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
> 2. A univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
> 3. A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão.
>
> Estes três critérios permitem determinar o caráter congruente ou não congruente da conversão a ser efetuada entre duas representações semióticas diferentes, e que representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. (DUVAL, 1993 *apud* DUVAL, 2012, p. 284)

Almouloud (2007, p. 74) ratifica a importância da conversão, pois esta se configura como um "dos pontos delicados e decisivos da aprendizagem na matemática no Ensino Básico, Fundamental e Médio, e as dificuldades relacionadas podem persistir até o início da universidade, caso esse aprendizado não tenha sido adequadamente tratado."

Do mesmo modo que temos os tratamentos internos ao registro algébrico, existem os tratamentos das representações gráficas que, de acordo com Duval (2011), são: abordagem ponto a ponto, abordagem de extensão do traçado efetuado e a abordagem de interpretação global das propriedades figurais.

Todos os tratamentos têm sua importância, mas há um destaque especial para a interpretação global das propriedades figurais que Duval explica da seguinte forma:

> O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um **objeto** descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder** a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um**

> **ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica".** (DUVAL, 2011, p. 99)

Desse modo, é necessário que o estudante possa perceber que uma variável visual de representação está atrelada a uma unidade simbólica da expressão algébrica. O que Duval (2011) chama de unidades significativas, presente no registro simbólico algébrico, tem correspondência com cada um dos símbolos, tomemos como exemplo: >,<, =, a variável, os símbolos de operações e sinais + e -, etc. Com isso pretendemos que o aluno seja capaz de "[...] corresponder variáveis visuais pertinentes do gráfico com unidades significativas da expressão algébrica" (DUVAL, 2011, p. 100).

Isto nos permite compreender que o estudante precisa perceber que, quando alteramos o registro simbólico algébrico, isso repercute no registro gráfico e vice-versa. Disso decorre a necessidade de identificar as unidades significativas próprias a cada registro. Duval reforça que:

> Não pode haver utilização correta das representações gráficas cartesianas sem a discriminação explícita das variáveis visuais pertinentes e sem uma correspondência sistematicamente estabelecida entre os valores dessas variáveis e as unidades significativas da expressão algébrica. Ignorando a especificidade e a importância da abordagem de interpretação global, o professor não consegue atingir o objetivo de uma utilização correta dos gráficos cartesianos para a maioria dos alunos do primeiro ano do ensino médio (15 a 16 anos). Além disso, as pesquisas didáticas deixam de contar com um meio importante de compreensão dos erros observados. (DUVAL, 2011, p. 104)

O referido autor mostra em seus estudos as variáveis visuais de uma reta no plano cartesiano, conforme Tabela 01 a seguir:

Tabela 1 - Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita. OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical;

	- o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical; OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem.**

Fonte: DUVAL (2011).

Conforme descrito na tabela, pode-se perceber que as variáveis visuais têm o potencial de assumir valores diferentes. A primeira variável visual assume dois valores e a segunda a terceira assumem três valores, totalizando oito variáveis visuais que estão atreladas à representação gráfica da função afim.

Sobre este aspecto, Duval (2011, p. 101) ratifica que “A cada uma dessas oito variáveis visuais particulares corresponde uma unidade significativa na expressão algébrica da reta: o que importa na expressão y = ax + b é o coeficiente a e a constante b”.

Tabela 2 - Valores e variáveis visuais para y = ax + b no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. Escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval, 2011

Ao analisarmos a primeira variável visual, apresentada na Tabela 02, nota-se que esta faz referência ao sentido da inclinação do traçado e relaciona-se com duas unidades significativas – coeficiente a>0, ou a<0 – as quais determinarão se a linha sobe da esquerda para a direita ou se a linhas desce da esquerda para a direita.

A segunda variável tem relação com o ângulo formado pelo traçado com os eixos, que também tem relação com o coeficiente angular. Se a=1, obtém-se no registro gráfico uma partição simétrica, Se $1 < a < -1$, é possível observar que o ângulo que se forma com o eixo horizontal é maior que o que é formado com o eixo vertical e, por fim, quando $-1 < a < 1$, porém diferente de 0, “[...], o ângulo formado com o eixo horizontal é menor que o ângulo formado com o eixo vertical” (DUVAL, 2011, p. 101).

A terceira variável visual Tabela 02 dá conta da posição do traçado e sua relação com a origem do eixo vertical, tendo correspondência com três unidades simbólicas significativas: quando o coeficiente linear é somado, o traçado encontra-se acima da origem; quando o coeficiente linear é subtraído, logo ele será negativo e o traçado passará abaixo da origem; e quando esse coeficiente linear é nulo, o traçado passará pela origem.

Neste momento, fica mais nítido que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica vem iluminar a face oculta da matemática, o que está nas entrelinhas, o que está por se revelar e evidenciar, de modo significativo, possibilidades para compreender e investigar as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Além disso, ela contribui amplamente no desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de análise, além de facultar a possibilidade de visualizar o objeto matemático em estudo pelos mais diversos tipos de registros de representação.

Se é importante para o aluno reconhecer todas as representações possíveis de um mesmo objeto matemático, o professor precisa articular todas essas possibilidades nas atividades que são levadas para a sala de aula.

3.6 SALA DE AULA INVERTIDA E O GEOGEBRA NA AULA DE MATEMÁTICA

As mudanças promovidas na educação escolar pela Pandemia da Covid-19 nos últimos dois anos permitiram que processos educativos fossem mediados de modo intenso pelas tecnologias digitais, além de escancarar as desigualdades sociais e a falta de acesso a elas de boa parte da população economicamente vulnerável.

É indubitável que estamos cercados pela tecnologia, e os estudantes vivem em contato perene com o contexto digital. Quando articulamos a sala de aula invertida com o software matemático Geogebra, criamos um cenário que pode contribuir de modo significativo no ensino e aprendizagem, o que permite ao professor criar possibilidades de entendimento, interação e um ambiente eminentemente investigativo durante as aulas de matemática.

Moran, Manseto e Behrens afirmam que:

> A prática pedagógica do professor precisa desafiar os alunos a buscarem uma formação humana, crítica incompetente, alicerçada na visão holística, como abordagem Progressista e no ensino com pesquisa que levar ao aluno a aprender. O aprendizado deve ser impulsionado pela curiosidade, pelo interesse, pela crise, pela problematização e pela busca de soluções possíveis para aquele momento histórico com avisando que não são respostas únicas, absolutas e inquestionáveis. (MORAN, MANSETO e BEHRENS, 2013, p. 91)

As discussões sobre metodologias ativas emergiram com muita força no cenário educacional atual, com o intuito de tornar o processo de ensino e aprendizagem ainda mais significativo. Pode-se pensar as metodologias ativas como estratégias de ensino centradas no aluno, de modo a permitir a sua participação ativa na construção do conhecimento, o que converge com a definição de *milieu* adotada por Brousseau (2008) na Teoria das Situações Didáticas.

Baseado nessa premissa, espera-se que o aluno possa interagir com o conteúdo que está mobilizando e possa aprender de forma ativa através da pesquisa, de questões que emergem nesse momento de busca e construção de novas aprendizagens. No que se refere ao professor, ele passa a mediar caminhos coletivos e individuais para promover um ambiente propício à construção do conhecimento matemático.

> A centralidade no aluno é uma das características mais evidentes das Metodologias Ativas, quase todas as definições e discussões sobre os Métodos Ativos trazem essa necessidade de trazer o estudante para o centro do processo de ensino e aprendizagem como algo inerente aos Métodos Ativos. Colocar o discente no centro da aprendizagem consiste em compreendê-lo como sujeito histórico, valorizando suas experiências, saberes e opiniões, planejando e organizando as situações de aprendizagem de forma que a ação do estudante esteja focalizada. (FILHO, NUNES E FERREIRA, 2020, p. 173)

O ensino híbrido oferta modelos que facultam ao professor várias possibilidades, são eles: modelos de rotação, que abrangem rotação por estações, laboratório rotacional, sala de aula invertida. Modelo flex; modelo à la carte e modelo virtual enriquecido, como podemos ver na figura a seguir.

Figura 6 - Ensino híbrido

Fonte: Christensen; Horn; Staker (2013, p. 28)

Dentre as propostas sugeridas no ensino híbrido, fazemos destaque aos modelos de rotação, especificamente a sala de aula invertida, que será adotada nesta pesquisa.

> **Modelos de rotação:** os estudantes revezam as atividades realizadas de acordo com um horário fixo ou orientação do professor.
> **Rotação por estações:** os estudantes são organizados em grupos, cada um dos quais realiza uma tarefa, de acordo com os objetivos do professor para a aula em questão. Podem ser realizadas atividades escritas, leituras, entre outras. Um dos grupos estará envolvido com propostas on-line que, de certa forma, independem do acompanhamento direto do professor.
> **Laboratório rotacional:** os estudantes usam o espaço da sala de aula e laboratórios. O modelo de laboratório rotacional começa com a sala de aula tradicional, em seguida adiciona uma rotação para computador ou laboratório de ensino. Os laboratórios rotacionais frequentemente aumentam a eficiência operacional e facilitam o aprendizado personalizado, mas não substituem o foco nas lições tradicionais em sala de aula.
> **Sala de aula invertida:** nesse modelo, a teoria é estudada em casa, no formato on-line, e o espaço da sala de aula é utilizado para discussões, resolução de atividades, entre outras propostas. O que

> era feito em classe (explicação do conteúdo) agora é feito em casa, e o que era feito em casa (aplicação, atividades sobre o conteúdo) agora é feito em sala de aula. Esse modelo é valorizado como a porta de entrada para o ensino híbrido e nele há um estímulo para que o professor não acredite que essa seja a única forma de aplicação de um modelo híbrido de ensino, a qual pode ser aprimorada.
> **Rotação individual:** cada aluno tem uma lista das propostas que deve contemplar em sua rotina para cumprir os temas a serem estudados. Aspectos como avaliar para personalizar devem estar muito presentes nessa proposta, uma vez que a elaboração de um plano de rotação individual só faz sentido se tiver como foco o caminho a ser percorrido pelo estudante de acordo com suas dificuldades ou facilidades (BACICH *et. al.* , 2015. p. 74).

Dos modelos apresentados anteriormente, destacamos a sala de aula invertida como modelo adotado para a realização da nossa pesquisa. O leitor pode questionar por que a sala de aula invertida foi escolhida? Durante o tempo escola os estudantes têm atividades nos três turnos, para garantir a carga horária inerente à escola do campo com pedagogia de alternância.

No turno diurno, há acompanhamento de professores; no noturno são realizados grupos de estudos, momentos em que os estudantes realizam as atividades propostas pelos professores, em grupo. Desejamos com a sala de aula invertida qualificar esse momento que acontece no turno noturno, nos quais os estudantes sejam protagonistas dos processos propostos, pois estes acontecem sem a supervisão do professor.

O segundo questionamento relaciona-se com o fato da sala de aula invertida ter sido aplicada no tempo escola e não no tempo comunidade. O principal motivo seria o tempo de 30 dias para acontecer o processo de institucionalização, que de acordo com Almouloud (2007, p.40) “quando feita após o momento adequado, reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta aplicações”.

O conceito de sala de aula invertida, de acordo com Moran (2017), pode ser ampliado ao permitir a transformação de outros espaços físicos, virtuais, assim como a sala de aula em um lugar de aprendizado. Para este autor, as tecnologias digitais podem facilitar e ampliar a pesquisa on-line, a possibilidade de atualizar materiais didáticos, o processo comunicativo entre todos os envolvidos no processo educativo, para além dos muros da escola.

O autor ressalta ainda que a sala de aula invertida é um modelo propício para mesclar com as tecnologias digitais e permite que as informações básicas sejam concentradas no virtual e para a sala de aula, atividades supervisionadas, projetos, jogos, problemas e desafios.

Para (BERGMANN e SAMS, 2012, p. 34), “O conceito básico de inversão da sala de aula é fazer em casa o que era feito em aula, por exemplo, assistir palestras e, em aula, o trabalho que era feito em casa, ou seja, resolver problemas.”

Os potenciais evidenciados nos estudos de Bergmann e Sams (2012) sobre a sala de aula invertida permitem transpor e explorar todas as possibilidades de aprendizagem em uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância em regime de internato, a qual é nosso lócus de investigação.

Desse modo, no contexto desta pesquisa, a sala de aula invertida permitirá explorar de modo mais sistemático o grupo de estudos (momento destinado para que os alunos possam revisar as disciplinas), que é desenvolvido no turno da noite, além de garantir o acesso dos alunos às tecnologias necessárias para o desenvolvimento das atividades elencadas.

Baseados nesta definição, pode-se perceber que as modalidades *on-line* e presencial conectam-se para possibilitar uma experiência de aprendizagem integrada, já que no turno da noite os grupos de estudos acontecem sem a supervisão dos professores, o que nos permite explorar os potenciais da sala de aula invertida para criar condições do aluno desenvolver autonomia e protagonismo no processo de construção do conhecimento.

3.6.1 O Geogebra

Atrelado à sala de aula invertida, que já pressupõe o uso de tecnologias digitais, destacamos o software Geogebra por apresentar uma gama de possibilidades de exploração do objeto em estudo, Função Afim, além de permitir visualizar de modo dinâmico todos os possíveis registros de representação semiótica propostos por Duval (2009).

O Geogebra é um software de matemática dinâmica, gratuito criado por Markus Hohenwarter, em 2001, com objetivo de ser utilizado no ensino de matemática nas escolas. Tem indicações de utilização no Ensino Fundamental, Médio e Superior e pode ser explorado pelo professor como um recurso para ampliar as possibilidades de aprendizagem em matemática.

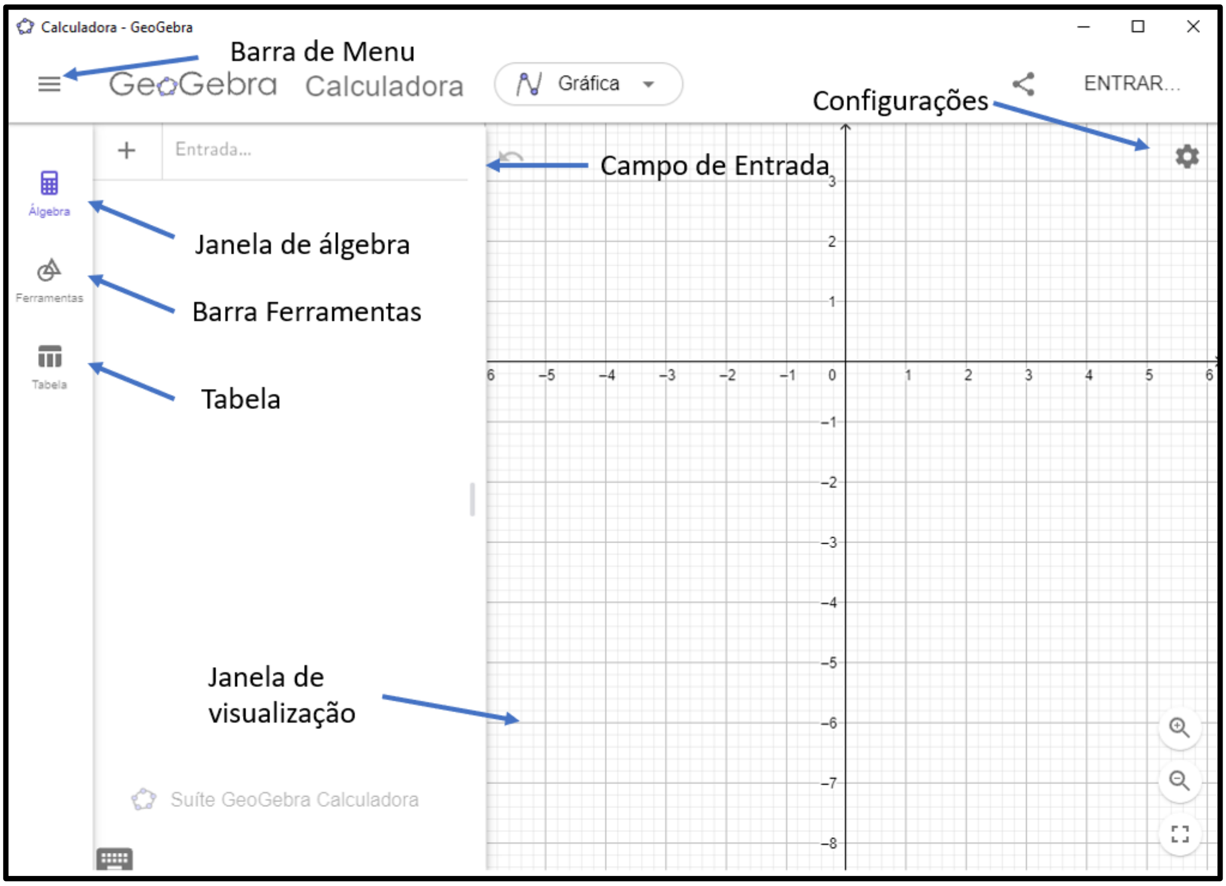
Por permitir uma visualização imediata dos registros de representação semiótica que serão exploradas, por apresentar uma interface amigável, pode ser utilizado com facilidade pelos alunos, inclusive no *smartphone* (celular), um aparelho que faz parte da vida cotidiana dos estudantes que estão em regime de internato e utilizam a ferramenta para comunicação com seus familiares.

Se o smartphone já é uma realidade da sala de aula, vamos explorá-lo de modo significativo. Pode-se citar como exemplo a inserção da representação algébrica da Função Afim no Geogebra, que permite imediatamente a visualização de sua representação gráfica. Caso o registro utilizado seja tabular, através da planilha eletrônica, que deve conter as coordenadas de alguns pontos que pertencem ao gráfico do objeto matemático em estudo, do mesmo modo que ao realizar alterações no gráfico, imediatamente podem ser visualizadas na janela algébrica e na planilha.

Diante das características apresentadas, é possível notar que o Geogebra é um software autoexplicativo, adequado para todos os níveis de ensino, cujo objetivo principal é explorar conteúdos matemáticos através dos recursos disponíveis.

Ao abrir o Geogebra, seja qual for o dispositivo eletrônico, aparecerá uma janela (Figura 07) com uma interface intuitiva, constituída por uma barra de menu, janela de álgebra, janela de visualização, campo de entrada, configurações e tabelas.

Figura 7 - Interface do Geogebra



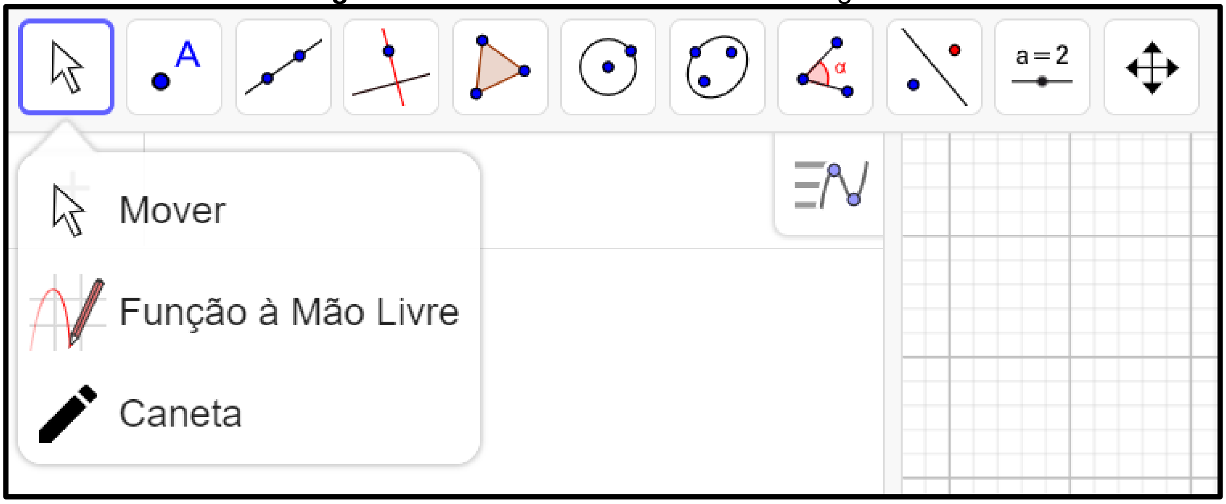
Fonte: Geogebra.

A janela de visualização é composta pelos eixos cartesianos e a malha quadriculada, que podem ser ocultados. Essa janela é destinada à construção de registros geométricos, além de conter os eixos cartesianos. À esquerda, na parte superior, encontramos a janela de álgebra responsável pelos registros algébricos, onde podem ser inseridas as equações, as coordenadas do ponto, os comandos das funções, a qual está associada à janela de visualização e permite que o aluno visualize a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

A barra de menu apresenta as opções de Limpar Tudo, Abrir, Gravar, Compartilhar, Exportar Imagem, Baixar Como, Visualizar Impressão, Modo Exame, Trocar de Calculadora, Configurações e Ajuda & Feedback, funções associadas às ações que podem ser feitas com as construções elaboradas.

A Barra de Ferramentas, disposta na parte superior do Geogebra, apresenta doze conjuntos de ícones com as ferramentas que permitem ao estudante realizar as construções, movimentações, obtenção de medidas, além de permitir a modificação de atributos dos objetos construídos ou em construção (Figura 08). O contorno azul dá ênfase à ferramenta que está ativa. Para ativar qualquer ferramenta é necessário clicar em seu ícone.

Figura 8 - Barra de Ferramentas do Geogebra



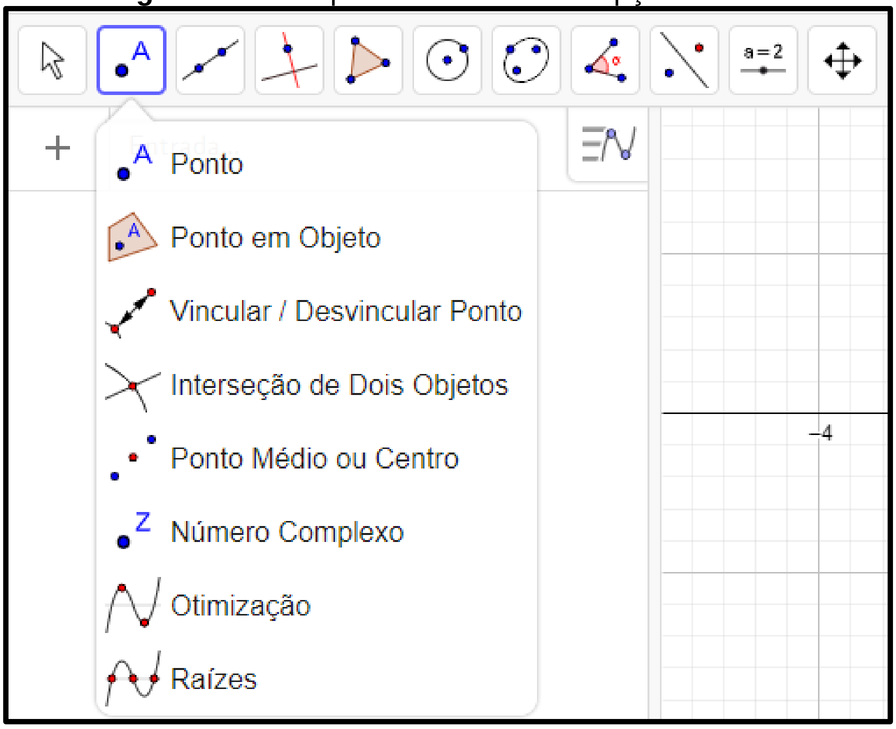
Fonte: Geogebra.

Ao clicar no primeiro ícone, destacado em azul, conforme a figura 08, ativa-se o conjunto de ferramentas de manipulação.

- **Mover:** Botão que permite mover, arrastar ou selecionar um objeto;
- **Função à Mão Livre:** Ferramenta possibilita a construção de um desenho de uma função ou um objeto geométrico;
- **Caneta:** Possibilita a escrita, desenho ou mudança de configurações usando a barra de estilos.

O segundo ícone, agora destacado em azul, apresenta um conjunto com 08 funções, como é possível observar na figura 08.

Figura 9 - Ícone ponto e a cortina de opções

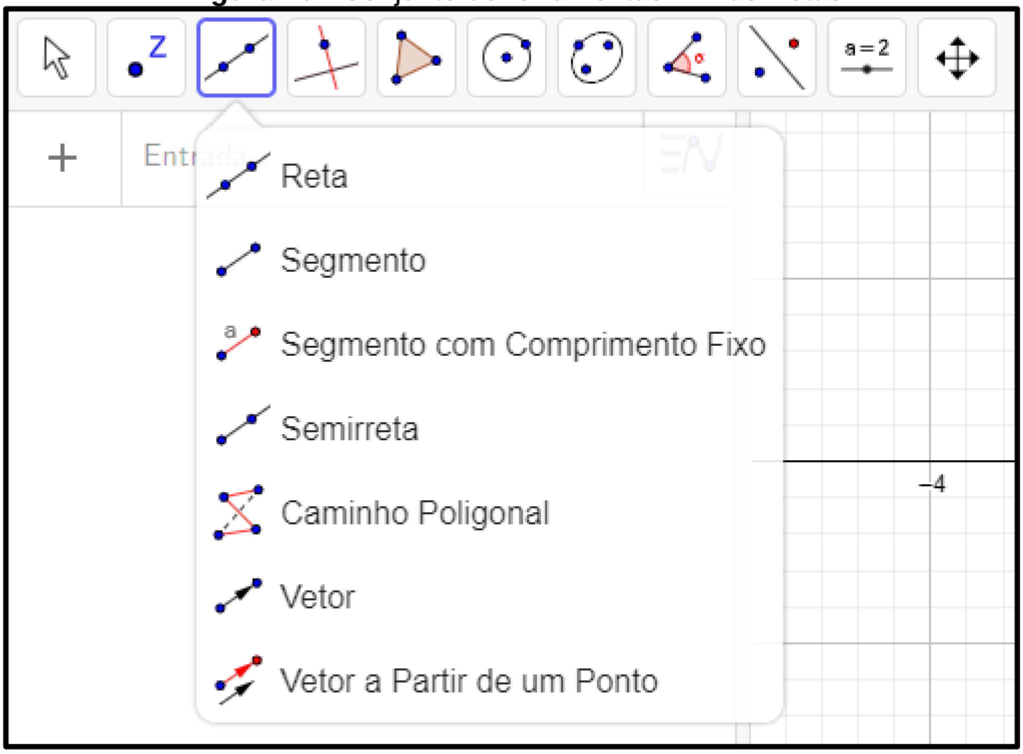


Fonte: Geogebra

- **Ponto:** Este botão permite interação direta com a janela geométrica, ao clicar na janela, imediatamente cria-se um novo ponto. Assim que o ponto é criado, é possível verificar na janela de álgebra as respectivas coordenadas.
- **Ponto em Objeto:** Ao clicar em uma reta, segmento ou seção cônica, cria-se pontos nesses objetos.
- **Intersecção de Dois Objetos:** O ponto de intersecção entre dois objetos pode ser observado quando se clica em dois objetos, a função ativa todos os pontos em comum.
- **Ponto Médio ou Centro:** Esta ferramenta permite obter o ponto médio em um segmento de reta. Caso o objeto seja uma cônica, é possível obter seu centro.
- **Vincular/Desvincular Ponto:** Este botão tem a função de vincular ou desvincular um ponto em um objeto.
- **Número Complexo:** Este botão permite a criação de um ponto com números complexos.

O terceiro ícone apresenta um conjunto de ferramentas e está associado às Linhas Retas. Ele permite a construção de linhas retas, retas, semirretas, segmentos de retas e vetores. Ao clicar no ícone, teremos a visão conforme a figura 10.

Figura 10 - Conjunto de ferramentas Linhas Retas



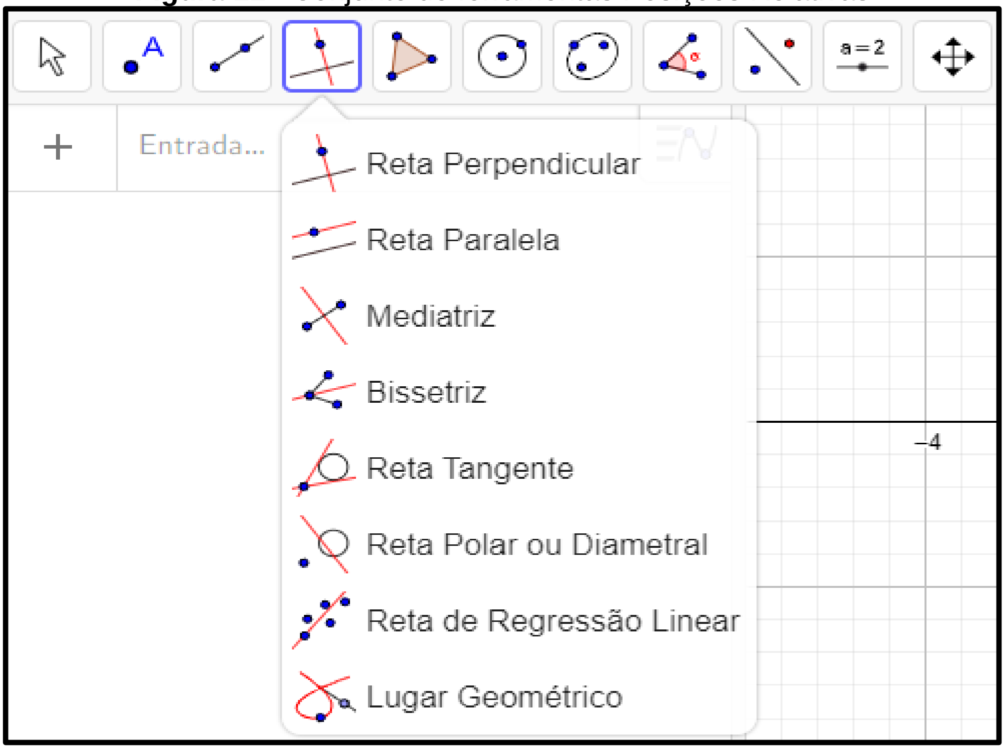
Fonte: Geogebra.

- **Reta:** Este botão permite a construção de uma reta e, para isto, é necessário clicar em dois pontos na janela de visualização. De modo instantâneo, surge na janela de álgebra a equação da reta.
- **Segmento:** Ao selecionar esta opção, deve-se clicar em dois pontos na janela de visualização, e o segmento cujas extremidades são os pontos escolhidos aparecerá.
- **Segmento com ponto fixo:** Quando esta ferramenta é selecionada, deve-se clicar no ponto desejado na janela de visualização. Com o primeiro clique, define-se a origem do segmento; em seguida, digita-se a medida do o comprimento desejado em uma janela automática.
- **Semirreta:** Esta ferramenta permite criar uma semirreta; para isso, é preciso escolher o primeiro ponto clicando na janela de visualização. Com o primeiro clique a semirreta é criada, e deve conter o segundo ponto para ficar fixa.

- **Caminho poligonal:** Este botão permite a construção de um caminho poligonal na janela de visualização. Para finalizar é necessário clicar no ponto inicial.
- **Vetor:** O botão permite construir um vetor. Para obter esse objeto, é necessário selecionar esta ferramenta e, em seguida, clicar em dois pontos na janela de visualização.
- **Vetor a Partir de um Ponto:** esta é a última função do conjunto de ferramentas linhas retas e permite, a partir de um vetor qualquer, construído na janela de visualização, construir outro representante desse vetor a partir de um ponto considerado.

O quarto conjunto de ferramentas "Posições Relativas", oferece oito funções relativas a alguns lugares geométricos importantes nas construções geométricas, como pode ser observado na figura 11.

Figura 11 - Conjunto de ferramentas Posições Relativas



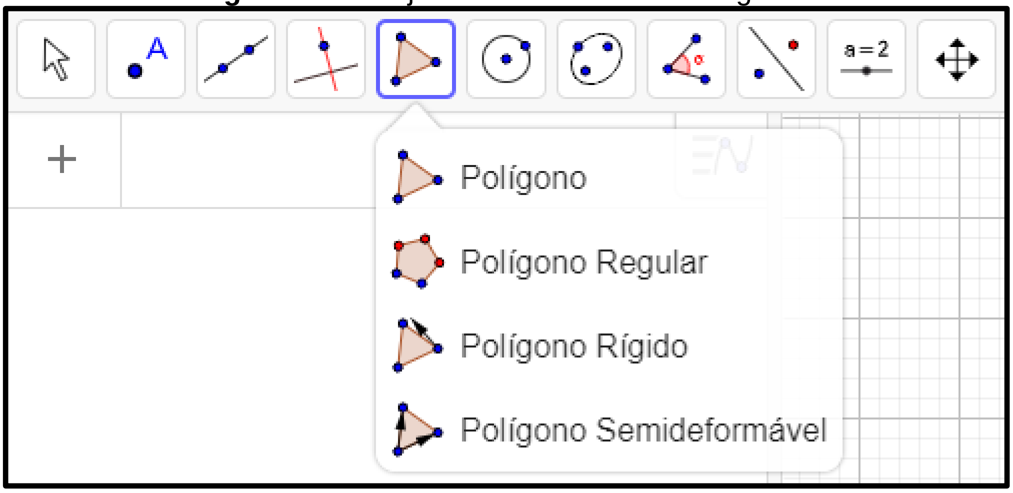
Fonte: Geogebra

- **Reta Perpendicular:** Para construir uma reta perpendicular, deve-se selecionar o primeiro ponto na janela de visualização e, depois, uma reta, um segmento, uma semirreta ou um vetor.

- **Reta Paralela:** Essa ferramenta permite criar uma reta paralela. Para isto é necessário clicar na ferramenta e, em seguida, em uma reta já construída, e em um ponto, desse modo se obtém uma reta paralela a esta reta considerada que passa pelo ponto mencionado.
- **Mediatriz:** Nesta opção, podemos construir uma mediatriz. Basta clicar na ferramenta e, em seguida, clicar nas extremidades de um segmento de reta já construída na janela de visualização**.** Esta reta passa pelo ponto médio e é perpendicular.
- **Bissetriz:** Para a construção de uma bissetriz, basta clicar em três pontos ou em duas retas.
- **Reta Tangente:** Esta ferramenta oferece a possibilidade de construir uma reta tangente a uma cônica e, para isto, podemos selecionar um ponto qualquer e uma cônica ou uma circunferência ou uma função.
- **Reta Polar ou Diametral:** Este botão permite construir uma reta polar ou diametral a uma cônica de duas formas: seleciona-se um ponto e uma cônica ou seleciona-se uma linha ou um vetor e uma cônica.
- **Reta de Regressão Linear:** Esta opção permite encontrar a reta que mais se adequa a um conjunto de pontos.
- **Lugar Geométrico:** Esta ferramenta permite a construção automática do lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc.) ao longo de uma trajetória.

O quinto conjunto de ferramentas ofertado pelo Geogebra está relacionado à construção de Polígonos a partir de pontos já construídos na Janela de Visualização, ou a construção pode ser obtida a partir de pontos criados no momento de uso da ferramenta. São quatro opções de construção, conforme a figura 12.

Figura 12 - Conjunto de ferramentas Polígonos

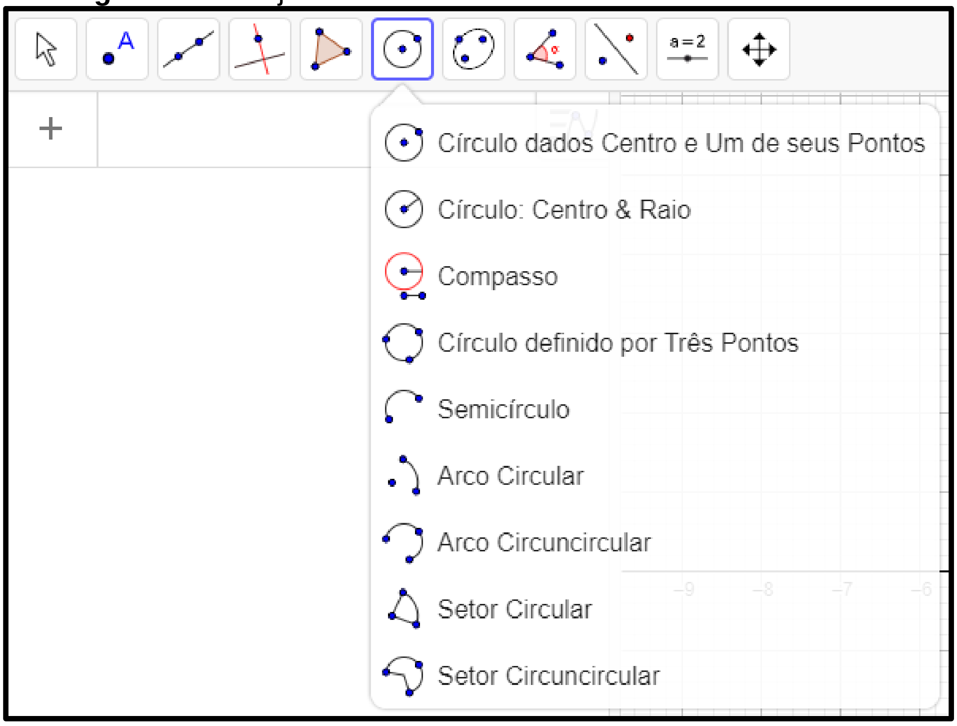


Fonte: Geogebra

- **Polígono:** Para construir um polígono basta clicar na ferramenta Polígono e clicar em pontos à sua escolha na Janela de Visualização. A construção deve ser finalizada clicando novamente no ponto em que a construção foi iniciada.
- **Polígono Regular:** Com esta ferramenta é possível construir um polígono regular a partir de um número natural que indica a quantidade de lados ou vértices. Clica-se em dois pontos, em seguida, o Geogebra carrega uma janela em que se deve digitar um número ou o nome de uma variável que representa a quantidade de vértices.
- **Polígono Rígido:** Esta função permite construir um polígono rígido de n lados, basta clicar no ícone e, em seguida, marcar os 2 vértices do polígono na janela de visualização. O Geogebra abrirá automaticamente com a solicitação de n lados e, após digitar, a construção será concluída. Na janela algébrica é possível encontrar a medida da área do polígono construído.
- **Polígono Semideformável:** Esta opção tem os mesmos procedimentos do ícone anterior. A única diferença é que nesta construção pode-se mudar a forma.

O sexto conjunto está associado às Formas Circulares. Há um conjunto com 9 funções para a construção de círculos, como pode ser observado na figura 12.

Figura 13 - Conjunto de ferramentas Formas Circulares



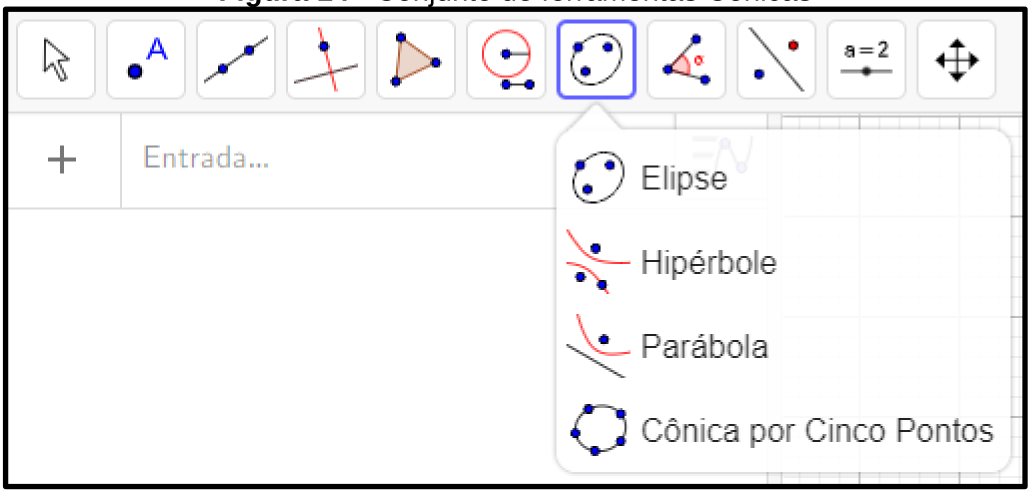
Fonte: Geogebra

- **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** Para fazer uma construção usando esse ícone, é necessário marcar um ponto A e B na janela de visualização e, em seguida, traça-se o círculo com centro em A, que passa por B.
- **Círculo: Centro & Raio:** Essa ferramenta permite a construção ao marcar o centro A; imediatamente o Geogebra abre uma janela automática com solicitação da medida do raio.
- **Compasso:** Esta função permite a construção do círculo a partir de dois pontos criados na janela de visualização, e para fixá-lo clica-se em um dos pontos.
- **Círculo definido por Três Pontos:** Com este botão, pode-se marcar três pontos distintos não colineares, traçando o círculo que passa por eles.
- **Semicírculo:** Esta ferramenta permite a construção a partir de dois pontos A e B, traçando o semicírculo de diâmetro AB.
- **Arco circular:** Com essa função, a construção é obtida com a marcação de três pontos A, B e C. Constrói-se o arco circular com centro em A, com início no ponto B e finaliza-se no ponto C. É importante recordar que o arco é traçado mesmo que o ponto C seja construído fora do arco.

- **Arco Circumcircular:** Nesta opção é possível construir um arco circular com três pontos não colineares**.**
- **Setor Circular:** O setor circular pode ser obtido ao marcar três pontos A, B e C, este setor com centro em A, iniciado no ponto B e finalizado no ponto C. Cabe ressaltar que o arco é traçado mesmo que o ponto C esteja fora do setor.
- **Setor Circuncircular:** Pode ser obtido a partir de três pontos A, B e C não colineares. Traça-se um setor circular por esses pontos.

O sétimo conjunto de ferramentas do Geogbra está associado à construção das secções cônicas, como pode ser observado na figura 13.

Figura 14 - Conjunto de ferramentas Cônicas



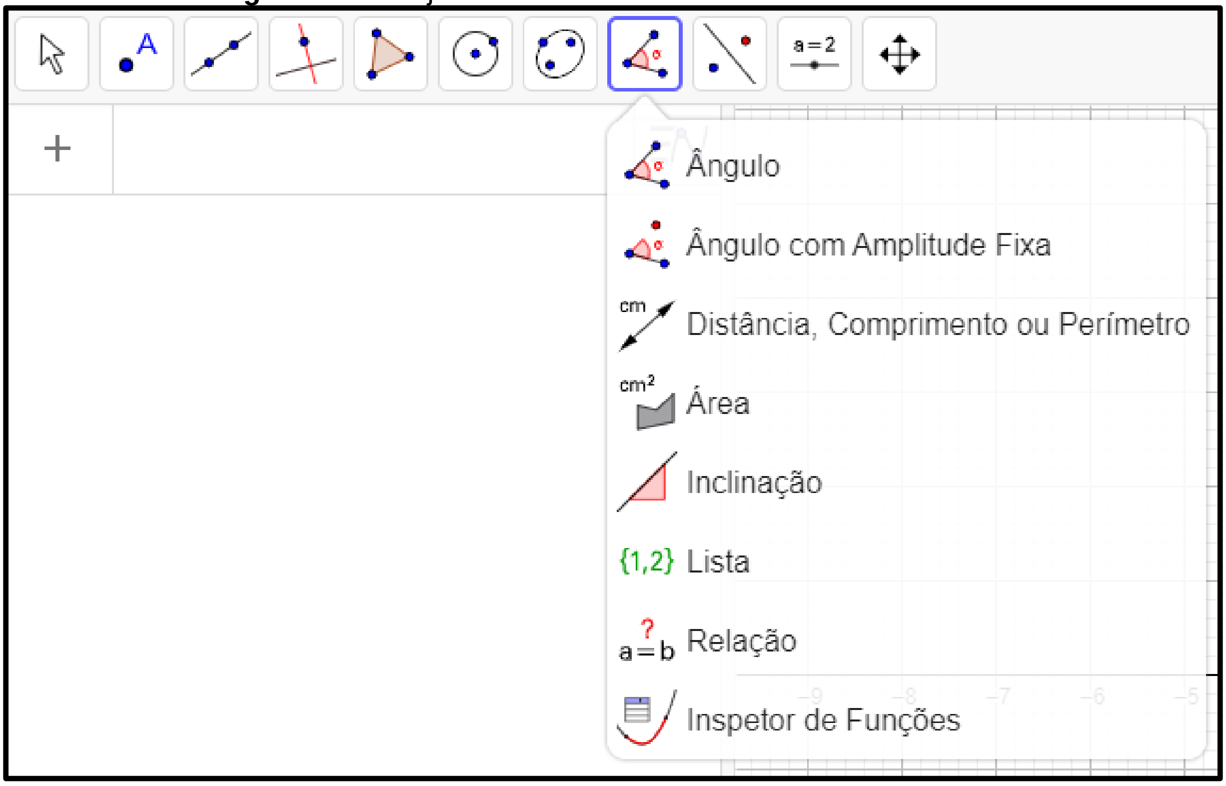
Fonte: Geogebra

- **Elipse:** Para fazer a construção de uma elipse, é necessário selecionar dois pontos, que são os focos da elipse, e em seguida seleciona-se um terceiro ponto, o qual pertencerá à elipse.
- **Hipérbole:** Esta ferramenta permite criar uma hipérbole. Nesta construção é necessário selecionar dois pontos, que assumirão a posição de focos da hipérbole, em seguida, escolhe-se o terceiro ponto que pertencerá à hipérbole.
- **Parábola:** Nesta opção é possível a construção de uma parábola, com o recurso de construção de uma reta, determina-se o foco com o botão parábola na janela de visualização e se obtém esta cônica.

- **Cônicas por Cinco Pontos:** Para a utilização desta ferramenta é necessário a construção de cinco pontos, que podem determinar a cônica que passa por eles. Isto só é possível se quatro dos cinco pontos não forem colineares.

O oitavo conjunto de ferramentas do Geogebra está associado às funções que permitem obter medidas de ângulos, comprimento, área e etc, conforme figura 14.

Figura 15 - Conjunto de ferramentas relacionado a medidas



Fonte: Geogebra

- **Ângulos**: essa ferramenta permite que sejam destacados e medidos os ângulos entre três pontos, entre dois segmentos de reta, duas retas ou semirretas, entre dois vetores além dos ângulos internos ou externos de um polígono.
- **Ângulos com Amplitude Fixa**: Esta opção pode ser utilizada marcando-se dois pontos, em seguida abre uma janela automática que solicita a medida desejada para o ângulo.
- **Distância, Comprimento ou Perímetro**: Essa ferramenta, permite visualizar tanto na janela algébrica como na janela de visualização a distância entre dois

pontos, entre um ponto e uma reta, o comprimento de um segmento de reta, da medida do lado de um polígono ou o perímetro.

- **Área**: Esta opção fornece a medida da área de um polígono, de um círculo ou de uma cônica, basta clicar na ferramenta e na figura desejada.
- **Inclinação**: Esta opção fornece, tanto na janela de álgebra quanto na janela de visualização o coeficiente angular de uma reta, segmento de reta, construída e na janela de visualização. Citamos como exemplo a possibilidade de calcular o coeficiente angular em um triângulo.
- **Lista**: Esta ferramenta cria uma lista das células selecionadas.
- **Relação**: Esta ferramenta permite que se estabeleça a relação entre dois ou mais objetos na janela de visualização. Para isto, basta clicar na ferramenta e em seguida clicar nos dois objetos.
- **Inspetor de Funções**: Esta opção pode ser utilizada para identificar todas as propriedades de uma função, como os pontos de máximo ou de mínimo, raízes e etc.

O nono conjunto de Ferramentas de construção do Geogebra está relacionado às isometrias observadas nos estudos das transformações geométricas e sua abordagem, que tem como objetivo investigar os conceitos de congruência e de semelhança, como pode ser observado na Figura 16.

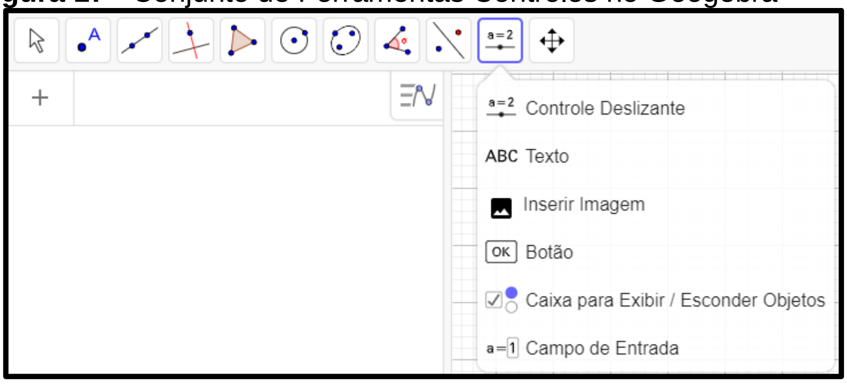
Figura 16 - Conjunto de Ferramentas de transformações geométricas

Fonte: Geogebra

- **Reflexão em Relação a uma Reta:** Este recurso disponibiliza a possibilidade de desenhar um objeto refletido em relação a uma reta. Para realizar esta tarefa, basta clicar no objeto a ser refletido e, em seguida, na reta e imediatamente acontecerá a reflexão.
- **Reflexão em Relação a um Ponto:** A ferramenta possibilita a reflexão de um objeto em relação a um ponto. Para realizar esta tarefa, basta clicar no objeto a ser refletido e, em seguida, no ponto e imediatamente acontecerá a reflexão.
- **Rotação em Torno de um Ponto:** Este recurso permite a rotação de um objeto com relação a um ponto. É necessário clicar no objeto a ser rotacionado, em seguida, clicar no ponto que será utilizado como centro da rotação, e o Geogebra fornecerá uma janela automática solicitando a medida, em graus, do ângulo de rotação.
- **Translação por um Vetor:** Esta opção oferece a possibilidade de transladar um objeto com relação a um vetor. Ao clicar na ferramenta, clica-se em seguida no objeto e no vetor de translação.
- **Homotetia:** Este botão permite ampliar ou reduzir um objeto a partir de um ponto por um determinado fator. Selecionando a ferramenta, é preciso clicar no objeto a ser transportado e, em seguida, no ponto que será o centro da homotetia. Uma janela automática aparecerá com a solicitação do fator.

O décimo conjunto de ícones do Geogebra está associado às ferramentas de exibição que estão vinculadas ao movimento do sistema de eixos, assim como todos os objetos contidos nele, como pode ser observado na figura 16.

Figura 17 - Conjunto de Ferramentas Controles no Geogebra

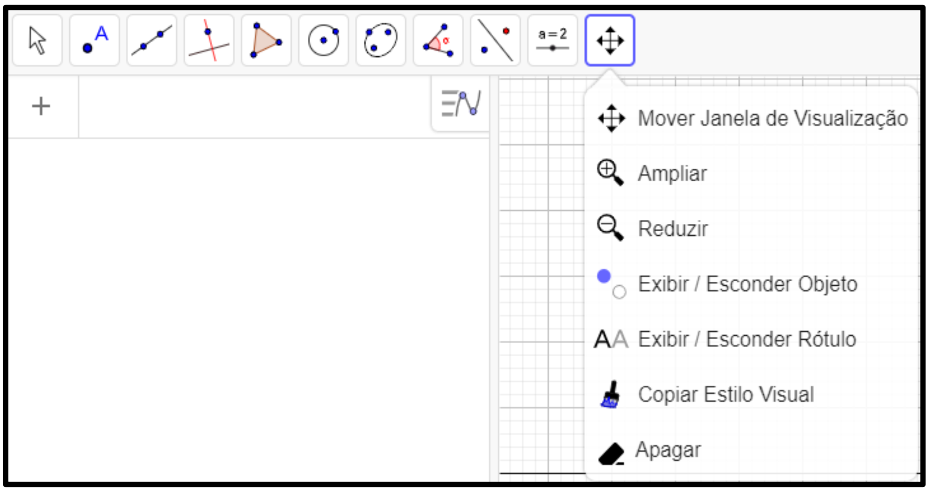


Fonte: Geogebra.

- **Controle Deslizante:** Esta ferramenta permite a criação de um controle deslizante. Ao ativar a ferramenta basta clicar na janela de visualização e o recurso aparecerá, ele permite a variação em objetos de modo manual ou automático, e pode assumir a função de uma variável.
- **Texto:** Esta opção permite a inserção de textos na janela de visualização.
- **Inserir Imagem:** Esta ferramenta permite a inserção de imagens, podemos citar como exemplo a possibilidade dessas imagens serem exploradas com relação aos casos de isometria do décimo conjunto de funções apresentados anteriormente.
- **Botão:** Esta ferramenta permite criar um botão e a ele associar uma ou mais determinadas ações visíveis na zona gráfica (como trocar as coordenadas de um ponto, trocar a posição de uma reta etc.).
- **Caixa para Exibir / Esconder Objetos:** Com esta ferramenta, podemos criar uma caixa e anexar a esta objetos já construídos. Desta forma, ao marcar a caixa, os objetos anexados ficarão visíveis e, ao desmarcá-la, os objetos serão ocultados.
- **Campo de Entrada:** Com esta ferramenta, podemos criar uma caixa de texto para que o usuário possa interagir com o seu trabalho. Para isto, seleciona-se a ferramenta e clicando na zona gráfica criamos um campo de entrada. Logo após, abrirá uma janela interativa e definimos sua legenda e o objeto a ser vinculado. Clica-se em Aplicar para concluir.

O último conjunto de recursos do Geogebra está associado às Ferramentas de Exibição, opções como ampliar, reduzir as construções feitas conforme a figura 17.

Figura 18 - Conjunto de Ferramentas Mover

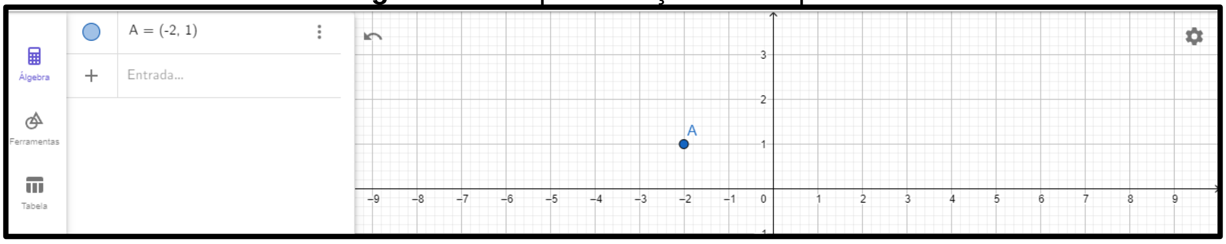


Fonte: Geogebra

- **Mover Janela de Visualização:** Este recurso permite a movimentação dos sistemas de eixos e malha quadriculada, assim como os objetos contidos na janela de visualização, além de permitir o ajuste da janela de visualização.
- **Ampliar:** Esta ferramenta permite ampliar a janela de visualização, e consequentemente amplia-se o objeto em análise e/ou estudo.
- **Reduzir:** Esta opção permite reduzir a janela de visualização, e consequentemente amplia-se o objeto em análise e/ou estudo.
- **Exibir / Esconder Objeto:** Este recurso oferece a possibilidade de esconder um objeto.
- **Exibir / Esconder Rótulo:** Esta ferramenta permite exibir o objeto que já tenha sido escondido.
- **Copiar Estilo Visual:** Ferramenta que permite copiar as propriedades visuais dos objetos construídos, a exemplo de cor, estilo, dimensão, reta, etc.
- **Apagar:** Este recurso permite apagar qualquer objeto, basta clicar na ferramenta e em seguida no item que deseja ser apagado.

Esta breve apresentação do *software* Geogebra nos dá uma dimensão dos recursos que podem ser utilizados no ensino de matemática. Um exemplo simples, em que é possível a observação direta entre o registro algébrico e o registro gráfico é a inserção de um ponto. Para esta tarefa, é necessário que o estudante digite as coordenadas no Campo de entrada ou clique no ícone ponto e, em seguida, clique na malha quadriculada inserindo a função desejada, conforme figura 18.

Figura 19 - Representação de um ponto



Fonte: Geogebra

Ao inserir as coordenadas no campo de entrada, na janela de álgebra, imediatamente a representação gráfica do ponto pode ser localizada na janela de visualização de acordo com as coordenadas estabelecidas. Aqui, é possível observar de modo muito simples e prático a articulação entre o registro gráfico e o registro algébrico e como eles se relacionam.

Como pode ser visto, o uso das tecnologias digitais e seus recursos pode trazer muitas contribuições para o ensino e aprendizagem de matemática, mais especificamente, no ensino de Função Afim, no entanto, é preciso que as atividades propostas permitam o exercício de experimentações, conjecturas, visualizações e demonstrações associadas à coordenação do maior número possível de registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Este capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia utilizada na pesquisa e o processo de construção do produto técnico e tecnológico: sequência didática, que articula sala de aula invertida com uso do software Geogebra para o ensino de função afim na 1ª série do Ensino Médio Integrado. Aqui são apresentadas as variáveis macrodidáticas e microdidáticas que compõem as quatro sessões de ensino e suas respectivas análises a *priori.*

4.1. ENGENHARIA DIDÁTICA

A presente pesquisa adotou pressupostos da Engenharia didática como metodologia de pesquisa e como direcionamento do trabalho pedagógico em sala de aula, pois ela permite uma sistematização metodológica para que a pesquisa possa ser realizada ao levar em consideração as relações de dependência entre a teoria e a prática, além de permitir elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática à luz da Teoria das Situações Didáticas.

A Engenharia Didática foi criada pela pesquisadora Michèle Artigue nos anos 80, somando-se aos trabalhos da Didática da Matemática Francesa propostos por Guy Brousseau, autor da Teoria das Situações Didáticas, por ser capaz de ressaltar os fenômenos didáticos em condições análogas ao funcionamento de uma sala de aula.

De acordo com Artigue (1996),

> A engenharia didática, vista como uma metodologia de investigação, caracteriza-se em primeiro lugar por um desenho experimental baseado em “realizações didáticas” nas aulas, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 246)

É uma metodologia com etapas bem caracterizadas que permite ao pesquisador estruturar todas as fases da pesquisa que irão subsidiar o processo de construção da sequência didática, desde a escolha do objeto matemático a ser estudado, o processo histórico de construção do conceito, bem como a estrutura proposta em uma sequência didática, além de permitir que o professor amplie o domínio de um corpo de conhecimentos teóricos e práticos que devem estar estruturados de modo coerente e mobilizados para que o aluno possa compreender essa estrutura e o processo de construção do conhecimento.

De acordo com Almouloud:

> A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.
> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (ALMOULOUD, 2008, p.5)

Desse modo, a pesquisa adotou como percurso metodológico o esquema experimental proposto pela Engenharia Didática, baseado nas realizações didáticas observáveis em sala de aula, desde o processo de concepção, realização e análises da sequência de ensino.

Essa metodologia caracteriza-se também pelos registros que podem ser feitos durante a aplicação da sequência didática, pelas formas de validação às quais está associada. A validação se efetivará no confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori*.

O esquema experimental da Engenharia Didática apresenta quatro Fases, são elas:

- 1ª FASE: Análises preliminares;
- 2ª FASE: Concepção e análise *a priori* da sequência didática;
- 3ª FASE: Experimentação;
- 4ª FASE: Análise a *posteriori* e validação.

Análises Preliminares: Conforme Almouloud (2007), esta fase engloba algumas vertentes tais como epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que dependem a construção didática efetiva e a consideração dos objetivos específicos da pesquisa. Deseja-se, nessa fase de estudos preliminares, contribuir para que o pesquisador identifique as variáveis didáticas potenciais que serão apontadas nas fases seguintes: a análise a *priori* e construção da sequência de ensino. Nesta pesquisa, as análises preliminares tiveram foco no:

- Estudo histórico e epistemológico do conceito de função afim;
- Estudos das definições atuais de função afim;
- Análise dos documentos oficiais Base Nacional Comum Curricular e Orientações Curriculares para o Ensino Médio da Bahia e o Plano de Curso da unidade escolar.

Tais análises permitiram conhecer mais profundamente o objeto matemático em análise, as orientações acerca de seu ensino nos documentos oficiais e como tem sido abordado na contemporaneidade.

Análise *a priori*: De acordo com Almouloud (2007, p. 175), “Nesta fase, serão escolhidas as variáveis microdidáticas, que têm relação com a organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sessão ou de uma fase, analisadas a partir das dimensões cognitivas e didáticas”. É nessa fase que é estabelecido se na sequência didática serão utilizados papel milimetrado ou se recorreremos a tecnologias digitais; se as atividades serão propostas individualmente ou em grupos, por exemplo. Para Almouloud, a análise a *priori* tem como objetivos:

> 1.Determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, em uma análise a priori devemos:
> 2.Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação a didática desenvolvida.
> 3.Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> 4.Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUD, 2008, p.67)

Nesta fase, foram escolhidas as variáveis que possibilitam o controle dos comportamentos dos estudantes e seus significados, a análise a *priori* faculta ao pesquisador uma previsão dos possíveis comportamentos dos alunos que estarão envolvidos na situação didática proposta.

Foram necessários cinco meses para o processo de concepção e análise a *priori* da sequência didática proposta nesta pesquisa

Experimentação, análise a *posteriori* e validação: As últimas três fases são a experimentação, análise *a posteriori* e validação. A experimentação é definida pelo momento de aplicar a sequência didática, fazendo correções, caso seja necessário, seguida pela análise a *posteriori*, que será subsidiada pela análise dos dados obtidos na fase da experimentação.

De acordo com Artigue (1988, p. 248), “esta fase é seguida de uma chamada fase de análise a posteriori que se baseia em todos os dados recolhidos durante a experiência: observações feitas durante as aulas, mas também produções dos alunos dentro ou fora da aula.”

Assim, o pesquisador depende de ferramentas técnicas. No nosso caso, tivemos o material didático respondido pelos alunos, a gravação do áudio das discussões no momento da aplicação da sequência didática e a gravação da aula no momento de institucionalização, o que permitiu a construção dos protocolos de pesquisa, material que foi analisado de forma profunda pelo pesquisador, quem, munido das informações resultantes, confrontou-as com a análise *a priori* realizada. Essa fase da pesquisa aconteceu com os alunos das turmas da 1ª série do curso profissionalizante de nível técnico integrado ao ensino médio de uma Escola do Campo com Pedagogia de Alternância.

4.2 PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO PRODUTO TÉCNICO TECNOLÓGICO: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com as definições do Grupo de Trabalho da Capes, o Produto Técnico Tecnológico (PTT) é algo tangível, “o resultado palpável de uma atividade docente ou discente, podendo ser realizado de forma individual ou em grupo” (CAPES, 2019, p.16). O PTT fruto desta pesquisa, ainda segundo a CAPES (2019, p. 16), pode ser definido como “Material Didático: Produto de apoio/suporte com fins didáticos na mediação de processos de ensino e aprendizagem em diferentes contextos educacionais”.

No nosso caso, o material didático proposto é a sequência didática elaborada com base nos estudos propostos por Rossini (2006), Miranda (2019) e Pereira (2020), a qual tem como objetivo analisar e promover um ambiente propício à aprendizagem dos estudantes sobre função afim, a partir de atividades que permitem a coordenação de pelo menos quatro registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo.

Almouloud define a sequência didática como:

> um esquema experimental apoiado em uma ou várias sessões de ensino desenvolvidas a partir de uma ou várias situações-problema construídas (ou escolhidas), analisadas a priori no intuito de ensinar (o professor) e fazer aprender ao aluno um determinado conceito e/ou metodologia de resolução de problemas. (ALMOULOUD, 2016, p. 122)

Baseado nesta definição e nas análises preliminares propostas no estudo, foram elaboradas 04 sessões de ensino, que buscam contemplar situações didáticas e adidáticas, com a intenção de proporcionar a devolução por parte dos estudantes, que se traduz no momento em que o estudante aceita e assume a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) (BROUSSEAU, 2003).

As situações propostas foram elaboradas para propiciar aos estudantes a fase adidática, para que fossem capazes de agir, testar, conjecturar e validar o conhecimento em construção.

Para alcançar esse objetivo, buscou-se a articulação da sala de aula invertida com o uso do software geogebra em atividades que permitem investigação e pretendem que o aluno construa o conceito de função afim de modo dinâmico e interativo, contemplando as habilidades previstas no plano de curso da unidade escolar que estão em consonância com as habilidades preconizadas pela BNCC, estudadas em nossa análise preliminar como é mostrado no Quadro 06 a seguir.

Quadro 6 - Habilidades extraídas do plano de curso da Unidade escolar

HABILIDADES	CONTEÚDOS
EM13MAT401. Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em	

representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	• Função afim; • Gráfico da função afim; • Função afim crescente ou decrescente; • Zero da função afim; • Casos particulares da função afim.
EM13MAT301. Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	
EM13MAT404. Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	
EM13MAT302. Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	

Fonte: Plano de curso da escola, *lócus* da pesquisa.

Após cada sessão de ensino, foi esperado que os estudantes pudessem vivenciar a fase didática de institucionalização, que é de responsabilidade do professor: a construção do conceito de função afim e seus elementos, tais como os coeficientes angulares e lineares, taxa de variação, zero da função, de acordo com os diferentes registros de representação semiótica.

4.3 VARIÁVEIS DIDÁTICAS

Variáveis didáticas são definidas por Almouloud (2016, p. 121) como "uma variável cognitiva que pode ser modificada pelo professor, e que afeta a hierarquia das estratégias de resolução (pelo custo, validade, complexidade)". Por isso, o modo como as variáveis didáticas são escolhidas influenciam de modo direto os estudantes e os procedimentos por eles escolhidos para a resolução da atividade.

Nessa perspectiva Almouloud reforça que:

> Uma variável didática de um problema ou situação é uma variável cujos valores podem ser alterados pelo professor e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintas. É apoiando-se na escolha judiciosa dessas variáveis que podemos provocar aprendizagens significativas, visando fazer emergir nos alunos novos conhecimentos como ferramentas necessárias para resolver um problema. Na realidade, a noção de variável traduz a necessidade de distinguir, classificar e modelizar as situações em uma perspectiva didática. (ALMOULOUD, 2016, p. 121)

A possibilidade de modificar os valores dessas variáveis no processo de aprendizagem permite a possibilidade de escolher o conhecimento necessário para que a situação proposta seja resolvida. Disto decorre a necessidade de um trabalho criterioso para o processo de levantamento de conhecimento prévio dessas variáveis, além de avaliar os recursos dos estudantes e as possíveis modificações nos valores assumidos por cada uma das variáveis. Almouloud esclarece, ainda, que

> Isto auxilia na identificação de fatores relevantes para avaliar a abordagem didático-pedagógica escolhida, assim como para prever as condições de utilização do material preparado. Na interpretação da produção de alunos, a análise das variáveis didáticas escolhidas permite evidenciar em que uma estratégia é adequada: podemos falar de eficiência, custo (tempo, cálculos...) e relevância. (ALMOULOUD, 2016, p. 122)

Quando o professor respalda o processo de elaboração das atividades nas variáveis que ele deseja manipular e estabelecer controle, tem a possibilidade de criar condições para uma aprendizagem significativa e isto permite que os estudantes possam construir um repertório de conhecimentos aos quais podem recorrer para resolver determinada situação proposta.

Desse modo, quando o docente recorre às variáveis didáticas e delas tem conhecimento, fornece recursos que permitem ao estudante construírem novos conhecimentos a partir do que está sendo proposto, isto porque o professor sabe que, ao alterar o valor de uma variável com intencionalidade pedagógica, provocará uma aprendizagem significativa.

Para respaldar o processo de construção da sequência didática, Almouloud orienta que:

> Na construção, análise e experimentação de situações-problema, distinguimos dois tipos de variáveis potenciais: a*s variáveis macro didáticas* (sic) ou *globais*, relativas à organização global da sequência didática; e as *variáveis micro didáticas* (sic) ou *locais*, relativas à organização local da sequência, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase da experimentação. (ALMOULOUD, 2016, p. 122)

Baseado nos estudos propostos por Almouloud (2016) e Ferreira (2016), destacamos as variáveis macrodidáticas adotadas na concepção da sequência:

1. **Referencial:** Teoria das situações didáticas, Teoria dos registros de representação semiótica e Sala de aula invertida exploradas e descritas no referencial teórico.
2. **Ambiente de realização:** A riqueza de conversões que o software Geogebra nos oferta permite a criação de um ambiente de interação e conhecimento, de modo que o aluno pode conjecturar, testar essas conjecturas de forma dinâmica e perceber como um registro está interligado ao outro.
3. **Organização dos estudantes:** As atividades foram organizadas para serem desenvolvidas em trios e quartetos, isto permite que os estudantes possam interagir, discutir e criar um ambiente propício para novas descobertas.
4. **Formato de entrega das atividades:** Para melhor aproveitamento do tempo, optou-se por atividades impressas, cada integrante com a sua atividade para permitir que todos os estudantes pudessem interagir entre si e com o software Geogebra.
5. **Forma de coleta de dados:** Cada sessão de ensino foi gravada em áudio. Em cada grupo foi disponibilizado um gravador para que o pesquisador tivesse acesso às discussões ocorridas durante o desenvolvimento das atividades.

A seguir, apresentamos cada uma das atividades que fazem parte da sequência didática com suas respectivas análises a *priori,* realizadas pelo pesquisador com base nas análises preliminares e na fundamentação teórica.

4.4 ANÁLISE A *PRIORI* DA ATIVIDADE 01

Esta atividade foi construída para ser aplicada na perspectiva da sala de aula invertida. Teve como objetivo permitir ao estudante a interação com os registros em língua natural, algébrico e tabular, com atividades que viabilizam conversões e tratamentos, além de facultar a compreensão do conceito de função afim a partir da relação de correspondência existente entre as variáveis abordadas na situação.

A primeira parte da atividade permitiu a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico. Em seguida, o estudante organizou o tratamento realizado no registro simbólico numérico, no registro tabular para que pudesse observar o comportamento das variáveis.

No item a), desejávamos que os estudantes utilizassem o registro tabular para relacionar a quantidade de peixes pescados com o gasto total. Não indicamos quais os valores eles podiam atribuir para as lacunas da tabela, mas acreditamos que eles seguiriam a ordem crescente dos valores.

Nos itens b), c), d) e e) esperavamos que o estudante observasse o registro tabular para ampliar a compreensão da relação que está estabelecida entre a quantidade de peixes pescados e o gasto total.

Esperávamos no item f) e g) que os estudantes fossem capazes de relacionar a quantidade de peixe pescado com o gasto total, reconhecendo os pares ordenados e representassem todos os pontos na janela de álgebra do Geogebra, e a relação entre esse par de números e o ponto na janela de visualização.

Com os itens i) e j) desejávamos que os estudantes fossem capazes de reconhecer os coeficientes angulares e lineares.

Quadro 7 - Atividade 01 da sequência didática

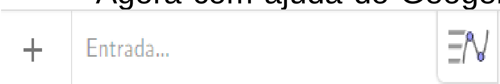
ATIVIDADE 01
Um ex-aluno da Escola Rural Rolf Weinberg, após conclusão do curso técnico em Agropecuária decidiu montar uma cooperativa no ramo da piscicultura para fortalecer o laço com a comunidade rural da qual faz parte. Através da cooperativa, montou um pesque e pague em Altamira - Conde. Para ter acesso, o cliente paga R$ 10,00 de entrada, mais R$12,00 por cada peixe pescado. Qual será o gasto de um cliente, depois de entrar no pesque e pague? Para obter essa resposta:

a) complete a tabela abaixo:

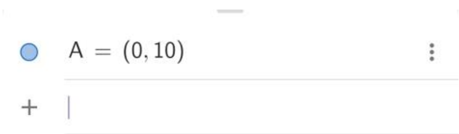
Valor pago na entrada (Ingresso)	Quantidade de peixe pescado	Valor pago pela quantidade de peixe pescado	Gasto Total
R$ 10,00	0	12 x 0	10 + 0 = 10
R$ 10,00	1	12 x 1	10 + 12 = 22,00
R$ 10,00	2	12 x 2	10 + 24 = 34,00

b) Qual o valor pago por um visitante que pescou dois peixes?
c) O valor pago pelo ingresso que dá acesso ao parque sofre alteração? Justifique sua resposta.
d) O valor pago pela quantidade de peixe sofre alteração? Por que isso acontece?
e) Quanto um cliente pagará se não pescar nenhum peixe?
f) Relacione na tabela abaixo a quantidade de peixes pescados com o valor pago para obter os pares ordenados

Quantidade de peixe pescado Valor de x	Gasto total Valor de y	Par ordenado (x, y)

Agora com ajuda do Geogebra, na janela de álgebra, no campo de entrada 

insira os pares ordenados, entre parentes e separados por vírgulas.

conforme o modelo: 

Faça esse procedimento com todos os pares ordenados.

g) O que apareceu na janela de visualização? Como os pontos estão dispostos?

h) O que apareceu na janela de álgebra?

Marcos, pescou muito no dia em que visitou o empreendimento. Você seria capaz de descobrir quanto Marcos pagou?

É claro que não dá para descobrir quanto Marcos pagou, você pode estar pensando: “se a gente não sabe quantos peixes foram pescados por ele”. No entanto, você saberia calcular quanto Marcos gastaria se soubesse quantos peixes ele pescou, não é mesmo?

Observe se você concorda com o modo de calcular o gasto de Marcos.

Gasto de Marcos é = **<u>12,00</u>** x **<u>número de peixes pescados</u>** + **<u>10,00</u>** por Marcos./

Preço de cada peixe

Se você conhecer este número, você poderá conhecer o seu gasto

E

As pessoas que utilizam a matemática para compreender situações como estas, utilizam-se de “símbolos” para representar valores numéricos desconhecidos. Os símbolos que nos referimos são as letras (de qualquer alfabeto), expressões formadas por letras ou mesmo algumas figuras.

Podemos considerar a letra **g** como o Gasto de Marcos, e **p** o número de peixes pescados, logo a expressão matemática que representa o gasto de Marcos durante a sua estadia no pesque e pague pode ser escrita como.

$$g(p) = 12p + 10$$

ou

$$f(x) = 12x + 10$$

ou

$$y = 12x + 10$$

Se você seguir as orientações propostas, você escreverá a expressão que representa o gasto de Marcos em linguagem matemática.

Definição de Função afim:

Uma aplicação de $lR \; em \; lR$ recebe o nome de função afim quando a cada $x \in lR$ associa sempre o mesmo elemento $(ax + b) \in lR,$ em que $a \neq 0 \; e \; b$ são números reais dados.

$$f(x) \; = \; ax + b \qquad (a \neq 0)$$

Coeficientes da Função afim:

O coeficiente a da função $y = ax + b$ é denominado taxa de variação ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b na função $y = ax + b$ é denominado coeficiente linear.

Exemplo:

Na função $g = 12p + 10$ a taxa de variação é 12 e o coeficiente linear é 10. Observe que se $p = 0$, temos $g = 10$, portanto o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

i) Antes de definir o preço de entrada e o valor por cada peixe pescado, Marcos testou diversos preços. Como ficaria a lei matemática se:
- Valor por peixe pescado de 7,00 e entrada R$ 8,00:____________________
- Valor por peixe pescado de 9,00 e entrada R$ 9,00:____________________
- Valor por peixe pescado de 10,00 e entrada R$ 11,00:__________________
- Valor por peixe pescado de 11,00 e entrada R$ 13,00:__________________

j) Se fizermos ao contrário, a partir da lei matemática identificarmos os coeficientes a e b?
- $f(x) = 8x + 16$ coeficiente a _________ coeficiente b_________
- $g(x) = 12x + 8$ coeficiente a _________ coeficiente b__________
- $h(x) = 14x + 5$ coeficiente a _________ coeficiente b__________
- $i(x) = 6x + 13$ coeficiente a _________ coeficiente b________

Fonte: O autor.

No Quadro 07, a seguir, foram listados os elementos da função afim propostos em cada item da atividade 01, os registros de representação semiótica e as possíveis transformações: tratamento e/ou conversão, que devem ser utilizadas na realização de cada uma das atividades propostas.

Quadro 8 - Elementos da função afim e identificação de tratamentos e conversões entre os registros de representação semiótica da Atividade 01 da primeira sessão de ensino

	Elementos da Função Afim $f(x) = ax + b$	**Tratamento**	**Conversão**
Atividade 01	k) organização dos dados em tabela.	—	LN → RSA
	l) Cálculo com valores da função afim.	RSN	—
	m) Coeficiente linear da função afim.	RSN	—
	n) Taxa de variação da função afim.	RSN	—

	o) Cálculo com valores da função com $a = 0$.	RSN	—
	p) Organização dos dados em tabelas.	RSN	—
	q) Abordagem ponto a ponto.	RSN e RSA	RSA → RGRA
	r) Lei de formação da função afim.	—	RSA → RGRA
	s) Gráfico da função afim.	—	RSA → RGRA
	t) Coeficiente angular e coeficiente linear.	—	LN → RSA
	u) Coeficiente angular e coeficiente linear.	—	RSA → RSN

Fonte: o autor

A segunda etapa da sequência foi elaborada na mesma perspectiva da primeira, no entanto o estudante precisaria generalizar para encontrar a lei matemática que permite associar as quantidades de sacas com o custo total.

Quadro 9 - Segunda etapa da Atividade 01

Agora é a sua vez! Utilize a linguagem algébrica para expressar a situação seguinte:

A importância econômica do milho é caracterizada pelas diversas formas de sua utilização, que vai desde a alimentação animal até a indústria de alta tecnologia. O uso do milho em grão na alimentação animal representa a maior parte do consumo desse cereal, isto é, cerca de 70% no mundo. Um produtor avaliou que seu custo total de produção de milho consiste em um custo fixo de R$ 1.500,00, somado ao custo da produção de R$ 8,66 por saca.

Custo Fixo	Quantidades de sacas	Custo de produção por saca	Custo Total
R$ 1.500	1	R$ 8,66	1.508,66
	2		
	3		

	10		
	15		
	30		
	100		
	1000		
	X		

a) Após completar a tabela, qual lei matemática pode ser escrita que represente o custo total dessa produção?
b) Quais variáveis estão se relacionando na situação-problema proposta?
c) O que acontece com o custo total se aumentarmos a quantidade de sacas produzidas?
d) O que é necessário para calcular o custo total?
e) Você consegue perceber uma relação de dependência entre o custo total e a quantidade de sacas produzidas? Como essa relação se estabelece?
f) Na situação proposta, qual a variável dependente e independente?
g) Qual será o custo para o produtor se ele produzir 1000 sacas de milho?
h) Na janela de álgebra, insira a lei da função encontrada na tabela. Qual elemento apareceu na janela de visualização?

Fonte: o autor.

No Quadro 10, a seguir, foram listados os elementos da função afim propostos em cada item da atividade 01, os registros de representação semiótica e as possíveis transformações: tratamento e/ou conversão, que devem ser utilizadas na realização de cada uma das atividades propostas.

Quadro 10 - Elementos da função afim e identificação de tratamentos e conversões entre os registros de representação semiótica da segunda parte da Atividade 01 da primeira seção de ensino

	Elementos da Função Afim $f(x) = ax + b$	**Tratamento**	**Conversão**
Atividade 01	a) organização dos dados em tabela.	—	LN → RSA
	b) Cálculo com valores da função afim.	RSN	—

	c) Cálculo com valores da função afim.	RSN	—
	d) Cálculo com valores da função afim.	RSN	—
	e) Relação de dependência.	—	—
	f) Variável dependente e variável independente.	—	—
	g) Cálculo com valores da função afim.	—	—
	h) Lei de formação da função afim.	—	RSA → RGRA

Fonte: o autor.

Baseado nos estudos de Duval (2011), elaboramos o quadro 07 com as unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, as variáveis visuais e os valores assumidos por cada uma delas na situação proposta.

Figura 20 - Valores e variáveis visuais para y = ax + b no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: (DUVAL, 2011, p. 101)

4.5 ANÁLISE A *PRIORI* DA ATIVIDADE 02

De modo geral, o objetivo dessa atividade é proporcionar aos alunos a possibilidade de visualizar, através do software de geometria dinâmica Geogebra, a inter-relação entre o registro algébrico e o registro gráfico.

A partir da manipulação dos controles deslizantes dos coeficientes *a* e *b* da função afim, esperava-se que os alunos podessem identificar que a taxa de variação *a* interfere na inclinação do gráfico da função, e o coeficiente *b* indica o ponto onde o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas.

Esperávamos que o aluno fosse capaz de identificar na janela de álgebra cada uma das funções que podem ser obtidas com a alteração de cada um dos controles deslizantes do coeficiente angular e coeficiente linear e sejam capazes de perceber que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Acreditávamos que os alunos conseguiriam desenvolver a atividade proposta sem grandes dificuldades. Porém, caso tenham dificuldade, o professor poderá realizar perguntas e fazer apontamentos para auxiliar no processo de compreensão.

Nos itens a) e b) desejávamos que o estudante insira na janela de álgebra do Geogebra o termo geral da função afim, reconheça os controles deslizantes dos coeficientes a e b, e como esses coeficientes interagem com a representação gráfica.

Para o item c), esperávamos que o estudante pudesse observar a conversão do registro simbólico algébrico para o registro gráfico e reconheça que o gráfico da função afim é uma reta.

O objetivo do item d) é permitir que o estudante reconheça que o coeficiente angular está associado à inclinação ou angulação da reta no registro gráfico.

Esperávamos para os itens e), f), g) e k) facultar a possibilidade de o estudante reconhecer que o coeficiente linear representa o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas no registro gráfico.

Para os itens h), i), j) esperávamos que o estudante fosse capaz de reconhecer a lei da função proposta na janela de álgebra, realize os tratamentos necessários no registro algébrico e encontre os pares ordenados.

O item l) permitirá ao aluno conhecer a raiz da função ou o zero da função ou a raiz da função.

O objetivo dos itens m), n) e o) é que o estudante tenha a possibilidade de classificar a função em crescente e decrescente.

Desse modo, apresentamos no Quadro 10 o tipo de conversão, as unidades simbólicas correspondentes, as variáveis visuais e os valores visuais envolvidos em cada item desta atividade. Nesta sessão de ensino, os estudantes não realizaram a transformação do tipo tratamento, já que o estudo nessa fase se tratava das variáveis visuais no registro gráfico proposto no software Geogebra e como as modificações nas unidades simbólicas significativas repercutem no registro simbólico algébrico e no registro gráfico.

Quadro 11 - Elementos da função afim e identificação de conversões entre os registros de representação semiótica da Atividade 02 da segunda sessão de ensino

	Elementos da Função Afim $f(x) = ax + b$	**Transformação**	**Variáveis visuais**	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**
Atividade 02	a, b) e c) Termo geral da função afim.	Conversão RSA →RGRA	Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente >0 coeficiente < 0
	d) Coeficiente angular	Conversão RSA →RGRA	Ângulos com os eixos	Partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coef. variável = 1 coef. variável < 1 coef. variável > 1
	e), f), g) e k) Coeficiente linear	Conversão RSA →RGRA	Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	o traçado passa abaixo da origem o traçado passa acima da origem o traçado passa pela origem	coef. < 0 coef. > 0 coef. = 0
	h), i) e j) coeficiente angular e linear	Tratamento RSA e Conversão RSA →RGRA	Implantação da tarefa (o que se destaca como figura sobre o fundo.	zona linha	>,<, … =
	h), i) e j) coeficiente angular e linear	Conversão RSA →RGRA	Forma da tarefa (a linha traçada delimita ou não uma zona aberta ou fechada).	linha reta linha curva	expoente da variável =1 expoente da variável > 1
	l) Coeficiente angular (Raiz	Conversão RSA	A posição do traçado	A linha intercepta o	coeficiente < 0

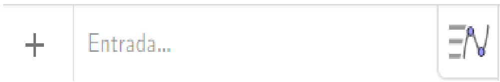
	da função)	→RGRA	em relação à origem do eixo vertical.	eixo das abscissas a direita de zero. A linha intercepta o eixo das abscissas a esquerda de zero.	coeficiente > 0
	m) Coeficiente angular.	Conversão RSA →RGRA	O sentido da inclinação do traçado.	A linha sobe da esquerda para a direita. A linha desce da esquerda para a direita.	coeficiente > 0 coeficiente < 0
	n) Coeficiente angular.	Conversão RSA →RGRA	O sentido da inclinação do traçado.	A linha sobe da esquerda para a direita. A linha desce da esquerda para a direita.	coeficiente > 0 coeficiente < 0
	o) Coeficiente angular.	Conversão RSA →RGRA	O sentido da inclinação do traçado.	A linha sobe da esquerda para a direita. A linha desce da esquerda para a direita.	coeficiente > 0 coeficiente < 0

Fonte: o autor.

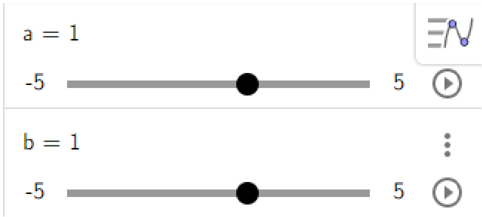
No quadro a seguir, apresentamos a atividade 02 que compõe a sequência didática.

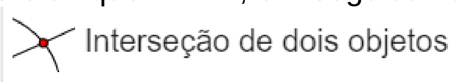
Quadro 12 - Atividade 02 da sequência didática

ATIVIDADE 02
Abra o Geogebra em seu *smartphone.*



a) No campo de entrada do Geogebra digite o termo geral da Função Afim $f(x) = a.x + b$.
b) Apareceu na janela de álgebra os controles deslizantes dos coeficientes a e b da função afim que podem ser modificados.



c) O que apareceu na janela de visualização?
d) Movimente o controle deslizante a. O que acontece quando você observa a janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente a da função afim? O que ele determina no gráfico da função?
e) Movimente o controle deslizante b, para que ele fique $b = 2$, em seguida vá no menu de ferramentas e clique no ícone 

clique no eixo das ordenadas e na reta. Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas?

f) Movimente o controle deslizante b, de modo que fique com o valor igual a 3. O que aconteceu com o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas na janela de visualização?

g) Movimente o controle deslizante b, deixe-o igual a -2. O que aconteceu com o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas na janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente b no gráfico da função afim?

h) Movimente o controle deslizante do coeficiente a e o deixe igual a 2. Movimente o controle deslizante b e o deixe igual a -1. Como ficou a lei da função na janela de álgebra?

i) Com a lei da função obtida no item anterior encontre os valores de y. Em seguida, insira os pares ordenados na janela de álgebra.

OBS: Para inserir o ponto é necessário que na janela de álgebra você insira o par ordenado separado por virgula e entre parênteses. Ex.: (4,6).

x	Lei da Função	y	(x,y)
-2			
-1			
0			
1			

2			

j) Observe a janela de visualização, como os pontos ficaram organizados no plano cartesiano? Por que isso aconteceu?
k) Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas? Existe relação entre esse ponto e coeficiente linear da função?
l) Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das abscissas? Quando a reta intercepta o eixo das abscissas, o que acontece com o valor de y na coordenada?

m) Quando aumentamos o valor de x o que acontece com o valor de y? Qual o sentido da reta na janela de visualização?
n) Agora vamos analisar a tabela do item i). O que acontece com o valor de y, quando aumentamos o valor de x?
o) Movimente o coeficiente a, deixando com o valor igual -2. Como ficou a lei da função? O gráfico se comportou da mesma maneira que o gráfico da função $f(x) = 2x - 1$?

Fonte: O autor.

4.6 ANÁLISE A *PRIORI* DA ATIVIDADE 03

Esta atividade tem como objetivo permitir ao estudante reconhecer um dos casos particulares da função afim: a função linear a partir de uma situação do cotidiano. Espera-se que os estudantes observem que, neste caso, temos $f(x) = a.x$ com $b = 0$.

No item a) desejávamos que o estudante fosse capaz de realizar uma transformação do tipo tratamento no registro tabular até generalizar a lei da função. Os itens b), c), d), e), f), g) e h) podem ser respondidos a partir da análise do registro tabular.

Para o item i), esperávamos que os estudantes insiram os pares ordenados na janela de álgebra do software Geogebra e reconheça que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem.

No item j) desejávamos que os estudantes observassem que ao inserir o elemento geométrico, existe um registro algébrico correspondente, neste caso é a lei da função.

Com relação ao item k), espera-se que o estudante perceba o que permite a reta passar pela origem, neste caso pelo ponto de coordenadas (0,0).

Quadro 13 - Variáveis visuais, elementos da função afim e identificação de conversões entre os registros de representação semiótica da Atividade 03 da segunda seção de ensino

	Elementos da Função Afim $f(x) = ax + b$	**Transformação**	**Variáveis visuais**	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**
Atividade 03	i) função linear do tipo $f(x) = ax;$ com $b = 0$.	Conversão RSA →RGRA	Posição do traçado em relação à origem do eixo das ordenadas.	O traçado corta a origem.	coef. b = 0

Fonte: o autor.

Quadro 14 - Atividade 03 da sequência didática.

ATIVIDADE 03

Baseado no que aprendeu nas aulas de agroindústria, Andressa decidiu fazer uma oficina em sua comunidade, para ampliar as atividades do itinerário Transferência de Tecnologia e auxiliar as doceiras da localidade rural no processo de produção de balas de jenipapo, para serem vendidas durante o São João. Ela observou que, para cada pote de 100g de balas de jenipapo, ela tinha um custo de R$ 3,00.

Número de potes produzidos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
Custo em Reais R$	**3,00**	**6,00**						

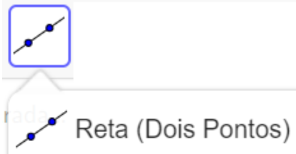
a) Complete a tabela.
b) Cada embalagem de bala de jenipapo corresponde a um único custo em reais?
c) O custo é dado em função do quê?
d) Quais variáveis estão envolvidas na situação proposta?

e) Examine os dados da tabela, descubra a regularidade existente e escreva a fórmula que associa o custo (C) com o número de embalagens produzidas (x).

f) Qual o custo para produzir 10 potes de balas de jenipapo? E para produzir 50 potes?

g) Com um custo de R$ 180,00, quantos potes de balas de jenipapo foram produzidos?

h) O custo de produção varia de forma diretamente proporcional ao número de potes de balas de jenipapo produzido? Justifique sua resposta.

i) Com o auxílio do Geogebra, insira os pares ordenados dispostos na tabela, em seguida clique no ícone reta 

e, na sequência, clique em dois pontos. A reta passa por todos os pontos?

j) Como ficou a lei da função na janela de álgebra?

k) A reta passa pelo par ordenado (0,0)? Por que isso acontece? Esse fato possui relação com a lei da função encontrada no item anterior?

Fonte: o autor.

4.7 ANÁLISE A *PRIORI* DA ATIVIDADE 04

Nesta atividade os estudantes tiveram contato com uma situação que remete a uma função constante. Diante disso, a função poderia ser representada por $f(x) = 10$. Esperava-se que o aluno realizasse a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico e conseguisse perceber que em situações como essas o coeficiente angular é nulo, logo $a = 0$.

No item a) temos como objetivo permitir que o aluno utilize o registro tabular para perceber o comportamento da função constante.

Para o item b) o estudante faria um tratamento ponto a ponto no registro gráfico, para observar a representação gráfica.

Quadro 15 - Variáveis visuais, elementos da função afim e identificação de conversões entre os registros de representação semiótica da Atividade 04 da segunda seção de ensino

	Elementos da Função Afim $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$	Transformação	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Atividade 04	i) função constante do tipo $f(x) = b$; com $a = 0$.	Conversão RSA →RGRA	Posição do traçado em relação à origem do eixo vertical.	O traçado intercepta o eixo vertical abaixo da origem. O traçado intercepta no eixo vertical acima da origem.	coef. < 0 coef. > 0

Fonte: o autor.

Quadro 16 - Atividade 04 da sequência didática

ATIVIDADE 04

Hortaliça hidropônica é aquela produzida em um sistema de cultivo chamado hidroponia. Nesse sistema as plantas são cultivadas em substrato ou solução nutritiva e não no solo. A solução nutritiva não é água pura; ela contém todos os nutrientes essenciais para as plantas: nitrogênio, fósforo, potássio, cálcio, magnésio, enxofre, ferro, boro, manganês, cobre, zinco e molibdênio.
A hidroponia raramente é feita a céu aberto. Normalmente o cultivo é feito dentro de estufas de plástico, estruturas menores chamadas túneis altos e túneis baixos ou mesmo em edifícios fechados com iluminação artificial.

Fonte: https://www.embrapa.br/hortalica-nao-e-so-salada/hortalicas-hidroponicas. Acesso em: 28 ago. 2022

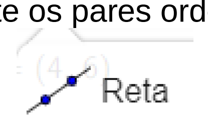
Os técnicos em Agropecuária formados em 2022 prestaram serviço de assessoria técnica em uma propriedade rural que desejava implantar a hidroponia. Eles observaram que cada canteiro suspenso tem um custo fixo para ser mantido, independentemente da quantidade de mudas que sejam plantadas. Cada canteiro suspenso tem 10 metros e a capacidade de produzir até 100 pés de alface. Pode-se afirmar que **custos fixos** são aqueles que por um período se mantêm constantes, sem depender da variação na produção, ou seja, seu valor não se altera. Dessa forma, como podemos escrever a lei matemática para a função que representa os dados de um produtor que avaliou em R$ 10,00 o custo fixo por canteiro de 10 metros para cultivar alface hidropônico?

a) Se for plantado 1 pé de alface qual será o custo? ______________________
b) Se forem plantados 2 pés de alface, qual será o custo? _________________
c) Se forem plantados 3 pés de alface, qual será o custo? _________________
d) Se forem plantados 4 pés de alface, qual será o custo? _________________
e) Se forem plantados 5 pés de alface, qual será o custo? _________________
f) Se forem plantados 10 pés de alface, qual será o custo? ________________

Como ficam os pares ordenados para essa situação? Complete a tabela.

X	Lei da Função	y	Par Ordenado (x,y)

Agora, com a ajuda do Geogebra, construa o gráfico da situação proposta anteriormente.

1. Abra o aplicativo Geogebra em seu celular;
2. No campo de entrada digite os pares ordenados obtidos na tabela anterior;
3. Clique na ferramenta reta + 

, em seguida clique em dois pontos;
4. Responda as questões a seguir:
5. Como a reta construída está disposta no plano cartesiano?
6. Por que a reta construída se comporta desta maneira?
7. Qual relação pode ser observada entre a lei matemática e o gráfico construído?

4.8 LOCAL E PÚBLICO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida em uma das Escolas do Campo com Pedagogia de Alternância mantidas pela Fundação José Carvalho, fundada em 15 de março de 1990, a partir de um ideal altruísta do seu instituidor, José Corgosinho de Carvalho Filho, para atender a crianças e jovens do meio rural, os filhos e filhas da classe trabalhadora, com vistas a uma Educação do Campo no sistema de alternância e regime de internato.

A escola, *lócus* dessa pesquisa, atende 462 alunos, oriundos de 20 municípios e 84 localidades rurais que cumprem os critérios socioeconômicos e especificamente são moradores do campo, com faixa etária entre 10 e 18 anos em dois grupos, o *G 01* e o *G 02,* os quais obedecem a uma sistemática de ensino, em regime de internato, de forma periodizada, com alternância 30 dias no tempo comunidade por 30 dias no tempo escola.

Nesse formato, um grupo de 231 alunos permanece na unidade escolar enquanto o outro se encontra em suas residências, revezando-se sempre durante o período de 30 dias definidos como tempo escola e tempo comunidade.

Os 31 estudantes que participaram da pesquisa pertencem à 1ª série do Curso Técnico de Agropecuária de nível profissionalizante integrado ao ensino médio do Grupo 02. Por se tratarem de estudantes menores, foi realizada uma reunião online com os seus responsáveis, a equipe gestora e o professor/pesquisador de matemática da turma, para apresentar como a pesquisa aconteceria. A reunião aconteceu no mês de março, quando os alunos do grupo dois estavam no primeiro período.

Quando os alunos retornaram para o tempo comunidade, levaram consigo o Termo de Consentimento Livre Esclarecido para ser assinado pelos pais e/ou responsáveis legais. Quando retornaram, no mês de maio, para o segundo período, entregaram o termo devidamente assinado.

Ocorreram ao todo sete encontros de 100 minutos cada com a turma. Desses encontros, quatro foram realizados dentro da carga horária da disciplina e três encontros no grupo de estudos, que funciona no turno noturno, pois a escola funciona em regime de internato, e esse momento destina-se à realização de grupos de estudo desenvolvidos pelos estudantes, sem a presença do docente em dias comuns, mas para a aplicação o professor pesquisador esteve presente observando a realização da atividade, momento em que foi estruturada a sala de aula invertida.

Os encontros aconteceram nos dias 17, 18, 19, 23, 25, 26 e 27 de maio de 2023, e não foram registradas desistências nem ausências. Para a formação dos grupos para a realização das sessões de ensino, o pesquisador não fez interferências, de modo que os estudantes se organizaram livremente, levando em consideração as suas afinidades.

Para preservar a identidade dos alunos, eles assumiram o nome dos teóricos que colaboraram com o conceito de função afim. No entanto, encontramos uma problemática: nas análises preliminares, no processo histórico de construção do conceito, foram declinados apenas nome de homens; para que as estudantes do sexo feminino tivessem os seus pseudônimos na mesma perspectiva, foram pesquisadas nome de mulheres que colaboraram em outras áreas de estudo da matemática, entre brasileiras e estrangeiras.

O quadro a seguir mostra como os grupos ficaram estruturados.

Quadro 17 - Organização das Equipes

Equipe 01: 1- Eunice da Conceição 2- Maris Ellen Rudin 3 - Martha Dantas 4 - Lobachevsky	**Equipe 02:** 1- Leibniz 2- Leonhard Euler 3- François Viete 4- Renê Descartes	**Equipe 03:** 1 - Johan Bernoulli 2 - Lejeune Dirichilet 3 - Isaac Newton 4 - Josehp Fourier	**Equipe 04:** 1 - Eliana Costa 2 - Neide Clotilde 3 - Georg Cantor 4 – Cauchy
Equipe 05: 1 - Sophie German 2 - Nicolau de Oresme 3 - Joseph Lois Lagrange 4 - Doris Ferraz	**Equipe 06:** 1 - Arquimedes 2 - Leonardo Fibonacci 3 - Sofia Kovalenskaya 4 - Nicolas Boubark	**Equipe 07:** 1 - Eliza Maria 2 - Hipatia de Alexandra 3 - Emmy Noether 4 - Bruno de Souza - Pitágoras	**Equipe 08:** 1 - Reiman 2 - Matheus Euclides 3 - Dedé Kind

Fonte: o autor.

Baseado nessa organização, apresentaremos na próxima sessão a experimentação e análise a *posteriori* e validação do produto técnico tecnológico.

5 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES A *POSTERIORI* DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo tem como objetivo apresentar o processo de experimentação, análise a *posteriori* e validação da sequência didática, momento em que serão confrontadas as análises a *priori*.

Para a realização das atividades, os estudantes foram organizados em oito equipes, com 04 pessoas cada, denominados: Equipe 01 - EQ01, Equipe 02 - EQ02, Equipe 03 - EQ03, Equipe 04 - EQ04, Equipe 05 - EQ05, Equipe 06 - EQ06, Equipe 07 - EQ07 e Equipe 08 - EQ08. Para preservar a identificação dos estudantes participantes desta pesquisa, cada estudante assumiu o nome de um teórico que colaborou com o conceito de função afim ao longo dos tempos. Nesse momento, como já mencionado na seção anterior, foi encontrada uma lacuna: no processo de construção do conceito de função afim nenhuma mulher tem o nome declinado, provavelmente porque, à época, as mulheres eram impedidas de estudar e, quando estudavam, precisavam vestir-se de homens para ter seus estudos validados. Assim, as meninas assumiram o nome de mulheres matemáticas que tiveram um papel relevante na história da matemática a nível nacional e internacional.

5.1 PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

Esta atividade foi aplicada em dois encontros: a primeira sessão aplicada na perspectiva da sala de aula invertida, no dia 17 de maio de 2023, na qual os estudantes responderam até o item k), em dois momentos de 50 minutos, durante o grupo de estudos que aconteceu no turno noturno; a segunda etapa desta sessão aconteceu no dia 18 de maio de 2023, momento em que os alunos finalizaram a atividade e socializaram as suas respostas.

Na primeira etapa, os grupos organizaram-se e receberam a atividade impressa. Como a sala de aula invertida pressupõe a autonomia e protagonismo dos estudantes, o pesquisador não fez interferências, apenas observou.

Cada estudante estava munido com os seus smartphones e acesso ao wifi da instituição. Caracterizamos esta fase como adidática, pois eles demonstraram engajamento com a situação proposta, e por estarem organizados em grupos, auxiliaram-se mutuamente, o que favoreceu as discussões em busca de encontrar soluções para as atividades.

Os discentes recorreram aos conhecimentos prévios para resolução da atividade proposta e evidenciou-se que essa situação se configura na dialética da ação. Pela característica do que foi observado, houve devolução do problema e eles assumiram a responsabilidade em conduzir o processo de aprendizagem.

Escolhemos, nas análises a *posteriori*, apresentar novamente os enunciados das atividades a fim de melhor situar o leitor nas discussões propostas.

Um ex-aluno da Escola Rural Rolf Weinberg, após conclusão do curso técnico em Agropecuária decidiu montar uma cooperativa no ramo da piscicultura para fortalecer o laço com a comunidade rural da qual faz parte. Através da cooperativa montaram um pesque e pague em Altamira - Conde. Para ter acesso, o cliente paga R$ 10,00 de entrada, mais R$12,00 por cada peixe pescado. Qual será o gasto de um cliente, que depois de entrar no pesque e pague, para obter essa resposta:

Valor pago na entrada (Ingresso)	Quantidade de peixe pescado	Valor pago pela quantidade de peixe pescado	Gasto Total
R$ 10,00	0	12 x 0	10 + 0 = 10
R$ 10,00	1	12 x 1	10 + 12 = 22,00
R$ 10,00	2	12 x 2	10 + 24 = 34,00

Conforme o que havia sido previsto na análise a *priori,* os alunos utilizaram o registo simbólico numérico e relacionaram no registro tabular a quantidade de peixe pescado com o gasto total, seguindo a ordem crescente para os valores que representam a quantidade de peixe pescado. Até aqui todas as equipes responderam corretamente à atividade.

Figura 21 - Registro tabular da Atividade 01 da equipe 3

Valor pago na entrada	Quantidade de peixe pescado	Valor pago pela quantidade de peixe pescado	Gasto Total
R$ 10,00	0	12 x 0	10 + 0 = 10
R$ 10,00	1	12 x 1	10 + 12 = 22,00
R$ 10,00	2	12 x 2	10 + 24 = 34,00
10.00	3	12x3	10+ 36 = 46.00
10.00	4	12x4	10+ 48=58.00
10.00	5	12x5	10+60 = 70.00
10.00	6	12x6	10+72=82.00
10.00	7	12x7	10 +84=94.00
10.00	8	12x8	10 + 96 106.00

Fonte: O autor.

Todas as equipes tiveram ampla discussão. Abaixo é explicitado o diálogo de uma situação de formulação da equipe 03.

Johan Bernoulli: *Que interessante, Altamira é a localidade onde eu moro, será que essa situação é de verdade?* [1]

Lejeune Dirichilet: *Eu acredito que não, mas vamos responder logo esse negócio aqui.*

Johan Bernoulli*: É que me chamou atenção falar do lugar onde eu moro.*

Isaac Newton: *Presta atenção, aqui na tabela o valor pago na entrada se repete, então a pessoa que entra e paga R$ 10,00. Esse valor sempre vai ser o mesmo.*

Joseph Fourier: *Eu não entendi essa parte do peixe.*

Isaac Newton*: É simples, a gente vai multiplicar a quantidade de peixe que uma pessoa pescar, por R$ 12,00.*

Lejeune Dirichilet: *Essa quantidade de peixe pescado a gente pode seguir essa lógica e ir aumentando, 3, 4, 5… até completar a tabela.*

---

[1] As transcrições dos diálogos foram mantidas na sua forma original, ou seja, na variante da língua portuguesa utilizada pelos alunos.

Joseph Fourier: *E no gasto total vai somar tudo, a entrada e essa outra parte aqui.*

Estudantes de seis equipes evidenciaram a questão de se sentirem representados na situação proposta ao ser citada a localidade de onde são oriundos, principalmente por estarem relacionadas com questões abordadas no ensino médio integrado, ao mostrar a relação existente entre os conhecimentos.

Por se tratar de uma atividade em sala de aula invertida, não cobramos aqui generalização da lei da função, que será explicitada na segunda etapa da atividade.

b) Qual o valor pago por um visitante que pescou dois peixes?

c) O valor pago pelo ingresso que dá acesso ao parque sofre alteração? Justifique sua resposta.

d) O valor pago pela quantidade de peixe sofre alteração? Por que isso acontece?

e) Quanto um cliente pagará se não pescar nenhum peixe?

f) Relacione na tabela abaixo a quantidade de peixes pescados com o valor pago para obter os pares ordenados

Agora com ajuda do Geogebra, na janela de álgebra, no campo de entrada insira os pares ordenados, entre parentes e separados por vírgulas. conforme o modelo:

Faça esse procedimento com todos os pares ordenados

g) O que apareceu na janela de visualização? Como os pontos estão dispostos?

h) O que apareceu na janela de álgebra?

i) É possível passar uma reta por esses pontos? Clique no ícone e clique no ponto *A* e *B.* Todos os pontos pertencem à reta?

j) Antes de definir o preço de entrada e o valor por cada peixe pescado, Marcos testou diversos preços, como ficaria a lei matemática se

- Valor por peixe pescado de 7,00 e entrada R$ 8,00:_________________
- Valor por peixe pescado de 9,00 e entrada R$ 9,00:_________________

k) Se fizermos ao contrário, a partir da lei matemática identificarmos os coeficientes a e b?

- $f(x) = 8x + 16$ coeficiente a _________ coeficiente b_________
- $g(x) = 12x + 8$ coeficiente a _________ coeficiente b__________

No item c), os discentes reconheceram que o valor pago pelo ingresso é fixo, logo não sofre alteração, além de perceberem que o valor a ser pago varia em relação à quantidade de peixe pescado.

Além disto, os estudantes utilizaram o Geogebra e realizaram o tratamento na representação gráfica: a abordagem ponto a ponto, que está associada aos pares de números, que ao ser inserido na janela de álgebra estará associado a um ponto no plano cartesiano, que, neste caso, é representado na janela de visualização.

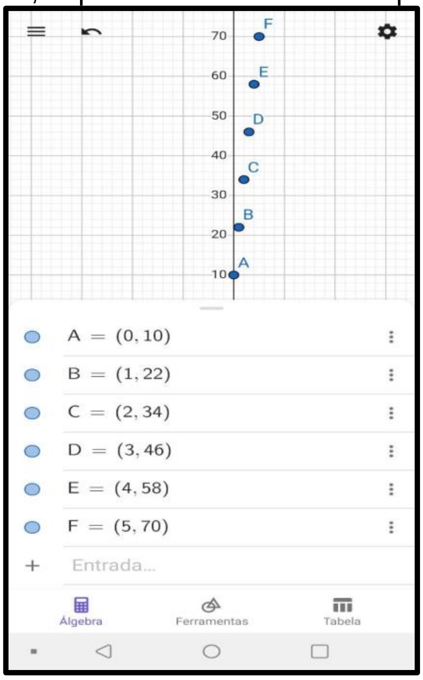
Figura 22 - Tabela com os pares ordenados extraídos do registro tabular e reescritos da Equipe 5

e) Relacione na tabela abaixo a quantidade de peixes pescados com o valor pago para obter os pares ordenados

Quantidade de peixe pescado Valor de x	Gasto total Valor de y	Par ordenado (x, y)
0	10	(0,10)
1	22,00	(1,22)
2	34,00	(2,34)
3	46,00	(3,46)
4	58,00	(4,58)
5	70,00	(5,70)
6	82,00	(6,82)
7	94,00	(7,94)
8	106,00	(8,106)
9	118,00	(9,118)

Fonte: o autor.

Figura 23 - Imagem dos pares ordenados e dos pontos no software Geogebra, produzida pela Equipe 5, capturada da tela do smartphone



Fonte: o autor.

De acordo com Duval (2011, p. 98), “é a partir desta a abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números”.

A partir desse ponto, a atividade apresenta as definições de função afim, coeficiente linear e coeficiente angular, de modo que o estudante possa iniciar sua compreensão acerca do objeto matemático em estudo.

Nessa fase do estudo, as equipes 01, 04, 05 e 08 relataram ter tido dificuldade com a leitura da definição, como é possível perceber na discussão dos grupos 01 e 08, destacadas a seguir.

Lobachevsky: *Eu já li isso aqui duas vezes e não entendi foi nada.*

Martha Dantas: *Eu também li, entendi esse pedacinho aqui que fala como calcular o valor a ser pago lá na parte do pesque e pague, mas aqui tá difícil de entender. Vou pesquisar aqui pra ver se consigo entender alguma coisa, ele deixou o voucher pra gente usar a internet, eu vou pesquisar. E vocês duas?*

Eunice da Conceição: *Eu estou do mesmo jeito. Vou ler em voz alta pra ver se a gente entende.*

A discussão da equipe da equipe 08 também evidencia essa dificuldade, conforme o trecho a seguir:

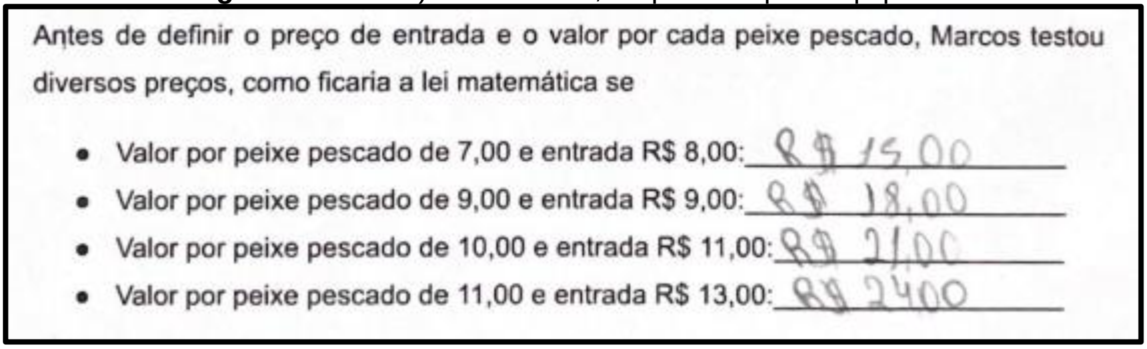
Reiman: *Eu parei aqui, isso aqui não dá pra entender.*

Matheus Euclides: *Eu já estou é de cabeça quente. Eu achei que tinha entendido, mas nessa parte da definição e dos coeficientes eu parei.*

A equipe 01 buscou ampliar o seu repertório através de pesquisa. A ideia da sala de aula invertida é de fato aguçar os processos investigativos e proporcionar esse ambiente de construção do conhecimento, para que no momento da institucionalização, os estudantes possam se colocar, esclarecer as suas dúvidas oriundas desse processo.

Fica claro que os alunos possuem dificuldade quando a linguagem utilizada é eminentemente matemática. Nos itens i) e j) os estudantes também apresentaram dificuldades, não conseguiram realizar as conversões propostas.

Figura 24 - Item i) da atividade, respondida pela equipe 07



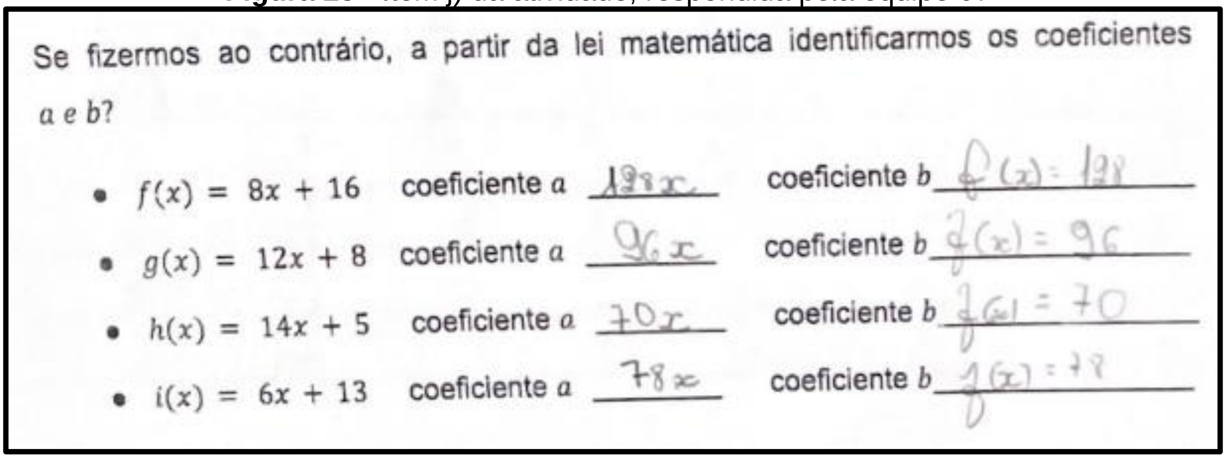
Antes de definir o preço de entrada e o valor por cada peixe pescado, Marcos testou diversos preços, como ficaria a lei matemática se

- Valor por peixe pescado de 7,00 e entrada R$ 8,00: R$ 15,00
- Valor por peixe pescado de 9,00 e entrada R$ 9,00: R$ 18,00
- Valor por peixe pescado de 10,00 e entrada R$ 11,00: R$ 21,00
- Valor por peixe pescado de 11,00 e entrada R$ 13,00: R$ 24,00

Fonte: o autor.

Nesse item, os alunos deveriam fazer uma conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, no entanto os estudantes fizeram a soma dos valores, o que evidencia a não compreensão do que estava sendo proposto. O mesmo ocorre para o item j), no qual deveriam ser destacados os coeficientes angulares e lineares. A figura abaixo ilustra essa discussão.

Figura 25 - Item j) da atividade, respondida pela equipe 07



Se fizermos ao contrário, a partir da lei matemática identificarmos os coeficientes a e b?

- $f(x) = 8x + 16$ coeficiente a 128x coeficiente b f(x) = 128
- $g(x) = 12x + 8$ coeficiente a 96x coeficiente b f(x) = 96
- $h(x) = 14x + 5$ coeficiente a 70x coeficiente b f(x) = 70
- $i(x) = 6x + 13$ coeficiente a 78x coeficiente b f(x) = 78

Fonte: o autor.

Neste item, a equipe confundiu a variável x com o símbolo da multiplicação e efetuou o produto entre o coeficiente angular e coeficiente linear.

A segunda etapa desta sessão foi realizada no dia imediato. Os alunos continuaram organizados em grupos e seguiram na realização da atividade proposta, durante duas aulas de 50 minutos cada, nas quais o pesquisador interagiu com os grupos.

A importância econômica do milho é caracterizada pelas diversas formas de sua utilização, que vai desde a alimentação animal até a indústria de alta tecnologia. O uso do milho em grão na alimentação animal representa a maior parte do consumo desse cereal, isto é, cerca de 70% no mundo. Um produtor avaliou que seu custo total de produção de milho, consiste em um custo fixo de R$ 1.500,00, somado ao custo da produção de R$ 8,66 por saca.

Custo Fixo	Quantidades de sacas	Custo de produção por saca	Custo Total
R$ 1.500	1	R$ 8,66	1.508,66
	2		
	3		
	10		
	15		
	30		
	100		
	1000		
	x		

a. Após completar a tabela, qual lei matemática pode ser escrita que representa o custo total dessa produção?

b. Quais variáveis estão se relacionando na situação problema proposta?

c. O que acontece com o custo total se aumentarmos a quantidade de sacas produzidas?

d. O que é necessário para calcular o custo total?

e. Você consegue perceber uma relação de dependência entre o custo total e a quantidade de sacas produzidas? Como essa relação se estabelece?

f. Na situação proposta qual a variável dependente e independente?

g. Qual será o custo para o produtor se ele produzir 1000 sacas de milho?

h. Na janela de álgebra, insira a lei da função encontrada na tabela. Qual elemento apareceu na janela de visualização?

A segunda etapa da atividade foi marcada pelo nível das discussões propostas em cada grupo. Nessa fase, os alunos fizeram a conversão da língua natural para o registro simbólico algébrico.

O diálogo da Equipe 02, a seguir, traz elementos importantes para a nossa investigação sobre o item a). Através do registro tabular, o estudante consegue generalizar a lei da função para a situação proposta.

Leibniz: *Está aqui pra gente fazer o custo fixo, isso aqui é raciocínio lógico.*

Leonard Euler: *O custo fixo, é fixo né?*

Renê Descartes: *É, aqui vai ser a quantidade de sacas e o custo fixo é R$ 1500,00, se é duas sacas vai ser R$ 3000,00; é só ir aumentando de 1500 em 1500.*

Leonard Euler: *Eu pensei que custo fixo ia ficar 1500 pra sempre.*

Renê Descartes: *Está aqui, olhe: tem custo fixo, quantidade de sacas, custo de produção por sacas e o custo total, está ligado? É tipo assim, o custo fixo a cada quantidade de saca, ele aumenta, ta ligado? Por exemplo, uma quantidade de saca é 1500?*

Leonard Euler: *Por que? Por que aumenta? Ah, entendi, o que aumenta é a quantidade de sacas ? O custo fixo deveria ser fixo.*

Renê Descartes: *Então, cada saca custa 1500, vai aumentando o próximo 3000, depois 4500.*

Leonard Euler: *Eu acho que não.*

Renê Descartes: *Você acha o quê então?*

Leonard Euler: *Eu acho que não tem só a ver com 1500, e o valor total vai aumentando em relação à quantidade de sacas que tem. Na verdade o que vai mudar é esse aqui, (refere-se ao custo por sacas).*

Renê Descartes: *Na minha mente, o custo fixo ia aumentando a cada saca 1500. Eu ignorei o custo da saca.*

Leonard Euler: *Se cada saca custa 8,66, a única coisa que a gente vai somar aqui, ou melhor multiplicar é a quantidades de saca pelo valor de R$ 8,66.*

O último agora é de x.

Renê Descartes: *Como é que eu vou fazer esse se não tem literalmente o que fazer? Vou calcular o que está vazio?*

Leonard Euler: *Mas o professor falou que é para calcular. Chama o professor. Paramos nesse ponto como os outros grupos, no x.*

Pesquisador: *como foi que vocês encontraram esses valores?*

Multiplicando o valor da saca pela quantidade de sacas.

Pesquisador: *O que x está representando?*

Leonard Euler: *Uma variável. Quando o valor muda, significa que ele pode assumir outro valor, por isso esses valores estão diferentes, e em todos ou outros valores nós fizemos multiplicando cada um dos valores por 8,66, então a gente vai multiplicar* $8{,}66.x$*.*

Pesquisador: *E para calcular o custo total?*

Leonard Euler: *Se para cada um dos valores da tabela nós calculamos o custo total somando o custo por saca mais o preço fixo, que nesse caso não muda de jeito nenhum, então vai ficar assim:* $8{,}66x + 1500$

François: *interessante. Curioso.*

Então o custo total para a produção de uma saca será de 1508,66, e assim sucessivamente. Se eu multipliquei 8,66 vezes x, então tem adição e multiplicação.

Esta discussão evidencia que inicialmente um dos estudantes não compreendeu o comportamento do custo fixo. Um dos colegas questiona para mostrar que o modo como ele estava pensando era o mais assertivo para a resolução da situação. Até que ele percebe que era necessário relacionar o custo da quantidade de sacas produzidas com o custo fixo. Outro momento de entrave é quando a quantidade de sacas produzidas equivale a x. Eles param e não conseguem perceber a relação que está estabelecida para cada um dos valores propostos e o valor obtido pelo produto da quantidade de sacas e o valor. Nesse momento, precisei fazer intervenções que permitissem aos estudantes compreenderem o que estava sendo proposto.

Pesquisador: *O que x está representando?*

Leonard Euler: *Uma variável. Quando o valor muda, significa que ele pode assumir outro valor, por isso esses valores estão diferentes, e em todos ou outros valores nós fizemos multiplicando cada um dos valores por 8,66, então a gente vai multiplicar* $8{,}66.x$*.*

Pesquisador: *E para calcular o custo total?*

Leonard Euler: *Se para cada um dos valores da tabela, nós calculamos o custo total somando o custo por saca mais o preço fixo, que nesse caso não muda de jeito nenhum, então vai ficar assim:* $8{,}66x + 1500$.

A partir dos questionamentos, os estudantes reconheceram a ideia de variável e como era possível encontrar uma lei matemática que associasse a quantidade de sacas com o custo total.

Figura 26 - Item a) da segunda etapa da atividade, respondida pela equipe 02.

a) Após completar a tabela, qual lei matemática pode ser escrita que representa o custo total dessa produção?

custo total = 1.500 + 8,66 . X

Fonte: o autor.

Figura 27 - Item a) da segunda etapa da atividade, respondida pela equipe 03.

a) Após completar a tabela, qual lei matemática pode ser escrita que representa o custo total dessa produção?

8,66 . x + 1.500 = C

Fonte: O autor.

No entanto, 06 equipes não conseguiram obter a lei de formação. A equipe 06 reconheceu as operações envolvidas, representando em língua natural, mas não conseguiu generalizar conforme mostra o registro a seguir.

Figura 28 - Item a) da segunda etapa da atividade, respondida pela equipe 03.

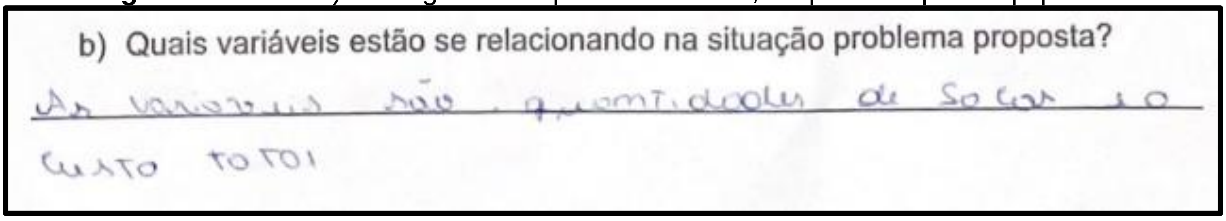
a) Após completar a tabela, qual lei matemática pode ser escrita que representa o custo total dessa produção?

Soma e multiplicação

Fonte: o autor.

No item b), apenas as equipes 01, 02 e 03 compreenderam e conseguiram destacar a variável dependente e a variável independente apresentadas na atividade.

Figura 29 - Item b) da segunda etapa da atividade, respondida pela equipe 03.



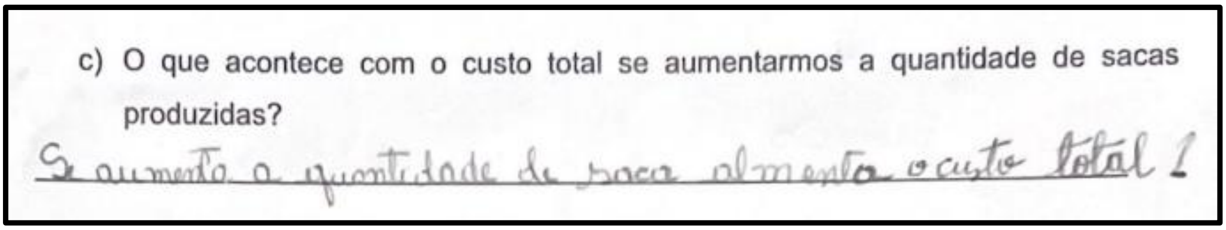
b) Quais variáveis estão se relacionando na situação problema proposta?

As variaveis são quantidades de sacas e o custo total

Fonte: O autor

No item c), os alunos conseguiram perceber a relação de dependência entre a quantidade de sacas produzidas e o custo total e que à medida que uma variável aumenta, a outra também aumenta.

Figura 30 - Item c) da segunda etapa da atividade, respondida pela equipe 04



c) O que acontece com o custo total se aumentarmos a quantidade de sacas produzidas?

Se aumenta a quantidade de saca almenta o custo total !

Fonte: O autor.

Nos itens d), e), f) e g), as equipes responderam conforme havíamos previsto nas análises a *priori*. Apenas as equipes 02 e 03 conseguiram generalizar a lei da função no item h) e conseguiram associar o registro simbólico algébrico com o registro gráfico.

Após a conclusão da atividade, o pesquisador mediou o processo de socialização das respostas obtidas, com o auxílio do *Power Point,* através do qual as atividades foram organizadas na forma de slides, para que os estudantes pudessem expor suas respostas e, juntos, pesquisador e turma fizeram as observações necessárias no momento didático.

Foi perceptível o envolvimento dos estudantes nesse momento, as dúvidas e os questionamentos foram embasados nas dificuldades que encontraram durante a realização da atividade, e isso é justamente o que se espera de uma sala de aula invertida, que os estudantes sejam protagonistas do processo de aprendizagem.

O ambiente criado no momento da realização das atividades estava propício para a pesquisa, então o grupo de estudos foi utilizado para que o aluno tivesse contato com o objeto matemático e pudesse consultar outras fontes. Isso fica claro no diálogo proposto no momento didático.

Pesquisador: *Ficou alguma dúvida da atividade?*

Renê Descartes: *Fessor, depois do que o senhor falou, abriu minha mente, porque eu senti dificuldade, teve uma parte que não entendi, eu pesquisei, li várias vezes o que estava na atividade, mas com a sua explicação clareou foi tudo.*

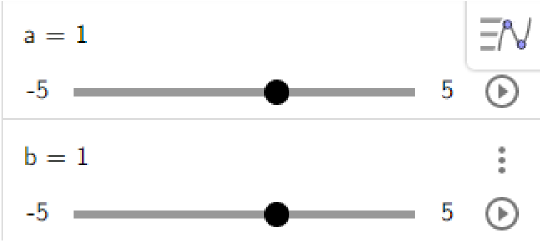
Em seguida, o pesquisador realizou a institucionalização sobre a definição de função afim, conjunto domínio, contradomínio, imagem, a representação gráfica e o tipo de crescimento. Pode-se notar que as variáveis destacadas para a primeira sessão de ensino, influenciaram na construção dos saberes do conceito de função afim.

5.2 SEGUNDA SESSÃO DE ENSINO

A segunda atividade foi aplicada no dia 19 de maio de 2023, durante o grupo de estudos. O ambiente desta vez foi a biblioteca, na qual, organizados em quarteto, os grupos receberam as atividades entregues pelo pesquisador. Todos os integrantes estavam munidos dos seus *smartphones.* Aqui não houve interferência do pesquisador.

Abra o Geogebra em seu *smartphone*

a) No campo de entrada do geogebra digite o termo geral da Função Afim $f(x) = a.x + b$.
b) Apareceu na janela de álgebra os controles deslizantes dos coeficientes a e b da função afim que podem ser modificados.

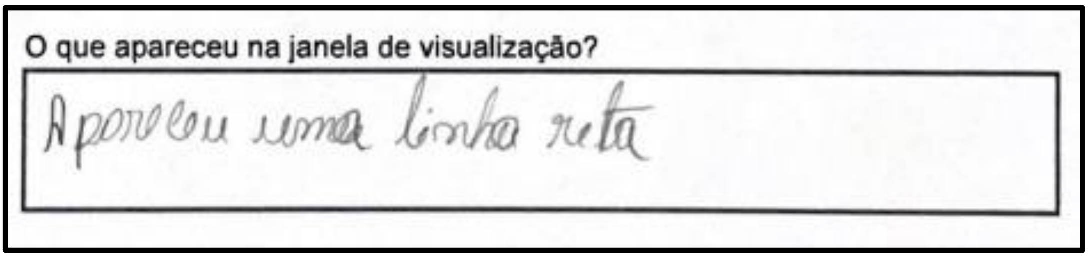


c) O que apareceu na janela de visualização?

d) Movimente o controle deslizante a, o que acontece quando você observa a janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente a da função afim? O que ele determina no gráfico da função?

Conforme havíamos previsto nas análises a *priori,* os estudantes inseriram na janela de álgebra o termo geral da função afim, a intencionalidade era que os estudantes pudessem perceber a conversão do registro simbólico algébrico para o registro gráfico.

Figura 31 - Item c) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 07.



Fonte: o autor.

O diálogo estabelecido pela equipe 06 nos permite perceber que os alunos foram capazes de observar a conversão do registro simbólico algébrico para o registro gráfico.

Arquimedes: *Aqui está pedindo para inserir o termo geral da função afim, na janela de álgebra, vai fazendo aí Nícolas Boubark, apareceu o quê?*

Nícolas Boubark: *Apareceu como está na atividade, mas na janela de visualização, essa aqui de cima, apareceu uma linha reta, que está subindo da esquerda para a direita.*

Arquimedes: *Que irado! Escreva logo.*

Embora os estudantes não tenham registrado na atividade, eles identificam a variável visual e o valor que essa variável assume ao afirmarem que está subindo da esquerda para a direita, que neste caso poderíamos dizer que a reta tem um sentido de inclinação ascendente.

Apenas as equipes 01, 05 e 07 não responderam corretamente, pois não identificaram o gráfico da função afim na janela de visualização.

Para o item d), conforme descrito na análise a *priori,* o objetivo era que o aluno reconhecesse o coeficiente angular no registro simbólico algébrico, e como esse coeficiente interfere no registro gráfico. A equipe 02 identificou que à medida que o controle deslizante era movimentado, a equação modificava o coeficiente angular e isso implicava na movimentação da reta na janela de visualização conforme imagem a seguir.

Sobre este ponto Duval esclarece que:

> O conceito de inclinação, algebricamente traduzido pelo coeficiente, recobre duas unidades significantes diferentes: uma definida em relação ao sinal e a outra em relação ao inteiro 1. Estas duas unidades significativas correspondem a duas variáveis diferentes, respectivamente, o sentido da inclinação e ao ângulo. Não há congruência entre a direção da reta no plano cartesiano e o coeficiente que determina esta direção na expressão algébrica, uma vez que para qualquer valor do coeficiente dado (2, ½, -2, etc.) é necessário destacar duas propriedades distintas relativamente ao 0 e ao 1. (DUVAL, 2011, p. 102)

Figura 32 - Item d) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 02

Movimente o controle deslizante a, o que acontece quando você observa a janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente a da função afim? O que ele determina no gráfico da função?

No janela de algebra a equação muda e consequentemen te a reta na janela de visualização também muda.

Fonte: o autor.

Da discussão dos estudantes, destacamos o trecho a seguir, extraído da transcrição do diálogo da equipe:

Françõis Viete: *Movimente o controle deslizante, assim rápido não, faça mais lentamente pra gente observar e saber o que está acontecendo. Se ligue, você movimentou e alterou a lei da função, e a reta mudou de posição, Leibniz, eu só não estou sabendo descrever o que acontece com a reta.*

Leibniz: *E precisa descrever isso? Ele quer saber o que o coeficiente determina.*

Renê Descartes: *Mexa aí esse controle, a reta está parecendo aqueles brinquedos que a gente senta um do lado e outro do outro, tipo balanço, quando um desce o outro sobe.*

Françõis Viete: *Só que a gente não vai colocar isso na resposta.*

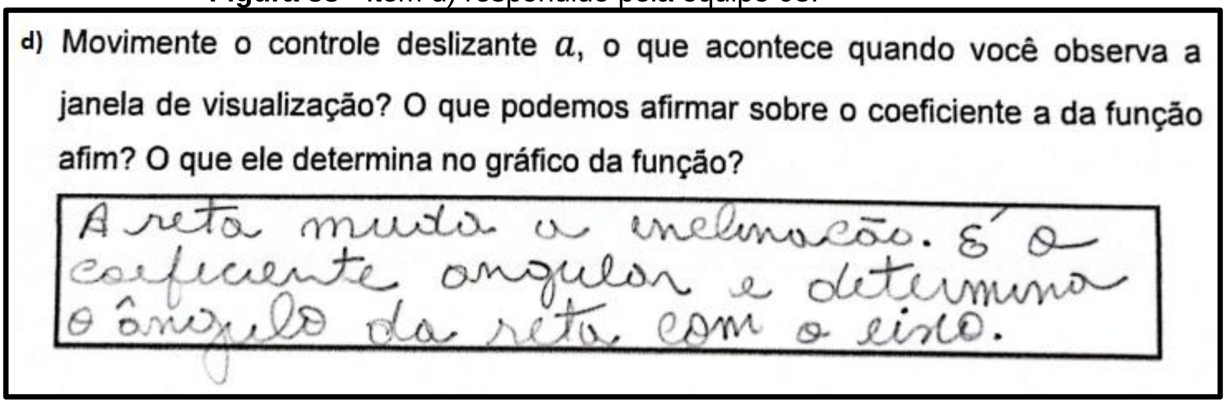
Leibniz: *Sim, muda na equação, muda na reta. Oxe, a gente é muito lerdo, pesquisa aí no google qual a função do coeficiente a.*

Renê Descartes: *Tá dizendo aqui que é coeficiente angular, tinha isso na atividade de ontem.*

Aqui, a equipe não conseguiu descrever o comportamento da reta e o ângulo por ela formado com os eixos. A associação com o balanço tem coerência, mas eles não descrevem que modifica a inclinação da reta.

A equipe 08 conseguiu identificar de forma mais precisa o que o item pedia.

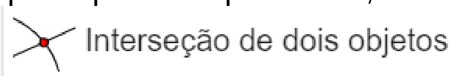
Figura 33 - Item d) respondido pela equipe 08.



d) Movimente o controle deslizante a, o que acontece quando você observa a janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente a da função afim? O que ele determina no gráfico da função?

A reta muda a inclinação. É o coeficiente angular e determina o ângulo da reta com o eixo.

Fonte: o autor.

e) Movimente o controle deslizante b, para que ele fique $b = 2$, em seguida vá no menu de ferramentas e clique no ícone 

clique no eixo das ordenadas e na reta. Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas?

f) Movimente o controle deslizante b, de modo que fique com o valor igual a 3. O que aconteceu com o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas na janela de visualização?

g) Movimente o controle deslizante b, deixe-o igual a -2. O que aconteceu com o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas na janela de visualização? O que podemos afirmar sobre o coeficiente b no gráfico da função afim?

h) Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas? Existe relação entre esse ponto e coeficiente linear da função?

Nos itens e), f), g), h) e l) desejávamos que, através da experimentação, os estudantes chegassem à conclusão de que o coeficiente linear fornece o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas. Neste tópico, os alunos apresentaram bastante dificuldade, apenas a equipe 01 respondeu conforme podemos observar a seguir, no diálogo travado no grupo. Sobre a proposta elaborada para esses itens, Duval afirma que:

> Uma apresentação explícita e sistemática das variações visuais significativas não somente centra a atenção sobre a correspondência entre a representação gráfica e expressão algébrica, mas permite encontrar diretamente a expressão algébrica das propriedades geométricas: perpendicularidade e paralelismo de duas retas, por exemplo. De fato, é suficiente praticar a abordagem experimental a mais clássica: variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro (ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão). Assim, por exemplo, a oposição entre y = x e y = -x se articula em uma unidade de uma imagem visual e esta imagem se presta a modificações que têm contrapartida algébrica imediata. (DUVAL, 2011, p.103)

Eunice da Conceição: *Movimente o controle da para que ele fique igual a dois, cadê?*

Maris Ellen: *Aí pronto, b igual a dois. Em seguida vai nisso aqui ó. Só que eu quero saber o quê que essa movimentação faz.*

Lobachevsky: *Clique no menu de ferramentas e clique no ícone. Isso aqui. Menu. Cadê o menu? Você já clicou já.*

Maris Ellen: *clica no bicho aí depois clique no menu de ferramentas, clique no ínferface ferramenta isso aqui, ícone rapaz ferramenta cá ó, cadê?*

Lobachevsky: *Fala a coordenada, ponto A, reta, intercepta o eixo das ordenadas. Hã? Qual a coordenada?*

Maris Ellen: *Pronto, o ponto interfere na reta? Interfere. O ponto de interseção da reta quando corta o eixo das Ordenadas, observe o par ordenado, zero vírgula dois. Quando a gente faz o próximo passo, o valor de b na equação reflete na reta, no ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas, mesmo quando a gente colocou o valor de b negativo, observe que está abaixo da origem, está igual a menos dois, a conclusão é essa.*

Lobachevsky: *Então o coeficiente b indica no gráfico o ponto de interseção da reta com o eixo y. Eu sempre me confundo com esses eixos.*

Os estudantes da Equipe 01 fizeram as modificações propostas e foram realizadas observações tanto sobre o registro simbólico algébrico quanto sobre o registro gráfico. É possível identificar as dialéticas ação, da formulação e validação.

Nos referidos itens, os grupos apresentaram dificuldades para variável visual proposta, isto ficou claro para o pesquisador durante a aplicação, enquanto observava o desenvolvimento, constatação ratificada na análise a *posteriori* dos registros escritos.

Durante a transcrição dos áudios, foi possível observar baixo rendimento nas discussões, descompromisso em concluir a atividade com a devida atenção, pois esta exigia uma proposta investigativa, e isto pode ter acontecido devido ao cansaço, pois a atividade foi desenvolvida à noite, durante o grupo de estudo.

i) Movimente o controle deslizante do coeficiente a e o deixe igual a 2. Movimente o controle deslizante b e o deixe igual a -1. Como ficou a lei da função na janela de álgebra?

j) Com a lei da função obtida no item anterior encontre os valores de y. Em seguida insira os pares ordenados na janela de álgebra.

x	Lei da Função	y	(x, y)
-2			
-1			
0			
1			
2			

k) Observe a janela de visualização, como os pontos ficaram organizados no plano cartesiano? Por que isso aconteceu?

Para os itens i), j), k), conforme previsto nas análises a *priori,* todas as equipes reconheceram a lei da função, colocaram os coeficientes de modo correto e obtiveram o registro simbólico algébrico desejado. Alguns tratamentos no registro simbólico algébrico foram realizados de forma equivocada pelas equipes 01, 02 e 07, de modo que os pares ordenados encontrados não pertenciam à reta da função $f(x) = 2x - 1$. Destacamos o registro tabular da equipe 01 na imagem a seguir.

Figura 34 - Item j) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 01

x	Lei da Função	y	(x, y)
-2	2x - 1	- 3	(-2, -3)
-1	2x - 1/+b	-1	(-1 ; -1)
0	2x - 1	-1	(0, -1)
1	2x - 1	-1	(1, 1)
2	2x - 1	3	(2 ; 3)

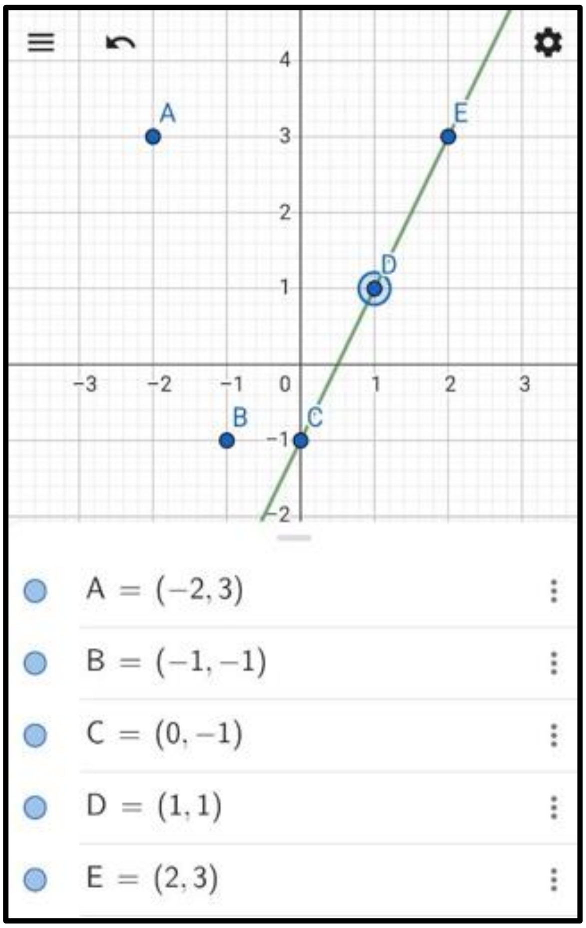
Fonte: o autor.

Para os valores de $x = -2\ e\ x = -1$, ficou constatado que os alunos não souberam operar com valores negativos, essa constatação permitiu que o pesquisador apontasse a necessidade de recuperação dessas habilidades. Também foi notória a dificuldade em resolver equações do primeiro grau (referimo-nos aqui ao tratamento realizado dentro do registro simbólico algébrico). O diálogo ocorrido durante a discussão do item nos traz elementos que evidenciam a nossa hipótese.

Eunice da Conceição: *Anota a lei da função aí na tabela e a gente vai substituindo os valores de x, como a gente fez na atividade anterior.*
Maris Ellen: *Coloca -2 na lei da função e resolve.*
Lobachevsky: *Por que você não faz? Eu não sei fazer esse negócio com número negativo.*
Martha Dantas: *Eita que tudo vocês criam problema. Multiplica por -2 e depois resolve. Vai ficar assim, igual a -3.*

Os alunos relatam as dificuldades de realizar operações com números inteiros negativos e isso repercute na realização da atividade. O registro gráfico da situação proposta, na imagem a seguir, traz evidências dessa dificuldade.

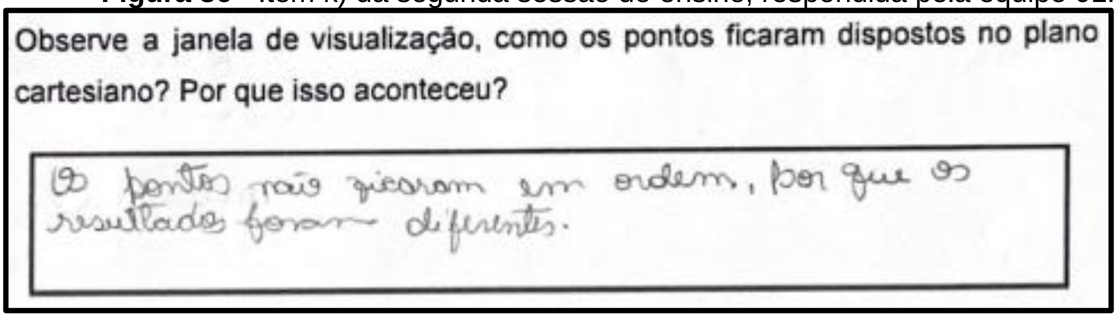
Figura 35 - Captura de tela do Item j) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 01



Fonte: o autor

No item k), a equipe não conseguiu justificar por que os pontos obtidos não pertenciam à reta, já que a lei da função fornece todos os pontos que pertencem à reta.

Figura 36 - Item k) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 01.


Observe a janela de visualização, como os pontos ficaram dispostos no plano cartesiano? Por que isso aconteceu?

Os pontos não ficaram em ordem, por que os resultados foram diferentes.

Fonte: o autor.

As equipes 03, 04, 05, 06 e 08 realizaram os tratamentos de forma correta e fizeram o que esperávamos na análise a *priori*. Destacamos a seguir a produção da equipe 08.

Figura 37 - Item j) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 08.

j) Com a lei da função obtida no item anterior encontre o valor de y. Em seguida insira os pares ordenados na janela de álgebra.

OBS: Para inserir o ponto é necessário que na janela de álgebra você insira o par ordenado separador por virgula e entre parênteses. Ex.: (4,6).

x	Lei da Função	y	(x, y)
-2	F(-2)=2x-1	-5	(-2,-5)
-1	F(-1)=2x-1	-3	(-1,-3)
0	F(0)=2x-1	-1	(0,-1)
1	F(1)=2x-1	1	(1,1)
2	F(2)=2x-1	3	(2,3)

k) Observe a janela de visualização, como os pontos ficaram dispostos no plano cartesiano? Por que isso aconteceu?

Eles ficaram em linha reta

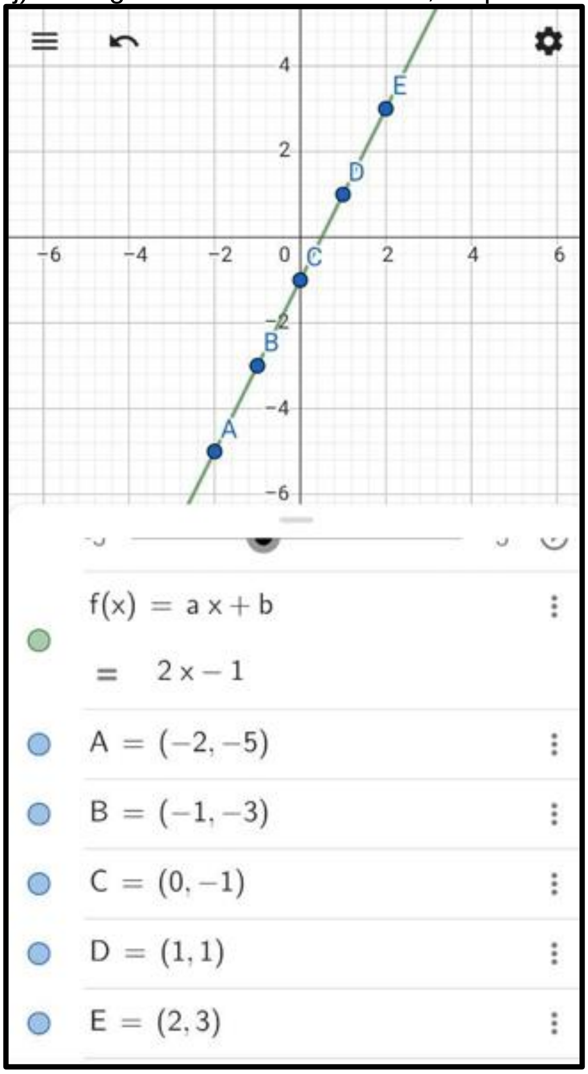
Fonte: o autor.

Aqui verificamos que os tratamentos no registro simbólico algébrico e no registro tabular foram feitos corretamente. Cada par de número permite identificar os pontos que pertencem à reta. De acordo com Duval:

> Este modo associativo limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem favorece quando se quer traçar o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do 2º grau. (DUVAL, 2011, p. 98)

A captura de tela, realizada pela equipe 08 mostra-nos exatamente o que é proposto pelo referido autor.

Figura 38 - Item j) da segunda sessão de ensino, respondida pela equipe 08.



Fonte: o autor

l) Qual a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das abscissas? Quando a reta intercepta o eixo das abscissas, o que acontece com o valor de y na coordenada?

m) Quando aumentamos o valor de x o que acontece com o valor de y? Qual o sentido da reta na janela de visualização?

n) Agora vamos analisar a tabela do item i). O que acontece com o valor de y, quando aumentamos o valor de x?

o) Movimente o coeficiente a, deixando com o valor igual -2. Como ficou a lei da função? O gráfico se comportou da mesma maneira que o gráfico da função $f(x)\ 2x-1$?

Os últimos quatro itens desta sessão de ensino foram estruturados para que os estudantes pudessem iniciar o processo de construção do conhecimento sobre a raiz da função, crescimento e decrescimento.

Apenas as equipes 02, 03, 07 e 08 conseguiram realizar a atividade conforme havíamos previsto na análise a *priori:* identificaram o zero da função no registro gráfico e perceberam que quando os valores de x aumentava o de y também aumentava. As outras equipes alegaram que não conduziram bem o tempo e, por isso, deixaram os itens sem resposta.

No dia 23 de maio, o pesquisador mediou a socialização das atividades propostas no dia 19 de maio. A sessão de ensino foi organizada em power point e apresentada em *slides,* em paralelo o software Geogebra foi aberto para que os passos propostos na atividade também pudessem ser feitos pelo pesquisador.

A riqueza proporcionada no momento da socialização permitiu ao pesquisador perceber quais pontos precisavam ser reforçados, pois as fragilidades emergiam à medida que o debate acerca dos itens acontecia.

Pesquisador: *Quais as principais conclusões que chegamos ao encerrar esse momento? Qual grupo se habilita?*

Isaac Newton: *A gente escreveu o seguinte: a função afim tem uma lei geral que é escrita como* $f(x) = ax + b$, *o gráfico da função é uma reta que pode ser modificada na medida que os coeficientes a e b mudam.*

Pesquisador: *Outra equipe.*

Nicolau de Oresme: *O gráfico da função afim é uma reta, que pode ser feita no plano cartesiano do Geogebra, cada coeficiente tem uma função, o coeficiente a interfere na inclinação e o coeficiente b é quando a reta corta o eixo que fica em pé.*

Pesquisador: *O eixo das ordenadas, prossiga.*

Nicolau de Oresme: *A função pode ser crescente ou decrescente, de acordo com o coeficiente a e ainda tem o zero da função, que no gráfico é o ponto que a reta passa pelo eixo* x.

Pesquisador: *Como podemos determinar o zero da função na lei da função?*

Nicolau de Oresme: *Aí o senhor pegou pesado. (risos)*

Arquimedes: *Eu acho que é igualando a função a zero. É isso professor?*

Pesquisador: *É isso mesmo.*

Arquimedes: *Por isso o ponto fica em cima do eixo, porque a coordenada y é igual a zero e o outro valor é de x, por isso a reta passa por esse ponto.*

Renê Descartes: *Professor, a atividade não era difícil, mas a gente precisava prestar atenção, agora com a explicação a gente fica pensando, como foi que eu errei essa besteira? Mas com a explicação tudo se encaixa.*

Mesmo sendo uma habilidade trabalhada desde as séries finais do Ensino Fundamental, os alunos ainda têm dificuldade em reconhecer qual o eixo das ordenadas e o eixo das abscissas.

No entanto, o diálogo travado durante o momento de institucionalização evidencia que os alunos conseguiram compreender o que a atividade propunha, ampliaram o conhecimento, tiveram dúvidas dirimidas e avançaram.

A proposta da atividade a ser desenvolvida numa sala de aula invertida permite que as dúvidas surjam com mais espontaneidade, já que um dos problemas que enfrentamos nas aulas de matemática é a vergonha em perguntar ao professor. A dúvida emerge na socialização e o professor no momento didático esclarece, além disso, há o ganho de tempo, pois um dos maiores desafios em uma escola do campo com pedagogia de alternância é o tempo pedagógico.

5.3 TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO

Esta sessão de ensino foi aplicada no dia 25 de maio de 2023, no turno matutino, durante o momento de aula, com duração total de 100 minutos. Os estudantes mantiveram a organização em quartetos, estavam munidos de seus respectivos *smartphones.* O pesquisador entregou as atividades impressas e combinou o tempo estabelecido para a resolução de 50 minutos, já que a outra metade do tempo de aula seria utilizada para a institucionalização.

> Baseado no que aprendeu nas aulas de agroindústria, Andressa decidiu fazer uma oficina em sua comunidade para ampliar as atividades do itinerário Transferência de Tecnologia e auxiliar as doceiras da localidade rural no processo de produção de balas de jenipapo para serem vendidas durante o São João. Ela observou que para cada pote de 100g de balas de jenipapo ela tinha um custo de R$ 3,00.

Número de potes produzidos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**x**
Custo em Reais R$	**3,00**	**6,00**						

a) Complete a tabela.
b) Cada embalagem de bala de jenipapo corresponde um único custo em reais?
c) O custo é dado em função do quê?
d) Quais variáveis estão envolvidas na situação proposta?
e) Examine os dados da tabela, descubra a regularidade existente e escreva a fórmula que associa o custo (C) com o número de embalagens produzidas (x)
f) Qual o custo para produzir 10 potes de balas de jenipapo? E para produzir 50 potes?
g) Com um custo de R$ 180,00, quantos potes de balas de jenipapo foram produzidos?
h) O custo de produção varia de forma diretamente proporcional ao número de potes de balas de jenipapo produzido? Justifique sua resposta.

Conforme havíamos previsto na análise a *priori,* os estudantes não apresentaram dificuldades na realização da atividade proposta e mais uma vez foi possível verificar a devolução, que se configura no momento em que o aluno aceita ser protagonista no processo de construção do conhecimento matemático, nosso foco de estudo.

As equipes EQ01, EQ03, EQ04, EQ06 e EQ08 se destacaram pelo nível de argumentação. A fase da formulação que, de acordo com Almouloud (2007), é evidenciada no momento em que esses estudantes são capazes de construir progressivamente uma linguagem compreensível por todos, além de conseguir se comunicar com os seus pares. É o que o trecho da transcrição do áudio da EQ03 nos permite observar.

Isaac Newton: *Eu to ficando bom nisso, viu? Pelo que eu li aqui, vamos completar a tabela e responder as letras.*
Joseph Fourier: *Vai aumentando de três em três, cada pote produzido custa três, eu penso que é só multiplicar por 3.*

Isaac Newton: *Eu também entendi assim. E como fica a lei da função?*
Johan Bernoulli: *Vai ficar 3.x.*
Isaac Newton: *Só isso? Eu to achando estranho. Não tinha que ter mais alguma coisa?*
Johan Bernoulli: *Não! Na questão não fala nada de valor fixo, que ia ser aquele outro coeficiente, deixa eu olhar aqui no caderno… O coeficiente b que não tem, pode confiar.*
Lejeune Dirichilet*: Eu penso igual a ele. Se é só multiplicar por 3 e não tem valor fixo, joga aí* $f(x) = 3x$.
Isaac Newton: *Eu estou achando estranho ser só isso.*
Johan Bernoulli: *Antes da gente responder vamos conferir no Geogebra. Coloca os pontos aí pra ver como fica.*
Isaac Newton: *Os pontos estão alinhados, clica no ícone da reta e clica em dois pontos. Aí, viu que eu disse, olha a lei da função aqui na janela de álgebra igualzinha como eu disse.*

O fragmento em análise nos permite verificar que, para validar o pensamento matemático construído, o estudante utilizou o software Geogebra e confrontou o que ele havia escrito com o que estava sendo mostrado na janela de álgebra do Geogebra.

O estudante confronta a validade do modelo elaborado por ele, com o registro algébrico fornecido na janela de álgebra do software Geogebra e, assim, vivencia um momento de validação, comprovar empiricamente a afirmação que estava sendo feita, conforme as figuras a seguir.

Figura 39 - Registro tabular da 3ª sessão de ensino proposta pela EQ03.

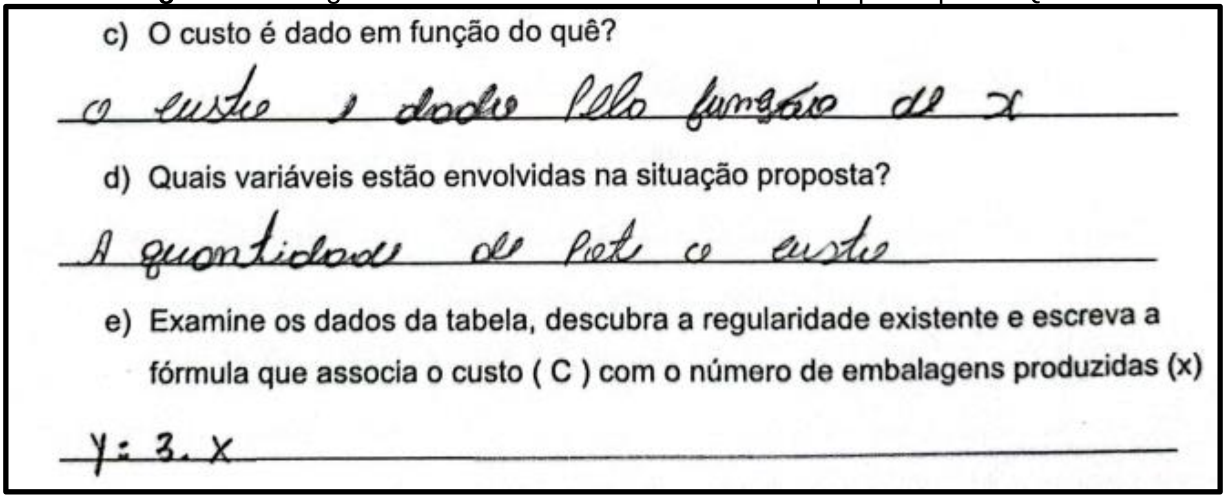
Baseado no que aprendeu nas aulas de agroindústria, Andressa decidiu fazer uma oficina em sua comunidade para produzir balas de jenipapo para serem vendidas durante o São João. Ela observou que para cada pote de 100g de balas de jenipapo ela tinha um custo de R$ 3,00.

Número de potes produzidos	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo em Reais R$	3,00	6,00	9.00	12.00	15,00	18,00	21,00	24,00

Fonte: o autor.

Nestes itens, as equipes identificaram as variáveis visuais envolvidas na situação proposta e efetuaram a conversão do registro tabular para o registro simbólico algébrico. Concordamos com Duval (2009) sobre a importância de o professor propor atividades que contemplem tratamentos e conversões, pois elas podem contribuir para visualizar a persistência das dificuldades inerentes a cada uma das transformações propostas.

Figura 40 - Registro tabular da 3ª sessão de ensino proposta pela EQ03.



c) O custo é dado em função do quê?

o custo e dado pelo função de x

d) Quais variáveis estão envolvidas na situação proposta?

A quantidade de pote e custo

e) Examine os dados da tabela, descubra a regularidade existente e escreva a fórmula que associa o custo (C) com o número de embalagens produzidas (x)

Y: 3. X

Fonte: o autor.

A aprendizagem ocorre quando esse estudante é estimulado pelas atividades que favorecem a coordenação dos mais variados registros de representação semiótica, pois, de acordo com Duval (2009, p. 44), “As representações semióticas são representações ao mesmo tempo conscientes e externas. Com efeito, elas permitem uma ‘visão do objeto’ através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons..)”. Na imagem a seguir, é possível verificar essa coordenação de registros quando o aluno parte da regularidade apresentada no registro gráfico para o registro simbólico algébrico.

i) Com o auxílio do Geogebra, insira os pares ordenados dispostos na tabela, em seguida clique no ícone reta 

em seguida clique em dois pontos. A reta passa por todos os pontos?

j) Como ficou a lei da função na janela de álgebra?

k) A reta passa pelo par ordenado (0,0)? Por que isso acontece? Esse fato possui relação com a lei da função encontrada no item anterior.

Nos últimos itens, os estudantes realizaram um tratamento ponto a ponto no registro gráfico. A experiência com o software Geogebra e a recorrência das atividades permitiram que os estudantes realizassem a atividade dentro do tempo previsto de uma aula de 50 minutos.

As equipes desenvolveram a atividade sem dificuldade, só que dessa vez partimos do registro gráfico para o registro algébrico, para que os estudantes pudessem perceber que as conversões podem acontecer do registro algébrico para o registo gráfico e vice-versa.

As imagens a seguir mostram que os estudantes reconheceram que a reta passa pela origem, e isto ocorre justamente porque o valor do coeficiente linear é igual a zero. Assim fica evidenciado que a variável visual foi identificada pelos estudantes, ao perceberem que a reta passa pela origem e isso só acontece porque o coeficiente b é nulo.

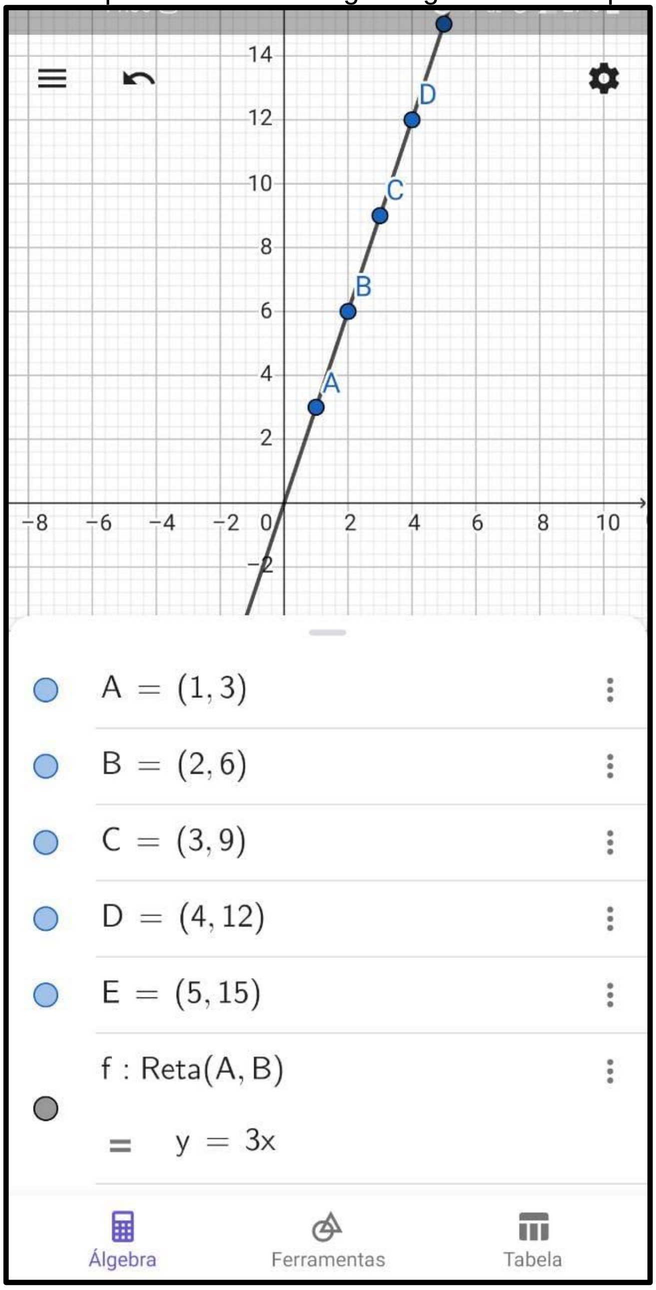
Figura 41 - Resposta do item k) da EQ07

k) A reta passa pelo par ordenado (0,0)? Por que isso acontece? Esse fato possui relação com a lei da função encontrada no item anterior.

Ela Passa. isso acontece porque o valor b é 0. Possui

Fonte: o autor

Figura 42 - Captura de tela do registro gráfico obtido pela EQ07



Fonte: o autor.

Durante o momento didático, o professor mediou a socialização das respostas obtidas nas equipes e os estudantes conseguiram relacionar a função linear com situações do cotidiano. O fragmento extraído da transcrição nos permite chegar a essa conclusão.

Pesquisador: *Em quais situações do cotidiano podemos associar a função linear?*

Leonardo Fibonacci: *Quando a gente compra carne no açougue e o valor é multiplicado pelo quilo?*

Pesquisador: *Isso é uma pergunta ou uma afirmação?*

Leonardo Fibonacci: *Afirmação!*

Nicolas Boubark: *Professor e no posto de gasolina a quantidade dos litros e o preço a ser pago e tem também a padaria quando a gente compra o pão e o preço que a gente paga.*

Pesquisador: *Todos esses exemplos estão relacionados a uma função linear, que é um caso particular da função afim.*

Martha Dantas: *A conta de energia pode ser exemplo também?*

Aqui, os estudantes conseguiram estabelecer relações para além do que estava sendo solicitado na atividade proposta. Retomamos o conceito de *milieu* e como a escolha de uma situação didática deve considerar as possíveis posições do estudante na relação didática, que se traduz na intencionalidade pedagógica e no questionamento: o que o meu estudante vai aprender com esta situação proposta?

Sobre este aspecto, Almouloud esclarece que:

> A posição de um “agente” num jogo didático é diferente da posição de um aluno submetido às intenções do professor. O professor é o organizador dos jogos do aluno com o *milieu,* pois ele escolhe as situações adidáticas mais adequadas com as quais os alunos devem interagir para encaminhar o processo de aprendizagem. (ALMOULOUD, 2007, p.42)

A partir das respostas dos estudantes, fica perceptível que eles compreenderam o comportamento de uma função linear, e conseguiram estabelecer associações, aqui é o momento em que o saber se torna oficial e passa a fazer parte dos esquemas mentais dos estudantes.

5.4 QUARTA SESSÃO DE ENSINO

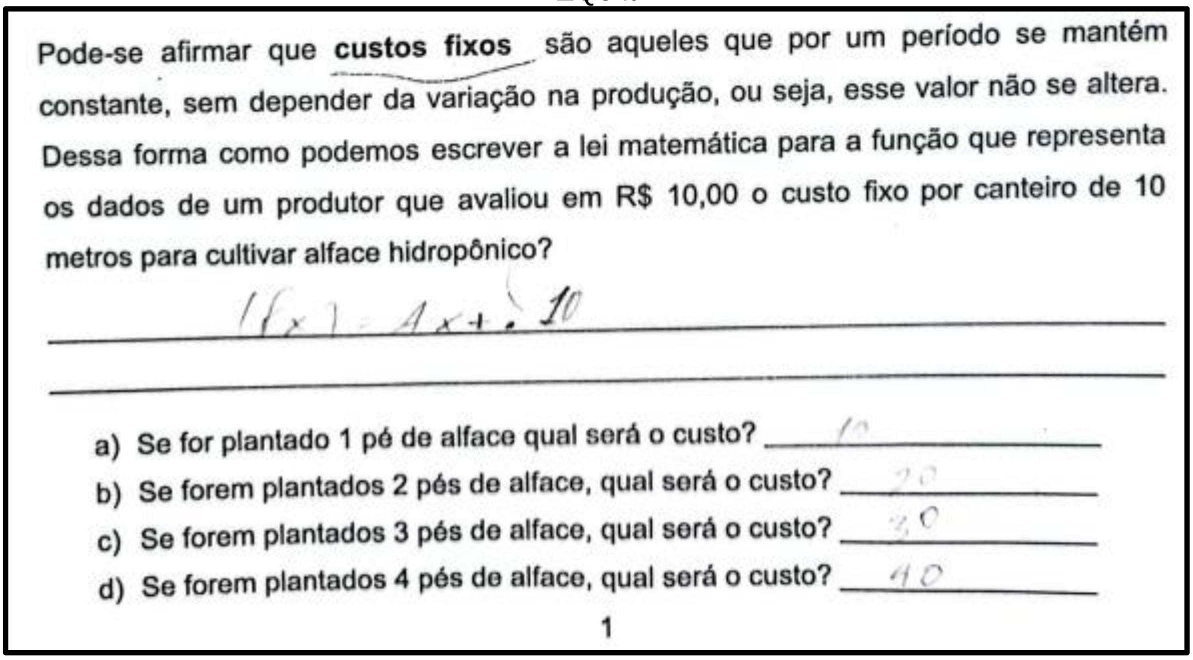
A última sessão de ensino aconteceu no dia 26 de maio de 2023, e os estudantes foram levados para a biblioteca, organizados em seus respectivos grupos, munidos dos smartphones, ocasião em que o pesquisador entregou as atividades impressas e fez uma leitura coletiva da atividade.

A atividade foi desenvolvida durante duas aulas, totalizando 100 minutos, os 50 primeiros destinados à realização e o restante para socialização e institucionalização.

Na primeira parte da aula, as equipes EQ01, EQ02, EQ03, EQ05 e EQ08 responderam à atividade conforme havíamos previsto na análise a *priori,* e as equipes EQ04, EQ06 e EQ07 tiveram dificuldades para resolver a situação proposta.

A EQ04 não conseguiu efetuar completamente a conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico. Na imagem a seguir podemos verificar que os estudantes escreveram a lei da função, e como não encontraram o coeficiente angular, escreveram a generalização.

Figura 43 - Conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico EQ04.


Pode-se afirmar que **custos fixos** são aqueles que por um período se mantém constante, sem depender da variação na produção, ou seja, esse valor não se altera. Dessa forma como podemos escrever a lei matemática para a função que representa os dados de um produtor que avaliou em R$ 10,00 o custo fixo por canteiro de 10 metros para cultivar alface hidropônico?

$f(x) = 1x + 10$

a) Se for plantado 1 pé de alface qual será o custo? 10

b) Se forem plantados 2 pés de alface, qual será o custo? 20

c) Se forem plantados 3 pés de alface, qual será o custo? 30

d) Se forem plantados 4 pés de alface, qual será o custo? 40

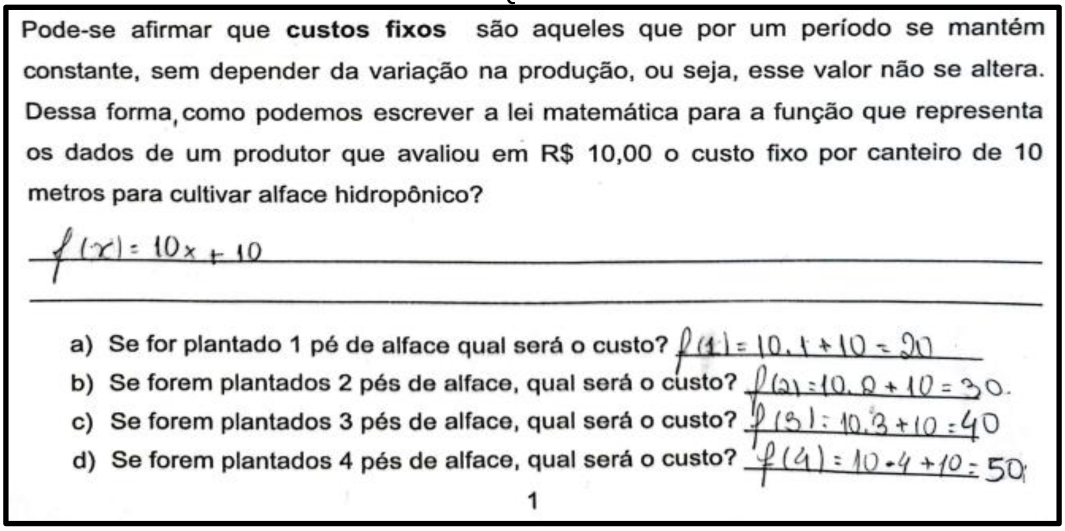
1

Fonte: o autor

Nos itens a), b), c) e d) a equipe foi duplicando o valor, sem considerar que o custo é fixo, logo não pode variar.

A equipe EQ06, por sua vez, confundiu a metragem do canteiro com o coeficiente angular e fez a conversão escrevendo a lei de uma função afim com coeficiente angular e coeficiente linear.

Figura 44 - Conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico EQ06



Pode-se afirmar que **custos fixos** são aqueles que por um período se mantém constante, sem depender da variação na produção, ou seja, esse valor não se altera. Dessa forma, como podemos escrever a lei matemática para a função que representa os dados de um produtor que avaliou em R$ 10,00 o custo fixo por canteiro de 10 metros para cultivar alface hidropônico?

$f(x) = 10x + 10$

a) Se for plantado 1 pé de alface qual será o custo? $f(1) = 10.1 + 10 = 20$

b) Se forem plantados 2 pés de alface, qual será o custo? $f(2) = 10.2 + 10 = 30$.

c) Se forem plantados 3 pés de alface, qual será o custo? $f(3) = 10.3 + 10 = 40$

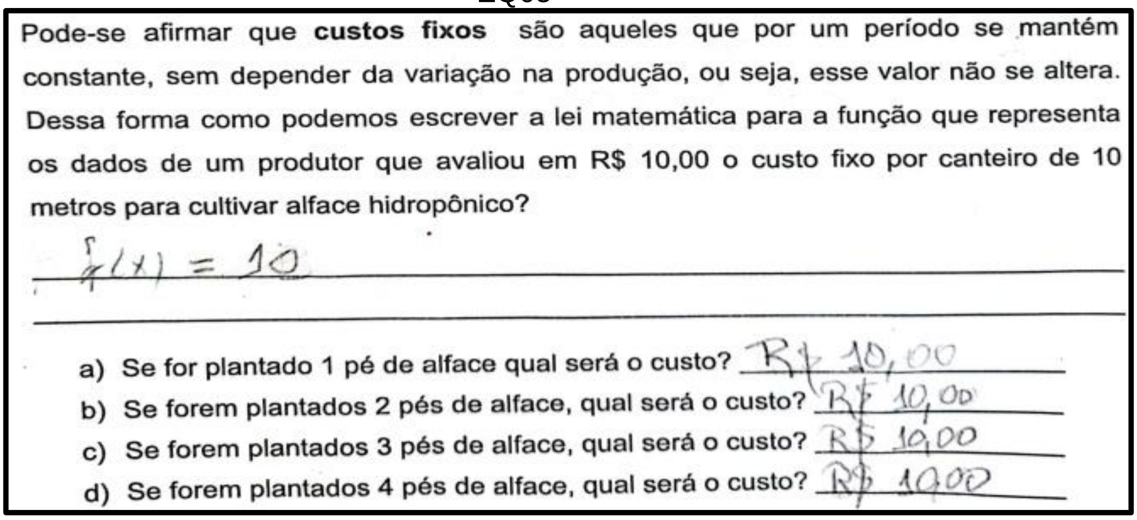
d) Se forem plantados 4 pés de alface, qual será o custo? $f(4) = 10.4 + 10 = 50$

1

Fonte: o autor.

As equipes EQ01, EQ02, EQ03, EQ05 e EQ08 conseguiram realizar a conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico, perceberam que o coeficiente angular era nulo e que, consequentemente, para qualquer valor que x assumisse teria sempre como resultado o valor 10. A imagem a seguir mostra a lei da função encontrada pela EQ05 para a situação proposta, assim como as outras equipes.

Figura 45 - Conversão do registro em língua natural para o registro simbólico algébrico EQ05



Pode-se afirmar que **custos fixos** são aqueles que por um período se mantém constante, sem depender da variação na produção, ou seja, esse valor não se altera. Dessa forma como podemos escrever a lei matemática para a função que representa os dados de um produtor que avaliou em R$ 10,00 o custo fixo por canteiro de 10 metros para cultivar alface hidropônico?

$f(x) = 10$

a) Se for plantado 1 pé de alface qual será o custo? R$ 10,00

b) Se forem plantados 2 pés de alface, qual será o custo? R$ 10,00

c) Se forem plantados 3 pés de alface, qual será o custo? R$ 10,00

d) Se forem plantados 4 pés de alface, qual será o custo? R$ 10,00

Fonte: o autor.

Conforme, análise a *priori*, os estudantes utilizaram o registro tabular para relacionar os valores de x e y para obter os pares ordenados.

Figura 46 - Registro tabular da EQ05

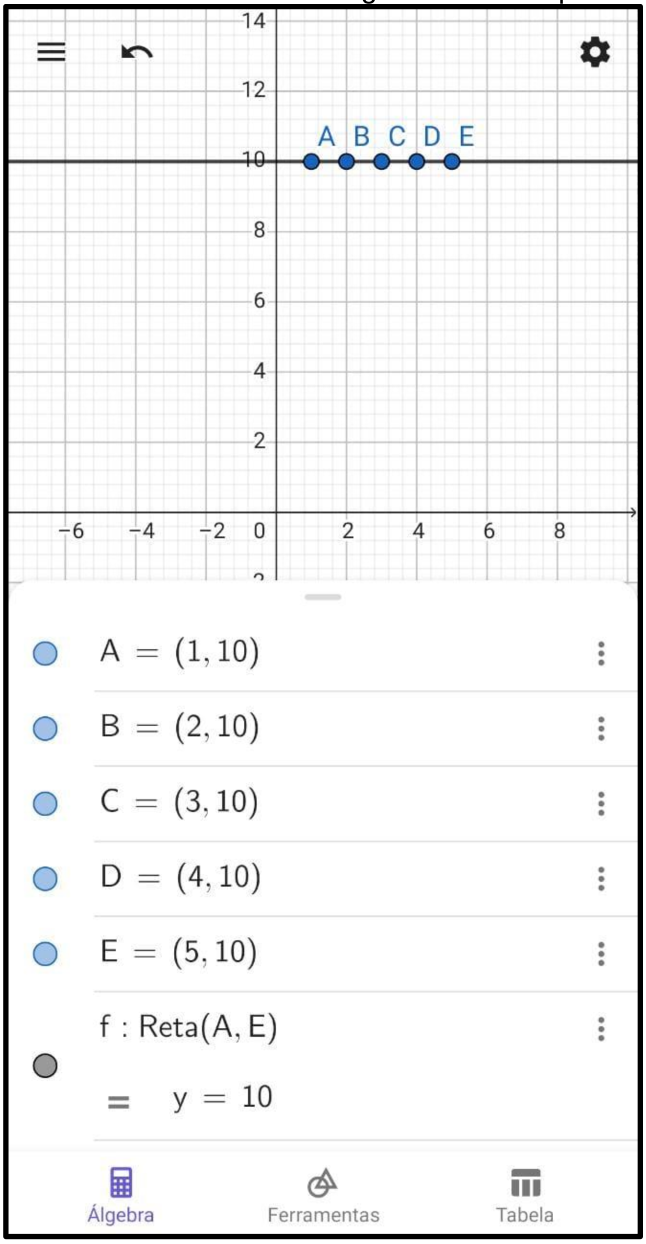
Como ficam os pares ordenados para essa situação? Complete a tabela.

X	Lei da Função	y	Par Ordenado (x,y)
1	f(1) = 10	10	(1, 10)
2	f(2) = 10	10	(2 10)
3	f(3) = 10	10	(3 10)
4	f(4) = 10	10	(4, 10)
5	f(5) = 10	10	(5, 10)
6	f(10) = 10	10	(10, 10)

Fonte: o autor.

A partir deste registro tabular, os estudantes obtiveram o registro gráfico e observaram a variável visual proposta nesta atividade. Embora não tenham utilizado o termo correto, é possível compreender que os estudantes da EQ05 desejavam dizer que a reta obtida estava paralela ao eixo das abscissas, acima da origem porque tinha o coeficiente $b = 0$, como pode ser observado na imagem a seguir.

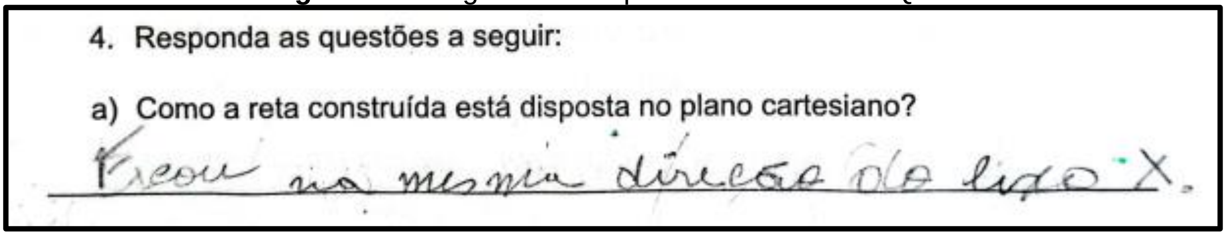
Figura 47 - Captura de tela do software Geogebra do smartphone da EQ05.



Fonte: o autor.

A conclusão da EQ05 pode ser observada na figura a seguir.

Figura 48 - Registro da resposta do item 4 da EQ05


4. Responda as questões a seguir:

a) Como a reta construída está disposta no plano cartesiano?

Ficou na mesma direção do eixo X.

Fonte: o autor.

Encerramos aqui o processo de experimentação da sequência didática elaborada para ensinar função afim. Foi possível observar indícios de compreensão das variáveis visuais atreladas às unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, o que oportunizou transformações do tipo tratamento e conversões entre o registro de representação gráfico para o registro simbólico algébrico.

Múltiplos são os desafios do ensino de matemática em uma escola do campo com pedagogia de alternância, tais como tempo pedagógico, dificuldades dos alunos referentes a habilidades não consolidadas que refletem no processo de aprendizagem de função afim. Esse diagnóstico foi encaminhado para a coordenação pedagógica que fez as tratativas necessárias para o processo de recuperação das referidas habilidades.

Desse modo, foi necessário embasar o processo de construção do produto técnico tecnológico nas análises preliminares que serviram para permitir que se conhecesse mais profundamente o processo histórico de construção do objeto matemático função afim e a melhor forma de explorá-lo. Foi preciso, ainda, situar que ensinamos matemática em um curso que compreende o trabalho como princípio educativo e busca formar jovens em suas múltiplas dimensões.

No que tange à parte cognitiva, tivemos a necessidade de recorrer à Teoria dos Registros de Representação Semiótica para construir o processo de ensino, articulando a sala de aula invertida com o uso do Geogebra.

Na próxima seção, traremos as nossas considerações acerca de todo o processo investigativo, os desdobramentos referentes ao processo de construção, análises e experimentação da sequência didática.

5.5 VALIDAÇÃO

Para validar o Produto Técnico Tecnológico, foi necessário recorrer ao processo de validação por pares, isto porque a metodologia utilizada nesta dissertação, a engenharia didática, que de acordo com Almouloud (2007) permite um processo de validação, consiste na análise preliminar que auxilia no processo de fundamentação para construção das sessões de ensino, com base no quadro teórico, o que oportuniza ao professor a construção de conhecimentos mais ampliados sobre o objeto matemático em estudo.

A partir da primeira fase, é construída a Sequência Didática com a análise *a priori,* que busca prever as respostas dos estudantes e de alguma forma assegurar o potencial de ensino do instrumento em questão, seguida da experimentação, que consiste na aplicação em sala de aula e a observação. Na sequência é realizada análise *a posteriori,* que permite ao professor rever as intenções de ensino ao confrontar a análise a *priori* com a análise a *posteriori*. O instrumento em análise pode ser validado ou não.

Compreendemos que o percurso metodológico empreendido nesta pesquisa, valida internamente a Sequência Didática, no entanto, para atender aos prerrequisitos propostos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o Produto Técnico Tecnológico precisa de uma validação externa, desse modo, escolhemos o processo de validação por pares.

A validação por pares consistiu na análise da Sequência Didática por especialistas licenciados em matemática internos e externos à instituição, pedagogas e pela gestora da unidade escolar na qual o material didático foi aplicado. Doze voluntários responderam a um questionário elaborado a partir dos estudos propostos por Guimarães e Giordan (2012), segundo os quais

> A validação representa um procedimento sistemático de avaliação de determinado instrumento de ensino, por meio de testes que procuram verificar sua capacidade de desempenho e a confiabilidade de seus resultados. A validação busca confirmar que o instrumento possui o desempenho que sua aplicação requer e também garantir a confiabilidade de seus resultados. (GIORDAN; GUIMARÃES, 2012, p. 2)

Para validar a Sequência Didática, os voluntários receberam via e-mail o termo de consentimento livre esclarecido, o Produto Técnico Tecnológico e um formulário que avalia o material didático produzido nesta pesquisa.

O questionário foi construído baseado nas proposições de Guimarães e Giordan, (2012) composto de dezenove questões objetivas com quatro alternativas: atende, atende parcialmente, não atende e não posso avaliar. Está dividido em três grupos de análise, são eles:

A Escola e a Sequência Didática: Neste grupo analisamos a relação da sequência didática com os aspectos gerais da escola do campo com pedagogia de alternância, composto de quatro questões objetivas.

Problematização: Busca-se com este bloco avaliativo compreender a estrutura problematizadora do material didático produzido e se esta se conecta com os diversos elementos de ensino articulados nas sessões de ensino, estruturado em cinco questões objetivas.

Elementos de Ensino e Aprendizagem: Este grupo de análise direciona a avaliação para articulação da sala de aula invertida com o software matemático Geogebra e seus desdobramentos em sala de aula.

O quadro a seguir traz as questões utilizadas no processo de validação.

Quadro 18 - Primeiro grupo de análise para a validação, A Escola e a Sequência Didática

Grupo de análise	Questões
A Escola e a Sequência Didática	**1. Proposta de Ensino X Público Alvo:** A Sequência Didática se adequa ao público discente atendido pela unidade escolar a qual foi destinada, tanto no que se refere ao contexto social quanto educacional das sessões de ensino?
	2. Clareza da proposta: A Sequência Didática é clara, contém todas as explicações necessárias para o seu desenvolvimento e está condizente com a proposta da unidade escolar para o ensino de matemática?
	3. Adequação do tempo pedagógico: O tempo da atividade dispensado ao conteúdo foi apropriado ao número de aulas semanais e totais disponíveis para a disciplina matemática?
	Compatibilidade entre infraestrutura da unidade escolar e as atividades propostas: A infraestrutura da unidade escolar na qual é sugerida a aplicação da Sequência Didática é compatível com aquela que seria necessária ao desenvolvimento das atividades previstas nas unidades de ensino?

Fonte: Adaptado de Giordan e Guimarães (2012).

Neste grupo de análise, proposto no quadro 17, os voluntários validaram a o material didático compreendendo que, nesta dimensão, os 4 critérios elencados são atendidos na Sequência didática, elaborada de modo a atender o público da Escola do Campo com Pedagogia de Alternância, a qual se relaciona com o contexto social. No próximo quadro elencamos os itens relacionados à Problematização.

Quadro 19 - Segundo grupo de análise para a validação, Problematização

Grupo de análise	**Questões**
Problematização	**1. Problema integrador da proposta de ensino:** Neste item deve se avaliar se o problema agrega e vincula o conteúdo abordado e se há continuidade nas várias sessões de ensino ao longo das aulas que compõe o plano de ensino.
	2. A problematização e as perspectivas coloquial e científica: Analisar se a proposta da SD consegue promover uma discussão de situações do cotidiano sob a perspectiva dos conhecimentos científicos e se a contextualização constitui ponto de partida para o desenvolvimento de um conteúdo científico.
	3. Possibilidades de Contextualização do problema: Com este item avaliativo buscamos analisar se esta proposta de ensino (SD) busca promover ações investigativas no sentido de melhor conhecer e compreender o contexto social da comunidade escolar, bem como se estabelece estratégias no sentido de analisá-las segundo a perspectiva do conhecimento científico.
	4. Relação do problema com a realidade social e ambiental da comunidade escolar: As situações propostas fazem parte da realidade social e/ou do cotidiano vivencial dos alunos?
	5. Contextualização das atividades propostas: É importante que o tema de problematização seja algo presente na vida escolar do público a que se destina. Assim, neste item deve ser observada como a

	problematização encontra-se contextualizada segundo a realidade da comunidade escolar.

Fonte: Adaptado de Giordan e Guimarães (2012).

Neste grupo de análise, os especialistas voluntários compreenderam que a Sequência Didática atende a todos os critérios avaliados no que diz respeito ao processo de continuidade do conteúdo de Função Afim nas várias sessões de ensino, o potencial para suscitar discussões, ações investigativas, emergem do cotidiano vivencial dos alunos e contextualizada baseada no contexto educacional dos alunos.

O quadro 19, a seguir, apresenta o último grupo de análise que avaliou os Elementos de ensino e Aprendizagem.

Quadro 20 - Terceiro grupo de análise para a validação, Elementos de Ensino e Aprendizagem.

Grupo de análise	**Questões**
Elementos de Ensino e Aprendizagem.	**1. As habilidades da SD e sua correlação com a proposta de ensino:** Os objetivos estabelecem as intenções educativas às quais certa proposta de ensino se determina. Assim, verificar neste critério se os objetivos são claramente informados e se estão efetivamente direcionados à aprendizagem dos conteúdos propostos.
	2. Conteúdos de Aprendizagem: A escolha dos conteúdos condiz com o nível de conhecimento prévio dos alunos e está em acordo suas capacidades cognitivas.
	3. **Metodologias e estratégia de Ensino:** A sala de aula invertida está vinculada com a realidade estrutural e social da escola e da comunidade escolar.
	4. Metodologias e estratégia de Ensino: O software matemático Geogebra utilizado no smartphone é acessível a todos os estudantes.
	5. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: Os conteúdos são encadeados de forma lógica e gradativa.
	6. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: A quantidade de conteúdos a serem desenvolvidos é condizente com o número de aulas.
	7. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: Os conteúdos estão logicamente distribuídos ao longo das aulas.
	8. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: As atividades propostas na Sequência Didática favorecem tratamento e conversões nos variados registros de representação semiótica.

	9. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: As atividades propostas na Sequência Didática favorecem tratamento e conversões nos variados registros de representação semiótica.

Fonte: Adaptado de Giordan e Guimarães (2012).

O último grupo de análise abordou os Elementos de Ensino e aprendizagem. Foi avaliada a intencionalidade pedagógica e, também, se as atividades propostas permitem conversões e tratamentos, a organização dos conteúdos e o tempo pedagógico. A partir da análise das respostas, concluímos que a sequência contempla todos os itens avaliados.

Após avaliação do Produto Técnico Tecnológico, os especialistas validaram a Sequência Didática: A Sala de Aula Invertida e o Geogebra no Ensino de Função Afim.

Na próxima seção, traremos as nossas considerações acerca de todo o processo investigativo, os desdobramentos referentes ao processo de construção, análises e experimentação da sequência didática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa foi desenvolvida com o intuito de responder à seguinte pergunta: Em que medida, situações que articulam tecnologias digitais e metodologias ativas podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de função afim, no curso técnico em agropecuária integrado ao ensino médio?

Para tanto, estabelecemos como objetivo geral deste processo investigativo avaliar as contribuições de situações didáticas que articulam tecnologias digitais e metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem de função afim.

Para lograr êxito neste processo investigativo, levamos em consideração as seguintes premissas: 1) a possibilidade de articular o uso do Geogebra com a sala de aula invertida para o ensino de função afim no curso técnico de nível profissionalizante integrado ao ensino médio; 2) a compreensão e a coordenação de mais de um registro de representação semiótica são imprescindíveis para o desenvolvimento da atividade matemática; 3) situações didáticas que proponham atividades fundamentadas pela interpretação global das propriedades figurais podem proporcionar aos estudantes a compreensão do conceito de função afim em seus registros gráfico e simbólico algébrico; 4) as situações adidáticas permitem que os estudantes possam ser protagonistas de sua aprendizagem, o que favorece a compreensão do conceito matemático estudado nesta pesquisa.

Para alcançar o objetivo elencado nesta investigação, foi elaborada uma sequência didática, a partir dos pressupostos da Engenharia Didática, embasada na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para ser aplicada com uma turma da 1ª série do Ensino Médio Integrado de uma escola do campo com pedagogia de alternância.

A fundamentação teórica nos permitiu situar as implicações do ensino médio integrado em uma escola do campo com pedagogia de alternância, que organiza metodologicamente o trabalho pedagógico do professor através de sequência didática.

Para articular a sala de aula invertida com o uso do software matemático Geogebra, escolhemos a Teoria das Situações didática com o objetivo de organizar as sessões de ensino, levando em consideração a estrutura do *milieu,* as fases adidáticas de ação, formulação e validação relacionadas à função afim.

Durante a aplicação, ocorreram momentos didáticos, através da institucionalização promovida pelo pesquisador, de modo que os estudantes pudessem, por meio do confronto das respostas que foram dadas com o que estava sendo apresentado, elaborar e validar as estratégias de resolução que contribuíram para a compreensão de função afim.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica a partir da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, é defendida como indispensável para a compreensão do objeto matemático função afim. Uma vez que ela permitu estruturar as atividades da sequência didática de modo que que oferecessem aos estudantes a possibilidade de transformações do tipo tratamento e conversões, a partir das variáveis visuais na representação gráfica e as respectivas alterações no registro simbólico algébrico.

A primeira sessão de ensino foi estruturada na perspectiva da sala de aula invertida, no turno noturno. Durante a aplicação da atividade os alunos destacaram-se pelo engajamento quando aceitaram conduzir a construção do conhecimento matemático sobre função afim.

A análise dessa etapa permitiu considerar que a sala de aula invertida proporciona um ambiente eminentemente investigativo do qual a autonomia emerge à medida que a devolução acontece. Recordamos que, quando o aluno aceita a responsabilidade de uma situação de aprendizagem, protagoniza o processo de aquisição do conhecimento e o professor atua na condição de mediador.

A organização em grupos promoveu um ambiente de discussões, que de forma individual não daria a possibilidade de saber o que o estudante estava pensando durante a realização. Os diálogos extraídos das transcrições dos áudios mostram que atividades organizadas nessa perspectiva têm potencial para o debate, conjecturas, exercício de raciocínio lógico e consequentemente matemático na resolução das situações propostas.

É preciso levar em consideração que os estudantes já conheciam o software matemático Geogebra, o que facilitou a resolução das atividades e que a sala de aula invertida permite fazer em casa o que estaria sendo feito na escola. No entanto, é válido recordar que o nosso lócus de pesquisa é uma escola de alternância com pedagogia de internato, então a variável tempo ficou ao nosso favor. Além disso, qualificamos o período do grupo de estudos que acontece no turno noturno e, no dia seguinte, munidos de suas resoluções, foi possível mediar o processo de institucionalização com fluidez, pois os estudantes tinham propriedade do que haviam construído.

Ressaltamos que a escola do campo precisa trabalhar, para além do conteúdo específico de cada componente curricular, no nosso caso a matemática, o fortalecimento da identidade campesina, e isto acontece quando o estudante se reconhece e se sente representado, como no enunciado da atividade proposta, em que eles visualizaram-se como parte integrante da produção de conhecimento.

Na primeira sessão, pontuamos aspectos que são dignos de nota: os estudantes realizaram transformações do tipo tratamento e conversão nos registros algébricos, tabulares, gráficos e indicativos de compreensão da ideia de generalização. Foi possível observar que os alunos compreenderam a função afim a partir da conversão do registro tabular para o registro simbólico numérico. No entanto, nos defrontamos com dificuldades que surgiram no momento de ler e compreender definições apresentadas em linguagem matemática na sequência didática, em reconhecer os eixos das ordenadas e das abscissas.

A segunda sessão também foi desenhada na perspectiva da sala de aula invertida e, além de favorecer tratamentos e conversões, exigiu dos estudantes uma interpretação global das propriedades figurais da função afim definida por $f(x) = a.x + b$.

O Geogebra permite atividades como essa e, nesse sentido, o pesquisador construiu atividades que colocaram o aluno num processo investigativo a partir de uma abordagem experimental, a exemplo da mudança proposta no coeficiente angular no registro algébrico, o que permitiu, instantaneamente, observar o comportamento do registro gráfico.

Destacamos que o comportamento algébrico do coeficiente angular está atrelado ao conceito de inclinação. Nesse ponto, os estudantes se depararam com duas unidades significativas distintas: uma relacionada ao sinal do coeficiente, e a outra em relação ao inteiro 1, o que permitiu que eles relacionassem essas duas unidades significativas com duas variáveis visuais diferentes, o sentido da inclinação e o ângulo.

As atividades permitiam a variação de uma unidade significativa no registro simbólico algébrico para que os estudantes pudessem observar as repercussões dessa modificação. Do mesmo modo que fizemos com o coeficiente angular, foi realizado com o coeficiente linear: à medida que o coeficiente b era alterado com a movimentação do controle deslizante, os participantes descreveram o comportamento e identificaram a variável visual. Foi possível verificar, por meio da análise das produções, que as atividades da sequência e a forma como esta foi aplicada, permitiram que os estudantes vivessem momentos de ação, formulação e validação.

A partir da compreensão das variáveis visuais, foi possível notar que a conversão entre o registro simbólico algébrico e o registro gráfico aconteceu de modo claro pela maior parte das equipes, as quais compreenderam os conceitos de zero da função, classificaram em crescente ou decrescente em ambos registros.

A riqueza do Geogebra aguça o interesse dos estudantes, que se sentiram desafiados. A segunda atividade também foi proposta na perspectiva da sala de aula invertida e comprovamos que a articulação da sala de aula invertida com a utilização do Geogebra proporciona um ambiente de investigação, propício a conjecturas, além de evidenciar as fases propostas na Teoria da Situações Didáticas.

No processo de aplicação da terceira sessão de ensino, os estudantes já apresentavam bastante segurança na utilização do Geogebra, e o nível de argumentação proposto pelas equipes tornou-se digno de nota: a segurança apresentada durante formulação e validação permitiu aos estudantes construir de modo progressivo uma linguagem a fim de expor suas conjecturas e validá-las.

Os estudantes reconheceram na função linear a variável visual que diz respeito à posição do traçado em relação à origem dos eixos. Com a atividade proposta, foi possível identificar e reconhecer o comportamento do registro algébrico em relação ao registro gráfico e, também, a nulidade do coeficiente linear, neste caso, e como isso interfere no gráfico da função.

Foi possível visualizar a compreensão da modificação ocorrida no registro simbólico algébrico, quando temos $f(x) = ax;\ com\ b = 0$, e, também, no registro gráfico a partir da interpretação global.

A última sessão de ensino contemplou a variável visual relativa à função constante, quando temos $f(x) = b;\ com\ a = 0$, e três equipes apresentaram dificuldades, pois atribuíram valor para o coeficiente a, o que modifica a estrutura da lei da função e recai em uma função afim, o que não era o caso. As outras equipes lograram êxito no processo de resolução da atividade, discutiram, argumentaram, criaram estratégias em situações de ação, formulação e validação.

Os resultados que expomos nesta pesquisa nos mostra que, ao articular a sala de aula invertida com o uso do software Geogebra, podemos criar um campo fértil para o ensino de função afim em uma escola do campo com pedagogia de alternância. O aplicativo matemático permitiu a visualização instantânea do trânsito entre o registro gráfico e o registro algébrico e vice-versa.

O leitor pode questionar se as atividades também poderiam ser realizadas com lápis e papel? Sim! No entanto, mudando o ambiente, teria que controlar novas variáveis (nesse caso global). As atividades teriam que ser adaptadas para se adequar ao tempo. Por isso, utilizamos o *smartphone,* poderosa ferramenta tecnológica, que já se encontra nas salas de aula, cuja utilização precisa ser orientada. É importante que os docentes possam conduzir o processo de ensino com esse recurso que pode permitir a compreensão de conteúdos matemáticos, como aconteceu no processo investigativo experienciado nesta pesquisa.

As contribuições das Teorias das Situações Didáticas e dos Registros de Representação Semiótica permitiram estruturar as sessões de ensino de modo a compreender que o ensino de função afim, embasado na interpretação global das propriedades figurais, permite aos estudantes desenvolver habilidades para visualizar e perceber cada uma das variáveis visuais no registro gráfico, e como cada uma das unidades simbólicas significativas repercute no registro gráfico e vice-versa.

As atividades foram elaboradas de modo que os estudantes pudessem reconhecer o objeto matemático em estudo nos diferentes registros, transitando entre eles, observando as particularidades, realizando transformações do tipo tratamento e conversão, e tudo isso foi realizado.

Encerramos esse processo apontando para a necessidade de empreender um processo investigativo para compreender por que não temos nomes femininos declinados no processo de construção do conceito de função afim.

Concluímos este trabalho levando em consideração os desdobramentos que esta pesquisa nos proporcionou. Destacamos profundo aprendizado do ensino de matemática em uma escola do campo com pedagogia de alternância que oferta ensino médio integrado. A pesquisa nos mostrou o processo de construção do conhecimento de função afim por parte dos estudantes, os quais, ao responderem positivamente à aplicação da sequência didática, contribuíram para a práxis pedagógica do professor de matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo.Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT:** R. Eletr. de Edu. Matem., v.3, n. 6, p.62-77, 2008.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ARTIGUE, Michele. **anIngéniere didactique.** Recherches en Didactique de Mathematiques, v. 9, n. 3 pp. 281-308, 1988.

ARTIGUE, Michele. Engenharia didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas.** Trad. de MJF Lisboa: Instituto Piaget, p.193-217. 1996.

BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando Mello. (Org.). **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre:** Penso, 2015, v. 1.

BAHIA. Secretaria da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio área: orientações gerais** / Secretaria da Educação. – Salvador: Secretaria da Educação, 2015. Disponível em: http://escolas.educacao.ba.gov.br/orientacoescurricularesestaduais. Acesso em: 04 mar. 2022.

BAHIA. Secretaria da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio área: matemática** / Secretaria da Educação. – Salvador: Secretaria da Educação, 2015. Disponível em: http://semanapedagogica.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2019/01/Guia-deImplementa%C3%A7%C3%A3o-do-Novo-Ensino-M%C3%A9dio-1.pdf. Acesso em: 04 mar. 2022.

BERGMANN Jonathan. e SAMS, Aaron. (2012), **Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day**, USA, International Society for Technology in Education.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BOURBAKI, Nicolas**. Theorie dês ensembles.** Paris: Masson, 1990.
.
BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Proposta preliminar. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 mar. 2022.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

CAPES. GT de Produção Técnica. **Relatório de Grupo de Trabalho.** Brasília: CAPES, 2019. Disponível em: http://www.capes.gov.br/images/novo_portal/documentos/DAV/avaliacao/10062019_Produção-Técnica.pdf. Acesso em 22.08.2023.

CALDART, Roseli Salete. Educação do Campo. In: CALDART, Rosely Salete ET AL. (Org) **Dicionário da Educação do Campo**. Rio de Janeiro: EPSJV; São Paulo: Expressão Popular, 2008.

CALDART, Roseli Salete.Educação do Campo: traços de uma identidade em construção. In: ARROYO, M.; CALDART, R. S. **Por uma Educação Básica do Campo.** Petrópolis: Vozes, 2004.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos** Fundamentais da Matemática. Ed. Sá da Costa, Lisboa, 1951.

CARVALHO FILHO, José Corgosinho de. O Protótipo. Livraria Cultura, 1979.

CARVALHO FILHO, José Corgosinho de. **Revista Belamira**. Pojuca, volume 02, 1981.

CARVALHO FILHO, José Corgosinho de. GUENTHER, Zenita. SILVA, Dilma Evangelista. **Fundação José Carvalho: Uma Proposta Educacional.** Salvador, ABC, 1985.

CIAVATTA, Maria. O ensino integrado, a politecnia e a educação omnilateral. Por que lutamos? **Trabalho & Educação**, Belo Horizonte, v. 23, n. 1, p. 187–205, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/trabedu/article/view/9303. Acesso em: 3 jul. 2022.

CIAVATTA, Maria. A formação integrada: a escola e o trabalho como lugares de memória e identidade. In: RAMOS, M. N.; FRIGOTTO, G.; CIAVATTA, M. (Org.). E**nsino Médio Integrado: concepção e contradições.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

CIAVATTA, Maria. **O Ensino Integrado, a Politecnia e a Educação Omnilateral. Por que lutamos?** In: Trabalho e Educação. Belo Horizonte. V.23. 2014.

CIAVATTA, Maria; RAMOS, Marise. Ensino Médio Integrado. *In*: CALDART, Rosely Salete ET AL. (Org) **Dicionário da Educação do Campo**. Rio de Janeiro: EPSJV; São Paulo: Expressão Popular, 2012.

CHRISTENSEN, Clayton M.; HORN, Michael B.; STAKER, Heather. **Ensino Híbrido**: uma Inovação Disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos – traduzido para o Português por Fundação Lemann e Instituto Península. 2013. Disponível em: https://www.christenseninstitute.org/publications/ensino-hibrido/. Acesso em: 29 ago. 2023.

DUVAL, Raimond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, Raimond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** Tese de Doutorado em Educação Matemática pelo PEPG em Educação Matemática da PUC/SP, 2016.

FILHO, Humberto Vinício Altino; NUNES, Célia Maria Fernandes; FERREIRA, Ana Cristina. **Metodologias Ativas No Ensino De Matemática:** O Que Dizem As Pesquisas? Manhuaçu, v. 18, n. 1, p. 172-184, janeiro-abril, 2020.

FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FONSECA, A. M.; MEDEIROS, M. O. Currículo em Alternância: uma nova perspectiva para a Educação do Campo. In: QUEIROZ, J. B. P. et al. (Org.). **Pedagogia da Alternância**: construindo a Educação do Campo. 1ª Ed. Goiânia: Editora da UCG; Brasília: Ed. Universa, 2006.

FRIGOTTO, Gaudêncio. Projeto societário contra-hegemônico e educação do campo: desafios de conteúdo, método e forma. In: MunariM, A. et al. (org.). **Educação do campo:** reflexões e perspectivas**.** Florianópolis: Insular, 2010. p. 19-46.

GIMONET, Jean Claude **Praticar e compreender a Pedagogia da Alternância dos CEFFAs.** Petrópolis: Editora Vozes; Paris: AIMFR, 2007.

GUIMARÃES, Yara Araújo Ferreira.; GIORDAN, Marcelo. Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, VIIII. **Anais.** Campinas, 2011.

GRAMSCI, Antônio. **La alternativa pedagógica.** Barcelona: Fontamara, 1981.

IEZZI, Gelson *et al*. **Conecte Live: Volume único.** 1ª ed. - São Paulo: Saraiva, 2020.

LIMA, Elon Lages**. Curso de Análise**. Rio de Janeiro: SBM, 1989.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio.** 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, V. 01, 2016.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas.** 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

MASTROIANNI, Maria Teresa Merino Ruz. OLIVEIRA, Gerson Pastre de OLIVEIRA. A inserção da Tecnologia nas aulas de Matemática e seu processo avaliativo: um estudo preliminar sobre as percepções de professores polivalentes. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis , v. 15 , n. 1 , p. 01–22, 2020.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de Função Afim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

MOLINA, Mônica Castagna. Escola do Campo. In: CALDART, Rosely Salete ET AL. (Org) **Dicionário da Educação do Campo**. Rio de Janeiro: EPSJV; São Paulo: Expressão Popular, 2012.

MORAN, José Manuel. **Mudando a educação com metodologias ativas**. Coleção Mídias Contemporâneas. Convergência Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II. P. 15-33. 2017. Disponível em http://www2.eca.usp.br/moran/wpcontent/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em: 19 nov. 2021.

MORAN, José Manuel; MASETO, T.; BEHRENS, Marcos. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 21ª Ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

PEREIRA, Luciana Boemer Cesar. **Ensino de matemática na área ciências agrárias: contribuições de um material didático contextualizado à luz da transposição didática.** 2020. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2020..

PIRES, Rogério Fernando. O Conceito de Função: uma análise histórico epistemológica. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática., 2016, São Paulo. **Anais do XII ENEM**, 2016.

PONTE, João Pedro da. **O conceito de função no currículo de matemática**. Educação e Matemática. 1990. Portugal, nº 15, p.(3-9). Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473#:~:text=O%20conceito%20de%20fun%C3%A7%C3%A3o%20no%20curr%C3%ADculo%20de%20Matem%C3%A1tica.,estudo

%20de%20situa%C3%A7%C3%B5es%20da%20realidade. Acesso em: 15 jan. 2022.

RAMOS, Marise Nogueira. **História e Política da Educação Profissional.** Curitiba: Instituto Federal do Paraná, 2014.

RODRIGUES, José. **O Moderno Príncipe Industrial:** o Pensamento Pedagógico da Confederação Nacional da Indústria. Campinas-SP: Autores Associados, 1998.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologiais.** Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11099/1/Renata%20Rossini.pdf. Acesso em: 12 jan. 2022.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 1983.

TINOCO, Lucia A. de A. **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 5ª ed., 2004.

YOUSCHKETCH, Adolf-Andrï Pavlovich. Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX e siècle. In: **Fragments d´historie des Mathématiques, Brochure** A. P. M. E. P. n. 41, p.7-67, 1981.

APÊNDICE A – Produto Técnico Tecnológico

APÊNDICE B – Questionário de Validação do Produto Técnico

QUESTIONÁRIO DE VALIDAÇÃO DO PRODUTO TÉCNICO TECNOLÓGICO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

NOME:____

IDADE:

____

SEXO:

____

FORMAÇÃO PROFISSIONAL: ___________________________________

A Escola e a Sequência Didática

1. **Proposta de Ensino X Público Alvo:** A Sequência Didática se adequa ao público discente atendido pela unidade escolar a qual foi destinada, tanto no que se refere ao contexto social quanto educacional das sessões de ensino?

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

2. **Clareza da proposta:** A Sequência Didática é clara, contém todas as explicações necessárias para o seu desenvolvimento e está condizente com a proposta da unidade escolar para o ensino de matemática?

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

3. **Adequação do tempo pedagógico:** O tempo da atividade dispensado ao conteúdo foi apropriado ao número de aulas semanais e totais disponíveis para a disciplina matemática?

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

4. **Compatibilidade entre infraestrutura da unidade escolar e as atividades propostas:** A infraestrutura da unidade escolar na qual é sugerida a aplicação da Sequência Didática é compatível com aquela que seria necessária ao desenvolvimento das atividades previstas nas unidades de ensino?

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

Problematização

1. **Problema integrador da proposta de ensino:** Neste item deve se avaliar se o problema agrega e vincula o conteúdo abordado e se há continuidade nas várias sessões de ensino ao longo das aulas que compõe o plano de ensino.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

2. **A problematização e as perspectivas coloquial e científica:** Analisar se a proposta da SD consegue promover uma discussão de situações do cotidiano sob a perspectiva dos conhecimentos científicos e se a contextualização constitui ponto de partida para o desenvolvimento de um conteúdo científico.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

3. **Possibilidades de Contextualização do problema:** Com este item avaliativo buscamos analisar se esta proposta de ensino (SD) busca promover ações investigativas no sentido de melhor conhecer e compreender o contexto social da comunidade escolar, bem como se estabelece estratégias no sentido de analisá-las segundo a perspectiva do conhecimento científico.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

4. Relação do problema com a realidade social e ambiental da comunidade escolar: As situações propostas fazem parte da realidade social e/ou do cotidiano vivencial dos alunos?

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

5. Contextualização das atividades propostas: É importante que o tema de problematização seja algo presente na vida escolar do público a que se destina. Assim, neste item deve ser observada como a problematização encontra-se contextualizada segundo a realidade da comunidade escolar.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

Elementos de Ensino e Aprendizagem.

1. As habilidades da SD e sua correlação com a proposta de ensino: Os objetivos estabelecem as intenções educativas às quais certa proposta de ensino se determina. Assim, verificar neste critério se os objetivos são claramente informados e se estão efetivamente direcionados à aprendizagem dos conteúdos propostos.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

2. Conteúdos de Aprendizagem: A escolha dos conteúdos condiz com o nível de conhecimento prévio dos alunos e está em acordo suas capacidades cognitivas.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

3. **Metodologias e estratégia de Ensino:** A sala de aula invertida está vinculada com a realidade estrutural e social da escola e da comunidade escolar.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

4. **Metodologias e estratégia de Ensino:** O software matemático Geogebra utilizado no smartphone é acessível a todos os estudantes.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

5. **Organização e Encadeamento das Ações Didáticas:** Os conteúdos são encadeados de forma lógica e gradativa.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

6. **Organização e Encadeamento das Ações Didáticas:** A quantidade de conteúdos a serem desenvolvidos é condizente com o número de aulas.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

7. **Organização e Encadeamento das Ações Didáticas:** Os conteúdos estão logicamente distribuídos ao longo das aulas.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

8. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: As atividades propostas na Sequência Didática favorecem tratamento e conversões nos variados registros de representação semiótica.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

9. Organização e Encadeamento das Ações Didáticas: As atividades propostas na Sequência Didática favorecem tratamento e conversões nos variados registros de representação semiótica.

☐ Atende.

☐ Atende parcialmente.

☐ Não atende

☐ Não posso avaliar.

10. Sugestões e comentários.

____

____

____

____

ANEXO A - Termo De Consentimento Livre E Esclarecido Participante Maior

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – SETEC
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA BAIANO – *Campus* Catu
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – PROFEPT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARTICIPANTE MAIOR

Prezado(a) aluno(a) ____

Convidamos você para participar como voluntário (a) na pesquisa intitulada: **Tecnologias Digitais e Metodologias Ativas nas aulas de matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática no ensino médio integrado,** de autoria e responsabilidade do mestrando Gustavo Pereira Nascimento, aluno do Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica (PROFEPT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, tendo como orientadora a **Profª. Drª. Camila Lima Santana e Santana**, professora e pesquisadora do IFBAIANO. A pesquisa tem como objetivo **avaliar as contribuições de situações didáticas que articulas tecnologias digitais e metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem de função afim,,** com *locus* na Escola Rural Rolf Weinberg.

O motivo que nos leva a estudar tal temática advém da necessidade de desenvolver pesquisas que contribuam para motivar o estudo de matemática no Ensino médio integrado, que estimule a autonomia na aprendizagem. **Para tanto, pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que articula a sala de aula invertida com o uso do Geogebra para o ensino de Função Afim na 1ª série do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio.**

A participação do voluntário se dará por meio de respostas a uma sequência didática que articula sala de aula invertida e o uso do Geogebra no ensino de Função Afim.

A Resolução 466/12, homologada pelo Conselho Nacional de Saúde (CNS) do Ministério da Saúde (MS), atesta que para toda pesquisa realizada com seres humanos devem se previstos e avaliados os riscos, aos quais poderão ser expostos os participantes. Segundo essa Resolução, faz-se necessário a submissão do projeto de pesquisa a um Conselho de ética e Pesquisa – CEP, os CEP atuam como "colegiados interdisciplinares e independentes, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativos criados para atender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade para contribuir no desenvolvimento da pesquisa nos padrões éticos" (BRASIL, 2012). Sendo assim, a pesquisadora se compromete a encaminhar todos os instrumentos de coleta para avaliação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e a coleta de dados apenas ocorrerá após autorização do mesmo.

Entende-se que os participantes poderão sentir-se cansados, incomodados, constrangidos, até mesmo ofendidos por algum tipo de pergunta ou abordagem que lhes seja feita, causando-lhe algum tipo de dano psíquico, moral, intelectual, conforme mencionado no inciso II-22 da lei supracitada. Buscando minimizar esses riscos, as atividades serão realizadas em ambientes confortáveis, respeitando a disposição e tempo dos participantes, buscando minimizar cansaço e otimizar o seu tempo, evitando cansaço ou qualquer desconforto. Antes de iniciar as perguntas, todos os objetivos e procedimentos da pesquisa, serão apresentados tanto por meio de uma explanação oral, quanto por meio dos termos de consentimento livre esclarecido que serão assinados apenas pelos que tiverem interesse em participar.

Dentre os benefícios desta pesquisa, destaca-se a possibilidade ao estudante de refletir sobre seu papel na construção do próprio conhecimento, tornando-se um sujeito mais estimulado e autônomo. A partir de diálogos constantes entre o pesquisador e os estudantes pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades estruturadas para aprendizagem de Função Afim.

Espera-se que os estudantes sintam-se motivados ao expor suas opiniões a respeito de como todos podem aprender o objeto matemático Função Afim, que é um elemento que faz parte das suas vidas cotidianas.

O pesquisador reitera a garantia da manutenção do sigilo sobre as informações coletadas durante a pesquisa, a identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. Sua identidade será tratada com total sigilo e todos os dados coletados serão utilizados apenas para fins dessa pesquisa. Os resultados da pesquisa serão enviados para você e permanecerão confidenciais. O nome ou o material que indique a participação do menor não será liberado sem a sua permissão. O participante não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Considerando que essas medidas atenuam, mas não anulam os riscos, será garantido aos participantes assistência integral em qualquer etapa do estudo. Buscar-se-á minimizar todos os riscos possíveis para que o participante não sinta-se constrangido, nem sofra qualquer dano de ordem física e psicológica, caso isto aconteça, os participantes receberão acompanhamento psicológico e social, caso seja necessário. Além disso, caso o participante sinta-se ameaçado, desconfortável ou desmotivado a participar, poderá deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum ônus ou constrangimento.

A participação neste projeto não implicará ônus financeiro a você, bem como não haverá nenhum tipo de compensação ou gratificação financeira, visto que trata-se de uma participação voluntária.

Ainda que tomados todos os cuidados, o menor tenha algum prejuízo material ou imaterial em decorrência da pesquisa poderá solicitar indenização no valor de R$ 350,00, que será custeada por parte do pesquisador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa de acordo com Resolução 466/2012.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com a pesquisador na Rua Travessa Paraíso, nº 61, Star – CEP 48.120-000. Pojuca – Bahia ou pelo telefone (71) 99910-2393, ou ainda por e-mail gustavopereira2889@gmail.com ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/IFBA, Av. Araújo Pinho, Nº 39 - Canela - Salvador - BA 40.110-150, telefone (71) 3221-0332. e-mail: cep@ifba.edu.br.

CONSENTIMENTO PÓS–INFORMAÇÃO

Eu,____,fui informado (a) sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser e que meu nome não será divulgado. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pela pesquisadora, ficando uma via com cada um de nós.

________________, _______de __________________de _____________

Assinatura do Participante:

____

Assinatura da Pesquisador Responsável:

____

Assinatura da Testemunha:

____

ANEXO B - Termo De Consentimento Livre e Esclarecido Para Professor

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – SETEC
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA BAIANO – *Campus* Catu
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – PROFEPT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSOR

Prezado (a) Professor(a) ______________________________________convidamos você para participar como voluntário (a) na pesquisa intitulada "**Tecnologias Digitais e Metodologias Ativas nas aulas de matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática no ensino médio integrado**," de autoria e responsabilidade do mestrando Gustavo Pereira Nascimento, aluno do Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica (PROFEPT) do Instituto Federal Baiano de Educação, Ciência e Tecnologia tendo como orientadora **Profª. Drª. Camila Lima Santana e Santana**, pesquisadora do IFBAIANO. A pesquisa tem como objetivo **avaliar as contribuições de situações didáticas que articulas tecnologias digitais e metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem de função afim,** com *locus* na Escola Rural Rolf Weinberg.

O motivo que nos leva a estudar tal temática advém da necessidade de desenvolver pesquisas que contribuam para motivar o estudo de matemática no Ensino médio integrado, que estimule a autonomia na aprendizagem. **Para tanto, pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que articula a sala de aula invertida com o uso do Geogebra para o ensino de Função Afim na 1ª série do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio.**

A participação do professor se dará por meio de respostas a uma sequência didática que articula sala de aula invertida e o uso do Geogebra no ensino de Função Afim e de um questionário de validação da sequência didática.

A Resolução 466/12, homologada pelo Conselho Nacional de Saúde (CNS) do Ministério da Saúde (MS), atesta que para toda pesquisa realizada com seres humanos devem se previstos e avaliados os riscos, aos quais poderão ser expostos os participantes. Segundo essa Resolução, faz-se necessário a submissão do projeto de pesquisa a um Conselho de ética e Pesquisa – CEP, os CEP atuam como "colegiados interdisciplinares e independentes, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativos criados para atender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade para contribuir no desenvolvimento da pesquisa nos padrões éticos" (BRASIL, 2012). Sendo assim, a pesquisadora se compromete a encaminhar todos os instrumentos de coleta para avaliação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e a coleta de dados apenas ocorrerá após autorização do mesmo.

Entende-se que os participantes poderão sentir-se cansados, incomodados, constrangidos, até mesmo ofendidos por algum tipo de pergunta ou abordagem que lhes seja feita, causando-lhe algum tipo de dano psíquico, moral, intelectual, conforme mencionado no inciso II-22 da lei supracitada. Buscando minimizar esses riscos, as atividades serão realizadas em ambientes confortáveis, respeitando a disposição e tempo dos participantes, buscando minimizar cansaço e otimizar o seu tempo, evitando cansaço ou qualquer desconforto. Antes de iniciar as perguntas, todos os objetivos e procedimentos da pesquisa, serão apresentados tanto por meio de uma explanação oral, quanto por meio dos termos de consentimento livre esclarecido que serão assinados apenas pelos que tiverem interesse em participar.

Dentre os benefícios desta pesquisa, destaca-se a possibilidade ao estudante de refletir sobre seu papel na construção do próprio conhecimento, tornando-se um sujeito mais estimulado e autônomo. A partir de diálogos constantes entre o pesquisador e os estudantes pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades estruturadas para aprendizagem de Função Afim.

Espera-se que os estudantes sintam-se motivados ao expor suas opiniões a respeito de como todos podem aprender o objeto matemático Função Afim, que é um elemento que faz parte das suas vidas cotidianas.

O pesquisador reitera a garantia da manutenção do sigilo sobre as informações coletadas durante a pesquisa, sua identidade será tratada com total sigilo e todos os dados coletados serão utilizados apenas para fins dessa pesquisa. Os resultados da pesquisa serão enviados para você e permanecerão confidenciais. O nome ou o material que indique a sua participação não será liberado sem a sua permissão. O participante não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Considerando que essas medidas atenuam, mas não anulam os riscos, será garantido aos participantes assistência integral em qualquer etapa do estudo. Buscar-se-á minimizar todos os riscos possíveis para que o participante não sinta-se constrangido, nem sofra qualquer dano de ordem física e psicológica, caso isto aconteça, os participantes receberão acompanhamento psicológico e social, caso seja necessário. Além disso, caso o participante sinta-se ameaçado, desconfortável ou desmotivado a participar, poderá deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum ônus ou constrangimento.

A participação neste projeto não implicará ônus financeiro a você, bem como não haverá nenhum tipo de compensação ou gratificação financeira, visto que trata-se de uma participação voluntária.

Ainda que tomados todos os cuidados, o menor tenha algum prejuízo material ou imaterial em decorrência da pesquisa poderá solicitar indenização, que será custeada por parte do pesquisador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa de acordo com Resolução 466/2012.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com a pesquisador na Rua Travessa Paraíso, nº 61, Star – CEP 48.120-000. Pojuca – Bahia ou pelo telefone (71) 99910-2393, ou ainda por e-mail gustavopereira2889@gmail.com ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/IFBA, Av. Araújo Pinho, Nº 39 - Canela - Salvador - BA 40.110-150, telefone (71) 3221-0332. e-mail: cep@ifba.edu.br.

CONSENTIMENTO PÓS–INFORMAÇÃO

Eu,____,fui informado (a) sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto de pesquisa, sabendo que não vou ganhar nenhum recurso financeiro e que, poderá sair da pesquisa quando quiser e que, os pesquisadores são responsáveis para manter o sigilo das informações coletadas, bem como uso de áudios e/ou imagens associadas à pesquisa. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

________________, _______de __________________de _____________

Assinatura do Participante: ____

Assinatura da Pesquisador Responsável. ______________________________________

ANEXO C - Termo De Assentimento Livre e Esclarecido

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – SETEC
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA BAIANO – *Campus* Catu
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – PROFEPT

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) aluno(a)

____

Convidamos você para participar como voluntário (a) na pesquisa intitulada: **Tecnologias Digitais e Metodologias Ativas nas aulas de matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática no ensino médio integrado,** de autoria e responsabilidade do mestrando Gustavo Pereira Nascimento, aluno do Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica (PROFEPT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, tendo como orientadora a **Profª. Drª. Camila Lima Santana e Santana**, professora e pesquisadora do IFBAIANO. A pesquisa tem como objetivo **avaliar as contribuições de situações didáticas que articulas tecnologias digitais e metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem de função afim,** com *locus* na Escola Rural Rolf Weinberg.

O motivo que nos leva a estudar tal temática advém da necessidade de desenvolver pesquisas que contribuam para motivar o estudo de matemática no Ensino médio integrado, que estimule a autonomia na aprendizagem. **Para tanto, pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que articula a sala de aula**

invertida com o uso do Geogebra para o ensino de Função Afim na 1ª série do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio.

A participação do menor se dará por meio de respostas a uma sequência didática que articula sala de aula invertida e o uso do Geogebra no ensino de Função Afim.

A Resolução 466/12, homologada pelo Conselho Nacional de Saúde (CNS) do Ministério da Saúde (MS), atesta que para toda pesquisa realizada com seres humanos devem se previstos e avaliados os riscos, aos quais poderão ser expostos os participantes. Segundo essa Resolução, faz-se necessário a submissão do projeto de pesquisa a um Conselho de ética e Pesquisa – CEP, os CEP atuam como "colegiados interdisciplinares e independentes, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativos criados para atender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade para contribuir no desenvolvimento da pesquisa nos padrões éticos" (BRASIL, 2012). Sendo assim, a pesquisadora se compromete a encaminhar todos os instrumentos de coleta para avaliação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e a coleta de dados apenas ocorrerá após autorização do mesmo.

Entende-se que os participantes poderão sentir-se cansados, incomodados, constrangidos, até mesmo ofendidos por algum tipo de pergunta ou abordagem que lhes seja feita, causando-lhe algum tipo de dano psíquico, moral, intelectual, conforme mencionado no inciso II-22 da lei supracitada. Buscando minimizar esses riscos, as atividades serão realizadas em ambientes confortáveis, respeitando a disposição e tempo dos participantes, buscando minimizar cansaço e otimizar o seu tempo, evitando cansaço ou qualquer desconforto. Antes de iniciar as perguntas, todos os objetivos e procedimentos da pesquisa, serão apresentados tanto por meio de uma explanação oral, quanto por meio dos termos de consentimento livre esclarecido que serão assinados apenas pelos que tiverem interesse em participar.

Dentre os benefícios desta pesquisa, destaca-se a possibilidade ao estudante de refletir sobre seu papel na construção do próprio conhecimento, tornando-se um sujeito mais estimulado e autônomo. A partir de diálogos constantes entre o pesquisador e os estudantes pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades estruturadas para aprendizagem de Função Afim.

Espera-se que os estudantes sintam-se motivados ao expor suas opiniões a respeito de como todos podem aprender o objeto matemático Função Afim, que é um elemento que faz parte das suas vidas cotidianas.

O pesquisador reitera a garantia da manutenção do sigilo sobre as informações coletadas durante a pesquisa, a identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. Sua identidade será tratada com total sigilo e todos os dados coletados serão utilizados apenas para fins dessa pesquisa. Os resultados da pesquisa serão enviados para você e permanecerão confidenciais. O nome ou o material que indique a participação do menor não será liberado sem a sua permissão. O menor não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Considerando que essas medidas atenuam, mas não anulam os riscos, , será garantido aos participantes assistência integral em qualquer etapa do estudo. Buscar-se-á minimizar todos os riscos possíveis para que o participante menor não sinta-se constrangido, nem sofra qualquer dano de ordem física e psicológica, caso isto aconteça, os participantes receberão acompanhamento psicológico e social, caso seja necessário. Além disso, caso o participante sinta-se ameaçado, desconfortável ou desmotivado a participar, poderá deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum ônus ou constrangimento.

A participação neste projeto não implicará ônus financeiro a você, bem como não haverá nenhum tipo de compensação ou gratificação financeira, visto que trata-se de uma participação voluntária.

Ainda que tomados todos os cuidados, o menor tenha algum prejuízo material ou imaterial em decorrência da pesquisa poderá solicitar indenização, no valor de R$ 350,00 por parte do pesquisador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa de acordo com Resolução 466/2012.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com a pesquisador na Rua Travessa Paraíso, nº 61, Star – CEP 48.120-000. Pojuca – Bahia ou pelo telefone (71) 99910-2393, ou ainda por e-mail gustavopereira2889@gmail.com ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/IFBA, Av. Araújo Pinho, Nº 39 - Canela - Salvador - BA 40.110-150, telefone (71) 3221-0332. e-mail: cep@ifba.edu.br.

CONSENTIMENTO PÓS–INFORMAÇÃO

Eu,____,fui informado (a) sobre o que a pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser e que meu nome não será divulgado. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pela pesquisadora, ficando uma via com cada um de nós.

____________________, _________de ______________________de ________________

Assinatura do Participante:

____

Assinatura da Pesquisador Responsável:

____

Assinatura da Testemunha:

____

ANEXO D - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido Para Pais e/ou Responsáveis

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – SETEC
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA BAIANO – *Campus* Catu
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA – PROFEPT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS E/OU RESPONSÁVEIS

Prezado (a)____convidamos o adolescente sobre sua guarda a participar como voluntário (a) na pesquisa intitulada **Tecnologias Digitais e Metodologias Ativas nas aulas de matemática: desafios e potencialidades de uma sequência didática no ensino médio integrado**, de autoria e responsabilidade do mestrando Gustavo Pereira Nascimento, aluno do Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica (PROFEPT) do Instituto Federal Baiano de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano, tendo como orientadora a **Profª. Drª. Camila Lima Santana e Santana**, professora e pesquisadora do IFBAIANO. A pesquisa tem como objetivo **avaliar as contribuições de situações didáticas que articulas tecnologias digitais e metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem de função afim,** com *locus* na Escola Rural Rolf Weinberg.

O motivo que nos leva a estudar tal temática advém da necessidade de desenvolver pesquisas que contribuam para motivar o estudo de matemática no Ensino médio integrado, que estimule a autonomia na aprendizagem. **Para tanto, pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que articula a sala de aula invertida com o uso do Geogebra para o ensino de Função Afim na 1ª série do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio.**

A participação do menor se dará por meio de respostas a uma sequência didática que articula sala de aula invertida e o uso do Geogebra no ensino de Função Afim.

A Resolução 466/12, homologada pelo Conselho Nacional de Saúde (CNS) do Ministério da Saúde (MS), atesta que para toda pesquisa realizada com seres humanos devem se previstos e avaliados os riscos, aos quais poderão ser expostos os participantes. Segundo essa Resolução, faz-se necessário a submissão do projeto de pesquisa a um Conselho de ética e Pesquisa – CEP, os CEP atuam como "colegiados interdisciplinares e independentes, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativos criados para atender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade para contribuir no desenvolvimento da pesquisa nos padrões éticos" (BRASIL, 2012). Sendo assim, a pesquisadora se compromete a encaminhar todos os instrumentos de coleta para avaliação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) e a coleta de dados apenas ocorrerá após autorização do mesmo.

Entende-se que os participantes poderão sentir-se cansados, incomodados, constrangidos, até mesmo ofendidos por algum tipo de pergunta ou abordagem que lhes seja feita, causando-lhe algum tipo de dano psíquico, moral, intelectual, conforme mencionado no inciso II-22 da lei supracitada. Buscando minimizar esses riscos, as atividades serão realizadas em ambientes confortáveis, respeitando a disposição e tempo dos participantes, buscando minimizar cansaço e otimizar o seu tempo, evitando cansaço ou qualquer desconforto. Antes de iniciar as perguntas, todos os objetivos e procedimentos da pesquisa, serão apresentados tanto por meio de uma explanação oral, quanto por meio dos termos de consentimento livre esclarecido que serão assinados apenas pelos que tiverem interesse em participar.

Dentre os benefícios desta pesquisa, destaca-se a possibilidade ao estudante de refletir sobre seu papel na construção do próprio conhecimento, tornando-se um sujeito mais estimulado e autônomo. A partir de diálogos constantes entre o pesquisador e os estudantes pretende-se elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades estruturadas para aprendizagem de Função Afim.

Espera-se que os estudantes sintam-se motivados ao expor suas opiniões a respeito de como todos podem aprender o objeto matemático Função Afim, que é um elemento que faz parte das suas vidas cotidianas.

O pesquisador reitera a garantia da manutenção do sigilo sobre as informações coletadas durante a pesquisa, a identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. Sua identidade será tratada com total sigilo e todos os dados coletados serão utilizados apenas para fins dessa pesquisa. Os resultados da pesquisa serão enviados para você e permanecerão confidenciais. O nome ou o material que indique a participação do menor não será liberado sem a sua permissão. O menor não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Considerando que essas medidas atenuam, mas não anulam os riscos, será garantido aos participantes assistência integral em qualquer etapa do estudo. Buscar-se-á minimizar todos os riscos possíveis para que o participante menor não sinta-se constrangido, nem sofra qualquer dano de ordem física e psicológica, caso isto aconteça, os participantes receberão acompanhamento psicológico e social, caso seja necessário. Além disso, caso o participante sinta-se ameaçado, desconfortável ou desmotivado a participar, poderá deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum ônus ou constrangimento.

A participação neste projeto não implicará ônus financeiro a você, bem como não haverá nenhum tipo de compensação ou gratificação financeira, visto que trata-se de uma participação voluntária.

Ainda que tomados todos os cuidados, o menor tenha algum prejuízo material ou imaterial em decorrência da pesquisa poderá solicitar indenização no valor de R$ 350,00, que será custeada por parte do pesquisador e das instituições envolvidas nas diferentes fases da pesquisa de acordo com Resolução 466/2012.

Para qualquer outra informação, você poderá entrar em contato com a pesquisador na Rua Travessa Paraíso, nº 61, Star – CEP 48.120-000. Pojuca – Bahia ou pelo telefone (71) 99910-2393, ou ainda por e-mail gustavopereira2889@gmail.com ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/IFBA, Av. Araújo Pinho, Nº 39 - Canela - Salvador - BA 40.110-150, telefone (71) 3221-0332. e-mail: cep@ifba.edu.br.

CONSENTIMENTO PÓS–INFORMAÇÃO

Eu,____,fui informado (a) sobre o que a pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, e entendi a explicação. Por isso, eu autorizo o menor sob minha responsabilidade, a participar do projeto de pesquisa, sabendo que o mesmo não ganhará nenhum recurso financeiro e que, poderá sair da pesquisa quando quiser e que, os pesquisadores são responsáveis para manter o sigilo das informações coletadas, bem como uso de áudios e/ou imagens associadas à pesquisa. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

____________________, _________de ______________________de ________________

Assinatura do
Responsável: ____

Assinatura do Pesquisador Responsável.
____

Assinatura da Testemunha:
____