NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES COMPLEXOS

Preparatório para o ENEM e academia militares

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y^2 = 2px$

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$z = \cos nx + i.\text{sen } nx$

$Z = x + yi$

$p(x) = q(x).h(x) + r(x)$

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PRODUTO EDUCACIONAL

MATERIAL DIDÁTICO: CONSTRUÇÃO DE UM MATERIAL DIDÁTICO DE NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES COMPLEXOS PREPARATÓRIO PARA O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO E ACADEMIAS MILITARES

PEDRO HENRIQUE SOARES RODRIGUES DA SILVA
ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA

Seropédica, RJ

2023

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 29/08/2023.

AUTORES

Pedro Henrique Soares Rodrigues da Silva: Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal do Rio de Janeiro (2019) e Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2023). Atualmente é professor de Matemática DA Rede Elite de Ensino, Matriz Educação, Instituto de Educação Santo Antônio, Curso Preparatório Passei.

André Luiz Martins Pereira: Possui Bacharel em Matemática em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2003), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2004) e Doutorado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2008). Atualmente é professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Matemática Pura, com ênfase em Álgebra, atuando nos seguintes temas: teoria de grupos, anéis de grupos e teoria de códigos corretores de erros.

SUMÁRIO

CARTA AO ALUNO

Caro(a) aluno,

É com grande entusiasmo e dedicação que trazemos até você este material abrangente e completo sobre números complexos e polinômios. Nossa missão é proporcionar a você uma jornada matemática enriquecedora, preparando-o(a) não apenas para enfrentar desafios em exames e concursos, mas também para desenvolver habilidades matemáticas sólidas que serão essenciais em sua jornada acadêmica e profissional.

Compreendemos que o estudo de matemática, especialmente quando se trata de tópicos mais avançados como números complexos e polinômios, pode ser intimidante para muitos estudantes. No entanto, acreditamos firmemente que, com uma abordagem cuidadosa e gradual, esses conceitos podem ser dominados de forma gratificante e enriquecedora.

Este trabalho foi concebido com o objetivo de atender às necessidades não só dos alunos que se preparam para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), mas também daqueles que buscam ingressar em academias militares renomadas, como o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), o Instituto Militar de Engenharia (IME) e a Escola Naval (EN). Sabemos que esses concursos representam um desafio significativo no campo da matemática, uma vez que apresentam questões de alto nível, muitas vezes inspiradas na renomada Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Ao dividir o conteúdo em capítulos, com um período de um mês para a aplicação de cada um, visamos permitir um estudo aprofundado e gradual dos conceitos. Nossa intenção é que você possa absorver o conhecimento de maneira sólida, garantindo uma compreensão plena dos números complexos e dos polinômios.

O capítulo dedicado aos números complexos é especialmente importante, pois ele estabelece as bases fundamentais para o entendimento dos conceitos que serão abordados ao longo do trabalho. Exploramos as operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como a forma polar e trigonométrica dos números complexos. Além disso, abordamos as raízes da unidade, o conceito de conjugado e as propriedades das potências de números complexos. Um destaque especial é dado às fórmulas de De Moivre e de Euler, que são essenciais no estudo dos números complexos, mas muitas vezes são pouco trabalhadas no ensino médio regular. Ao apresentar essas fórmulas com detalhes sobre sua origem e importância, buscamos proporcionar uma compreensão mais profunda e aplicável desses conceitos.

O capítulo dedicado aos polinômios com coeficientes complexos é igualmente relevante, já que os polinômios são uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas matemáticos complexos. Iniciamos com a definição de polinômios e apresentamos os diferentes tipos, como os polinômios lineares, quadráticos e cúbicos. A partir disso, exploramos as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, bem como as propriedades dessas operações. O Teorema do Resto e o Teorema de D'Alembert são abordados, pois são importantes ferramentas no estudo dos polinômios. Dedica-se também uma seção para discutir as raízes e os zeros de um polinômio, incluindo o Teorema Fundamental da Álgebra, que estabelece a existência de raízes complexas para qualquer polinômio com coeficientes complexos não nulos. Não deixamos de apresentar o Teorema de Briot-Ruffini e sua aplicação na divisão de polinômios. Finalmente, exploramos tópicos avançados, como a derivada de um polinômio e o conceito de polinômios recíprocos, além de abordar as técnicas de frações parciais, transformadas aditivas, multiplicativas e simétricas, que são ferramentas valiosas no estudo e na manipulação de polinômios com coeficientes complexos. Acreditamos que essa abordagem ampla dos polinômios proporcionará a você uma compreensão sólida e preparará adequadamente para o ensino superior, em especial para a área de ciências exatas, onde muitos estudantes apresentam um déficit no conhecimento de números complexos.

Um aspecto fundamental desta obra é a seleção cuidadosa e organização dos exercícios ao longo dos capítulos. Os exercícios foram elaborados para estimular a aplicação dos conceitos aprendidos, promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico e a capacidade de resolver problemas relacionados aos números complexos e polinômios. Por meio da prática contínua, você terá a oportunidade de desenvolver suas habilidades matemáticas de forma progressiva, começando por problemas mais simples e avançando para desafios mais complexos. Acreditamos que essa abordagem gradativa e desafiadora contribuirá significativamente para o seu aprendizado e crescimento como estudante de matemática.

Para a construção deste material, atentamos aos requisitos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e seguimos as diretrizes da Universidade Federal do Paraná, garantindo que nosso conteúdo seja adequado e eficaz para o ensino dos números complexos e polinômios. Queremos que este material seja uma fonte valiosa de conhecimento e aprendizado, não só para você, mas também para professores e instituições de ensino que desejam elevar o nível de educação em matemática em nosso país.

Nossa maior aspiração é que, ao abordar os números complexos e polinômios de forma ampla e aprofundada, este trabalho não apenas o prepare para o sucesso em exames e concursos, mas também o ajude a desenvolver habilidades matemáticas essenciais para sua formação acadêmica e profissional. Acreditamos que a compreensão desses temas irá capacitá-lo(a) a resolver problemas de forma eficiente e aprimorar suas capacidades analíticas, proporcionando uma base sólida para o seu sucesso acadêmico e profissional.

Lembre-se de que o conhecimento adquirido por meio deste trabalho não é apenas uma preparação para provas, mas sim uma ferramenta valiosa para a vida. A matemática está presente em diversas áreas do conhecimento e a capacidade de resolver problemas matemáticos complexos é uma habilidade altamente valorizada em muitas carreiras e campos profissionais.

Ao longo de sua jornada com este material, esperamos que você perceba que a matemática é muito mais do que apenas números e fórmulas. Ela é uma linguagem universal que nos permite compreender o mundo ao nosso redor e resolver problemas de maneira lógica e estruturada. Além disso, a matemática é uma ferramenta poderosa para desenvolver o pensamento crítico e analítico, habilidades que serão úteis em todas as áreas da sua vida.

Não subestime o valor de cada conceito e tópico abordado aqui. Cada detalhe, cada fórmula e cada exercício proposto foram pensados para proporcionar a você uma formação completa e sólida em matemática. Sabemos que o caminho pode ser desafiador, mas também acreditamos que você é capaz de superar cada obstáculo e alcançar seus objetivos acadêmicos e profissionais.

Queremos enfatizar que, ao longo deste trabalho, estaremos ao seu lado para apoiá-lo(a) em sua jornada de aprendizado. Caso surjam dúvidas ou dificuldades, não hesite em procurar ajuda. Seja conversando com seus professores, colegas de estudo ou buscando recursos adicionais, o importante é que você não desista diante dos desafios. A persistência e o esforço são fundamentais para alcançar o sucesso em qualquer área da vida, e com a matemática não é diferente.

Além do aspecto acadêmico, encorajamos você a ver a matemática como uma fonte de prazer e satisfação intelectual. À medida que aprofundamos nosso conhecimento em matemática, começamos a descobrir sua beleza e elegância, encontrando soluções para problemas que, à primeira vista, pareciam insolúveis. A matemática é uma aventura intelectual, e esperamos que este trabalho desperte em você o interesse e a curiosidade para explorar esse mundo fascinante.

À medida que avança em seus estudos, lembre-se de manter a mente aberta para novos conhecimentos e perspectivas. A matemática é uma ciência em constante evolução, e sempre há algo novo a aprender. A sede de conhecimento e a busca pelo aperfeiçoamento são características essenciais para aqueles que desejam se destacar e contribuir de forma significativa para a sociedade.

Ao concluir este trabalho, esperamos que você se sinta mais confiante e preparado(a) para enfrentar os desafios que o aguardam, tanto em exames e concursos como em sua vida acadêmica e profissional. Nosso objetivo é que você se torne um(a) estudante de matemática dedicado(a) e apaixonado(a), capaz de utilizar esses conhecimentos para fazer a diferença no mundo.

Agradecemos sinceramente pela oportunidade de acompanhá-lo(a) nesta jornada. Saiba que estamos torcendo pelo seu sucesso e que acreditamos no seu potencial. Lembre-se sempre de que você é capaz de alcançar grandes conquistas, e que o aprendizado é um processo contínuo e enriquecedor. Desejamos a você uma experiência gratificante e proveitosa com este material, e que ele seja apenas o começo de uma jornada matemática incrível. Estamos aqui para apoiá-lo(a) em cada passo do caminho.

Atenciosamente,

Pedro Henrique Soares Rodrigues da Silva

CARTA AO PROFESSOR

Prezado(a) Professor(a),

É com um enorme prazer que venho compartilhar com você, caro colega, algumas sugestões fundamentais para a utilização do material didático que desenvolvi, focando nos capítulos de Números Complexos e Polinômios. O objetivo é contribuir para uma experiência de aprendizado enriquecedora e eficaz para nossos alunos, permitindo-lhes explorar com profundidade e compreensão esses conceitos essenciais da matemática.

Para garantir uma base sólida e contextualizar a importância dos Polinômios e Números Complexos, é fundamental incluir uma abordagem histórica. Propomos reservar um tempo específico, talvez em uma aula introdutória, para apresentar aos alunos a fascinante evolução desses tópicos ao longo do tempo, desde suas origens até as aplicações mais contemporâneas. A história por trás desses conceitos matemáticos pode despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, aproximando-os da disciplina de forma significativa.

O Cronograma abaixo é apenas uma sugestão, pois sabemos que o desenvolvimento dos capítulos e seções a serem trabalhados depende de alguns fatores, como o nível de compreensão e absorção de cada turma e o nível de dificuldade de cada seção proposta. Levando isso em consideração, propomos que cada seção seja dada em uma aula (50 min) no mínimo, exceto a aula 1, pois nessa aula será trabalhado todo o primeiro capítulo sobre a história dos polinômios e dos números complexos em uma aula.

Cronograma

Aula 1 - história dos polinômios e dos números complexos.

Números Complexos (Capítulo 2)

Aula 2 - O conjunto dos números complexos

Aula 3 - O conjugado de um número complexo.

Aula 4 - O módulo de um número complexo

Aula 5 - Plano de Argand-Gauss e forma trigonométrica

Aula 6 - Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Aula 7 - Radiciação - 2ª fórmula de De'Moivre

Aula 8 - As raízes enésimas da unidade.

Aula 9 - Fórmula de Euler

Polinômios (Capítulo 3)

Aula 10 - Conceitos básicos de Polinômios complexos em uma variável

Aula 11 -Teorema do resto de D'Alembert

Aula 12 - O teorema fundamental da álgebra.

Aula 13 -Teorema das raízes racionais, conjugadas e relação de Girard.

Aula 14 - Polinômios recíprocos e auto recíprocos.

Aula 15 - A derivada de um polinômio.

Aula 16 -Transformadas aditiva, multiplicativa, simétrica e recíproca.

Aula 17 - Fórmula de Taylor

Aula 18 - Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais

Ao longo do curso, abordaremos os recursos de Números Complexos e Polinômios de forma progressiva, visando proporcionar uma experiência de aprendizado gradual e enriquecedora para nossos alunos. Iniciaremos com os Conceitos Iniciais de Números Complexos, explorando desde a definição e operações básicas até a forma trigonométrica e suas aplicações práticas. A seguir, iremos para os Tópicos Intermediários, aprofundando-se na abordagem do Teorema de De'Moivre, raízes enésimas da unidade e fórmula de Euler, entre outros conceitos essenciais. Posteriormente, nos dedicaremos aos Tópicos Avançados de Números Complexos, incluindo exigidos em concursos militares e aplicações mais complexas, desenvolvendo assim habilidades analíticas e resolutivas em nossos alunos. Em seguida, daremos início aos Conceitos Iniciais de Polinômios, abordando definições, graus e operações básicas, de forma clara e didática, com exemplos práticos que aproximam os conceitos do cotidiano dos estudantes. Progressivamente, passaremos para os Tópicos Intermediários, explorando o teorema do resto, teorema fundamental da álgebra e relações de Girard, permitindo uma compreensão mais profunda das propriedades dos polinômios. Por fim, concluímos o estudo dos Polinômios com os Tópicos Avançados, que envolve polinômios recíprocos, derivadas, transformadas e outras aplicações relevantes, proporcionando aos alunos uma abordagem mais sofisticada e preparando-os para desafios acadêmicos e profissionais. Ao seguir essa sequência cuidadosamente iniciada, buscamos garantir o desenvolvimento consistente e aprofundado dos conhecimentos em Números Complexos e Polinômios em nossos alunos.

É importante destacar que os exercícios propostos foram cuidadosamente selecionados e organizados em ordem crescente de dificuldade. Essa abordagem permite que os alunos desenvolvam suas habilidades matemáticas de forma progressiva, sentindo-se confiantes e preparados para enfrentar desafios cada vez maiores.

Para tornar as aulas mais interativas e envolventes, proponho o uso de recursos visuais, como gráficos, esquemas e símbolos analógicos para representar conceitos abstratos. A exploração de recursos tecnológicos, como softwares de matemática e aplicativos educacionais, também pode ser uma excelente forma de consolidar o entendimento dos alunos sobre os polinômios e os números complexos.

Além disso, incentivo a criação de momentos de debate em sala de aula, onde os alunos podem discutir e trocar ideias sobre os conceitos estudados. Essa abordagem colaborativa contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e para a consolidação do conhecimento.

Para avaliar o progresso dos alunos, sugiro a aplicação de estimativas periódicas que reflitam os diversos níveis de complexidade estudados em sala de aula. Dessa forma, será possível identificar os pontos fortes e as dificuldades dos alunos, permitindo que o ensino seja adaptado para melhor atender às suas necessidades individuais.

Outro aspecto relevante é incentivar a resolução de problemas do cotidiano que envolvem polinômios e números complexos, mostrando aos alunos a aplicação prática desses conceitos em situações reais. Desafios e exemplos contextualizados aproximam os alunos da matemática, tornando o aprendizado mais significativo e motivador.

No que diz respeito aos alunos que se preparam para concursos militares e para aqueles que ingressaram recentemente na graduação, é fundamental oferecer suporte adicional. Proponho a realização de sessões de tutoria ou plantações de dúvidas, onde esses alunos podem reforçar seu conhecimento nos requisitos exigidos nos exames e desenvolver habilidades específicas para obter sucesso em suas jornadas acadêmicas e profissionais.

Por fim, ressalto que a motivação dos alunos é um fator-chave para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem. Como cuidamos, temos o papel de inspirar e encorajar nossos alunos a se dedicarem aos estudos e perceberem a beleza e a utilidade da matemática em suas vidas.

Espero que estas sugestões sejam úteis para a preparação das aulas e para o planejamento do ensino dos capítulos de Polinômios e Números Complexos. Tenho a intenção de que, com dedicação, empenho e uma abordagem pedagógica cuidadosa, nossos alunos alcançarão um entendimento sólido desses temas importantes da matemática.

Estou à disposição para dialogar sobre quaisquer ajustes ou melhorias que possam ser feitas ao longo do curso, bem como para colaborar em atividades extracurriculares relacionadas à matemática. Juntos, podemos proporcionar uma experiência educacional valiosa e transformadora para nossos alunos.

Atenciosamente,

Pedro Henrique Soares Rodrigues da Silva

1. UM POUCO DA HISTÓRIA DOS POLINÔMIOS E DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

1.1. A história das equações polinomiais

Provavelmente um dos feitos matemáticos mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Logo de início, a equação do 3º grau mostra em um de seus aspectos notáveis o enigma histórico envolvendo a sua solução. Os babilônios já sabiam resolver a equação do 2º grau 1700 a.C., foi necessário esperar mais de 3000 anos até que Scipione Del Ferro (1465 -1526) resolvesse a equação do 3º grau e logo em seguida, Ludovico Ferrari a do 4º grau.

Matemáticos como Niccoló Tartaglia (1499-1557) e Ludovico Ferrari (1522-1565) contribuíram para a resolução das equações cúbicas e quárticas, respectivamente. No entanto, somente em 1545, sem o consentimento de Tartaglia que Girolamo Cardano (1501-1576) publica "Ars Magna" com a resolução dessas equações, constituindo-se num marco importante para os algebristas da época.

A resolução das equações cúbicas e quárticas, divulgada com a publicação, em 1545, da obra "Ars Magna", foi talvez a maior contribuição dada à álgebra, desde que os babilônios, quase quatro milênios antes, aprenderam a completar o quadrado para a resolução das equações quadráticas. Este fato tão imprevisto e notável, causou tal impacto que o ano de 1545 pode ser considerado como o início do período moderno da Matemática.

As descobertas publicadas em "Ars Magna" deram um enorme impulso à pesquisa e a álgebra e naturalmente o estudo das equações caminhou para a generalização, de modo a incluir equações polinomiais de qualquer ordem. Embora o resultado não fosse o esperado no campo de resolução das equações, houve um grande desenvolvimento do cálculo algébrico nos dois séculos seguintes.

Ao se falar da obra de Cardano, a ordem cronológica foi um pouco avançada, então é hora de voltar, até uns anos antes de 1545, para mencionarmos o que disse Pacioli nessa época e então, a partir daí, tentar prosseguir sem dar mais saltos durante essa jornada referente à história e resolução da equação do 3º grau. Em 1494, Frei Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, renomado professor de Matemática, tendo ensinado em diversas Universidades da Itália, depois de ensinar, sob forma de versos, a regra para resolver a equação do 2º grau, Luca Pacioli afirmava que: "não podia haver regra geral para solução de problemas do tipo $x^3 + mx = n$" (equação chamada por eles da época de cúbica comprimida).

Por volta de 1515, Scipione Ferro, Professor de Matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, com m e n pertencente aos reias, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Apesar da não publicação da sua solução, ele a revelou dando a regra e não a prova ao seu discípulo Antonio Maria Fiore. Tartaglia na época anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$, com p e n pertencente aos reais. Na época, era normal acontecer duelos intelectuais, e esses duelos eram cercados de rituais, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por uma numerosa audiência. Achando que a revelação de Tartaglia era um equívoco, Fiore teve a infeliz ideia de desafiar Tartaglia para um duelo, uma disputa matemática. Na troca dos problemas desafios, Tartaglia encaminhou uma lista de 30 problemas cobrindo diversos tópicos de Matemática, enquanto os 30 propostos por Fiore terminavam, cada um, exigindo a solução de uma equação cúbica comprimida, aquele tipo de equação que Ferro tivera descoberto um modo de resolução. Tartaglia resolveu facilmente todos os problemas de seu desafiante, que, por sua vez, sendo menos talentoso, fracassou na maioria dos problemas que lhe foram propostos.

Essas notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos junto à vitória esmagadora de Tartaglia rapidamente chegaram em Milão, onde vivia o

Matemático Girolamo Cardano, que ficou muito curioso para saber como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível. Cardano ouvira as histórias sobre o desafio e ficou interessado em aprender as maravilhosas técnicas de Tartaglia. Influente e insinuante como era, com uma maneira ardilosa, Cardano conseguiu que Tartaglia lhe revelasse o segredo da regra da resolução, mas sua demonstração foi omitida. Em troca, Cardano, em juramento prometeu não divulgar a regra.

Mas em 1542, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos de Ferro, olhando para eles encontraram a solução da equação $x^3 + px = q$. Cardano sentiu-se desobrigado de manter o juramento, pois estava proibido de publicar a solução de Tartaglia, mas não a de Ferro, obtida alguns anos antes. A partir daí, voltou-se, com energia à preparação de seu grande livro "Ars Magna", que foi publicado em 1545. Essa publicação foi recebida favoravelmente pelos entendidos, mas provocou reação bem desfavorável em Tartaglia já que revelaria o segredo tão guardado por ele.

Mesmo Cardano tendo dado os merecidos créditos a Tartaglia nessa resolução das equações do terceiro grau e só ter tido publicada ela após ter visto a solução parcial da equação do 3º grau por Ferro, em alguns de seus manuscritos isso gerou para Cardano uma enorme disputa com Tartaglia. Com efeito, no ano seguinte da publicação do "Ars Magna" Tartaglia publica os "Quesite e Inventioni Diverse", no qual ele, além de apresentar soluções para vários problemas que lhe foram propostos, já que esta disputa pública dele com Fiori não foi a sua primeira, ele já havia participado de outras disputas de mesma natureza antes, em seu livro ele descreve fatos autobiográficos e conta a história de suas relações com Cardano, atacando-o asperamente pela quebra do juramento solene. Apesar de todo esse descontentamento de Tartaglia junto com a sua publicação, mais a publicação anterior de Cardano, tudo isso junto deu um enorme impulso no desenvolvimento da Matemática. Cardano, dedicou grande parte da sua vida à álgebra e ao reconhecimento da importância das raízes negativas, chamadas por ele de “fictícias”. Embora falasse das raízes quadradas dos números negativos, não chegou ao conceito dos imaginários. A continuidade de seu estudo foi realizada por Rafael Bombelli.

Depois da publicação no “Ars Magna” da solução da equação do 3º grau, esta fórmula para resolução ficou conhecida como fórmula de Cardano por ter sido publicada pela primeira vez em seu livro, muito embora ele tenha dito que a fórmula fora descoberta por Ferro e redescoberta por Tartaglia. Com a publicação dos “Quesiti”, Ferrari em defesa de seu mestre respondeu por um panfleto, já que Tartaglia atacava diretamente Cardano, esse panfleto provocou uma réplica de Tartaglia, iniciando-se uma polêmica que durou mais de um ano e produziu os doze panfletos, conhecidos como “Cartelli di Sfida Mathematica”, que no final acabou gerando um debate matemático entre Tartaglia e Ferrari em Milão. O resultado desse debate não ficou muito claro, mas as autoridades universitárias de Brescia, para onde Tartaglia acabara de se transferir, não ficaram satisfeitas com o seu desempenho e cortaram seu contrato. Ele regressou a Veneza, onde morreu, humilde e obscuro, nove anos depois.

Em 1545, Cardano propôs o célebre problema “Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40”. Embora ele próprio tenha dado o resultado $5 + \sqrt{-5}$ e $5 - \sqrt{-5}$, qualificou-o de “tão sutil quanto inútil”. Em seguida Cardano deparou-se com raízes de números negativos ao resolver equações do 3º grau, como $x^3 - 15x - 4 = 0$, cuja solução era indicada por $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Dizer que a solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ não existia (pois $\sqrt{-121}$ não existia) ele não quis dizer, pois sabia que 4 era uma solução dessa equação. Essa situação intrigante Cardano não resolveu, mas teve o mérito de ter dado atenção a ela.

Foi Rafael Bombelli (1526-1573), em 1560, que percebeu que as expressões debaixo das raízes cúbicas diferiam apenas por um sinal e teve a feliz ideia (e depois provou-a) de que as próprias raízes cúbicas fossem do mesmo tipo e diferissem apenas por um sinal. De fato, ele mostrou que as raízes cúbicas encontradas por Cardano eram $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$, que, somadas, dão 4.

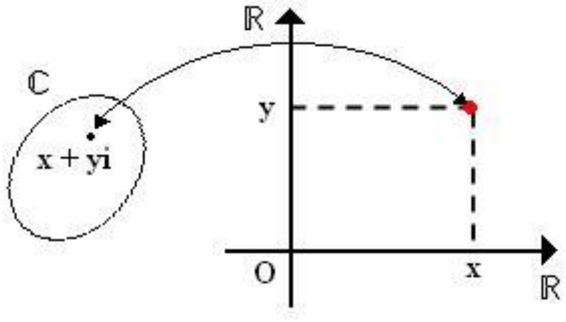
1.2. A história de $\sqrt{-1}$

Em 1637, Descartes já havia usado o termo "real" e "imaginário", no trabalho La Géométrie, considerando os números complexos como soluções de equações. Para ele os números imaginários eram os complexos a + bi com b ≠ 0.

Leibniz (em 1702), Euler (em 1770) e Gauss este último também chamado de o príncipe dos matemáticos chegaram a trabalhar com os números na forma $a + b\sqrt{-1}$, sempre intrigados, pois, embora o símbolo $\sqrt{-1}$ não tivesse sentido, sempre que operavam com números na forma $a + b\sqrt{-1}$, obtinham resultados corretos. Atribui-se a Gauss a brilhante ideia de substituir o símbolo $a + b\sqrt{-1}$ por um par ordenado de números reais (a, b), possibilitando, a partir daí, a visualização no plano cartesiano dos números então chamados "sofísticos", "sem sentido" ou "imaginários".

O símbolo $\sqrt{-1}$ passou a ser substituído pelo par $(0,1)$ e foi chamado por Euler, em 1748, de i. E o número complexo $(a, 0)$ passou a ser identificado como o número real a, como identificamos hoje o número racional $\frac{a}{1}$ com o número inteiro a.

O primeiro a representar graficamente os números complexos, desenhando uma reta perpendicular à reta real, o eixo imaginário foi Caspar Wessel em 1797 num artigo científico intitulado "Sobre a Representação Analítica da Direção" onde ele utiliza seus resultados para resolver polígonos planos e esféricos, além de demonstrar alguns teoremas conhecidos da Álgebra. Um matemático amador chamado de Jean Robert Argand, nascido na Suíça em 1768, ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90°. A representação no plano dos números complexos é conhecida como plano de Argand-Gauss. Cada número complexo é associado a um único ponto P do plano cartesiano. A parte real do complexo é representada por um ponto do eixo horizontal, que passa a ser denominado de eixo real, e a parte imaginária, por um ponto no eixo vertical, que passa a denominar-se eixo imaginário. O ponto P, correspondente do número complexo $z = a + bi$, é denominado de imagem ou afixo de z.



Em 1821, Cauchy (1789-1857) introduziu os termos "conjugado" e "módulo". Em 1822, Gauss (1777-1855) introduziu o nome "número complexo".

O tratamento rigoroso moderno dos números complexos como pares de números reais foi apresentado por Hamilton, em 1853. Mais tarde ele estendeu esses números ao espaço de quatro dimensões sobre os números reais, no trabalho Lectures on Quaternions [7].

1.3. Resolução de equação polinomiais de grau 3

Agora, chegamos ao grande momento, a hora de mostrar como se deu a fórmula de resolução por radicais da equação do 3º grau, veremos que toda equação do 3º grau é facilmente transformada naquela equação cúbica comprimida que vimos no decorrer de nosso texto, então, vamos ver como fazer esta transformação e como chegar a resolução.

Podemos escrever uma equação do 3º grau assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

A equação acima é equivalente a $x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$. Logo, basta considerarmos equações em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a será feita uma substituição da variável x por uma y e tal que $x = y - \frac{a}{3}$, isso transformará a equação em:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando vem:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0\,,$$

que é uma equação onde o termo do segundo grau é nulo. Portanto, é suficiente estudar equações do terceiro grau desse tipo, ou seja, aquelas que podem ser escritas dessa maneira:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Para resolver esta equação, escrevemos $x = u + v$. Substituindo esta última igualdade na equação que nos propulsemos a resolver, temos:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,.$$

Portanto, se conseguirmos achar números u, v tais que:

$$u^3 + v^3 = -q \text{ , ou seja, } u^3 + v^3 = -q$$

$$u.v = -\frac{p}{3} \rightarrow u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0.$

Ora, o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos, de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do 2º grau:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula resolutiva para resolver esta equação, obtemos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ , e consequentemente,}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.(1)$$

Assim, $x = u + v$, dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação expressa por $x^3 + px + q = 0$.

Esta é a fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele, mas sim por Tartaglia.

A fórmula acima trouxera inicialmente mais perguntas do que respostas, pois quando sua aplicação era feita numa equação do 3º grau, muitas vezes fazia aparecer um novo e misterioso tipo de número e que não se conseguia conciliar a fórmula de Cardano com exemplos práticos de equações do 3º grau que exibiam 3 raízes.

Esses problemas se devem raízes quadradas negativas e para resolver esse problema, será usado métodos desenvolvidos por Euller para as raízes complexas.

1.4. Método de Euller

Para elucidar o problema que emerge na seção anterior, o qual foi o maior problema do século XVI, entra em campo o brilhantismo de Euller. Euller mostra que podemos encontrar os valores de x utilizando a extração de raízes cúbica e, portanto, temos 3 alternativas. Assim, são 9 os valores possíveis da soma u + v, sendo 3 deles raízes legítimas e 6 raízes estranhas.

Veja que destacando na fórmula (1), o radicando $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, temos:

1° caso: Se D > 0 a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;

Demonstração: Tomando z como uma das soluções complexas de

$x^3 + px + q = 0$. As três raízes cubicas de $x^3 + px + q = 0$ são $z, wz, \overline{w}z$

onde $w = e^{i.\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cubica da

unidade. Pela fórmula de Cardano e da hipótese de $D > 0$, u^3 e v^3 são reais.

Denotamos por $u_1\ e\ v_1$ suas raízes cubicas reais, os três valores de u e v são:

$$u_1;\ wu_1;\ \overline{w}u_1;\ \ v_1\ \ ;\ w\ v_1\ \ ;\ \overline{w}\ v_1$$

onde w e $\overline{w}$ são as raízes cúbicas da unidade.

Para que $u \cdot v$ seja real, as possibilidades para u e v são as seguintes:

$$\begin{cases} u = u_1\ ;\ v = v_1 \\ u = wu_1\ ;\ v = \overline{w}v_1 \\ u = \overline{w}u_1\ ;\ v = wv_1 \end{cases}$$

Portanto as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são dadas por:

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 \\ y_2 = wu + \overline{w}v_1 \\ y_3 = \overline{w}u_1 + wv_1 \end{cases}$$

Note que $\overline{y_2} = \overline{w}u_1 + wv_1 = y_3$

Provando assim o seguinte fato:

Se D > 0 a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

2° caso: Se D = 0 a equação tem três raízes reais, sendo uma repetida;

Demonstração:

Então $u_1 = v_1$ e as raízes são:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2u_1$$

$$y_2 = y_3 = (\overline{w} + w)\, u_1 = -\, u_1$$

Onde u_1 é a raiz cúbica de $-\frac{q}{2}$.

Provando assim o seguinte fato:

Se D = 0 a equação $y^3 + py + q = 0$ tem três raízes reais, sendo uma repetida;

3° caso: Se D < 0 a equação tem três raízes e distintas.

Demonstração:

Quando D<0, a fórmula exprime x = u + v como soma de duas raízes cúbicas de números complexos

Neste caso usaremos a chamada solução trigonométrica da equação polinomial do terceiro grau, quando u^3 e v^3 nas fórmulas são números complexos e conjugados.

Façamos:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D} = \rho\,(cos\theta \pm isen\theta)$$

desta igualdade e do fato que $u^3 . v^3 = -\frac{p^3}{27}$ tiramos:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{-\dfrac{p^3}{27}} \\ \cos\theta = -\dfrac{q}{2\rho} \end{cases}$$

Daí, os três valores u e v são:

$$u = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) + i.sen\ \left(\dfrac{\theta}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right) + i.sen\ \left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right) + i.sen\ \left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - i.sen\ \left(\dfrac{\theta}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right) - i.sen\ \left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right) - i.sen\ \left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

Como $u.v = -\frac{p}{3}$ é real temos:

$$\begin{cases} y_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) \\ y_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi}{3}\right) \\ y_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\dfrac{\theta+4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Provando assim o seguinte fato:

Se $D < 0$ então as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são reais e distintas.

Após a descoberta da resolução por radicais da equação do 3° grau, logo em seguida apareceu também a solução da equação do 4° grau, essa já tem mais algumas manipulações a serem feitas, no entanto, também podem ser resolvidas por meio de radicais.

Depois disso, as coisas ficaram mais lentas praticamente na inércia em se tratando das resoluções por radicais de equações, agora para graus maiores do que 4 e durante três séculos, buscou-se um processo de resolução para equações do 5º grau ou de grau superior através de radicais.

A questão foi resolvida por Abel e Galois no século XIX, que demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver equações de grau superior a 4. Como ocorre muitas vezes em Matemática, apesar de a resposta a respeito da possibilidade de resolver tais equações por radicais ser negativa, a busca não foi infrutífera: a teoria desenvolvida por Galois e sua demonstração gerou inteira e extensa área de desenvolvimento na Álgebra.

O fato de não possuirmos fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular raízes reais e complexas. Os processos de resolução, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação que não serão discutidos nesse trabalho. Na verdade, mesmo equações de grau 3 e 4 não são, na prática, resolvidas através de suas fórmulas algébricas de resolução, preferindo-se, na maior parte das vezes, recorrer a métodos numéricos.

Apesar da inexistência de fórmulas de resolução para equações de grau maior ou igual a 4, determinadas equações particulares de grau n podem ser resolvidas algebricamente.

Embora não se constitua em uma forma prática para resolver equações do 3º grau, a fórmula de resolução, desenvolvida por Del Ferro e Tartaglia e publicada por Cardano, tem valor histórico. Ela ajuda, também, a entender a origem de certos problemas que podem parecer misteriosos, como por exemplo, mostrar que o número $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é inteiro. Certamente, esta expressão representa um número real que igualando a x, elevando ambos os lados ao cubo e simplificando, chegaremos a uma igualdade do tipo $x^3 + 3x - 4 = 0$, é imediato verificar que 1 é uma raiz da equação, e logo em seguida ela pode ser escrita como $(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0$ o fator do 2º grau não possui raiz real e como sabemos que o número dado é real e raiz da equação, ele só pode ser 1; portanto, apesar das aparências, o número dado é inteiro. É bom observar que todas as equações daquela época eram numéricas, o uso de letras para representar números em Álgebra teve início com François Viète, em 1591. Portanto, a rigor, não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos para cada tipo de equação do 3º grau proposta.

2. NÚMEROS COMPLEXOS

Há mais de uma maneira de iniciarmos este assunto, no entanto, vamos nos ater à ordem histórica.

Ao tentar determinar as raízes de uma equação como $x^2 + 2x + 2 = 0$, percebemos que seu discriminante é negativo. Já sabemos que, neste caso, a equação não possui raízes reais. Mas se usássemos a fórmula de Bhaskara assim mesmo?

Assim, chegaríamos a $\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$. Veja que, de fato, esse número não pertence ao conjunto dos Reais, já que há ali um$\sqrt{-4}$. Se pudermos escrever $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, teremos que$-1 \pm \sqrt{-1}$.

Veja que este número possui uma parte que é real - 1 e também uma parte que não é $\sqrt{-1}$.

Portanto, se faz necessário definir um novo "tipo" de número o qual chamaremos de unidade imaginária

$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Observe que i não é um número real pois $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.

2.1. O conjunto dos números complexos

Definimos $\mathbb{C}$= {a + bi | a, b ∈ $\mathbb{R}$} como o conjunto dos números complexos.

Para um elemento $z = a + bi$, com a e b reais, denotamos por:

$$Re(z) = a \ (parte\ real\ de\ z)$$

$$Im\,(z) = b \ (parte\ imaginária\ de\ z)$$

Se $Im(z) = 0$, temos que z é real (ou seja, o conjunto dos complexos contém o dos reais).

Se $Re(z) = 0 \ e \ Im(z) \neq 0$, dizemos que z é um imaginário puro.

Abaixo definiremos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão nos números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di \in \mathbb{C}$. Defina:

1 - Adição e Subtração

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Ex.: z = 2 +4i, w = 3 - 2i, logo

$z + w = (2 + 3) + (4 + (-2))\,i = 5 + 2i$

$z - w = (2 - 3) + (4 - (-2\,))\,i = -1 + 6i$

2 - Multiplicação

$$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Ex.: $z = 2 + 4i, w = 3 - 2i$

$z \cdot w = (2.3 - 4.(-2)) + (4.3 + 2.(-2))\, i = 14 + 8i$

3 - Divisão

$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Ex.: $z = 2 + 4i,\ w = 3 - 2i$

$$\frac{z}{w} = \frac{2.3 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{4.3 - 2 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} i = -\frac{2}{13} + \frac{16}{13} i$$

Sejam z e w números complexos tais que z = a + bi e w = c + di, com a, b, c e d reais. Dizemos que $z = w$ se, e somente se, a = c e b = d.

Observação:

Em muitas situações, é necessário elevar i a um expoente demasiadamente grande. Note que:

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1$$

Sendo assim, do fato de para todo $k \in \mathbb{Z}$, $(i^{4k})=(i^4)^k = 1$, temos:

$$i^{4k+0} = i^{4k} i^0 = 1$$

$$i^{4k+1} = i^{4k} i^1 = i$$

$$i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1$$

$$i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = -i$$

Ou seja, basta deixar no expoente o seu resto na divisão por 4.

Ex.: $i^{273} = i^{4.68+1} = i^1 = i$

Exercícios:

1) Calcule a soma dos seguintes números complexos: $(2 + 3i) + (4 - 5i)$
2) Calcule a subtração dos seguintes números complexos: $(5 + 2i) - (3 - 4i)$
3) Calcule a multiplicação dos seguintes números complexos: $(2 + i) \times (3 - 2i)$
4) Calcule a soma dos seguintes números complexos: $(-4 + 6i) + (2 - 3i)$
5) Calcular a multiplicação dos seguintes números complexos: $(1 + i) \times (1 - i)$
6) Determine o resultado de i^{2456}

2.2. O conjugado de um número complexo.

Se $z = a + bi$ é um número complexo, definimos como $\bar{z} = a - bi$ o seu conjugado.

Propriedades do Conjugado:

I. $\bar{\bar{z}} = z$

Demonstração.

$Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in R.$

$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

■

Ex.: Sendo $z = 2 + 4i$, determine $\bar{\bar{z}}$.

$$z = 2 + 4i \Longrightarrow \bar{z} = 2 - 4i \Longrightarrow \bar{\bar{z}} = 2 + 4i = z$$

II. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}z$

Demonstração.

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R. Então,$

$\overline{z + w}$ = $\overline{(a + bi) + (c + di)}$=$\overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i =$
$a - bi + c - di$ = $\bar{z} + \bar{w}$

Ex.: Sendo $\bar{z} = 2 + 4i\ e\ \bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{z + w}$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} = (2 + 4i) + (3 + 2i) = 5 + 6i$$

III. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Demonstração

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R. Então,$

$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{ac + adi + cbi - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + cb)i}$=
$(ac - bd) - (ad + cb)i = ac - adi - cbi - bd = (a - bi) \cdot (c - di)$ =$\bar{z} \cdot \bar{w}$

■

Sendo $\bar{z} = 2 + 4i$ e $\bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{z.w}$

$$\overline{z.w} = \bar{z}\,.\bar{w} = (2\cdot 3 - 4\cdot 2) + (2\cdot 2 + 4\cdot 3)i = -2 + 16i$$

IV. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Demonstração

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R\ e\ w \neq 0, isto\ é, c\ e\ d$

$não\ são\ simultaneamente\ nulos, teremos:$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)(c-di)}} = \overline{\left[\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right]} = \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$$

$$\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2} = \frac{(a-bi)+(c+di)}{c^2+d^2} = \frac{(a-bi)}{(c-di)}\cdot\frac{c+di}{c+di} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

■

Ex: Sendo $\bar{z} = 2 + 4i$ e $\bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$.

$$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{2+4i}{3+2i}\,\frac{\cdot(3-2i)}{\cdot(3-2i)} = \frac{14+8i}{13} = \frac{14}{13} + \frac{8i}{13}$$

V. Re(z)=$\frac{z+\bar{z}}{2}$ $e\ Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Demonstração

$Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in R. Então:$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z)$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = Im(z)$$

■

Ex.: Sabendo que $z + \bar{z} = 4\ e\ z - \bar{z} = 10i$, determine z.

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{10i}{2i} = 5$$

Portanto, $z = 2 + 5i$.

VI. z é real$\Leftrightarrow \bar{z} = z$

Demonstração

$Suponha\ que\ z\ seja\ real. Então: z\ =\ a\ +\ 0i\ =\ a - 0i,\ a \in R, isto\ é, z = \bar{z}$

$reciprocamente, suponha\ que\ z = \bar{z}. Então\ da\ propriedade\ anterior\ temos:$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + z}{2} = \frac{2z}{2} = z$$

■

Ex.: Sabendo que $z = a + bi$ e que $\bar{z} = z$, determine b.

se $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, como z é real, logo não possui parte imaginária portanto $b = 0$.

VII. z é imaginário puro $\Leftrightarrow$ z=$-\bar{z}$

Demonstração

Suponha que z seja imaginário puro. Então,$z\ =\ 0 +\ bi\ =\ -(\ 0 - bi) = -\bar{z}$, b $\in R, isto\ é, z = -\bar{z}$

Reciprocamente, suponha que $z = -\bar{z}. Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in \mathbb{R}$, então $a + bi = z = -\bar{z} = -a + bi$. Logo $2a = 0$ isto é,$z = bi$.

■

Ex.: Sabendo que $z = a + bi$ e que $-\bar{z} = z$, determine a.

Se $-\bar{z} = z \Leftrightarrow z$ é imaginário puro, logo não possui parte real portanto $a = 0$.

Exercícios

Dado o número complexo $z = 3 + 2i$, realize as seguintes operações:

1) Calcule o conjugado de z.
2) Calcule o valor de z^2.
3) Determine o produto de z pelo seu conjugado.
4) Divida z pelo seu conjugado e represente na forma algébrica.
5) A soma de z com seu conjugado resulta em um real puro.

2.3. O módulo de um número complexo

Dado um complexo $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a\ e\ b \in \mathbb{R}$

Propriedades:

I. $|z| \in \mathbb{R}_+$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a\ e\ b \in \mathbb{R}$,

Note que $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$, portanto $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+$.

■

Exemplo: Sendo $z = 3 + 4i$, determine se o módulo de $z \in \mathbb{R}_+$

Solução:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \in \mathbb{R}_+$$

II. $\|z\| = |z|^2$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a\ e\ b \in \mathbb{R}$.

Note que$\|z\| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2, com\ (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}_+$ e $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2, com\ (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}_+$, por conseguinte $\|z\| = |z|^2$

■

Exemplo: Sendo $z = 4 + 3i\ e\ |z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ determine se o $\|z\| = |z|^2$

Solução:

$$\|z\| = \sqrt{\left(4^2 + 3^2\right)^2} = \left(\sqrt{4^2 + 3^2}\right)^2 = |z|^2$$

III. $\overline{|z|}$=$|z|$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que temos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, logo $\overline{|z|}$=|z|

■

Exemplo: Determine o módulo de z, sabendo que $\overline{|z|}$=7.

Solução:

Pela propriedade demonstrada anteriormente temos que $\overline{|z|}$=|z|, portanto $|z| = 7$.

IV. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

■

Exemplo: Sendo $|z| = 4$, determine o produto $z \cdot \bar{z}$.

Solução:

Pela propriedade acima foi provado que $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4^2 = 16$

V. $|zw| = |z||w|$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|w| = \sqrt{c^2 + d^2}$, portanto temos:

$$|zw| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) \cdot \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right) = |z||w|$$

■

Exemplo:

Sabendo que $|z_1| = 3$ e $|Z_2| = 4$, determine $|z_1 z_2|$.

Pela propriedade acima temos que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 3 \cdot 4 = 12$

VI. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, $w = c + di$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{(ac-bd)+(ab+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac-bd)}{c^2+d^2} + \frac{(ad+bc)}{c^2+d^2} i$, portanto teremos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{(ac - bd)}{c^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{(ad + bc)}{c^2 + d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}{(c^2 + d^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{(c^2 + d^2)}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{|z|}{|w|}$$

■

Exemplo:

Sejam $z_1\ e\ z_2$ números complexos, tais que $|z_1| = 4\ e\ z_2 = |2|$, determine o valor de $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Solução:

Pela propriedade anterior, temos que:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4}{2} = 2$$

VII. $|z + w| \leq |z| + |w|\ (desigualdade\ triangular)$

Demonstração:

Note que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é dado por:

$$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Agora, suponha que temos dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Observe que:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(c^2 + d^2)}$$

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leq (a^2 + b^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + (c^2 + d^2)$$

$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + 2cd + d^2$$

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$2acbd \leq a^2d^2 + b^2c^2$$

$$a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 \geq 0$$

$$(ad - bc)^2 \geq 0$$

Portanto, a desigualdade triangular é demonstrada.

■

Exemplo: Determine o valor mínimo da soma de $|z_1| + |z_2|$, sabendo que $|z_1 + z_2| = 7$.

Solução:

Pela desigualdade triangular temos que $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ daí temos:

$$|z_1| + |z_2| \geq 7$$

Logo o valor mínimo para a soma de $|z_1| + |z_2|$ é 7

Exercícios

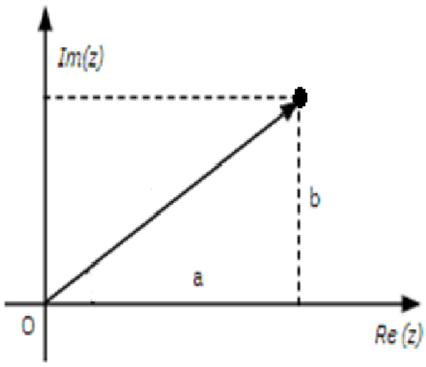
1) Dado o número complexo z = 3 + 4i, calcule o módulo de z.
2) Dado o número complexo z = -2 - i, calcule o módulo de z.
3) Dado o número complexo z = 2i, calcule o módulo de z.
4) Sabendo que $|z_1| = 3\ e\ |Z_2| = 4$, determine $|z_1 z_2|$.
5) Seja z um número complexo com módulo 4. Se |z + 3| = 2, determine o valor de z.
6) Seja z um número complexo tal que |z - 2| = |z + 2|. Determine o conjunto de valores possíveis para z.

2.4. Plano de Argand-Gauss e forma trigonométrica

Como cada complexo $z = a + bi$ está definido por 2 parâmetros (a e b) de forma única, podemos fazer uma associação direta entre números complexos e pontos no plano:

$$a + bi \to (a, b)$$

Assim, representaremos cada complexo $z = a + bi$ por um ponto no chamado plano de Argand-Gauss.



A forma trigonométrica

Como os números complexos são pares ordenados, cada número complexo $Z = (a, b) = a + bi$ é representado por um único ponto do plano cartesiano ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$) ; além disso, cada ponto do plano é a imagem de um único número complexo (par ordenado)

As partes **a** (real) e **b** (imaginária) são as coordenadas cartesianas do ponto $\boldsymbol{P}\,(a, b)$, denominado **afixo** ou **imagem geométrica** do número complexo $\boldsymbol{Z} = (a, b) = a + b\boldsymbol{i}$, e o plano assim considerado passa a ser chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand – Gauss**. Além do plano de Argand – Gauss e do afixo **P**, também merecem destaque:

• O eixo Ox, chamado **eixo real**, e indicado por Re (z)

• O eixo Oy, chamado **eixo imaginário**, e indicado por Im(z)

• A distância do afixo **P** à origem **O** (0, 0), chamada **módulo** ou **norma** do número complexo $\boldsymbol{Z = a + bi}$, e indicada por $|z|$, onde $|z| \in \mathbb{R}_+$

• O ângulo θ formado pelo segmento $\overline{\boldsymbol{OP}}$ e pelo eixo $\boldsymbol{Ox}$, medido no sentido anti-horário, a partir do semieixo positivo **x**, $\boldsymbol{0} \leq \theta < \boldsymbol{2}\pi$, chamado **argumento principal** do número complexo **Z**

Definição

O argumento de um número complexo z, $arg(z)$, é o ângulo que esse número forma com o eixo real positivo, medido no sentido anti-horário.

Dado um número complexo z = a + bi, seu argumento pode ser calculado a partir da relação trigonométrica:

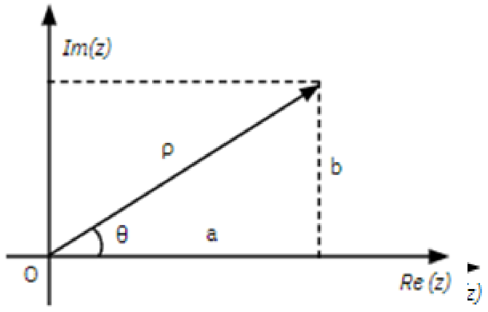
$$arg(z) = arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Definição

O módulo de um número complexo z, o qual chamaremos de ρ, é a distância de z até a origem do plano complexo. é dado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo de um número complexo é uma medida da sua magnitude ou tamanho, e pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do vetor que representa o número complexo no plano de Argand- Gauss.



Argumento (θ)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Módulo (ρ)

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho.\cos(\theta)$

$sen\ (\theta) = \dfrac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho.\mathrm{sen}(\theta)$

Daí, $z = a + bi = \rho cos\theta + i\rho sen\theta$, é natural definir $cis\theta = cos\theta + isen\theta$. Esta maneira de escrever é chamada de forma trigonométrica de um número complexo.

$$z = \rho.cis(\theta)$$

$Ex.$: Determine a forma trigonométrica do complexo $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \cos(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{sen}(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4}\ então:$$

$$z = 1 + i\ \text{é}\ representado\ na\ forma\ trigonom\acute{e}tica\ por\ z = \sqrt{2} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

O Conjugado na Forma trigonométrica

Dado $z = \rho \cdot cis\theta$, observe que seu conjugado é dado por $\bar{z} = \rho \cdot cis(-\theta)$.

Para provar a afirmação acima, basta lembrar:

$$cos(-\theta) = cos\ \theta\ e\ sen(-\theta) = -sen\ \theta$$

A Igualdade na Forma trigonométrica

Sendo z_1 = $\rho_1 \cdot cis\theta_1 \; e \; z_2 = \rho_2 .cis \; \theta_2 \; temos \; que:$

$$z \; = \; w \; \Leftrightarrow \; \rho_1 = \; \rho_2 \; e \; \theta_1 - \theta_2 = \; 2k\pi, k \; \in \; Z$$

Exercícios

1) Prove que $cis0 = 1 \; e \; cis\frac{\pi}{2} = i$
2) Prove que $cis\alpha \cdot cis\beta = ciz(\alpha + \beta)$
3) Prove que $cis(-\alpha) = \frac{1}{cis\alpha}$
4) Prove que $\frac{cis\alpha}{cis\beta} = cis(\alpha - \beta)$
5) Dado o número complexo $z \; = \; 2 \; cis \; \left(\frac{\pi}{6}\right)$, encontre todos os números complexos w que se encontram em $w^4 \; = \; z$.

2.5. Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Sejam z e w números complexos tais que $z_1 = \rho_1 cis\theta_1 \; e \; z_2 = \rho_2 cis\theta_2$

Multiplicação

Antes de efetuarmos a multiplicação de números complexos, convém relembrar as seguintes fórmulas trigonométricas.

- $sen\,(a + b) = sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a$
- $sen\,(a - b) = sen\,a \cdot cos\,b - sen\,b \cdot cos\,a$
- $cos\,(a + b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b$
- $cos\,(a - b) = cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b$

Observe agora que:

$(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2) = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - sen\,\theta_1 \cdot sen\,\theta_2) + (sen\,\theta_1 \cos\,\theta_2 + sen\,\theta_2 \cos\,\theta_1)i = cos\,(\theta_1 + \theta_2) + sen\,(\theta_1 + \theta_2)$

Daí, podemos calcular o produto dos números complexos tomando $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1) \; e \; z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$ temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1)\,\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\,cos\,(\theta_1 + \theta_2) + sen\,(\theta_1 + \theta_2)]$$
$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 . cis(\theta_1 + \theta_2)}$$

Divisão

Considere $z_1, \; z_2 \; e \; w$ números complexos não nulos, onde w é o quociente de $z_1 \; por \; z_2$, tais que θ_1, θ_2 e θ_w sejam seus argumentos e $\rho_1\rho_1$ e ρ_w seus módulos, respectivamente. Temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_2 \cdot w \Rightarrow z_1 = z_2 \cdot w$$

Pela multiplicação de números complexos, obtemos:

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_w \Longrightarrow \theta_1 - \theta_2 = \theta_w$$

$$\rho_1 = \rho_2 \cdot \rho_w \Longrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_w$$

Daí temos:

$$\cdot \frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\boldsymbol{\rho_1}}{\boldsymbol{\rho_2}} \cdot \boldsymbol{cis}\ (\boldsymbol{\theta_1} - \boldsymbol{\theta_2})$$

Potência (1ª Fórmula de De'Moivre)

Em geral, se $z = \rho cis(\theta)$ temos para $n \in \mathbb{Z}$:

Ao fazermos z^n com $n \in \mathbb{Z}_+$ ***e*** **aplicando** a propriedade da multiplicação teremos:

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z = \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdots \rho[\ cos\ (\theta\ + \theta + \theta \cdots + \theta) + \ isen\ (\theta\ + \theta + \theta \cdots + \theta)]$$
$$= \rho^n[\cos(n\theta) + \ isen\ (n\theta)]$$

Ao fazermos z^n com $n \in \mathbb{Z}_-$ ***e*** **aplicando** a propriedade de divisão temos:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + \ isen\ (-n\theta)]} \frac{[\cos(n\theta) + \ isen\ (n\theta)]}{[\cos(n\theta) + \ isen\ (n\theta)]} = \rho^n . cis(n\theta).$$

Logo $z^n = \rho^n . cis(n\theta), \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Exercícios

1) Dado os números complexos $z_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 3cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar
2) Dado os números complexos $z_1 = 4\ cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\ cis\left(\frac{2\pi}{6}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar.

3) Dado os números complexos $z_1 = 5\ cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 2\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, calcule o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ e represente-o na forma polar.
4) Dado os números complexos $z_1 = 3\ cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$e $z_2 = 4cis\ \left(\frac{-\pi}{3}\right)$, calcule o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ e represente-o na forma polar.
5) Dado os números complexos $z_1 = 2\ cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3cis\left(\frac{-\pi}{6}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar.

2.6. Radiciação - 2ª fórmula de De'Moivre

Considere o número complexo z, não nulo, dado na forma trigonométrica

$$z = \rho.cis(\theta)$$

Definimos como uma **raiz enésima de z,** um número complexo $w = \rho_w.cis(\theta_w)$ tal que:

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$$

Daí resulta:

$$\rho_w^n cis(n\theta_w) = w^n = z = \rho cis(\theta)$$

E, portanto:

$$\rho_w^n = \rho \Rightarrow \rho_w = \sqrt[n]{\rho}, pois\ \rho_w\ e\ \rho \in \mathbb{R}_+^*$$

$$n\theta_w = \theta + 2k\pi \Rightarrow \theta_w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, com\ k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$$

Assim:

$w_k = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), com\ k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$ logo, podemos ver que existem exatamente n raízes enésimas que são descritas abaixo:

- $Se\ k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta}{n}\right)$
- $Se\ k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$
- $Se\ k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right)$

$\vdots$

- $Se\ k = (n-1) \Rightarrow w_{(n-1)} = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$

Observe que $se\ k = n \Longrightarrow w_n = w_0\ , pois\ \frac{\theta+2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi \equiv \frac{\theta}{n}$, logo para $k = n, k = n + 1, k = n + 2$, e assim por diante, recairemos em raízes já obtidas.

Logo temos a formula de radiciação conhecida por 2ª formula de De'Moivre.

$$\boldsymbol{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), com\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}}$$

Exemplo: Determine a raiz terceira de $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo temos que $z = 1 + i$ na sua forma trigonométrica é representdo por $z = \sqrt{2}\,.cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Tomando $\boldsymbol{w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}.cis\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right), com\ k \in \{0, 1, 2\}}$

- $Se\ k = 0 \Longrightarrow w_0 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right)$
- $Se\ k = 1 \Longrightarrow w_1 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{9\pi}}{\boldsymbol{12}}\right)$
- $Se\ k = 2 \Longrightarrow w_2 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{17\pi}}{\boldsymbol{12}}\right)$

Logo temos como raízes os seguintes elementos do conjunto $S = \left\{\sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right), \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{9\pi}}{\boldsymbol{12}}\right), \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\boldsymbol{17\pi}}{\boldsymbol{12}}\right)\right\}$

Exercícios:

1) Dado o número complexo $z = 4cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$, encontre todas as raízes quadradas de z na forma polar

2) Dado o número complexo $z = 9cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$, encontre todas as raízes cúbicas de z na forma polar.
3) Dado o número complexo $z = 16cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, encontre todas as raízes quadradas de z na forma polar.
4) Dado o número complexo $z = 25cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, encontre todas as raízes cúbicas de z na forma polar.
5) Dado o número complexo $z = 64cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$, encontre todas as raízes quartas de z na forma polar.

2.7. As raízes enésimas da unidade.

As raízes da unidade no conjunto dos números complexos são os valores complexos que satisfazem a equação:

$$z^n = 1, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}_+^*$$

A solução para esta equação é dada por:

$$\boldsymbol{z_k = cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \textbf{ onde } \boldsymbol{k \in \mathbb{Z} \; e \; k = \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}}$$

Essas raízes podem ser representadas como os vértices de um polígono regular de n lados inscrito em um circulo de raio unitário no plano de Argand Gauss. Isso ocorre pois os argumentos das raízes formam uma progressão aritmética (P.A.) de razão $\frac{2\pi}{n}$ e primeiro elemento zero.

Exemplo: Determine o conjunto solução da equação abaixo.

$$z^5 = 1$$

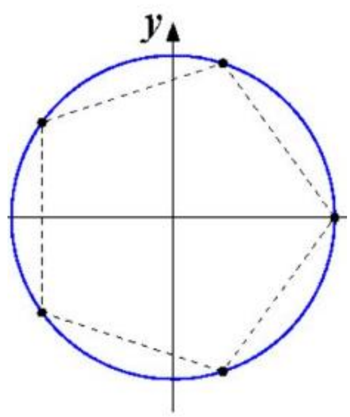
Solução:

Tomando $z^5 = 1 = cis = 0° \Longrightarrow \boldsymbol{cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}$ **onde** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z} \; e \; k = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$

- $Se\ k = 0 \Longrightarrow z_0 = 1$
- $Se\ k = 1 \Longrightarrow z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Representação Geométrica

- $Se\ k = 2 \Longrightarrow z_2 = cis\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
- $Se\ k = 3 \Longrightarrow z_3 = cis\left(\frac{6\pi}{5}\right)$
- $Se\ k = 4 \Longrightarrow z_4 = cis\left(\frac{8\pi}{5}\right)$



Exercícios:

1) Encontre todas as raízes 4-ésimas da unidade.
2) Determine todas as raízes 6-ésimas da unidade.
3) Calcule todas as raízes 8-ésimas da unidade.
4) Encontre todas as raízes 10-ésimas da unidade.
5) Determine todas as raízes 12-ésimas da unidade.

2.8. Fórmula de Euler

A fórmula de Euler para números complexos é:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i.sin(\theta) = cis\ (\theta)$$

onde **i** é a unidade imaginária, definida por $\boldsymbol{i^2 = -1}$, $\boldsymbol{\theta}$ é um número real e "$\boldsymbol{e}$" é a constante de Euler, aproximadamente igual a **2.71828**.

Essa fórmula relaciona a função exponencial com as funções trigonométricas seno e cosseno, permitindo que números complexos sejam escritos em sua forma polar, ou seja, como um número com um módulo e um argumemto.

Observe que na fórmula de Euler temos uma potência com expoente complexo, mas funções complexas fogem do curriculum base de matemática, por este motivo somente utilizaremos o resultado abaixo sem dar maiores detalhes.

Definição

$$e^{i\theta} = cis(\theta)$$

Veja que as propriedades dos *cis* são compatíveis com as da exponencial.

$$\mathrm{cis}(\alpha + \beta) = e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{cis}\ \alpha.\mathrm{cis}\beta$$

Exercícios:

1) Cálculo do valor de $e^{\frac{i\pi}{3}}$.
2) Determine o valor de $z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ na base de Euler.
3) Encontre o valor de $e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
4) Cálculo do valor de $\left[cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\ sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$na base de Euller.

5) Determine o valor de $e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$.

3. POLINÔMIOS COMPLEXOS EM UMA VARIÁVEL

3.1. Conceitos básicos

1.1 Definição:

Define-se um polinômio na variável x com coeficientes no conjunto dos números complexos, denotando por p(x), toda expressão algébrica da forma:

$p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \cdots + A_0$, isto é,

$p(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$, em que os coeficientes $A_0, A_1, A_3, \ldots, A_m$ são números complexos e os expoentes na variável x são inteiros não negativos. O grau do polinômio será dado pelo maior expoente na variável x em uma parcela não nula.

Exemplo$_1$: p_1: $(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Exemplo$_2$ p_2: $(x) = x^4 + 5x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2 + 3i$

Exemplo$_2$:p_3 : $(x) = 7$, chamamos de polinômio constante os polinômios da forma p

Observação$_1$: Chamamos de polinômio constante, os polinômios da forma $p(x) = k$, onde $k \in \mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos).

1.2 Definição:

O grau do polinômio será dado pelo maior expoente na variável x em uma parcela não nula. Denotamos o grau do polinômio pelo símbolo ∂p.

Nos exemplos anteriores temos:

$\partial p_1 = 3$

$\partial p_2 = 4$

$\partial p_3 = 0$

Observação$_2$: Por definição dizemos que o polinômio identicamente nulo, p(x) =0, não possui grau.

1.3 Propriedades do grau

Sejam os polinômios p(x) e q(x na variável x e com coeficientes complexos, tem-se:

I. grau[p(x) · q(x)] = grau[p(x)] + grau[q(x)]

II. grau[p(x) + q(x)] ≤ max{grau[p(x)], grau[q(x)]}

1.4 Valor numérico

O valor numérico de um polinômio em $x_0 \in \mathbb{C}$ é dado por $p(x_0)$, isto é, substituindo x por x_0 no polinômio

Exemplo1: Determine o valor de $p(x) = x^2 - 5x + 6$, para $x = 2.$

$$p(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$$

$$p(2) = 0$$

Exemplo2: Determine o valor de $p(x) = x^3 + 2$, para $x = i$

$$p(i) = i^3 + 2$$

$$p(i) = -i + 2$$

1.5 Definição

Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p(x), quando $p(a) = 0$

Exemplo1: O 1 é uma das raízes do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, pois $P(1) = 0$

Exemplo2: O $i, -i, 1$ e -1 são raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 1$

Exemplo3: O Polinômio $p(x) = 5i$, não possui raízes.

Observação3: Note que dependendo do polinômio pode não existir raízes

1.6 Definição

Dizemos que dois polinômios são idênticos se, e somente se, possuem o mesmo grau e os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Quando dois polinômios p(x) e q(x) são idênticos, escrevemos p(x)≡q(x)

Exemplo1: Descubra os valores de a, b e c tais que os polinômios abaixo são idênticos.

$$p(x) = ax^3 + 3x^2 - 2x + c \;\; e \; Q(x) = bx^2 - 2x - 5$$

Solução:

Primeiramente os polinômios devem possuir o mesmo grau, isto é, P(x) tem que ter grau 2. Logo, a= 0.

Agora, temos que igualar os coeficientes dos termos de mesmo grau, ou seja, p(x)≡q(x).

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow 3 = b, -2 = -2 \; e \; c = -5$$

Portanto $a = 0, b = 3 \; e \; c = -5$

1.7 Definição

Para somar ou subtrair dois polinômios, basta somar ou subtrair os termos de mesmo grau.

$\sum_{i=1}^{n} A_i X^i + \sum_{i=1}^{m} B_i X^i = \sum_{i=1}^{m} (A_i + B_i).X^i$, onde $m \geq n$ e $A_i = 0, \forall \; i > n$

Exemplo1: Sejam os polinômios $p(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ e $q(x) = 2x^2 + 5x - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) + q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (x^3 + 5x^2 + 2x + 1\,) + (2x^2 + 5x - 2)$$
$$P(x) + Q(x) = (1 + 0)x^3 + (5 + 2)x^2 + (2 + 5).x + (1 - 2)$$
$$P(x) + Q(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 1$$

Exemplo1: Sejam os polinômios $p(x) = x^4 + 3ix^3 + 5x^2 + 2x + 4i$ e $q(x) = x^2 + 2ix - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) + q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (x^4 + 3ix^3 + 5x^2 + 2x + 4i\,) + (x^2 + 2ix - 2)$$
$$P(x) + Q(x) = (1 + 0)x^4 + (3i + 0)x^3 + (5 + 1)x^2 + (2 + 2i).x + (4i - 2)$$
$$P(x) + Q(x) = x^4 + 3ix^3 + 6x^2 + (2 + 2i)x + 4i - 2$$

1.8 Definição

A multiplicação de polinômios é efetuada a partir da propriedade distributiva, ou seja, deve-se multiplicar cada termo de um polinômio com cada termo do outro e depois reduzir aos termos de mesmo grau.

Exemplo1: Sejam os polinômios $p(x) = x + 1$ e $q(x) = 2x - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) \cdot q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x + 1) \cdot (2x - 2)$$
$$p(x) \cdot q(x) = 2x^2 - 2$$

Exemplo2: Sejam os polinômios $p(x) = x^2 - 2x + 3$ e $q(x) =$, determine o polinômio gerado por $p(x) \cdot q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x + 1 + i)$$

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - x^2 + x^2 - 2x + 3 + ix^2 - 2ix + 3i$$

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - (2 - i)x^2 + (1 - 2i)x + 3 + 3i$$

Divisão de polinômios

Método da divisão

Para dividirmos dois polinômios, usamos o que chamamos de método das chaves. Este método se parece com o método para divisão de números inteiros, aquele a que você já está acostumado, no qual buscamos descobrir o quociente e o resto da divisão de um dividendo por um divisor.

Ex.: Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ por D(x)= x+6

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$	$x + 6$
$-x^3 \quad - 6x^2$	$x^2 - 8x + 51$ (quociente)
$- 8x^2 + 3x - 6$	
$+ 8x^2 + 48x$	
$+51x - 6$	
$-51x - 306$	
$- 312$ (resto)	

Logo o resto é – 312.

Exercícios:

1) Considere os polinômios $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 3 \; e \; Q(x) = x^2 - 4x + 1$. Calcule a soma $P(x) + Q(x)$.
2) Dado o polinômio $R(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$, determine o valor de $R(2)$.
3) Seja o polinômio $S(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 7$. Calcule o produto $S(x) \cdot 2x$.
4) Considere os polinômios $T(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ e $U(x) = 2x^2 + x - 5$ Calcule o quociente da divisão $T(x) \div U(x)$
5) Dado o polinômio $V(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 2$, encontre o resto da divisão de $V(x) \; por \; (x - 1)$.

3.2. Teorema do resto de D'Alembert

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $ax + b$, com a $a, b \epsilon \mathbb{C}\ e\ a \neq 0$ é igual a $p\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demonstração:

Como o grau do resto é menor do que o grau do divisor, tem-se que na divisão de $p(x)$ pôr $ax + b$, o resto, R, deve ter grau zero (logo este será uma constante) ou ser o polinômio identicamente nulo. Se o quociente é $q(x)$, temos que a divisão pode ser representada pela seguinte equação:

$$p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + R$$

Tomando $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = [a(-\frac{b}{a}) + b] \cdot q(x) + R$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q(x) + R$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

■

Corolário: Se o número complexo a é raiz de um polinômio p(x), então $p(x)$ é divisível por $(x - c)$.

Tomando α como raiz de $p(x)$ teremos:

$$p(\alpha) = 0$$

$$p(x) = (x - \alpha). q(x) + R$$

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha). q(\alpha) + R$$

$$0 = p(\alpha) = 0. q(\alpha) + R$$

Logo temos $R = 0$.

■

Algoritmo de Briot-Ruffini

Considere-se um polinômio p(x) de grau m, isto é, $p(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$ e se fizermos a divisão por $x - a$, então $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + R$ em que $q(x) = \sum_{k=0}^{m-1} B_k x^k$; da identidade acima obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} B_{m-1} = A_{m-1} + a \cdot A_m \\ B_{m-2} = A_{m-2} + a.B_{m-1} \\ \dots\dots\dots \\ B_1 = A_1 + a \cdot B_2 \\ R = A_0 + a \cdot B_1 \end{cases}$$

Essas igualdades permitem efetuar a divisão de $P(x)$ por $x-a$ por meio do dispositivo denominado algoritmo de Briot-Ruffini, ou seja:

	A_m	A_{m-1}	A_{m-2}	$\cdots$	A_1	A_0
a	A_m	B_{m-1}	B_{m-2}	$\cdots$	B_1	R

Exemplo1: Determine o resto e o quociente da divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ por $d(x) = x - 2$.

Solução:

	2	–5	3	–4
2	2	–1	1	–2

$q(x) = 2x^2 - x + 1$ → quociente

$r(x) = -2$→ Resto

Exercícios

1) Determine se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ tem raiz igual a 2 utilizando o teorema de D'Alembert.
2) Calcule o valor do resto da divisão do polinômio $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2\, por\ (x + 1)$.
3) Usando o método de Briot-Ruffini, encontre o quociente e o resto da divisão do polinômio $R(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1\, por\ (x - 2)$.
4) Verifique se o polinômio $S(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ possui raiz igual a 3 usando o teorema de D'Alembert.
5) Encontre o valor do resto da divisão do polinômio $T(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x^2 + x - 2\, por\ (x + 2)$ utilizando o método de Briot-Ruffini.

3.3. O teorema fundamental da álgebra.

Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio com coeficientes complexos de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Do Teorema Fundamental da Álgebra, se p(x) é um polinômio de grau $n \geq 1$ tal que a_1 é uma raiz, pela fatoração vista no corolário anterior temos:

$$p(x) = (x - a_1)p_1(x)$$

e esse polinômio $p_1(x)$ possui grau $n - 1$.

Repetindo o mesmo processo, mas agora para $p_1(x)$, se este ainda possuir grau maior ou igual a 1, $p_1(x)$ teria, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, teria a_2 como um raiz, sendo possível escrever $p_1(x)$ da seguinte forma:

$$p_1(x) = (x - a_2)p_2(x)$$

logo teremos:

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)p_2(x)$$

Observe que os polinômios $p_1(x), p_2(x)$ têm graus decrescentes. Prosseguindo desta forma, construiremos polinômios $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$. Esse processo irá ser interrompido quando o próximo polinômio construído$p_{n+1}(x)$ for um polinômio constante, isto é, $p_{n+1}(x) = k$ com $k \in \mathbb{C}$,ou seja, o grau de $p_{n+1}(x)$ será nulo. Portanto, podemos escrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Veja-se que $a_1, a_2, \cdots a_n$ são as raízes e que A é o coeficiente líder de $p(x)$, ou seja, o coeficiente do termo de maior grau do polinômio. Esta é considerada a forma fatorada de $p(x)$

A seguir vamos enunciar uma proposição que associa o grau de um polinômio com seu número de raízes, sendo elas distintas ou não.

Proposição 1: Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes complexos. Os seguintes resultados ocorrem:

I. Se $p(x)$ é um polinômio de grau ≥ 1, então o número de raízes de $p(x)$ é igual ao grau de $p(x)$.

II. se $p(x) = q(x)$ para uma quantidade de valores de x maiores do que os graus de $p(x)$ e $q(x)$, então $p(x)$ e $q(x)$ são idênticos, isto é, $p(x) = q(x)$.

Demonstrações: (I) decorre imediatamente da forma fatorada.

(II) Basta considerar o polinômio $h(x) = p(x) - q(x)$ tem grau $m = max\{\partial\mathrm{p(x)}, \partial\mathrm{q(x)}\}$, mas, por hipótese, possui um número de raízes que m. Contradizendo **(I)**, consequentemente $h(x)$ tem grau 0 ou é o polinômio identicamente nulo, mas a única possibilidade é $h(x) = 0$, isto é, $p(x) = q(x)$.

■

Exercícios

1) Determine o número de raízes complexas da equação do polinomial $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.
2) Quantas raízes reais têm a equação polinomial $2x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$?
3) Encontre todas as raízes complexas da equação polinomial $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.
4) Encontre todas as raízes complexas equação polinomial $4x^2 - 6x + 3 = 0$?
5) Encontre todas as raízes complexas da equação polinomial $x^6 - 2x^4 + x^2 - 4 = 0$.

3.4. Teorema das raízes racionais, conjugadas e relação de Girard.

Teorema das raízes conjugadas

Seja p(x) um polinômio de coeficientes reais que possui uma raiz complexa da forma $a + bi$ (a e b reais), então também admite a raiz complexa conjugada $a - bi$.

Demonstração: Basta ver que $p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$ para polinômios com coeficientes reais.

■

Teorema das raízes racionais

Seja o polinômio $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + A_1\ x + A_0$, de coeficientes inteiros. Se esse polinômio possui uma raiz racional, da forma $\frac{p}{q}$ (p e q inteiros e com $q \neq 0$ e na forma irredutível, isto é, $mdc(p, q) = 1$), então:

I. p é divisor de A_0

II. q é divisor de A_n

Demonstração:

Suponha que temos um polinômio de grau n com coeficientes inteiros, representado por:

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + A_1\ x + A_0$$

Onde A_n, A_{n-1}, ..., A_1 e A_0 são coeficientes inteiros e $A_n \neq 0$.

Suponha que existe uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (onde p e q são inteiros relativamente primos) para esse polinômio. Isso significa que:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = A_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 \left(\frac{p}{q}\right) + A_0 = 0$$

Multiplicando toda a equação por q^n, obtemos:

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + A_1 p\, q^{n-1} + A_0\, q^n = 0$$

Agora, observamos que todos os termos da equação acima são múltiplos de q, exceto o primeiro termo ($A_n\, p^n$). Portanto, q deve ser um divisor de $A_n\, p^n$.

Além disso, sabemos que $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional, então $\frac{p}{q}$ também é uma solução para a equação:

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

Substituindo $x = \frac{p}{q}$ nessa equação, obtemos:

$$A_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 * \left(\frac{p}{q}\right) + A_0 = 0$$

Multiplicando toda a equação por q^n, obtemos:

$$A_n p^n + A_{n-1}\, p^{n-1} q + \ldots + A_1 p\, q^{n-1} + A_0 q^n = 0$$

Novamente, notamos que todos os termos da equação acima são múltiplos de p, exceto o último termo $A_0\, q^n$. Portanto, p deve ser um divisor de $A_0\, q^n$.

Dessa forma, concluímos que se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional de $P(x)$, então p deve ser um divisor do termo independente A_0 e q deve ser um divisor do coeficiente principal A_n

Observação: Se A_n= 1, então qualquer raiz racional da equação é inteira (testam-se os divisores de A_n)

Relações de Girard

Considere-se um polinômio, de grau n maior ou igual a 1, $p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$, e suas n raízes $x_1, x_2, \cdots, x_n$distintas ou não.

- Soma

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

- Soma dos produtos 2 a 2

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$$

- Soma dos produtos 3 a 3

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

- Soma dos produtos n a n, ou seja, produto

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

As relações de Girard afirmam que: $\sigma_1 = (-1)^1 \frac{A_{n-1}}{A_n}$, $\sigma_2 = (-1)^2 \frac{A_{n-2}}{A_n}$, $\cdots$, $\sigma_n = (-1)^n \frac{A_0}{A_n}$

Demonstração:

Dadas as raízes de $p(x)$, tem-se sua forma fatorada:

$$p(x) = A_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Observando a forma fatorada de $p(x)$, notamos que o coeficiente de x^k será dado por$(-1)^{n-k}$. $\sigma_{n-k}A_n$. Logo todo o coeficiente de $p(x), A_i$ com $i = 0,1 \dots, n-1$ será dado por:

$$A_i = (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}. A_n$$

Consequentemente temos:

$$\sigma_{n-i} = (-1)^{n-i} \frac{A_i}{A_n} \text{ , com } i = 0,1, \dots, n-1$$

■

2i, -2i, 1

Exemplo: Determine a soma, a soma do produto 2 a 2 e o produto das três raízes do polinômio abaixo:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$$

Exercícios

1) Considere o polinômio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$. Determine se as raízes são conjugadas, racionais ou ambas.
2) Encontre todas as raízes do polinômio $Q(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. Classifique-as como conjugadas, racionais ou nenhuma das duas.
3) Determine as raízes racionais do polinômio $R(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ usando o Teorema de Gauss.
4) Calcule o valor de k para que o polinômio $S(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + k$ tenha uma raiz racional.
5) Considere o polinômio $T(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, onde a e b são números reais. Usando uma relação de Girard, encontre a soma e o produto das raízes do polinômio em termos de a e b.

3.5. Polinômios recíprocos e auto recíprocos.

Polinômios recíprocos

Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes complexos de grau n, com $n \geq 1$. Chamamos o recíproco do polinômio $p(x)$, como sendo o polinômio $p^*(x)$ da seguinte forma:

$$p^*(x) = x^n.p\left(\frac{1}{x}\right)$$

Um polinômio $p(x)$ de grau n, com $n \geq 1$ é **auto recíproco** quando $p(x) = p^*(x)$ e por consequência disso, se a é raiz do polinômio auto reciproco, $\frac{1}{a}$ também será.

Classificação dos polinômios auto recíprocos

Polinômios auto recíprocos de Primeira Espécie

Nesse tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são iguais, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Exemplo: $P(x) = 12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12$

Polinômios auto recíprocos de Segunda Espécie

Nesse tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são simétricos, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Exemplo: $p(x) = -2x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 5x + 2$

Propriedades de polinômios auto recíprocos

I. Polinômio auto recíproco de primeira espécie
   - Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau ímpar o –1 será raiz;
   - Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau par, nada se pode afirmar sobre suas raízes;

II. Polinômio auto recíproco de segunda espécie
   - Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau ímpar o 1 é raiz;

- Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau par o –1 e o 1 são raízes.

Exemplo: Resolva a equação auto recíproca $72x^4 - 6x^3 - 181x^2 - 6x + 72 = 0$

Solução: Essa é uma equação auto recíproca de primeira espécie (os coeficientes equidistantes do termo médio são iguais). A ideia para resolver esse tipo de equação é primeiro verificar por meio das propriedades se 1 ou –1 são raízes, para simplificar a equação. Nesse caso, não há como fazer uso dessas propriedades. Feita essa etapa, a ideia é dividir a equação dada por x^2, obtendo $72\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 181 = 0$. Agora fazendo $x + \frac{1}{x} = t$ tem se que $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, assim podemos reescrever a equação da seguinte forma $72t^2 - 6t - 325 = 0$, cuja as raízes são $\frac{25}{12}$ e $\frac{13}{16}$ dessa forma os possíveis valores para x são $-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\ e\ \frac{2}{3}$

Exercícios:

1) Qual das seguintes opções representa um polinômio auto recíproco de grau 2? a) $3x^2 + 2x + 1$

   b) $x^2 - 5x + 2$

   c) $2x^2 - 3x + 4$

   d) $x^2 + x + 1$

2) Determine o polinômio auto recíproco de grau 3 com coordenador do termo de grau maior igual a 1.

   a) $x^3 + x^2 + x + 1$

   b) $x^3 + x^2 + 2x + 1$

   c) $x^3 + 2x^2 + x + 1$

   d) $x^3 - x^2 + x + 1$

3) Qual das seguintes opções representa um polinômio auto recíproco de grau 4 com inteiros?

   a) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

   b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

   c) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

4) Determine um polinômio auto recíproco de grau 2 cujos inscritos sejam números reais.

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - x + 1$

c) $x^2 + x - 1$

d) $x^2 + 3x + 2$

5) Qual das seguintes opções representa um polinômio autor recíproco de grau 3 com raízes puramente imaginárias?

a) $x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

c) $x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

d) $x^3 + 2x^2 - x - 1$

3.6. A derivada de um polinômio.

A derivada de uma função polinomial é uma outra função que fornece a taxa de variação instantânea da função original em cada ponto.

A derivada de um polinômio e definida da seguinte forma:

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n, então a sua derivada $p'(x)$ como:

$$p'(x) = n\, a_n x^{\{n-1\}} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ \ldots\ + 2\, a_2 x + a_1$$

Em outras palavras, a derivada do polinômio é um novo polinômio cujos coeficientes são obtidos multiplicando cada termo do polinômio original pelo seu respectivo expoente, e em seguida reduzindo uma unidade do expoente k.

A derivada é muito importante em muitas áreas da matemática e da ciência, incluindo cálculo, análise matemática, física e engenharia. É uma ferramenta essencial para entender e modelar o comportamento de muitos fenômenos naturais e artificiais que variam ao longo do tempo ou do espaço.

Raízes múltiplas

Um número r é dito raiz de multiplicidade m de um polinômio $p(x)$, se existir um polinômio $q(x)$tal que $p(x) = (x - r)^m q(x)$, em que r não é raiz de $q(x)$.

Se r não é raiz de $p(x)$, diz-se que r tem multiplicidade 0 em relação a $p(x)$. Além disso, raízes de multiplicidade 1, 2 e 3 são chamadas de raízes simples, duplas e triplas, respectivamente.

Exemplo:

Teorema (Teste de Multiplicidade de raiz usando derivada)

Um número $r \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade m de um polinômio $p(x)$, se e somente se, $p(r) = p'(r) = p''(r) = \ldots = p^{(m-1)}(r) = 0$, em que p' denota a primeira derivada do polinômio, p'' denota a segunda derivada (isto é, a derivada de p') Em geral, $p^{(k)}$ denota a k-ésima derivada do polinômio p(isto é, a derivada de $p^{(k-1)}$).

Exemplo:

Exercícios

1) Considere o polinômio $P(x) = (x - 2)^4(x + 1)^2$. Determine a multiplicidade da raiz $x = 2$.
2) Considere o polinômio $P(x) = (x - 1)^3(x + 3)^5$, qual é a multiplicidade da raiz $x = -3$?
3) Determine a multiplicidade da raiz $x = 0$ para a função $h(x) = x^6(x - 1)^2(x + 2)^3$.
4) Considere a função polinomial $P(x) = x^7 + 11x^5 - 3x^6 - 25x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 48x - 16$. Qual é a multiplicidade da raiz x =1?
5) Encontre todas as raízes do polinômio P(x) abaixo e suas respectivas multiplicidades. $P(x) = x^7 + 11x^5 - 3x^6 - 25x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 48x - 16$

3.7 Transformadas aditiva, multiplicativa, simétrica e recíproca.

É possível transformar uma equação polinomial $p(x) = 0$ (equação primitiva) em uma outra equação polinomial $q(y) = 0$ (equação transformada) de modo que as raízes de $q(y)$ estejam relacionadas com as raízes de p(x) por meio da função $y = \varphi(x)$ (função transformatriz).

A seguir vamos definir algumas funções transformatrizes que são utilizadas com grande frequência.

Transformada aditiva

As raízes da nova equação são obtidas somando k unidades às raízes de uma equação original. Se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = p(x-k)$possui como raízes de $p(x)$ aumentadas de k unidades.

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.

Solução: A ideia é trocar x por $x-2$.

$$q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4$$

Seja $q(x) \equiv p(x-2)$. Portanto, trocando $x \to x - 2$, tem-se $q(x+2) \equiv p(x)$. Daí, observa-se que, se a é raiz de P, então a+ 2 é raiz de Q.

Portanto, o polinômio procurado é:

$$q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4$$

Transformada multiplicativa

As raízes da nova equação são obtidas multiplicando por k unidades as raízes de uma equação original. Se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = p\left(\frac{x}{k}\right)$ possui como raízes as raízes de $p(x)$ multiplicadas por k unidades

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os triplos das raízes da equação dada.

Solução: $\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{3}\right) - 8 = 0 \leftrightarrow x^3 + 15x^2 + 36x - 216 = 0$

Observação: Quando $k = -1$ chamamos a transformada multiplicativa de transformada simétrica

Transformada recíproca

As raízes da nova equação são os inversos das raízes da equação original Se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$, possui como raízes o inverso das raízes de $p(x)$.

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os inversos das raízes da equação dada.

Solução: Deve-se encontrar $x^3\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 8\right) = 0 \Leftrightarrow -8x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

Exercícios:

1) Considerando a equação polinomial $x^3 + 4x^2 + 5x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.
2) Considerando a equação polinomial $x^3 + 10x^2 + 8x - 16 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.
3) Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 3x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os triplos das raízes da equação dada.
4) Considerando a equação polinomial $x^3 + 6x^2 + x - 16 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os quádruplos das raízes da equação dada.
5) Considerando a equação polinomial $x^3 + 10x^2 + 8x - 16 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os inversos das raízes da equação dada.

3.8. Fórmula de Taylor

Desenvolvimento em potências $(x - a)$.

Utilização do algoritmo de Briot-Ruffini Considere-se o polinômio, de grau $n, p(x)$ Dividindo esse polinômio por $x - a$, encontram-se um quociente $q_1(x)$ de grau $n - 1$ e um resto R_0. Dividindo $q_1(x)$ por $x - a$, encontramos um quociente do grau $n - 2$ e um Resto R_1, e assim sucessivamente. Tem-se:

$$p(x) = (x - a)q_1(x) + R_0$$
$$q_1(x) = (x - a)q_2(x) + R_1$$
$$q_2(x) = (x - a)q_3(x) + R_2$$
$$\dots$$
$$q_{n-1}(x) = (x - a)q_n(x) + R_{n-1}$$
$$q_n(x) = (x - a)q_2.0 + R_n$$
$$(q_n(x)\ possui\ grau\ zero)$$

Multiplicando-se a segunda igualdade por $x - a$, a terceira por $(x - a)^2$, assim por diante e somando membro a membro, o resultado é: $p(x) = R_0 + R_1(x - a) + R_2(x - a)^2 + \dots + R_n(x - a)^n$, fórmula que permite desenvolver $p(x)$ em potências de $x - a$.

Exemplo: Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$

Solução: Aplicando o algoritmo teremos:

	1	5	1	–2	1
2	7	15	28	57	
2	9	33	94		
2	11	55			
2	13				
2					

Logo temos $p(x) = 57 + 94(x - 2) + 55(x - 2)^2 + 13(x - 2)^3 + (x - 2)^4$

Utilização da fórmula de Taylor

Se na fórmula do item anterior: $p(x) = R_0 + R_1(x - a) + R_2(x - a)^2 + \dots + R_n(x - a)^n$ assumindo $x = a$, encontra-se $P(a) = R_0$; ao se derivar, obtém-se:

$$p'(x) = R_1 + 2R_2(x - a) + 3R_3(x - a)^2 + \dots + nR_n(x - a)^n$$

Assumindo $x = a$, será encontrado $P'(a) = R_1$; derivando novamente:

$p''(x) = 2R_2 + 2 \cdot 3R_3(x-a) + 3 \cdot 4R_4(x-a)^2 \ \dots + (n-1)nR_n(x-a)^{n-2}$

Assumindo $x = a$, $P''(a) = 2 \cdot R_2$, analogamente teremos:

$P'''(a) = 2 \cdot 3 \cdot R3, \dots , P^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot R_n$, ou seja, $R_0 = P(a), R_1 = P'(a)$,

$R_2 = \frac{P''(a)}{2!}$, $R_3 = \frac{P^3(a)}{3!}, \cdots$, $R_n = \frac{P^n(a)}{n!}$, logo podemos reescrever $p(x)$

$p(x) = p(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$ que é a fórmula de Taylor para polinômios.

Exemplo: Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$

$$p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1 \rightarrow p(2) = 57$$
$$p'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 2x - 2 \rightarrow p'(2) = 94$$
$$p''(x) = 12x^2 + 30x + 2 \rightarrow p''(2) = 110$$
$$p'''(x) = 24x + 30 \rightarrow p'''(2) = 78$$
$$p^{(4)}(x) = 24 \rightarrow p^{(4)}(2) = 24$$

Logo, $p(x) = p(x) = 57 + 94(x-2) + 55(x-2)^2 + 13(x-2)^3 + (x-2)^4$

Exercícios:

1) Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$
2) Desenvolver $p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 3$
3) Desenvolver $p(x) = x^5 + 4x^2 - 2x + 1$ em potências de $x + 5$
4) Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x + 2$
5) Desenvolver $p(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 1$

3.9. Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais.

Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais

Frações parciais

Dá-se o nome de frações parciais a frações do tipo $\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, em que $A, B, a, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e $x^2 + px + q$ é um trinômio irredutível ($\Delta < 0$)

Função racional

É toda função f tal que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em que p e q são polinômios e o denominador não é identicamente nulo.

Teorema

Toda função racional com grau do numerador menor do que o grau do denominador pode ser decomposta de maneira única numa soma de frações parciais. Se o grau do numerador for maior do que o grau do denominador, dividem-se os polinômios e, assim, obtêm-se um polinômio mais uma nova função racional que recai no caso anterior.

Método para decomposição de uma fração racional em uma soma de frações parciais

Deve-se fatorar ao máximo o denominador no conjunto dos números reais e, então, observar as seguintes regras:

I. A cada fator simples $(x - a)$, no denominador corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{A}{x-a}$.

II. A cada fator simples $(x - a)^n$, no denominador corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \cdots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$

III. a cada fator irredutível simples no denominador do tipo $x^2 + px + q$ corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

IV. a cada fator irredutível repetido do tipo $(x^2 + px + q)^n$, no denominador correspondem n frações parciais do tipo $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}, \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}, \cdots, \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$

Exercícios:

1) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{2x+5}{x^2-3x+2}$

2) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

3) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{x^3-2x+1}{x^4-3x^2+2}$

4) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{5x^2-6x+7}{x^3+x^2-2x}$

5) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{x^4+4x^3-3x^2-10x+8}{x^3-x^2-4x+4}$

CONVERSA FINAL COM O LEITOR

Ao chegarmos ao final deste trabalho, tenho a esperança sincera de que ele seja de grande contribuição para você, estudante que deseja se preparar para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e também para aqueles que têm o objetivo de prestar os vestibulares das academias militares renomadas, como o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), o Instituto Militar de Engenharia (IME) e a Escola Naval (EN).

Durante a elaboração deste material, nosso principal objetivo foi fornecer a você um recurso completo e abrangente, que o auxilie de forma efetiva no processo de preparação para essas importantes provas. Buscamos abordar os conteúdos de forma clara e detalhada, com a intenção de garantir que você adquira um conhecimento sólido e aprofundado nas áreas específicas exigidas nos exames. É importante destacar que esse material será utilizado tanto nas escolas onde atuo como professor, quanto nos cursos preparatórios aos quais estou vinculado. Acreditamos que o feedback valioso dos alunos e colegas professores será fundamental para atualizar e aperfeiçoar continuamente o conteúdo, tornando-o ainda mais relevante e eficaz.

Acreditamos firmemente que a preparação para o Enem e para os vestibulares militares requer uma abordagem diferenciada, que vá além dos conteúdos apresentados no ensino médio convencional. Por isso, procuramos oferecer a você um material completo, que engloba os assuntos exigidos nos exames de forma aprofundada e com exercícios de níveis de dificuldade progressiva, preparando-o para enfrentar com confiança os desafios acadêmicos.

No futuro, nossa intenção é continuar interagindo com você e outros alunos, identificando suas necessidades e adaptando o material de acordo com suas demandas. Queremos garantir que o conteúdo sempre esteja alinhado com suas expectativas e necessidades, auxiliando-o de forma personalizada em sua jornada educacional.

Por fim, acreditamos que este trabalho poderá fazer a diferença em sua preparação, fornecendo-lhe as ferramentas necessárias para alcançar o sucesso nos exames e construir uma base sólida para o ensino superior. É uma grande satisfação para nós poder contribuir para a sua jornada educacional, ajudando-o a atingir seus objetivos e conquistar um futuro promissor.

Desejamos a você muito sucesso em seus estudos e que alcance todos os seus sonhos e metas acadêmicas. Lembre-se sempre que estamos aqui para apoiá-lo em cada passo do caminho.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1974.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**: ciências da natureza e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

[3] BRITO, Guilmer, ARAUJO, Raphael, SILVA, Jacqueline. **Guia de Produção de Material Didático.** Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/206114. Acesso em: julho de 2023.

[4] COSTA, Celso. **Tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[5] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

[6] GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Makron Books, 1997.

[7] Hamilton, W. R. (1853). **Lectures on quaternions**. Dublin: Hodges and Smith.

[8] IMÁTICA. **A matemática Interativa na Internet**. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/magna.html. Acesso em: julho de 2023.

[9] LIMA, Elon Lages, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[10] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[11] LIMA, Elon Lages. **Revista Matemática Universitária**. nº 5. Rio de Janeiro: SBM, junho de 1987.

[12] NETO, Aref A.; SAMPAIO, José L. P.; LAPA, Nilton; CAVALLANTTE, Sidney L. **Noções de Matemática, Volume 7**: Números Complexos e Polinômios. 1. ed. – Fortaleza: Editora Vestseller, 2011.

[13] NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais.** Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Editora S.B.M., 2012. (Coleção Iniciação Científica).

[14] OLEINIKOV, V. A. Irredutibility and Irrationality. In: Serge Tabachnikov (ed.). **Kvant selecta: Algebra and analysis, II**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c1999. (Mathematical Word, v. 15)

[15] OLIVERO, Mário. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[16] PRASOLOV, Victor V. **Polynomials**. Translated from the Russian by Dimitry Leites. 2nd ed. New York: Springer, 2001. Título original: Mnogochleny.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Seropédica-RJ, 29 de agosto de 2023.

PEDRO HENRIQUE SOARES RODRIGUES DA SILVA

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/08/2023

ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca)

ANDREA LUIZA GONÇALVES MARTINHO Drª UFRRJ (membro interno-UFRRJ)

FÁBIO FERREIRA DE ARAÚJO Drº IFRJ (externo à Instituição)

Emitido em 29/08/2023

ATA Nº ata/2023 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 3925)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 16:05)
ANDREA LUIZA GONCALVES MARTINHO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###245#5

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 16:00)
ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PROFMAT (12.28.01.00.00.00.65)
Matrícula: ###180#6

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 18:16)
FABIO FERREIRA DE ARAUJO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.127-##

Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: **3925**, ano: **2023**, tipo: **ATA**, data de emissão: **25/09/2023** e o código de verificação: **5a882ca78c**