Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

CLÁUDIO LIMA DA SILVA

Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais

Parauapebas – PA
2023

CLÁUDIO LIMA DA SILVA

Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Parauapebas - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Silva, Cláudio Lima da

Ensino de trigonometria no triângulo por atividades experimentas /Cláudio Lima da Silva; Orientadora Ana Kely Martins da Silva; coorientador Pedro Franco de Sá.- Parauapebas-PA, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. – Parauapebas-PA, 2023.

1.Trigonometria-Estudo e ensino. 2. Engenharia didática. 3. Ensino por atividades experimentais. I. Silva, Ana Kely Martins da (orient.). II. Sá, Pedro Franco de. III. Título.

CDD 23º ed. 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

CLÁUDIO LIMA DA SILVA

Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da aprovação: 31/10/2023

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
ANA KELY MARTINS DA SILVA
Data: 01/11/2023 08:19:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

________. Orientadora

Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Doutora em Educação – Pontifícia Universidade Católica/PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
PEDRO FRANCO DE SA
Data: 06/11/2023 11:24:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

______. Examinador Interno

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte /UFRN
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
NARCISO DAS NEVES SOARES
Data: 03/11/2023 20:02:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____. Examinador Externo

Prof. Dr. Narciso das Neves Soares
Doutor em Educação – Universidade Federal da Bahia / UFBA
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará

Parauapebas - PA
2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a conclusão desta dissertação. Em primeiro lugar, agradeço a Deus por guiar meus passos e me proporcionar força e inspiração ao longo desta jornada.

À minha amada família, meu eterno reconhecimento. Aos meus pais, pelo amor incondicional, apoio constante e pelos valores que me transmitiram. À minha esposa, cujo apoio inabalável e compreensão foram fundamentais em cada etapa desta jornada. E à minha filha, cuja determinação e resiliência diante dos desafios do autismo têm sido uma inspiração constante.

Aos dedicados professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM/UEPA), meu profundo agradecimento. Suas orientações, conhecimento e paixão pelo ensino enriqueceram minha jornada acadêmica e pessoal.

À minha orientadora, Professora Dra. Ana Kely Martins da Silva, agradeço por sua orientação cuidadosa, *insights* valiosos e apoio incondicional. Sua orientação foi fundamental para moldar esta pesquisa e para meu crescimento como estudante e pesquisador.

Ao meu coorientador, Professor Dr. Pedro Franco de Sá, agradeço por sua contribuição significativa, pelos debates enriquecedores e pelo compromisso em expandir meu horizonte de conhecimento.

À Prefeitura Municipal de Parauapebas que tornou possível a realização deste curso de mestrado, meu sincero reconhecimento. Seu investimento na educação e capacitação tem um impacto duradouro.

Aos colegas de turma do mestrado, pelo compartilhamento de experiências, pela colaboração e pelo apoio mútuo, minha gratidão. Nossas trocas enriqueceram meu aprendizado.

E finalmente, a todos que contribuíram de alguma forma para a minha formação, seja com palavras de incentivo, apoio logístico ou simplesmente por acreditarem em mim, meu profundo agradecimento. Esta conquista é resultado de uma rede de apoio e amor que me rodeia.

Que todos saibam que suas contribuições foram essenciais para a realização deste sonho e que meu coração se enche de gratidão ao olhar para trás nesta jornada. Muito obrigado a todos!

Dedico este trabalho com todo o meu carinho e gratidão à minha amada esposa Valdene e à minha filha Eloíse.

A vocês, que enchem minha vida de amor, força e inspiração, dedico cada palavra escrita e cada conquista alcançada.

Suas presenças são meu apoio inabalável e minha motivação constante.

Que este trabalho possa, de alguma forma, refletir a admiração e o respeito que sinto por vocês.

Seu amor e determinação moldaram a pessoa que sou hoje, e é com imenso orgulho que compartilho esta jornada com vocês ao meu lado.

RESUMO

SILVA, Cláudio Lima da. **Ensino de trigonometria no triângulo por atividades experimentais**. 2023. 318 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Parauapebas, 2023.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará, intencionando responder a seguinte problemática: Quais os efeitos de um conjunto de atividades experimentais sobre o desempenho na resolução de problemas trigonométricos no triângulo, por meio dos métodos de conceituação e redescoberta, quando aplicada a alunos do 2º ano do Ensino Médio? Para tanto, o objetivo que norteia o processo investigativo é: analisar os efeitos de uma sequência didática por atividades experimentais sobre o desempenho na resolução de problemas trigonométricos no triângulo, por meio dos métodos de conceituação e redescoberta, aplicada a uma turma do 2º ano do Ensino Médio. A metodologia de pesquisa adotada baseia-se nos pressupostos da Engenharia Didática da 1ª Geração, que se constitui em quatro etapas: (I) Análises Prévias; (II) Concepções e Análises *a Priori;* (III) Experimentação e (IV) Análise *a Posteriori* e Validação. Ao confrontar as análises *a priori* com a análise *a posteriori*, os resultados mostram o progresso positivo dos estudantes indicando que a SD foi eficiente em promover a aprendizagem dos alunos. Além disso, testes estatísticos, como o Teste Exato de Fisher e o Teste de Hipótese, confirmaram que a Sequência Didática teve um impacto positivo no desempenho dos alunos, e minimizou a influência dos fatores socioeconômicos no desempenho dos estudantes. Portanto, o êxito na aplicação pode ser atribuído à metodologia de ensino adotada, a qual se apresentou como uma alternativa à rotina convencional de sala de aula observada na maioria das escolas. Assim, esta dissertação gerou um Produto Educacional intitulado Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais, estruturado e fundamentado em atividades experimentais, resolução de problemas e jogos matemáticos, com o propósito de melhorar o aprendizado de trigonometria no contexto do triângulo por alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática por atividades Experimentais. Engenharia Didática. Ensino de Relações Trigonométricas.

ABSTRACT

SILVA, Cláudio Lima da. **Teaching Trigonometry in the Triangle through Experimental Activities**. 2023. 318 f. Dissertation (Professional Master's in Mathematics Education) – State University of Pará, Parauapebas, 2023.

This work presents the results of a research project conducted in the Professional Master's Program in Mathematics Education (PPGEM) at the State University of Pará, aiming to address the following question: What are the effects of a set of experimental activities on the performance in solving trigonometric problems in the triangle, through the methods of conceptualization and rediscovery, when applied to 2nd-year high school students? Therefore, the objective guiding the investigative process is to analyze the effects of a didactic sequence through experimental activities on the performance in solving trigonometric problems in the triangle, using the methods of conceptualization and rediscovery, applied to a 2nd-year high school class. The research methodology is based on the assumptions of 1st Generation Didactic Engineering, which consists of four stages: (I) Preliminary Analyses; (II) Conceptions and A Priori Analyses; (III) Experimentation; and (IV) A Posteriori Analysis and Validation. When comparing the a priori analyses with the a posteriori analysis, the results show positive progress among students, indicating that the Didactic Sequence (DS) was efficient in promoting student learning. Additionally, statistical tests such as the Fisher Exact Test and the Hypothesis Test confirmed that the Didactic Sequence had a positive impact on student performance and minimized the influence of socioeconomic factors on student outcomes. Therefore, the success of the application can be attributed to the adopted teaching methodology, which emerged as an alternative to the conventional classroom routine observed in most schools. Thus, this dissertation has generated an Educational Product titled: Didactic Sequence for Teaching Trigonometry in the Triangle through Experimental Activities, structured and grounded in experimental activities, problem-solving, and mathematical games, with the purpose of enhancing trigonometry learning in the context of the triangle for 2nd-year high school students.

Keywords: Mathematics Education through Experimental Activities. Didactic Engineering. Teaching Trigonometric Relations.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Lista de Gráficos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Enquanto docentes observamos que os alunos do Ensino Médio apresentam elevado grau de dificuldades em diversos conteúdos matemáticos, dentre eles, na aprendizagem de trigonometria. Tais dificuldades são resultantes, muitas vezes, da falta de habilidade na realização dos cálculos aritméticos e na leitura e compreensão dos enunciados dos problemas matemáticos.

Além disso, a matemática ainda "continua sendo considerada uma das maiores vilãs dentre as disciplinas, sendo responsável por altos índices de reprovação de alunos" (DAMASCENO, OLIVEIRA e CARDOSO, 2018, p. 114). Tal afirmativa ocorre em virtude de a grande maioria dos estudantes possuírem um pré-conceito sobre o estudo da matemática. Boa parte diz que é uma matéria difícil, além de alegar que muitos conteúdos não possuem uma aplicabilidade ao seu dia a dia. Reflexo disso é o baixo nível de desempenho dos estudantes paraense nas avaliações de larga escala, tais como o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), SisPAE (Sistema Paraense de Avaliação Educacional) e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Para Santos (2015), um dos fatores culminantes para o insucesso dos estudantes nas avaliações externas é a forma como a disciplina de matemática tem sido apresentada aos alunos. Em sua maioria das vezes como um conjunto de símbolo e regras a serem seguindo, de forma mecânica, abstrata e descontextualizada do contexto social dos aprendizes. A trigonometria, por exemplo, é um vasto campo do conhecimento matemático com aplicabilidades em outras áreas, como a Física e Astronomia, além do campo geométrico.

Além disso, o estudo realizado por Sá, Santos e Ribeiro (2020) evidenciam a existência de um ciclo de fracasso no desempenho dos estudantes nas avaliações de larga escala, ocasionado pela ausência de diálogo entre as matrizes de referências do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Deste modo, segundo esses autores, a ausência do diálogo referencial traz consequências desastrosas, como as informações que não refletem fielmente as atividades e nem refletem o trabalho desenvolvido na escola, ocasionando maior desvalorização da escola pública perante a opinião da sociedade; mudança malsucedida na forma de gestão das escolas públicas; e o consumo de grandes quantidades de recursos públicos com os livros didáticos que não conseguem preparar os alunos para os exames de larga escala.

Assim, a pesquisa com o tema **"Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais"** opta por se concentrar exclusivamente no contexto dos triângulos, excluindo outras áreas da trigonometria, como o círculo, corpos esféricos e funções hiperbólicas. Essa delimitação se justifica pelo fato de que os triângulos são figuras geométricas fundamentais e amplamente aplicáveis em diversas disciplinas, desde a física até a engenharia. Deste modo, ao restringir o escopo da pesquisa aos triângulos, é possível aprofundar o estudo e desenvolver estratégias de ensino específicas que atendam às necessidades dos alunos em níveis introdutórios, preparando-os adequadamente para explorar áreas mais avançadas da trigonometria em momentos posteriores de sua educação matemática.

Em face desta situação, o objetivo que norteia o processo investigativo é: **analisar os efeitos de uma sequência didática por atividades experimentais sobre o desempenho na resolução de problemas trigonométricos no triângulo, por meio dos métodos de conceituação e redescoberta, aplicada a uma turma do 2º ano do Ensino Médio.** Para tanto, na presente pesquisa responderemos a seguinte problemática: **Quais os efeitos de um conjunto de atividades experimentais sobre o desempenho na resolução de problemas trigonométricos no triângulo, por meio dos métodos de conceituação e redescoberta, quando aplicada a alunos do 2º ano do Ensino Médio?** Para responder tal questionamento, nos apoiamos nos pressupostos da Engenharia Didática (ED), sob a ótica de Michèle Artigue (1995), Almouloud e Coutinho (2008) e Almouloud e Silva (2012).

Estruturalmente a presente pesquisa apresenta-se subdividida da seguinte forma: Na seção Engenharia Didática (ED), descrevemos as quatro fases da metodologia da Engenharia Didática adotadas no processo experimental, sendo elas: análises prévias; concepções e análises *a priori*; experimentação e, por último, análise *a posteriori* e validação.

Nas análises prévias, apresentaremos uma revisão teórica acerca dos estudos diagnósticos, experimentais e teóricos/investigativos que abordam o processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático em estudo. Além disso um estudo sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo, por meio de um levantamento bibliográfico acerca do objeto de pesquisa, referentes aos conceitos matemáticos, a origem do objeto matemático, bem como sua inserção no ensino, levando em consideração os aspectos históricos e epistemológicos. Outrossim, apresentamos os resultados de uma pesquisa a respeito das dificuldades de aprendizagem em trigonometria, sob a ótica docente.

Nas concepções e análises *a priori*, apresentamos uma proposta de Sequência Didática (SD) composta por 14 (quatorze) atividades, sendo: 1 (um) pré-teste e pós-teste; 4 (quatro) atividades de conceituação; 5 (cinco) atividades de redescoberta e 4 (quatro) atividades de aprofundamento, construídas com a intenção de colaborar com a aprendizagem matemática das Relações Trigonométricas. Nesta fase, fazemos as análises de cada etapa e discutindo as possíveis dificuldades que os alunos apresentarão no decurso das atividades, bem como as estratégias de resolução sob a perspectiva dos alunos.

A fase de Experimentação consiste na aplicação da Sequência Didática planejada na etapa anterior (concepções e análise *a priori*) e da coleta dos dados inerentes a pesquisa. Os sujeitos deste processo foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino do estado do Pará, no município de Parauapebas. Nesta etapa, fizemos uso das folhas de atividades, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, relatórios, bem como outros instrumentos que considerados indispensáveis no decurso do processo de experimentação.

Na última etapa, análise *a posteriori* e validação, analisaremos a evolução dos alunos ao longo da aplicação da SD, e a partir disso, se necessário, modificar os caminhos utilizados, fazendo da engenharia didática uma metodologia aberta. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), o objetivo desta fase é relacionar as observações e interações com os objetivos definidos *a priori*, e assim, avaliar a eficácia e a consistência dos fenômenos didáticos observados.

A seguir, apresentaremos a metodologia utilizada nesta pesquisa, intitulada Engenharia Didática.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Na presente seção, delineiam-se as características fundamentais da pesquisa voltada para o ensino de trigonometria no triângulo por meio de atividades experimentais. A metodologia de pesquisa, conforme enfatizado por Minayo (2015, p. 14), é conceituada como "o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade". Com base nessa perspectiva, descrevemos a configuração da pesquisa, apresentando o lócus, os sujeitos, os instrumentos e as técnicas de coletas de dados, bem como a metodologia de pesquisa pautada nos aspectos da Engenharia Didática, adotada para a obtenção de informações cruciais sobre o processo de experimentação.

2.1. CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O *lócus* escolhido para esta pesquisa é uma escola situada no município de Parauapebas, integrante da rede pública do estado do Pará. Esta seleção estratégica visa aprofundar a compreensão das dinâmicas específicas presentes em instituições de ensino público paraense. A escolha de uma escola pública contribui para a inclusão de variáveis socioeconômicas e culturais que caracterizam esse ambiente educacional, permitindo uma análise mais abrangente dos fatores que podem influenciar o aprendizado em matemática.

Assim, os sujeitos participantes da pesquisa consistem em uma turma específica composta por 40 alunos matriculados no 2º ano do ensino médio. Um critério adicional desta escolha é o fato desses estudantes não terem cursado a disciplina de matemática no 1º ano do ensino médio. Essa abordagem visa proporcionar uma análise mais focalizada nos efeitos da Sequência Didática no desempenho desses alunos que iniciam seu percurso no estudo da matemática no ensino médio, na segunda série.

Assim, a escolha deliberada de alunos que não tiveram contato com a disciplina no ano anterior busca mitigar possíveis influências de experiências anteriores na avaliação do impacto da metodologia proposta. Isso permitiu uma investigação mais precisa sobre como uma Sequência Didática pode influenciar positivamente o interesse, compreensão e desempenho desses alunos em relação à matemática.

As técnicas de pesquisa empregadas nesta investigação abrangem uma variedade de métodos que visam compreender, de maneira abrangente, os efeitos da Sequência Didática aplicada no ensino de relações trigonométricas no triangulo. A análise documental e a pesquisa bibliográfica foram realizadas de forma abrangente, abordando literatura especializada em Engenharia Didática, Tendências em Educação Matemática e Ensino de Trigonometria, proporcionando uma base teórica sólida para a pesquisa.

Além disso, a coleta de dados incluiu questionários estruturados aplicados aos alunos, buscando captar suas percepções sobre as aulas de matemática e identificar possíveis desafios enfrentados. Assim, a implementação de uma Sequência Didática específica, desenvolvida com base nos princípios da Engenharia Didática, permitiu avaliar diretamente os impactos dessa metodologia no aprendizado dos alunos. Além disso, as observações cuidadosas do processo de experimentação permitiram a captura de nuances e reações dos estudantes diante das situações propostas.

Esta pesquisa adota uma abordagem mista, combinando elementos qualitativos e quantitativos para obter uma compreensão abrangente dos efeitos da Sequência Didática no ensino de matemática. Esse método de pesquisa viabiliza a obtenção de uma compreensão mais abrangente e integral do fenômeno em análise, ao integrar uma avaliação de dados descritivos e interpretativos com uma análise estatística (CRESWELL, 2007).

Deste modo, a abordagem qualitativa foi empregada com o objetivo de analisar as percepções e experiências, fornecendo uma compreensão aprofundada dos impactos subjetivos da metodologia de ensino na aprendizagem dos alunos. Através de questionários estruturados e observações detalhadas do processo de experimentação, buscou-se explorar as experiências individuais dos alunos, suas atitudes em relação à matemática e como esses fatores podem ser influenciados pela Sequência Didática.

Paralelamente, a abordagem quantitativa foi empregada para conduzir análises estatísticas abrangentes. A coleta de dados quantitativos, como os resultados dos testes de desempenho dos alunos, permitiu uma avaliação objetiva e mensurável dos efeitos da metodologia de ensino adotada no processo de experimentação. Testes estatísticos, incluindo o Teste Exato de Fisher e Teste de Hipótese, foram utilizados para validar estatisticamente os resultados observados, garantindo uma fundamentação sólida para as conclusões da pesquisa. Deste modo, essa abordagem mista proporciona uma compreensão holística e equilibrada dos efeitos da Sequência Didática no desempenho dos estudantes no ensino de matemática, integrando perspectivas subjetivas e análises objetivas.

Assim, o Teste Exato de Fisher foi empregado como uma ferramenta estatística sensível para examinar as relações entre variáveis categóricas, oferecendo uma abordagem robusta para analisar dados provenientes de diferentes estratos da pesquisa. Este teste representou um papel fundamental para determinar se existem associações estatisticamente significativas entre variáveis específicas, como o interesse dos alunos em estudar matemática e a eficácia da Sequência Didática proposta.

Além disso, o uso do Teste de Hipótese proporcionou uma avaliação mais aprofundada da significância estatística dos resultados observados. Este teste foi aplicado com o intuito de testar hipóteses específicas formuladas no início da pesquisa, oferecendo uma estrutura estatística sólida para a aceitação ou rejeição dessas hipóteses. Portanto, ao empregar essas ferramentas estatísticas, a pesquisa buscou fornecer não apenas entendimento qualitativos, mas também uma validação estatística robusta, oferecendo uma base sólida para conclusões e recomendações educacionais.

A seguir, apresentamos a Engenharia Didática, metodologia de pesquisa adotada neste estudo, explorando suas características e aplicações no contexto educacional.

2.2. ENGENHARIA DIDÁTICA

Para fundamentar a presente pesquisa e alcançar os objetivos traçados neste trabalho, nos respaldamos nos princípios da Didática da Matemática, surgida na França, em meados dos anos de 1970, tendo como principal objetivo a melhoria do ensino e aprendizagem em matemática nos diversos níveis de ensino.

> A Didática da Matemática deve oferecer explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos [...], além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber (POMMER, 2013, p. 10).

Nesta perspectiva, nos apoiamos nos propósitos da Engenharia Didática (ED), que emergiu com o pressuposto pela busca de metodologia de ensino que fosse capaz de auxiliar a elaboração das Sequências Didáticas (SD) voltadas para o ensino de matemática. Para isso, estudamos a Engenharia Didática de 1ª Geração, sob a ótica de Michelle Artigue, e a Engenharia Didática de 2ª geração, segundo o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian, analisado por Almouloud e Silva (2012).

2.2.1. Engenharia Didática de 1ª geração

Os estudos abordando o que hoje é conhecida como Engenharia Didática de 1ª Geração (amplamente conhecida) consolidou-se no início da década 1990, com Michelle Artigue, ao publicar na *Recherches en Didactiques de Mathématiques*[1] um artigo detalhando a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa, apresentando suas características, singularidades e fases para a sua utilização (BITTAR, 2017).

Segundo Pais (2019, p. 97-98), "a ideia da engenharia didática traz implícita uma analogia ao trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito a concepção, planejamento e execução de um projeto." Esta analogia se torna clara quando consideramos que o professor é o "engenheiro" responsável pela criação e execução do "projeto" de ensino. O professor concebe o plano de aula com base em objetivos educacionais, estrutura atividades e escolhe estratégias pedagógicas adequadas. Além disso, durante a execução, o professor interage com os alunos, monitora o progresso dos estudantes, faz ajustes conforme necessário e registra dados sobre o desempenho dos alunos.

Em tratando-se de sala de aula, a Engenharia Didática Clássica busca estudar as condições que possam favorecer a aprendizagem de um certo tema ou conteúdo no sistema didático. Para isso, utiliza-se de um esquema experimental que engloba a concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino, podendo ocorrer tanto no nível local, denominados de micro engenharia, quanto no nível global, conhecido como a macro engenharia (ARTIGUE, 1995).

Por isso, os objetivos das pesquisas utilizando essa metodologia podem ser diversos, envolvendo tanto conceitos específicos, quanto estratégias didáticas globais, que são transversais a todos os conteúdos. Entretanto, segundo Almouloud e Silva (2012), o que torna essa metodologia singular é o seu funcionamento e sua

[1] **Recherches en Didactic des Mathématiques** é uma revista internacional fundada em 1980 e que relata pesquisas fundamentais realizadas no contexto da educação matemática.

forma de validação, que ao contrário de outras metodologias, permite uma validação interna, através dos confrontos entre análise a *priori* e análise a *posterior.*

Além disso, Artigue (1995) descreve as quatro diferentes fases da metodologia da Engenharia Didática adotadas no processo experimental:

Figura 1: Etapas da Engenharia Didática

Fonte: Organização dos Autores com base em Michelle Artigue (1995).

Nas análises prévias, o pesquisador realiza um estudo sistemático sobre o objeto matemático em questão. Nesta etapa, faz-se necessário levantar alguns questionamentos, tais como: Como o conteúdo é ensinado? Quais as concepções e dificuldades dos alunos a respeito do tema estudado? O objetivo destes questionamentos é propiciar ao pesquisador uma melhor compreensão das origens das dificuldades elencadas pelos estudantes, que podem estar associadas ao desenvolvimento epistemológico do conteúdo. Para a obtenção dessas informações, o pesquisador pode recorrer a livros didáticos, orientações curriculares, ou ainda, a outras pesquisas relacionadas ao objeto de estudo.

Michelle Artigue (1995), salienta que nas análises prévias, as concepções não devem se limitar somente ao quadro teórico dos conhecimentos didáticos, mas também:

- A análise epistemológica dos conteúdos contemplados no ensino;
- A análise do ensino tradicional e seus efeitos;
- A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;

> - A análise do campo de restrições onde vai estar localizado a efetiva realização didática;
> - E, claro, todos os itens acima são feitos levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa. (ARTIGUE, 1995, p. 38, tradução nossa)

Além disso, Artigue (1995) enfatiza que a análise das restrições, apresentadas acima deve ser realizada mediante a distinção de três dimensões: epistemológica, cognitiva e dimensão didática. A primeira está associada ao objeto matemático em estudo; a segunda às características cognitivas dos estudantes; e a última, refere-se às características do sistema de ensino.

Segundo Matos Filho (2015),

> Nessa fase é onde se estudam as possíveis causas do problema de pesquisa, bem como as formas pelas quais se poderá tratá-lo, e onde se procura determinar as condições de existência de um funcionamento mais satisfatório para esse ponto do sistema didático. (MATOS FILHO, 2015, p. 4)

Nessa perspectiva, para Almouloud e Coutinho (2008), a análise inicial deve permitir ao pesquisador identificar potenciais variáveis de ensino que serão interpretadas e manipuladas nas próximas etapas: análise *a priori* e construção da sequência didática.

As Análises *a priori* são fundamentais para a pesquisa, pois a partir das análises prévias, o pesquisador toma a decisão de agir sobre as variáveis que acredita serem relevantes para o problema em estudo, isto é, propõe uma Sequência Didática, fazendo a análise de cada uma das suas etapas. Isto é feito a partir da escolha de variáveis didáticas que irão compor as etapas na condução dos percursos ou soluções para o problema. Nesta fase, são discutidas e descritas todas as atividades a serem propostas e possíveis estratégias de resolução, incluindo análise dessas estratégias do ponto de vista dos alunos.

Artigue (1995) enfatiza que para facilitar a análise *a priori*, o pesquisador deve considerar dois tipos de variáveis de comando:

> - As variáveis *macrodidáticas ou globais*, que dizem respeito à organização global da engenharia;
> - E as variáveis *microdidáticas ou locais*, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado. (ARTIGUE, 1995, p. 42, tradução nossa).

Assim, segundo Artigue (1995), a análise *a priori* deve ser concebida como uma análise de controle. Além disso, esta fase constitui-se de uma parte descritiva e uma parte preditiva, com foco nas características de uma situação a-didática que foi planejada e que será aplicada aos alunos pelo processo de experimentação. Para Artigue (1995), na *análise a priori*:

> - Descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local (remetendo-se, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação a-didática que delas decorrem;
> - Analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor;
> - Preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem. (ARTIGUE, 1995, p. 45, tradução nossa).

Portanto, é nesta fase da Engenharia Didática que se constrói as atividades que compõem a SD que será aplicada na experimentação. Além disso, são descritas e justificadas as escolhas gerais e particulares relacionadas a pesquisa. É neste momento da análise *a priori*, que se trata das estratégias de resolução dos alunos, analisando quais possíveis estratégias os estudantes adotarão em determinados problemas e desta forma, o professor antecipa as interações possíveis na aprendizagem, deduzindo *a priori* os componentes utilizados na pesquisa, os possíveis erros e acertos que serão apresentados pelos estudantes.

Por conseguinte, a fase da experimentação é o momento de o pesquisador colocar em prática a Sequência Didática objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*. Segundo Almouloud e Silva (2012), a experimentação:

> consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação. (ALMOULOUD e SILVA, 2012, p. 27).

Para Artigue (1995),

> Esta fase [experimentação] é seguida por uma análise *a posteriori* que se baseia no conjunto de dados recolhidos ao longo da experiência, nomeadamente, as observações feitas das sequências de ensino, bem como as produções dos alunos em aula ou fora dela. (ARTIGUE, 1995, p. 48, tradução nossa).

Portanto, durante a experimentação o pesquisador deve estar a todo o momento atento, de forma a registrar as informações, observar as interações e acontecimentos, os quais serão utilizados para analisar *a posteriori*. Além disso, os dados podem ser complementados por meio de questionários, testes individuais ou em grupos, registros fotográficos, dentre outros, que serão analisados na quarta fase por meio do confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, com o objetivo de validar as hipóteses suscitadas na pesquisa.

Por fim, na fase da análise *a posteriori* e validação, são analisados os comportamentos cognitivos dos alunos diante das atividades propostas, sempre em confronto com a análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados. Para Almouloud e Silva (2012), esta fase da Engenharia Didática:

> [...] consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nessa análise, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação. (ALMOULOUD e SILVA, 2012, p. 27).

Nesta etapa, o pesquisador procura analisar a evolução do aluno ao longo da sequência didática, e a partir disso, poderá mudar os caminhos utilizados, fazendo da engenharia didática uma metodologia aberta. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), o objetivo desta fase é relacionar as observações e interações com os objetivos definidos *a priori*, e assim, avaliar a eficácia e a consistência dos fenômenos didáticos observados.

2.2.2. Engenharia Didática de 2ª geração

Quanto a Engenharia Didática de 2ª Geração, tomamos como base o estudo realizado por Almouloud e Silva (2012), intitulado “Engenharia didática: evolução e diversidade”. Os autores realizaram o estudo, sob o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009).

Na Engenharia Didática de 1ª Geração objetivava-se a elaboração e o estudo de uma proposta de transposição didática para o ensino, sendo essa transposição didática o objetivo principal da pesquisa (ALMOULOUD; SILVA, 2012). Desta forma, para os autores, o foco principal do estudo concentrava-se sob a ótica da didática, sem estudar a função docente, mesmo sabendo que é inevitável na descentralização, na institucionalização ou na realização de um objeto de ferramenta dialética. Assim, de acordo com Almouloud e Silva (2012), a Engenharia Didática de 2ª Geração, na perspectiva de Perrin-Glorian, apresenta como objetivo principal o desenvolvimento de recursos didáticos, bem como a formação de professores.

Desta forma, Almouloud e Silva destacam que Perrin-Glorian (2009) apresentou dois tipos de engenharias didáticas, sendo elas: Engenharia Didática para a Investigação (IDR)[2] e a Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD).

> No caso da IDR, se o objetivo é estudar as situações e as potencialidades do meio para fazer evoluir os conhecimentos dos alunos, o professor ocupa o lugar de professor e de investigador, porém, suas ações, enquanto investigador, devem ser transparentes.
> [...]
> Por outro lado, na IDD, o objetivo é a produção de recursos para professores ou para a formação de professores. (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 28).

Portanto, na Engenharia Didática para a Investigação, procura-se fazer emergir fenômenos didáticos e estudá-los, com a intenção de um avanço nos resultados da investigação, por meio de experimentações montadas em função da questão de pesquisa, sem preocupação imediata de uma eventual divulgação mais ampla das situações utilizadas.

Por outro lado, a Engenharia Didática de Desenvolvimento é, segundo Perrin-Glorian (2009), ao mesmo tempo uma engenharia didática para o desenvolvimento de recursos e para a formação de professores envolvidos no projeto. Além disso, a engenharia de desenvolvimento está fortemente ligada às investigações nos saberes matemáticos necessários aos professores para ensinar a matemática.

2.2.3. Engenharia dos Domínios de Experiência

Em meio a esses debates, Boero (2009) propõem um novo termo, denominado a “Engenharia dos Domínios de Experiência”. O objetivo principal desta nova proposta é investigar uma estrutura didática que possa ser aplicada em grupos de crianças de 6 a 14 anos, no campo da didática experiencial. Segundo o autor, essas nova perspectiva de engenharias constroem um ponto de encontro entre a escola e

[2] IDR - Ingénierie Didactique pour la Recherche.

as experiências extraescolares dos alunos, em classes avançadas, bem como a experiência matemática familiar, que cabe ao professor mediar em sala de aula.

Nesse sentido, Boero (2009) argumenta que os pressupostos dos Domínios de Experiência buscam estudar a relação entre as práticas dos sujeitos, em sua dimensão cultural, e os saberes que eles mobilizam ou constroem. Ao passo que, também busca atuar no ambiente escolar, no processo de construção do conhecimento a partir das relações experenciais.

2.2.4. Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PER)

Outra concepção de Engenharia Didática é conhecida como Percurso de Estudo e Pesquisa (PER), surgida na França, no início do ano 2000 sob a ótica de Yves Chevallard. De acordo com Chevallard (2009), essa nova concepção metodológica é uma praxeologia de investigação em uma pesquisa específica.

Segundo o autor, o trabalho coletivo de didática que estuda a praxeologia é atualmente muito necessário para combater os efeitos naturalizadores dos métodos utilizados e acrescenta que esta pesquisa reúne ferramentas práticas de várias disciplinas, ou seja, ela é interdisciplinar. Chevallard explica este termo da seguinte forma:

> Uma pergunta Q é feita a um sistema didático S(X; Y; Q), onde X é um coletivo de estudo (uma classe, um grupo de estudantes, um grupo de pesquisadores, etc.) e Y é um grupo (geralmente reduzido ou mesmo um conjunto vazio) de auxiliares e diretores de estudo (professor, tutor, diretor de pesquisa, etc.). O objetivo da constituição deste sistema didático é estudar Q, ou seja, buscar dar-lhe uma resposta R que satisfaça certos condicionamentos a *priori*, confrontando com 'meios didáticos' apropriados. (CHEVALLARD, 2009, p. 1, tradução nossa)

Assim, de acordo com Chevallard (2009) esse processo é interdisciplinar em virtude de a investigação fazer uso de ferramentas praxeológicas de várias disciplinas, em um trabalho conjunto. Para o autor, engajar-se em tal investigação equivale a se engajar em um percurso de estudo e pesquisa (PER) motivado por essa mesma investigação.

Diante de todas essas perspectivas da Engenharia Didática, a seguir destacamos algumas pesquisas que utilizaram a ED como metodologia de pesquisa no âmbito do ensino de trigonometria, objeto de estudo desta pesquisa.

2.2.5. Engenharia Didática aplicada ao Ensino de Trigonometria

Em Mastronicola (2014), temos os resultados de uma pesquisa voltada para o ensino de trigonometria por meio de *apps* (aplicativos para plataforma Android e IOS). O objetivo da pesquisa foi conduzir o aluno na construção autônoma de conceitos trigonométricos, trazendo significado para as fórmulas do seno, cosseno e tangente e utilizá-las em contextos práticos.

Nas suas análises prévias, Mastronicola (2014) realizou um estudo sobre o objeto trigonometria e o seu contexto histórico. Além disso, discorreu sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no ensino de matemática, bem como os aplicativos: *Theodolite Droid (Major Forms); Teodolito (oxdb.net); Theodolite (Hunter &Technology) e GeoGebra (Internacional GeoGebra Institute).* Nestas análises a autora concluiu que o primeiro contato dos alunos com a trigonometria ocorre por meio de fórmulas que não apresentam significado algum ao estudante, ocasionando uma desmotivação, e consequentemente, o surgimento de dificuldades referentes à assimilação do conteúdo matemático.

Nas análises *a priori*, Mastronicola desenvolveu 6 (seis) atividades com a inserção do uso das tecnologias e uma atividade prática, cujo objetivo foi tornar o processo de aprendizagem do conteúdo trigonometria mais prazeroso e significativo, fazendo com que os estudantes, de maneira autônoma, chegassem as fórmulas trigonométricas e aplicá-las em problemas práticos.

A experimentação ocorreu em uma turma de 9º ano do ensino fundamental, com a seguinte sequência: A atividade 1 levou os alunos a relembrarem os conceitos de triângulos retângulos e teorema de Pitágoras; na atividade 2 os discentes deveriam identificar os triângulos semelhantes na malha quadriculada; na atividade 3 os estudantes realizaram o cálculo das razões entre os lados dos triângulos; na atividade 4 foi proposto um problema aos alunos para calcular a altura de uma árvore, dispondo apenas de um teodolito (*app*) e de uma trena.

Além disso, a atividade 5 trouxe um roteiro para construir um triângulo retângulo no GeoGebra e calcular as razões trigonométricas seno e cosseno. A atividade 6 propôs uma investigação sobre as razões encontradas ao modificar os lados do triângulo construído. E por fim, na atividade prática os alunos calcularam a altura de uma estátua do Cristo Redentor, localizada na entrada da cidade de Cedral. Para isto, os alunos fizeram uso de uma trena e do aplicativo *Theodolite Droid*.

As análises *a posteriori* e validação indicaram a viabilidade da sequência didática proposta, uma vez que os objetivos traçados inicialmente foram alcançados. Além disso, a autora concluiu que "[...] o uso de tecnologias no ensino aproxima o conteúdo a ser ensinado do cotidiano dos alunos, além de possibilitar uma melhor visualização dos diversos conceitos trigonométricos, promovendo uma aprendizagem significativa" (MASTRONICOLA, 2014, p. 54).

Santos (2017) também apresentou uma sequência didática para o ensino de trigonometria. Para o autor:

> A escola e os professores possuem um papel crucial ao estimular no aluno as combinações das inteligências por meio de estratégias pedagógicas, constituídas a partir do desenvolvimento das capacidades cognitivas já encontradas. Assim, é importante que o professor saiba atuar pedagogicamente com seus alunos para que eles alcancem esses objetivos. (SANTOS, 2017, p. 17)

Nesta perspectiva, em seu estudo, Santos objetivou analisar as potencialidades das Inteligências Múltiplas reconhecidas por Gardner, para auxiliar a mobilização da aprendizagem das noções de trigonometria através de uma Sequência Didática. Para isso, fundamentou-se nos pressupostos da Engenharia Didática, emergida da Didática da Matemática, por meio dos estudos de Michele Artigue (1983, 1988), Gardner (1983, 1995, 1998, 2010) e Fonseca (2002, 2010, 2012, 2015).

Nas análises prévias, o autor delimitou-se em analisar a dimensão história e epistemológica do objeto matemático em tela; a dimensão cognitiva, associada às características dos sujeitos ao qual se dirige o ensino, buscando atualizar e formalizar dados sobre suas concepções a respeito do tema em questão; e dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino, ou seja, como vem sendo desenvolvido as abordagens dos conteúdos referentes às noções de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Além disso, Santos analisou os trabalhos desenvolvidos por Smole (1999), Armstrong (2001), Oliveira (2006), Fonseca (2012), Maffei (2014) e Teixeira (2015).

Nas análises *a priori*, Santos desenvolveu e analisou uma sequência didática composta de 3 (três) atividades, objetivando despertar no aluno o interesse pela história da trigonometria; conhecer as Inteligências Múltiplas dentro de um contexto investigativo e construir uma visão sistemática dos tipos de Inteligências Múltiplas inicialmente identificadas por Gardner.

O processo de experimentação ocorreu em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola situada no município de Gararu/SE. As atividades foram distribuídas em 5 horas-aula de 50 minutos, aplicadas no período de uma semana. Para auxiliar na implementação do experimento (SD), Santos (2017) fez uso de materiais concretos, tais como: projetor de imagem e micro system, e materiais manipuláveis, como: fita métrica, bastão, corda, teodolito caseiro e computadores.

Ao final do processo, após o confronto entre o estudo das análises preliminares com as averiguações realizadas nas análises *a posteriori*, juntos as observações realizadas das participações dos alunos nas atividades propostas, Santos (2017) concluiu que os resultados deste estudo alcançaram os objetivos de forma satisfatória na aprendizagem das noções de trigonometria no triângulo retângulo, indicando assim, a viabilidade da sequência didática aplicada.

Silva (2019) realizou uma pesquisa experimental cujo objetivo foi verificar como as atividades elaboradas para o ensino das relações trigonométricas pode contribuir para a construção do conhecimento de alunos do 9º ano do ensino fundamental baseado no método da descoberta/redescoberta voltado ao processo de ensino aprendizagem da matemática. Para isso, Silva buscou responder ao seguinte questionamento científico: como o ensino das Relações Trigonométricas por meio de atividades, pode possibilitar a aprendizagem significativa aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental?

Para responder a problemática suscitada e alcançar os objetivos propostos, Silva (2019) utilizou como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática. Nas análises prévias, o autor apresenta os resultados de uma revisão de estudos sobre o ensino de Relações Trigonométricas, fundamentação matemática trigonometria e seus aspectos históricos. Além disso, os resultados de um questionário aplicado junto a e 100 (cem) alunos do 1° ano do ensino médio da rede pública de ensino do estado do Pará.

Nas análises *a priori*, Silva discorreu sobre o ensino de matemática por jogos, o ensino de matemática por atividades, e produziu uma Sequência Didática para o ensino das Relações Trigonométricas. Nessas SD, o autor fez uma análise, presumindo as possíveis reações dos estudantes no desenvolvimento das atividades.

A experimentação aconteceu em uma turma de 9º ano do ensino fundamental (23 alunos) de uma escola estadual, localizada na cidade de Belém – PA. Silva (2019), destaca que nesta etapa recebeu a contribuição de um professor auxiliar que estava de posse de uma ficha a fim de registrar todas as observações dos alunos no decurso das atividades.

Na sequência didática, Silva (2019) propôs atividades de descoberta envolvendo os conceitos e definições das relações trigonométricas estudados pelos alunos no 9º ano do ensino fundamental. Para isso, incialmente o autor aplicou um pré-teste aos alunos contendo 10 questões relacionadas ao objeto matemático em questão.

Silva (2019), ressalta que os resultados do pré-teste revelaram muitas dificuldades dos estudantes quanto ao conteúdo das relações trigonométricas. No entanto, pode-se observar uma grande evolução nos resultados do pós-teste, onde todos os estudantes da amostra aumentaram significativamente o número de acertos nas questões. Dessa forma, Silva (2019) pôde concluir que metodologia utilizada evidenciou um melhor desempenho dos estudantes na aprendizagem das relações trigonométricas.

Diante dos expostos, ressaltamos que a Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa, e não uma metodologia de ensino. Desta forma, a ED caracteriza-se como uma metodologia de cunho qualitativo, pois propõe-se a responder e compreender questões muito particulares, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Além disso, a pesquisa qualitativa visa compreender as concepções dos sujeitos, considerando seus diversos pontos de vistas sobre a temática.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção, inicialmente apresentaremos uma revisão de literatura acerca dos estudos diagnósticos, experimentais e teóricos/investigativos presentes em dissertações, teses, artigos e periódicos que abordam o processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático em estudo.

Em seguida, realizamos um estudo sistemático sobre as relações trigonométricas no triângulo, por meio de um levantamento bibliográfico acerca do objeto de pesquisa, referentes aos conceitos matemáticos, a origem do objeto matemático, bem como sua inserção no ensino, levando em consideração os aspectos históricos e epistemológicos.

Além disso, apresentamos um panorama dos aspectos teóricos e legais que tratam das propostas curriculares para o ensino de matemática na Educação Básica, tais como: PCNs, LDB 9.394/96, PNE, BNCC, DCE-PA, bem como a abordagem do conteúdo de razões trigonométricas nos Livros Didáticos.

Apresentamos, também, o resultado de uma pesquisa realizada com 53 professores da rede pública estadual de ensino do estado do Pará, que lecionam a disciplina de matemática no 2º ano do Ensino Médio, a fim de identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem das relações trigonométricas.

Outrossim, fazemos uma breve discussão das tendências para o ensino de matemática, no âmbito da trigonometria: Resolução de Problemas, Jogos Matemáticos e Modelagem Matemáticas.

3.1. ASPECTOS MATEMÁTICOS

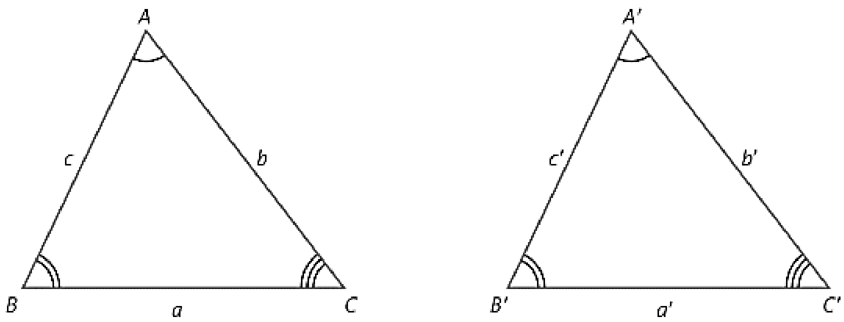
Apresentamos os fundamentos matemáticos referentes à trigonometria, objeto de estudo desta pesquisa. Destacamos os aspectos formais sobre a semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas e Trigonométricas no triângulo retângulo. Além disso, conceituamos e demonstramos a Relação Fundamental da Trigonometria, Leis dos Senos e Lei dos Cossenos. Desta forma, criamos uma base matemática para a elaboração da sequência didática a ser trabalhada com os alunos.

3.1.1. Semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos consiste, de modo geral, na relação que é estabelecida entre triângulos quando eles possuem os lados proporcionais e os ângulos congruentes. Desta forma, segundo Dante e Viana (2020):

> Dois triângulos são **semelhantes** se, e somente se, os ângulos correspondentes (homólogos) são congruentes e os lados correspondentes (homólogos) têm medidas de comprimentos proporcionais (DANTE e VIANA, 2020, p.14).

Para formalizar esta definição, analisamos os triângulos ABC e A'B'C', descritos a seguir:



Fonte: (DANTE, 2016, p. 240)

Desta forma, consideramos que ambos os triângulos supracitados são semelhantes, se satisfazem as condições da definição, apresentando a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' e\ C \leftrightarrow C'$.

Com isso, tem-se que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \widehat{A'} \\ \hat{B} \cong \widehat{B'} \\ \hat{C} \cong \widehat{C'} \end{cases}$$

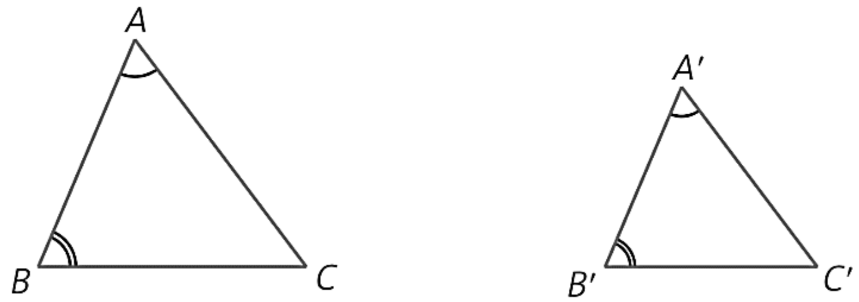
E, se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Deste modo, k é um real positivo denominado razão de semelhança. Neste sentido, a condição para que dois triângulos sejam semelhantes é que a constante k corresponda à razão das medidas de comprimento de dois lados homólogos quaisquer dos triângulos, isto é, que os lados sejam proporcionais.

Para constatar se dois triângulos são semelhantes, não precisamos analisar se todas as condições apresentadas na definição (três pares de ângulos homólogos e três pares de lados homólogos) sejam comprovadas. Para isso, podemos verificar alguns elementos, por meio dos critérios conhecidos como **casos de semelhança de triângulos**. Vejamos:

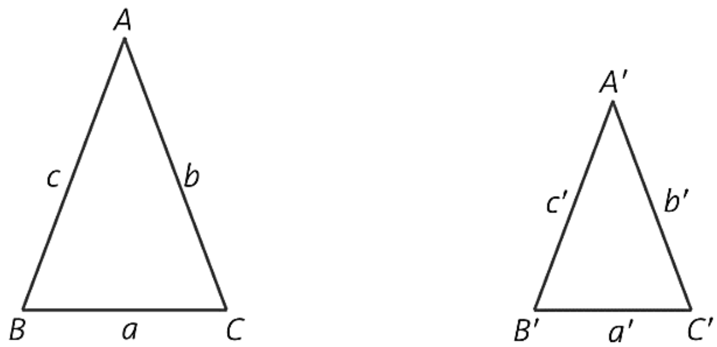
- **1º Caso: AA (ângulo, ângulo):** Se dois triângulos possuem dois ângulos homólogos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.



Fonte: (DANTE, 2016, p. 240)

Assim, se $\hat{A} \cong \widehat{A'}$, $\hat{B} \cong \widehat{B'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

- **2º Caso: LLL (lado, lado, lado):** Se dois triângulos têm todos os lados homólogos com as medidas de comprimento proporcionais, então podemos afirmar que os triângulos são semelhantes.

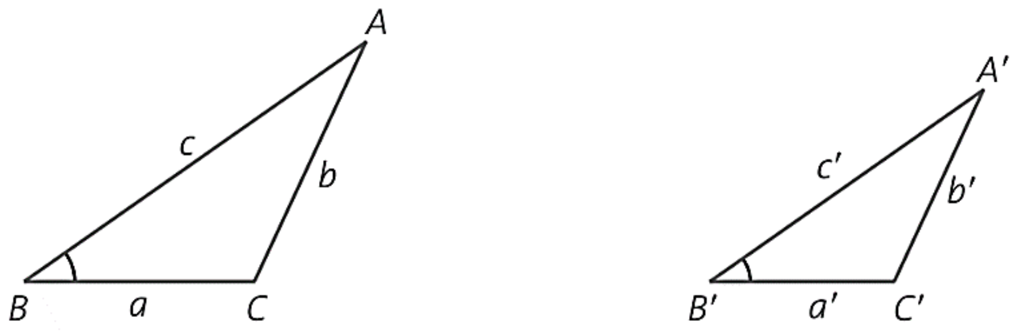


Fonte: (DANTE, 2016, p. 240)

Com isso, se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

- **3º Caso: LAL (lado, ângulo, lado):** Se dois triângulos têm todos os lados homólogos com as medidas de comprimento proporcionais, e os ângulos compreendidos entres esses pares de lados são congruentes, então podemos afirmar que os triângulos são semelhantes.



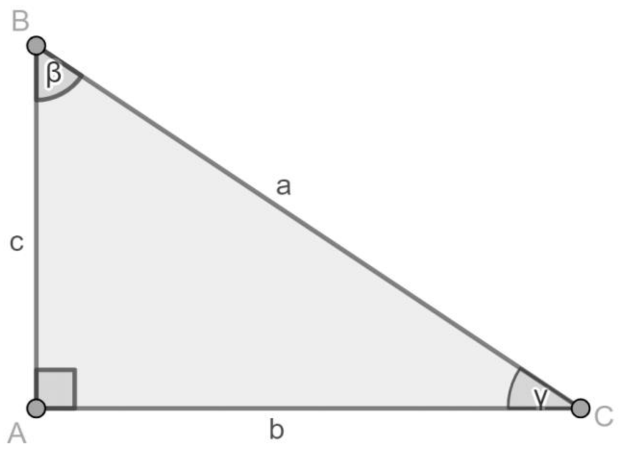
Fonte: (DANTE, 2016, p. 240)

Neste caso, tem-se que, se:

$$\hat{B} \cong \widehat{B'} \quad , \quad \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \Longrightarrow \triangle\, ABC \sim \triangle\, A'B'C'$$

3.1.2. Teorema de Pitágoras

Seja o $\Delta\ ABC$ a seguir, retângulo em A:



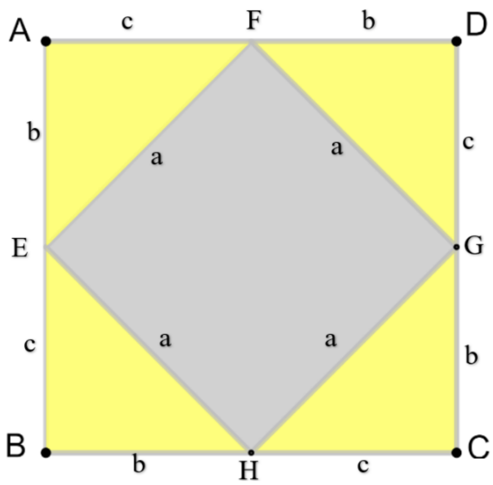
Fonte: Autores (2023)

No triângulo retângulo supracitado, temos:

- **a**: lado oposto ao ângulo reto (90º), denominado de hipotenusa;
- **b** e **c**: lados perpendiculares que formam o ângulo reto (90º) denominados de catetos. Sendo **b** o cateto oposto ao ângulo **β** ou cateto adjacente ao ângulo ***γ***, e **c** é o cateto oposto ao ângulo ***γ*** ou cateto adjacente ao ângulo **β**;
- **β** e ***γ*** são ângulos complementares, isto é, β + *γ* = 90º.

A demonstração apresentada a seguir é uma entre as várias possíveis para o Teorema de Pitágoras. Este teorema fundamental da geometria tem fascinado matemáticos e estudiosos ao longo dos séculos, resultando em uma ampla variedade de métodos e abordagens para a sua comprovação. Cada demonstração oferece uma perspectiva única e uma compreensão mais profunda do teorema. Assim, essa ilustração apresenta uma abordagem visual e intuitiva, mas outras exposições podem envolver conceitos matemáticos mais avançados, como álgebra, trigonometria e geometria analítica. A diversidade de demonstrações disponíveis enriquece o estudo e a compreensão desse teorema clássico e ressalta a beleza e a versatilidade da matemática.

Para realizar a demonstração do Teorema de Pitágoras, vamos considerar os quadrados ABCD de lado **b + c**, e EFGH de lado **a**, conforme a imagem abaixo. vejamos:



Fonte: Autores (2023)

Desta forma, tem-se que:

- A área do quadrado ABCD é: $A_{ABCD} = (b+c)^2$
- A área do quadrado EFGH é: $A_{EFGH} = a^2$
- A área de um dos triângulos é: $A_{\triangle} = \frac{1}{2}bc$

Neste sentido, pode-se dizer que a área do quadrado ABCD é igual à soma das áreas do quadrado EFGH, acrescida da área dos quatros triângulos, conforme demonstração abaixo:

Temos que:

$$\mathrm{A_{ABCD}} = \mathrm{A_{EFGH}} + 4.\mathrm{A_{\triangle}}$$

Fazendo as devidas substituições, temos que:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{1}{2}bc$$

Com isso:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

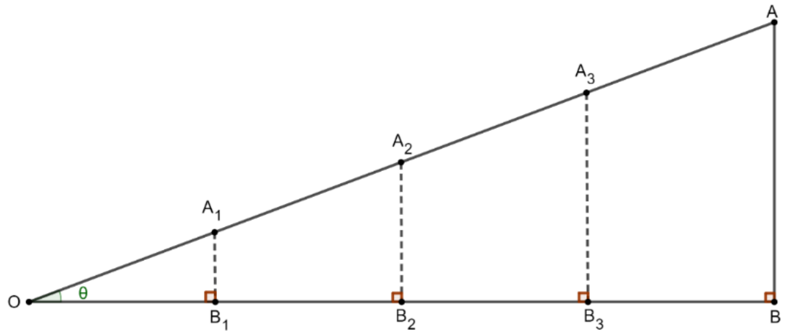
Portanto, conclui-se que o Teorema de Pitágoras é definido como:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.1.3. Relações trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

As Relações Trigonométricas, como conhecemos atualmente, são fundamentadas em resultados da semelhança de triângulos, particularmente aplicados aos triângulos retângulos. Como veremos ao logo desta subseção, a semelhança de triângulos retângulos permite associar para cada ângulo fixado de um triângulo desta natureza uma relação constante entre pares de lados de um triangulo retângulo.

Sobre a semirreta OB, do ângulo agudo θ (0º < θ < 90º), marcamos arbitrariamente os pontos $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{n}$, tracemos por estes pontos perpendiculares à semirreta OB, os segmentos de reta A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_NB_N. Vejamos:



Fonte: Autores (2023)

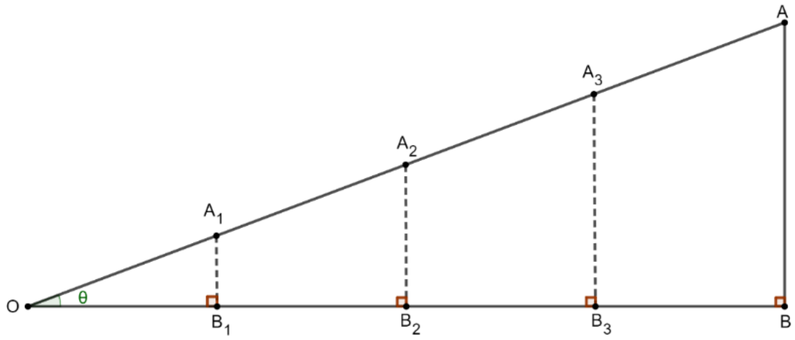
Desta forma, pelo caso de semelhança de triângulos, temos que se os triângulos $\mathrm{OB_1A_1}$, $\mathrm{OB_2A_2}$, $\mathrm{OB_3A_3}$, ..., $\mathrm{OB_nA}_n$, são semelhantes entre si, então, podemos escrever as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{OA_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{OA_2}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_3B_3}}}{\overline{\mathrm{OA_3}}} = \cdots \frac{\overline{\mathrm{A_nB_n}}}{\overline{\mathrm{OA_n}}} = \mathrm{k_1(constante)}$$

A constante k_1 assim obtida, independe do triângulo retângulo considerado, depende somente do ângulo θ. Com isso, conclui-se que em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto, a um ângulo dado, e a hipotenusa será terá sempre o mesmo valor que é chamado de **seno do ângulo θ e representado por sen** θ. Neste caso, seno do ângulo $A\hat{O}B$, ou seno de θ.

Portanto, o seno de um ângulo é um número único associado a este ângulo. Isto permite, conhecendo a medida da hipotenusa, o ângulo formado pela hipotenusa e uma tabela de senos dos ângulos determinar a medida do cateto oposto ao ângulo. Ou determinar a medida da hipotenusa com base no ângulo oposto e na medida do cateto oposto ao ângulo.

Novamente sobre a semirreta OB, do ângulo agudo θ (0º < θ < 90º), marcamos arbitrariamente os pontos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, tracemos por estes pontos perpendiculares à semirreta OB, os segmentos de reta A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_NB_N.



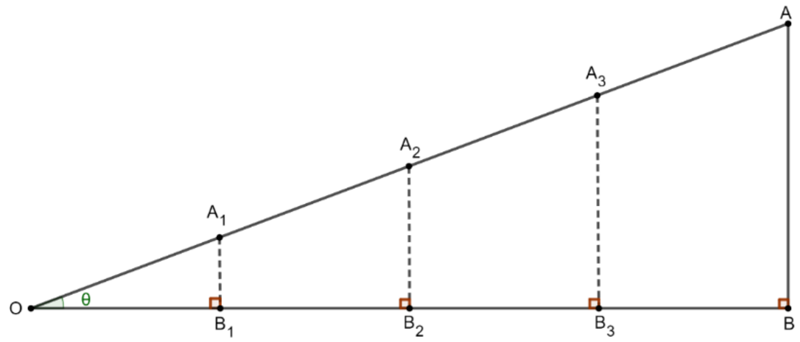
Fonte: Autores (2023)

Assim, devido a semelhança dos triângulos obtidos, podemos afirmar que as razões:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = k_2(\text{constante})$$

Como a constante k_2 assim obtida, novamente independe do triângulo retângulo considerado, dependendo somente do ângulo θ. Com isso, conclui-se que em qualquer triângulo retângulo, a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo considerado e a medida da hipotenusa será terá sempre o mesmo valor que é chamado de **cosseno do ângulo θ**.

Também com base nos triângulos retângulos da figura a seguir e da semelhança de triângulos podemos que a seguinte relação entre as razões entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente do ângulo θ.

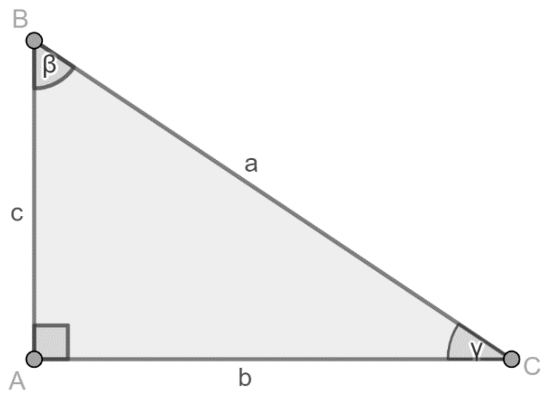


Fonte: Autores (2023)

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} = \ k_3(\text{constante})$$

Este resultado, permite mais uma vez concluir que entre todo triangulo retângulo a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente do ângulo θ é uma constante. Essa constante é denominada de **tangente do ângulo θ e representada por tgθ**.

Assim, no triângulo retângulo a seguir, definimos as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente. Vejamos:



Fonte: Autores (2023)

Deste modo, tendo o ângulo β como referência, temos as seguintes relações trigonométricas:

- **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$sen\beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenua} = \frac{b}{a}$$

- **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

$$cos\beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenua} = \frac{c}{a}$$

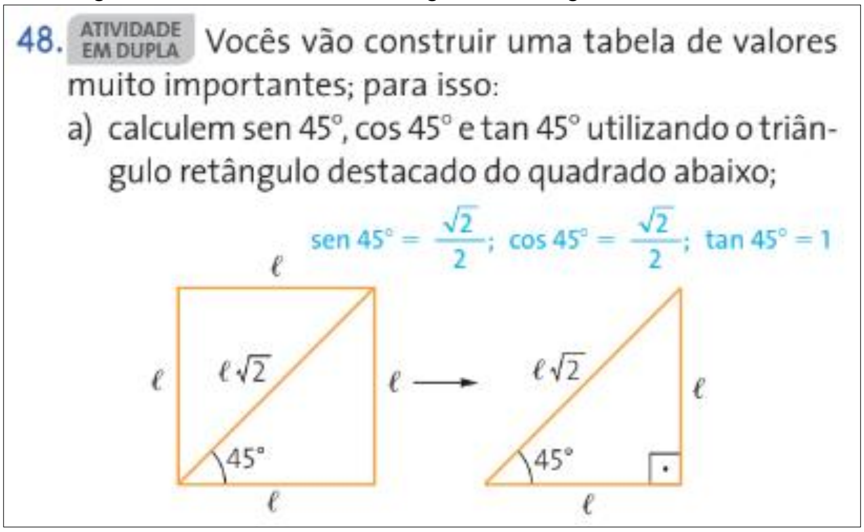
- **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\text{tg}\beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{b}{c}\ ou\ \frac{sen\beta}{cos\beta}$$

De modo análogo, temos quando tomamos o ângulo α como referência.

As razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente, dos ângulos notáveis podem ser obtidas a partir da análise de situações envolvendo o quadrado, para os ângulos de 45º, e do triângulo equilátero, para os ângulos de 30º e 60º.

Figura 2: Seno, cosseno e tangente do ângulo notável de 45º


48. ATIVIDADE EM DUPLA Vocês vão construir uma tabela de valores muito importantes; para isso:

a) calculem sen 45°, cos 45° e tan 45° utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado abaixo;

sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan 45° = 1

Fonte: (DANTE, 2013, p. 252)

Resolvendo os cálculos, obtemos os seguintes valores para o ângulo de 45º:

$$\text{Sen } 45º\ \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

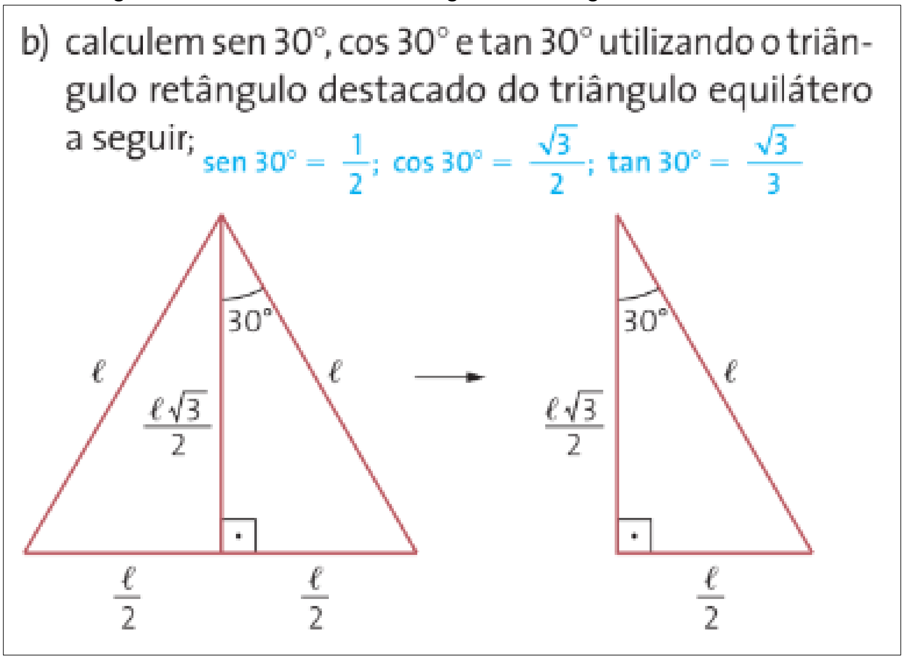
$$\text{Cos } 45º\ \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{Tg } 45º = \frac{l}{l} = 1\ ou\ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mathbf{1}$$

Com isso, obtemos os seguintes resultados para o ângulo de 45º:

	Seno	**Cosseno**	**Tangente**
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Figura 3: Seno, cosseno e tangente do ângulo notável de 30º



Fonte: (DANTE, 2013, p. 252)

Resolvendo os cálculos, obtemos os seguintes valores para o ângulo de 30º:

$$\text{Sen } 30º = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} * \frac{1}{l} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

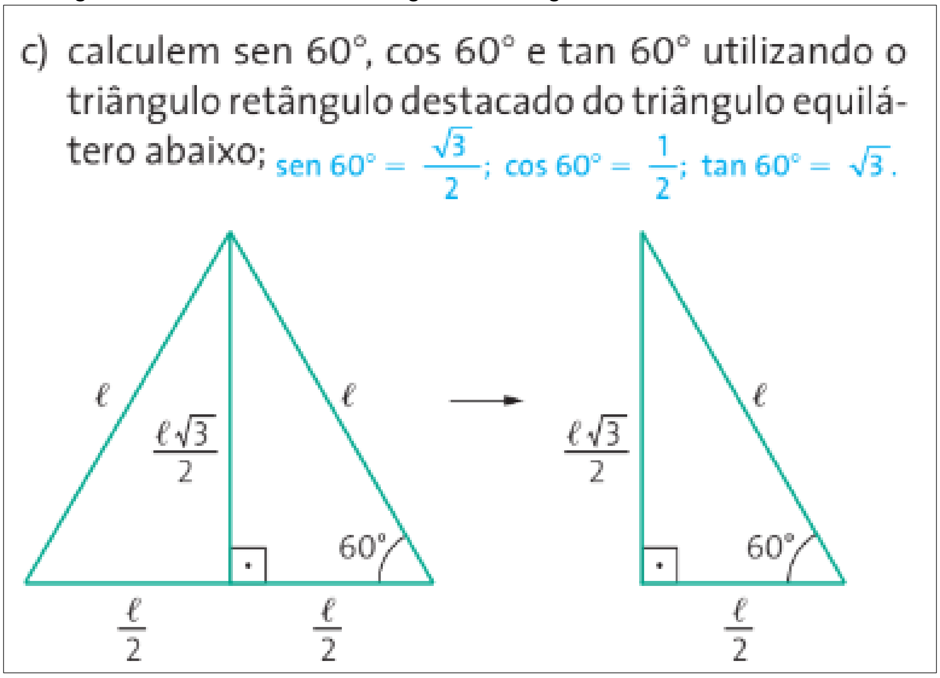
$$\text{Cos } 30º = \frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{l} = l\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{l} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{Tg } 30º = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Com isso, obtemos os seguintes resultados para o ângulo de 30º:

	Seno	**Cosseno**	**Tangente**
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Figura 4: Seno, cosseno e tangente do ângulo notável de 60º



Fonte: (DANTE, 2013, p. 252)

Resolvendo os cálculos, obtemos os seguintes valores para o ângulo de 60º:

$$\text{Sen } 60º = \frac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{l} = l\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{l} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{Cos } 60º = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} * \frac{1}{l} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Tg } 60º = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} * 2 = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

Com isso, obtemos os seguintes resultados para o ângulo de 60º:

	Seno	**Cosseno**	**Tangente**
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Segundo Dante e Viana (2020), muitas vezes para resolver problemas envolvendo triângulos retângulos, precisamos conhecer o seno, o cosseno ou a tangente de 30°, 45° e 60° ou de outros ângulos agudos. Para determinar tais valores, pode-se utilizar uma calculadora científica, seja ela física ou online, ou ainda consultar uma tabela de razões trigonométricas com medidas de abertura de ângulos de um em um grau, de 1° a 89°.

Figura 5: Razões Trigonométricas com medidas de abertura de ângulos de 1° a 89°

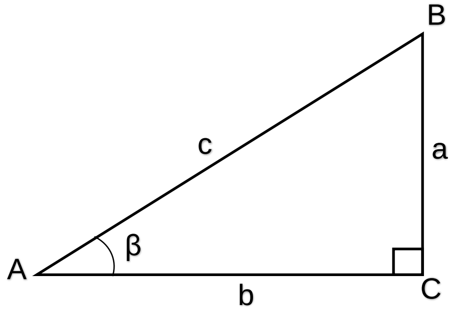
Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Fonte: (DANTE, 2013, p. 252)

3.1.4. Relação Fundamental da Trigonometria

A relação entre o seno e o cosseno em um triângulo retângulo é conhecida como a primeira Relação Fundamental da Trigonometria. Vejamos:



Demonstração

I) No triângulo retângulo △ABC, temos o teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$;

II) Calculando o senβ e cosβ, tem-se:

$$sen\beta = \frac{a}{c} \quad ; \quad cos\beta = \frac{b}{c}$$

III) Calculando o quadrado do senβ e o quadrado do cosβ, obtemos:

$$sen^2\beta = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad ; \quad cos^2\beta = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

IV) Somando o quadrado do senβ com o quadrado do cosβ, teremos:

$$sen^2\beta + cos^2\beta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

Sabendo que $a^2 + b^2 = c^2$, então:

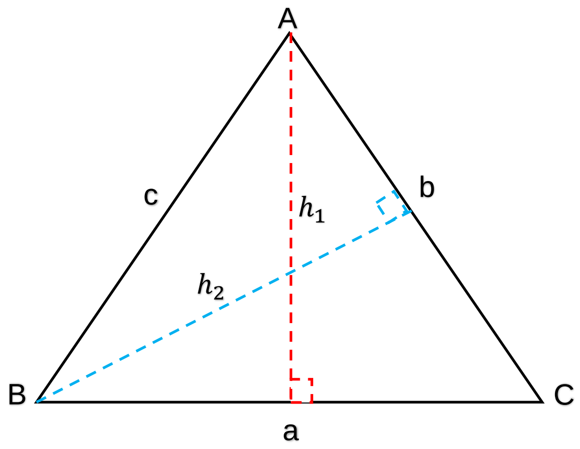
$$sen^2\beta + cos^2\beta = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Conclui-se então, que $\boldsymbol{sen^2\beta + cos^2\beta = 1}$.

Portanto, podemos afirmar que segundo a Relação Fundamental da Trigonometria, a soma entre o quadrado do seno e o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo é igual a 1 (um).

3.1.5. Leis dos Senos

A Lei dos Senos, afirma que em um triângulo qualquer, o seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. Vejamos:



Demonstração

I) Encontrando o seno dos ângulos A, B e C, temos:

$$sen\hat{A} = \frac{h_2}{c} \Longrightarrow h_2 = c.sen\hat{A}$$

$$sen\hat{B} = \frac{h_1}{c} \Longrightarrow h_1 = c.sen\hat{B}$$

$$sen\hat{C} = \frac{h_1}{b} \Longrightarrow h_1 = b.sen\hat{C}$$

$$sen\hat{C} = \frac{h_2}{a} \Longrightarrow h_2 = a.sen\hat{C}$$

II) Se $h_2 = c.sen\hat{A}$ e $h_2 = a.sen\hat{C}$, então, $c.sen\hat{A} = a.sen\hat{C}$.

Logo,

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{a}{sen\hat{A}}$$

III) Do mesmo modo, se $h_1 = c.sen\hat{B}$ e $h_1 = b.sen\hat{C}$, então, $c.sen\hat{B} = b.sen\hat{C}$.

Logo,

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

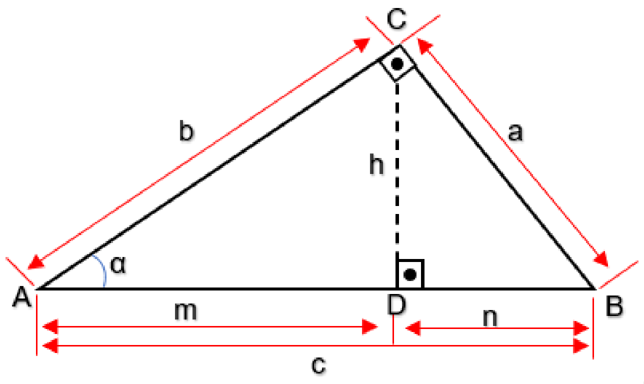
IV) Comparando II e III, conclui-se que:

$$\boldsymbol{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}}$$

Portanto, podemos concluir que em um mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante.

3.1.6. Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos é uma relação entre a medida dos lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um dos seus ângulos. Esta relação nos permite descobrir a medida de um dos lados de um triângulo qualquer quando conhecemos a medida de outros dois lados e o ângulo oposto ao lado que se quer descobrir. Vejamos:



Demonstração

I) No triângulo △ACD, que é retângulo, temos que:

$\cos\alpha = \frac{m}{b}$

logo, $\boldsymbol{m = b.\cos\alpha}$

II) Se no triângulo △ABC, n = c – m

Portanto, **n = c – b.cosα**

III) Calculando a medida *h* no triângulo △ACD, temos que:

$\text{sen}\alpha = \frac{h}{b}$

logo, $\boldsymbol{h = b.\text{sen}\alpha}$

IV) Calculando a hipotenusa *a* do triângulo retângulo △BCD, temos que:

$$a^2 = h^2 + n^2$$

$$a^2 = (\text{b}.\text{sen}\alpha)^2 + (\text{c} - \text{b}.\cos\alpha)^2$$

$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2.\text{b}.\text{c}.\cos\alpha + \text{b}^2\cos^2\alpha$$

$$a^2 = (b^2 sen^2\alpha + \text{b}^2\cos^2\alpha) + c^2 - 2.\text{b}.\text{c}.\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2.\text{b}.\text{c}.\cos\alpha$$

Sabendo que, conforme a Relação Fundamental da Trigonometria:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Então:

$$a^2 = b^2.1 + c^2 - 2.\mathrm{b.c.cos}\alpha$$

Desta forma, podemos concluir que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.\mathrm{b.c.cos}\alpha$$

Assim como:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.\mathrm{a.c.cos}b$$

e:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\mathrm{a.b.cos}c$$

Portanto, em um triângulo qualquer, o quadrado de um de seus lados é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

3.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Apresentaremos a seguir um recorte histórico da trigonometria, mostrando sua origem, evolução, autores e suas principais contribuições para o avanço da matemática, ciência, cultura e sociedade. Além disso, apresentamos as funções didáticas desempenhadas pela história da matemática no ensino de trigonometria, presentes nos livros didáticos do ensino médio.

Destacamos que o presente texto (3.2.1 e 3.2.2) faz parte do artigo de nossa autoria intitulado: “AS FUNÇÕES DIDÁTICAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA”, publicado na Revista Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento, na categoria educação, em 17 de março de 2023.

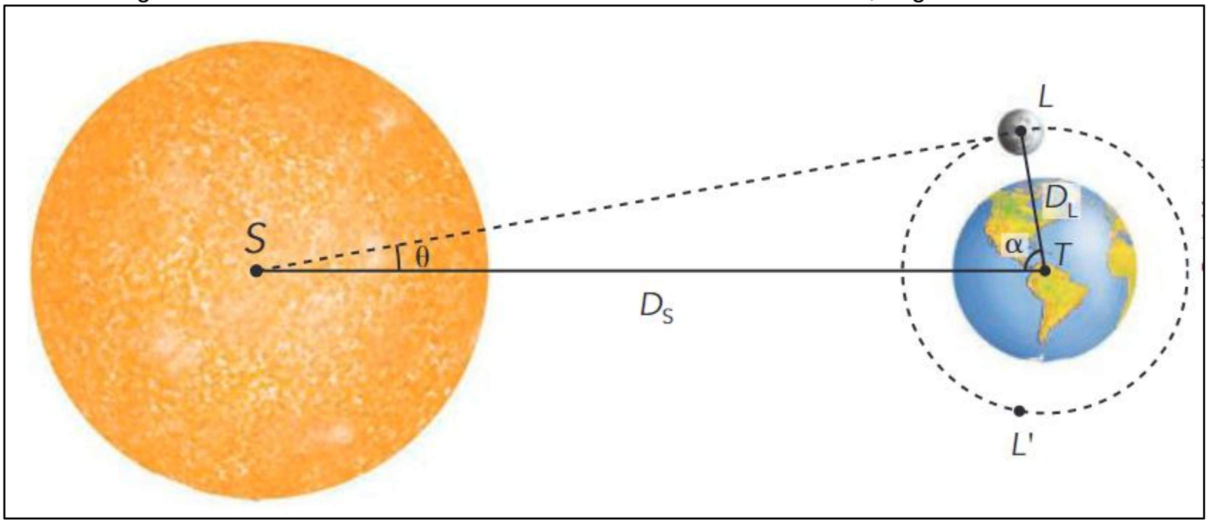
3.2.1. Recorte Histórico da Trigonometria

A matemática é uma ciência viva que busca modelar a realidade (BRASIL, 1997). Graças a essa ciência, conseguimos transcrever a realidade numericamente e geometricamente. Nesta perspectiva, a origem da trigonometria está diretamente relacionada à astronomia, uma vez que as necessidades humanas contribuíram significativamente para a busca de meios de produção agrícola. Para produzir alimentos, por exemplo, tornou-se necessário o conhecimento dos astros, das estações do ano e do movimento da Terra, e foi exatamente nesse momento que a matemática demonstrou suas contribuições nesta área.

Considerado um dos gênios mais versáteis da antiguidade, o filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo grego Tales de Mileto (624 a.C. – 547 a.C.) levou para a Grécia os conhecimentos da geometria desenvolvidos pelos egípcios e passou a aplicar os métodos da filosofia grega a eles. Usando o método de comparação de sombras, atualmente conhecido como teorema de Tales, Mileto fez muitos cálculos inéditos. O mais famoso deles foi o método de medir distâncias inacessíveis.

Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.), o astrônomo e matemático grego, realizou algumas observações e comparou as medidas de distância entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua usando a semelhança de triângulos.

Figura 6: Distância entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua, segundo Aristarco



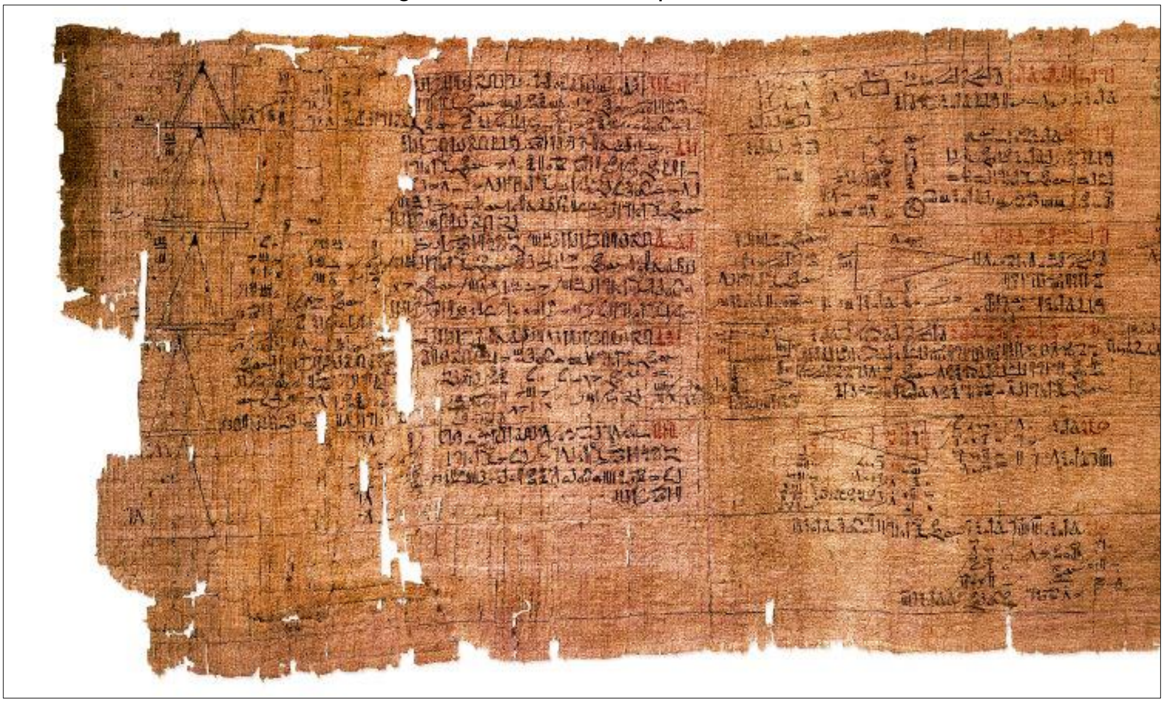
Fonte: (DANTE; VIANA, 2020, p. 25)

As observações realizadas incialmente por Aristarco foram fundamentais para o estudo da trigonometria, porém equivocadas. Segundo Aristarco de Samos, a distância da Terra ao Sol seria maior que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Hoje, sabe-se que que a medida de distância entre o Sol e a Terra é 390 vezes maior do que a medida de distância entre a Lua e a Terra (DANTE; VIANA, 2020).

Os primeiros tratados que que hoje conhecemos como por trigonometria surgiram na Idade Média. A palavra trigonometria foi criada pelo alemão Bartholomeo Pitiscus (1561 – 1613), e é derivada de dois termos gregos, *trigonon*, que tem por significado a palavra triângulo e *metria*, que significa medida, portanto, significando medida do triângulo (COUTINHO, 2015).

Segundo Eves (2011, p. 202) “as origens da trigonometria são obscuras”. No entanto, de acordo com o autor, há alguns problemas no papiro *Rhind* [3] que envolvem a cotangente de um ângulo diedro[4] da base de uma pirâmide.

Figura 7: Recorte do Papiro Rhind, 1650 a.C



Fonte: Museu Britânico, Inglaterra.
Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/collection/image/766120001>.

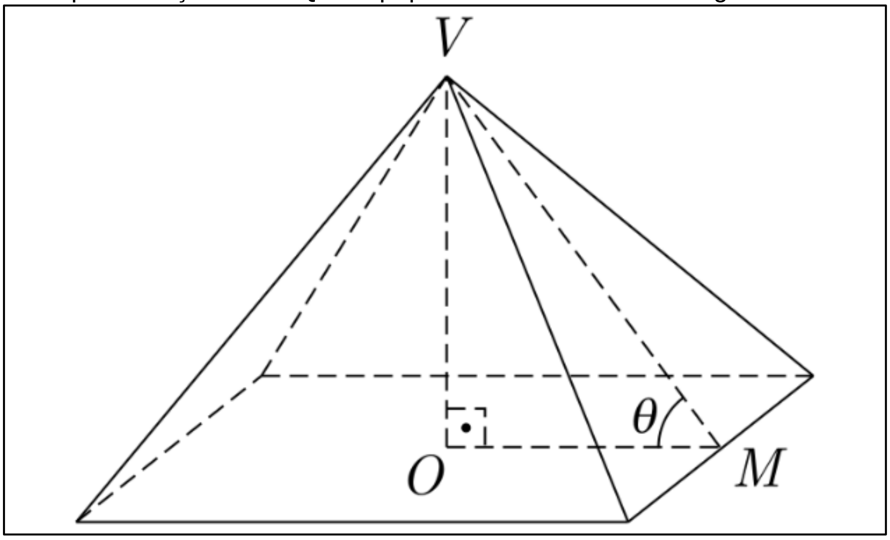
O Papiro *Ahmes*, também conhecido como Papiro de *Rhind*, datado de um período aproximado de 1650 a.C., apresenta 84 problemas, sendo que destes, quatro fazem referência ao *SEQT* de um ângulo, cujo significado não foi esclarecido por Ahmes mas, pelo contexto, muitos historiadores da área interpretam como sendo o ângulo OMV, conforme podemos observar na imagem na figura a seguir:

---

[3] **Papiro *Rhind*** é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Amósis detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

[4] **Ângulo Diedro** é uma expansão do conceito de ângulo a um espaço tridimensional. É definido como o espaço entre dois semiplanos não contidos num mesmo plano com origem numa aresta comum.

Figura 8: Representação do SEQT do papiro de *Rhind* como cotangente de um ângulo



Fonte: Kilhian (2021)
Diponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2021/10/hiparco-ptolomeu-e-trigonometria.html

Segundo Eves (2011, p. 83), “os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o “percurso” e a “elevação” — isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de “altura”. Neste caso, ao chamarmos de β (beta) o ângulo $V\widehat{M}O$, no triângulo retângulo destacado, obtemos as seguintes relações trigonométricas:

$$\beta = \frac{OM}{VO}$$

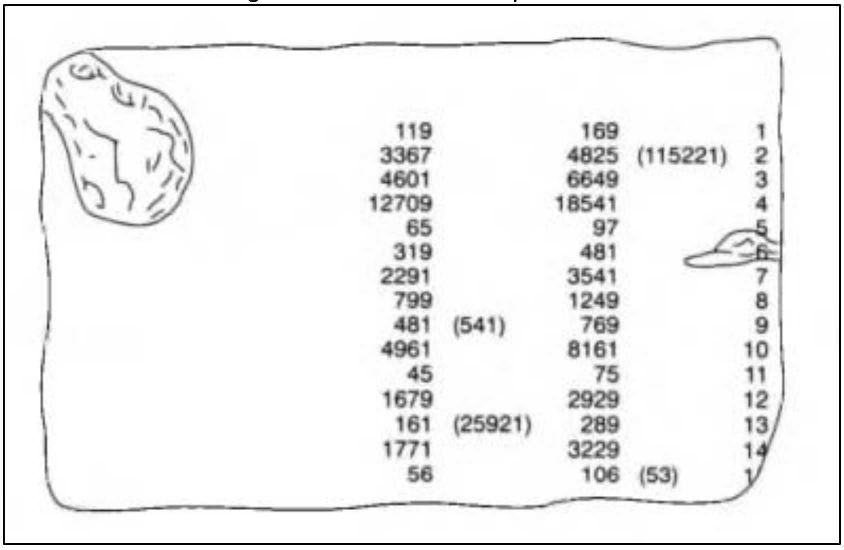
$$sen\ (\beta) = \frac{VO}{VM}$$

$$cos\ (\beta) = \frac{OM}{VM}$$

$$tg\ (\beta) = \frac{VO}{OM}$$

Outro fator importante na história da trigonometria é a Tábua de *Plimpton* 322, provavelmente a mais notável das tábuas matemáticas, escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.). Esta tábua mede cerca de 13 cm de comprimento, 9 cm de largura e 2 cm de espessura, e acredita-se que os números disponíveis na *Plimpton* 322 correspondem à medida de 2 lados de um triângulo retângulo. Desta forma, tem-se uma relação direta desta Tábua com o Teorema de Pitágoras.

Figura 9: Tábula de *Plimpton* 322



Fonte: Eves (2011, p. 64).

Nota-se que na tábua tem inscrita uma tabela contendo 15 linhas e 4 colunas de números (na notação sexagesimal da Babilônia). Estes números formam os ternos pitagóricas de números inteiros *a*, *b* e *c*, os quais satisfazem o Teorema de Pitágoras, isto é, $a^2 + b^2 = c^2$.

Segundo Eves (2011, p. 64)

> Um terno de números inteiros, como (3, 4, 5), cujos termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado terno pitagórico. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno se diz primitivo. Assim (3, 4, 5) é um terno pitagórico primitivo, ao passo que (6, 8, 10) não é.

De acordo com Eves (2011), muitos séculos após a tábula de *Plimpton*, os matemáticos gregos demostraram que todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) são dados parametricamente por: $a = 2uv$; $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$. Onde u e v são números primos entre si, sendo que um é par o outro é ímpar. Além disso, $u > v$. Desta forma, para $u = 3$ e $u = 2$, temos:

$a = 2uv$	$b = u^2 - v^2$	$c = u^2 + v^2$
$a = 2.3.2$	$b = 3^2 - 2^2$	$c = 3^2 + 2^2$
$\boldsymbol{a = 12}$	$b = 9 - 4$	$c = 9 + 4$
	$\boldsymbol{b = 5}$	$\boldsymbol{c = 13}$

Com isso, obtemos o seguinte terno primitivo: $a = 12$, $b = 5$ e $c = 13$. Calculando outros catetos a e b, e hipotenusa c dos triângulos retângulos de lados inteiros por meio da tábula *Plimpton*, encontram-se os seguintes ternos pitagóricos:

Tabela 1: Ternos pitagóricos, segundo a Tábua de Plimpton 322

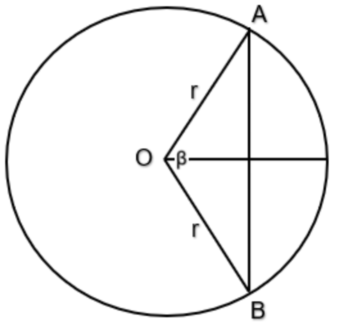
A	B	C	u	v
4	3	5	*2*	*1*
24	7	25	*4*	*3*
40	9	41	*5*	*4*
60	11	61	*6*	*5*
84	13	85	*7*	*6*
112	15	113	*8*	*7*
144	17	145	*9*	*8*
180	19	181	*10*	*9*
220	21	221	*11*	*10*
264	23	265	*12*	*11*
312	25	313	*13*	*12*
364	27	365	*14*	*13*
420	29	421	*15*	*14*
480	31	481	*16*	*15*
544	33	545	*17*	*16*

Fonte: Organização dos autores (2023)

Os babilônios e os egípcios já estudavam e utilizavam a trigonometria na antiguidade, mas foi no Período Helênico que o estudo relacionado a essa área das ciências exatas ganhou maior notoriedade. Esses estudos foram motivados em razão da necessidade de se ter maior rigor relacionado ao conceito da medida de ângulo.

O astrônomo Hiparco de Nicéia (180 a.C - 125 a.C) é notadamente conhecido como o "pai da trigonometria". Hiparco publicou um tratado sobre a construção da primeira tabela trigonométrica, incluindo a tábua de corda, em doze livros. Neste período, a trigonometria era então baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Os matemáticos gregos não faziam uso do conceito atual de seno, mas sim do cálculo de comprimentos das cordas do arco duplo, pois uma vez que conhecendo o valor do seu comprimento poder-se-ia calcular o seno da metade do arco. Isto porque, o comprimento da corda subtendida por um ângulo β é $2.sen\left(\frac{\beta}{2}\right)$, conforme figura a seguir:

Figura 10: Corda do arco duplo



$$\text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{AB/2}{r} = \frac{AB}{2r}$$

Fonte: Organização dos autores (2023)

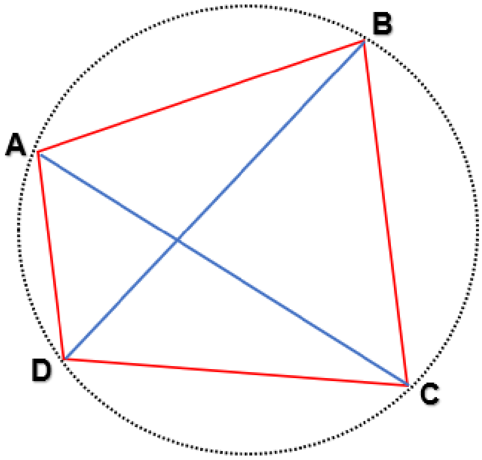
A dificuldade em lidar com ângulos dos astros na Esfera Celeste, levou os astrônomos babilônicos a pensar em substituir o arco de um ângulo central pela sua corda. No entanto, como demostrado anteriormente, a corda de um arco é o dobro do seno do arco metade. Com isso, a ideia de substituir o arco pela corda do ângulo central, foi o início do que conhecemos hoje como seno (COUTINHO, 2015).

Mesmo com tantos estudos relacionados à trigonometria, ainda não se tinha o devido rigor matemático. Euclides e Arquimedes conseguiram em seus estudos, evidenciar de forma mais clara o que viria a ser a trigonometria que utilizamos nos dias de hoje. Nos estudos realizados por ambos, é possível identificar fórmulas equivalentes as razões trigonométricas, isto é, seno cosseno e tangente.

Além disso, o auge da trigonometria na Grécia Antiga ocorreu com Cláudio Ptolomeu de Alexandria, o qual viveu no século II da era cristão. A *Syntaxis mathematica*, popularmente conhecida como Almagesto, escrito por Ptolomeu por volta do ano 150 d.C, foi a obra mais significativa para os estudos de trigonometria que relacionou ângulos centrais com cordas de um círculo.

Constituída por 13 livros, o Almagesto é uma obra que consta a primeira aproximação notável, após Arquimedes, do valor de π, com um valor dado de 3,1416. Além disso, dentre as várias contribuição para a trigonometria, no Almagesto consta o cálculo das cordas, uma proposição conhecida como o Teorema de Ptolomeu (BOYER, 2010).

Figura 11: Teorema de Ptolomeu



Fonte: Organização dos autores (2023)

O presente teorema afirma que, em um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos, é igual ao produto dos comprimentos das diagonais, isto é, $AB * CD + AD * BC = AC * BD$.

Os árabes, os persas e os hindus também contribuíram para a criação da trigonometria. Mesmo a trigonometria tendo toda essa origem histórica, estudos apontam que a sua formulação, com o rigor que utilizamos hoje data do século XVII, sendo possível graças ao desenvolvimento da álgebra.

No entanto, a trigonometria alcançou o *status* que temos atualmente, somente quando Leonhard Euller (1707 – 1783) atribuiu ao seno a função de arco de um círculo unitário. Cabe ressaltar, que a palavra seno é oriunda de tradução incorreta da palavra árabe *jiba* para *jaib*, assim, escolheram traduzir como *sinus*, que no latim significa seno. Por sua vez, o termo cosseno surgiu por volta do século XVII, como sendo o seno complementar de um ângulo, ao passo que o conceito de tangente, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias inacessíveis.

Neste sentido, dentre muitos aspectos tratados pela Matemática, temos a Geometria que fundamenta e possui uma relação direta com a Trigonometria, que vem se desenvolvendo e aperfeiçoando desde os tempos remotos das civilizações antigas, a partir das necessidades práticas da época, com ênfase para os estudos ligados à Astronomia, à Agrimensura e à Navegação. Foi aperfeiçoada por várias civilizações, a exemplo dos egípcios e babilônicos, que foram responsáveis pelos primeiros indícios de achados rudimentares com uso de razões entre lados de triângulos semelhantes (BOYER, 2010).

3.2.2. Funções Didáticas da História da Trigonometria

A história da matemática examina o desenvolvimento das ideias matemáticas ao longo do tempo. Mostra como as teorias matemáticas foram formadas e como elas foram usadas em diferentes contextos históricos e culturais. Além disso, pode ajudar a entender o "porquê" e "para quê" das teorias matemáticas atuais, mostrando como elas se relacionam com problemas e desafios do passado e como são aplicadas a diferentes campos do conhecimento. Assim, quanto a sua função didática, identificaram-se três funções desempenhadas pela história da matemática no ensino de trigonometria, presentes nos livros didáticos analisados, a saber:

3.2.2.1. Elucidação dos porquês e do para quê?

Quanto a história da matemática e a elucidação dos “porquês” e do “para quê”, a história pode contribuir na explicação do porquê de se estudar certos conhecimentos matemáticos, e porque estes conteúdos foram desenvolvidos. Desta forma, são apresentadas as funções e aplicações dos conteúdos matemáticos ao longo do tempo, seja na própria matemática ou em outras áreas do conhecimento.

A figura 12 representa a história da matemática e a elucidação dos porquês e do para quê.

Figura 12: História da trigonometria

Um pouco da história da Trigonometria

No estudo da Trigonometria (do grego *trigónos* + *métron*, que significa “medida dos triângulos”), o conceito de proporcionalidade é central e foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos séculos.

Usando semelhança de triângulos, o astrônomo e matemático grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) comparou as medidas de distância entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua (veja mais sobre isso na página 25). Com esse mesmo conhecimento, matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas.

O filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo grego Tales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para a Grécia os conhecimentos geométricos desenvolvidos pelos egípcios e começou a aplicar a eles os procedimentos da Filosofia grega. Com o método de comparar sombras, atualmente conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi o método para obter a medida de distâncias inacessíveis.

Uma das aplicações mais conhecidas do método que Tales desenvolveu é a determinação da medida de comprimento da altura de uma pirâmide pela sombra que ela projeta no solo.

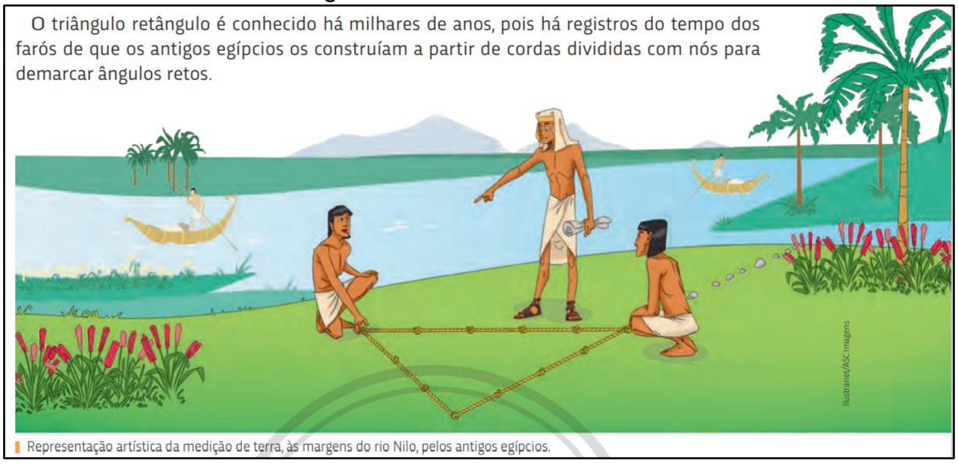
Busto de Tales de Mileto no museu Nacional Romano (Itália).

Fontes de consulta: BOYER, Carl C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012. ROSA, Carlos Augusto de Proença. *História da ciência: da Antiguidade ao Renascimento científico*. 2. ed. Brasília-DF: Funag, 2012.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 15).

Esta figura apresenta informações sobre a forma como o astrônomo Aristarco de Samos, por meio da semelhança de triângulos, fez comparações das medidas de distância entre a terra e o sol, bem como entre a terra e a lua. Além disso, mostra que Tales de Mileto desenvolveu muitos cálculos por meio do método que se conhece hoje como teorema de Tales. Na figura 13, tem-se o que se pode chamar de “a corda de 13 nós”, utilizada no Egito Antigo nas medições de terras.

Figura 13: A corda dos 13 nós



Representação artística da medição de terra, às margens do rio Nilo, pelos antigos egípcios.

Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 223).

Desta forma, ao considerar a distância entre dois nós consecutivos da corda uma unidade de medida, com espaçamentos iguais entre cada nó, era possível a construção de um triângulo retângulo com medidas 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades, o qual conhece-se hoje como triângulo retângulo. Assim, o presente recorte histórico da trigonometria mostra o conhecimento matemático construído para a busca por soluções de problemas práticos do cotidiano da sociedade.

Neste sentido, as menções que apresentam a história da matemática para a elucidação dos “porquês” e do “para quê” como função didática:

> [...] podem contribuir para que seja atribuído sentido ao conteúdo a ser aprendido pelo estudante, na medida em que apresenta a Matemática como ciência em desenvolvimento, às vezes vinculado às questões utilitárias, e às vezes vinculado às questões intrínsecas à própria ciência Matemática (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 82).

Assim, no contexto atual, a trigonometria é um dos ramos fundamentais da matemática dentro e fora do ambiente escolar, pois suas relações trigonométricas servem para calcular, além das medidas de ângulos, as distâncias teoricamente inacessíveis. Neste sentido, o ensino de trigonometria apresenta grande relevância, pois é um conteúdo matemático que está relacionado diretamente com o cotidiano do aluno.

3.2.2.2. A história da matemática como estratégia didática

A história da matemática como estratégia de ensino consiste em ensinar matemática com base no estudo da história e desenvolvimento de conceitos matemáticos. Assim, ao examinar como os conceitos matemáticos se desenvolvem ao longo do tempo, os alunos questionarão as suposições subjacentes às ideias matemáticas e o conhecimento que os matemáticos utilizam para desenvolver essas ideias. Desta forma, o estudante pode aprender a avaliar evidências e argumentos que o ajudará a desenvolver aptidões críticas para resolver problemas e entender o mundo.

Na figura 14, apresenta-se uma menção que trata da demonstração do teorema de Pitágoras.

Figura 14: Demonstração do teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 565 a.C.

Sua obra, depois continuada por seus discípulos, foi de enorme importância para o desenvolvimento da Matemática. Várias foram as contribuições da escola pitagórica, responsável por avanços na área do raciocínio lógico-dedutivo. Pitágoras deu também grandes contribuições ao desenvolvimento da Aritmética.

O teorema que leva seu nome – demonstrado na página 415 – já teve centenas de demonstrações diferentes. Observe a demonstração a seguir.

Tomemos o quadrado ABCD abaixo representado, de lado a + b. Podemos dividi-lo em dois trapézios congruentes pelo segmento $\overline{EF}$: o trapézio AEFD e o trapézio EBCF. A área S do trapézio AEFD pode ser calculada de duas maneiras:

- Como metade da área do quadrado ABCD:

$$S = \frac{(a+b)(a+b)}{2}$$

- Como a soma das áreas dos triângulos AEG, EGF e GFD:

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2}$$

Então:

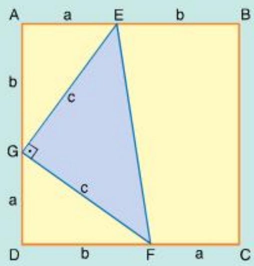
$$(a+b)(a+b) = ab + cc + ab$$

e daí resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Essa demonstração se deve a James Abraham Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos.

Pitágoras desenhando na areia o teorema que hoje leva o seu nome.



Fonte: Iezzi *et al.* (2014, p. 417).

Na figura 14, tem-se uma demonstração do teorema de Pitágoras realizada por James Abraham Garfield, o vigésimo presidente dos Estados Unidos. Antes de entrar na vida política, Garfield foi professor de matemática, e era conhecido por sua habilidade matemática e por ter ensinado o teorema de Pitágoras de forma inovadora.

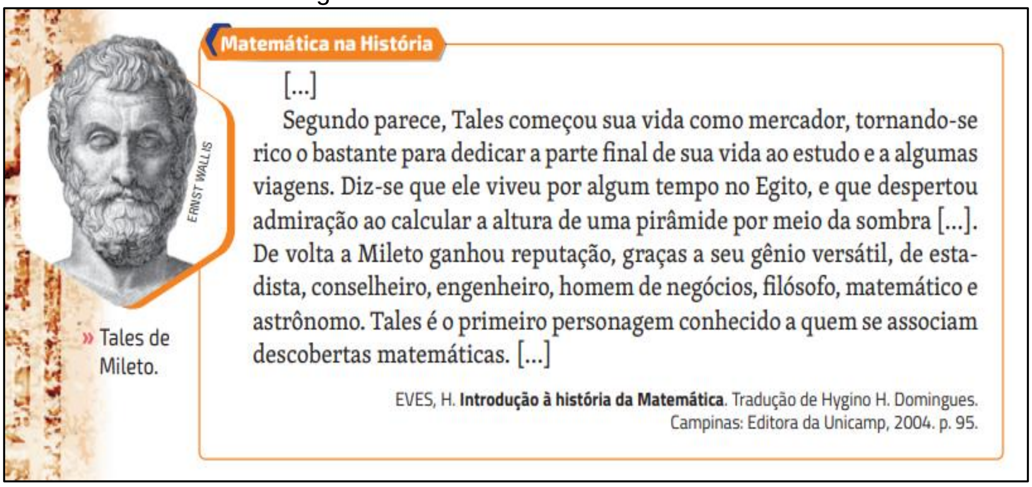
Neste recorte histórico, é apresentada a ideia que Garfield utilizou para demonstrar o teorema de Pitágoras, por meio de forma visual, utilizando uma tábua de carpinteiro e pregos para construir modelos tridimensionais do triângulo retângulo. Neste sentido, “[...] uma das formas de utilizar a HM em sala de aula pode ser por meio da apresentação de uma pequena narrativa, que mostre a lógica utilizada pelos matemáticos para a criação do conteúdo que está sendo trabalhado” (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 80).

Assim, o raciocínio de Garfield aplicado ao teorema de Pitágoras ajuda os alunos a entenderem a fórmula para calcular a medida de um dos lados do triângulo retângulo quando se tem a medida dos outros dois lados. Nesse caso, o importante não é que o estudante reproduza o raciocínio garfieldiano, tão pouco o pitagórico, mas, sim, que ele entenda como as fórmulas foram criadas. Desta forma, esse fato da história da matemática pode contribuir com o entendimento do objeto matemático. Nesse sentido, ao compreender a história, os alunos serão capazes de reconstruir fórmulas sempre que necessário, compreendendo a lógica matemática envolvida.

3.2.2.3. Formação cultural

Na história da matemática e formação cultural, são apresentados fatos históricos da vida dos estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento da matemática. Estes relatos históricos são apresentados de forma sucinta, e não contribuem para a aprendizagem da matemática, mas, sim, para uma formação cultural do estudante.

Figura 15: História de Tales de Mileto



Fonte: Souza (2020, p. 58).

A menção representada na figura 15 expõe um breve recorte histórico da vida, obra e contribuições para a matemática de um dos gênios mais versáteis da antiguidade – o filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo grego Tales de Mileto (624 a.C. – 547 a.C.). Tales levou para a Grécia os conhecimentos da geometria desenvolvidos pelos egípcios e passou a aplicar os métodos da filosofia grega a eles. Usando o método de comparação de sombras, atualmente conhecido como teorema de Tales, Mileto fez muitos cálculos inéditos. O mais famoso deles foi o método de medir distâncias inacessíveis.

Estes fatos históricos são apresentados nos livros didáticos como curiosidades da vida desses estudiosos, no entanto, não apresentam grande relevância e contribuições acerca do conhecimento matemático para a aprendizagem dos conceitos e do objeto matemático em questão (trigonometria). Desta forma, sua contribuição está voltada para proporcionar aos estudantes um contato com a história da matemática, contribuindo, assim, com a sua formação cultural.

3.3. ASPECTOS CURRICULARES

A educação é um pilar fundamental no desenvolvimento da sociedade e do país. A Constituição Federal de 1988 destaca que a educação deve estar a serviço do pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 9.394/96) estabelece as diretrizes da educação nacional ao prever que a União, em regime de colaboração com os Estados, Distrito Federal e os Municípios estabeleçam competências e diretrizes capazes de orientar os currículos escolares, conforme o artigo 9º da LDB:

> Art. 9 [...]
> IV - estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum;
> [...]
> Art. 36 - **O currículo do ensino médio** será composto pela **Base Nacional Comum Curricular** e por **itinerários formativos**, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino (BRASIL, 1996, Art. 36, atualizado pela Lei 13.415/2017, grifos nossos).

Nesse artigo, a LDB suscita o debate sobre a formação geral básica no título IV, que trata da Organização da Educação Nacional, esclarece que os conteúdos curriculares estão a serviço do desenvolvimento de competências, e orienta a definição das aprendizagens essenciais, e não apenas dos conteúdos mínimos a ser ensinados.

O Plano Nacional de Educação – PNE (2014-2024), afirma a necessidade de se estabelecer diretrizes pedagógicas para uma educação básica e de criar uma Base Nacional que orientasse os currículos de todas as Unidades da Federação. Além disso, expõe a necessidade de diversificar o Currículo do Ensino Médio, buscando estimular o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), relacionar a educação formal com a popular e incentivar o uso de novas práticas pedagógicas (BRASIL, 2014).

Mas, o que é currículo? Segundo Melo (2014):

> Currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade. Como quase todos os temas educacionais, as decisões sobre currículo envolvem diferentes concepções de mundo, de sociedade e, principalmente, diferentes teorias sobre o que é o conhecimento, como é produzido e distribuído, qual seu papel nos destinos humanos. (MELO, 2014, p. 1)

Nesta perspectiva, a BNCC (BRASIL, 2017), no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da matemática, aplicada à realidade. Neste contexto, faz-se necessário considerar os aspectos das vivências cotidianas dos alunos do Ensino Médio, envolvidos em diferentes graus, dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular impacta diretamente no dia a dia da sala de aula, orientando os conhecimentos adequados para cada turma e para cada modalidade de ensino. Quanto a área de Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, a BNCC propõe como competência específicas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência

> social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Quanto ao ensino de trigonometria, apresenta-se na BNCC nas Competência 3 e 4, conforme o quadro a seguir:

Quadro 1 - Competências e Habilidades para o ensino de trigonometria (BNCC)

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT308)** Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
Competência Específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.	**(EM13MAT404)** Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: BNCC – Etapa Ensino Médio (BRASIL, 2017)

Neste sentido, segundo a BNCC, as competências gerais são um conjunto de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, que precisam ser desenvolvidas de forma conectadas, em face dos desafios e demandas que o mudo contemporâneo e a vida cotidiana oferecem, promovendo o pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Assim, para garantir o desenvolvimento das competências específicas de cada área do conhecimento, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. (BRASIL, 2017).

Essas habilidades estão relacionadas a diferentes unidades de conhecimento, ou seja, conteúdos, conceitos e processos, que por sua vez são organizados em unidades temáticas. Na BNCC cada habilidade é identificada por um código alfanumérico, conforme descrito a seguir:

EM 13 MAT 308

O primeiro par de letras (EM) indica a etapa de Ensino Médio.

O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos.

A segunda sequência de letras (MAT) indica a área ou o componente curricular, neste caso, MAT = Matemática e suas Tecnologias.

Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Fonte: Adaptado da BNCC (2017)

Desta forma, podemos concluir que o código EM13MAT308, refere-se à oitava habilidade proposta na área de Matemática e suas Tecnologias relacionada à competência específica 3 (três), que pode ser desenvolvida nas três séries do Ensino Médio, conforme definições curriculares. Esta habilidade prever a elaboração e resolução de problemas envolvendo as relações métricas e as noções de congruência e semelhança de triângulos.

O ensino de trigonometria também está presente no Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA). Neste documento curricular, o objeto trigonometria é abordado nas Competências Específicas 1 e 3, e na oitava habilidade a ser desenvolvida no 2º ano do Ensino Médio.

Quadro 2 - Competências e Habilidades para o ensino de trigonometria (DCEPA)

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
CE1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. **CE3** – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar,	(**EM2MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	

Fonte: DCEPA – Etapa Ensino Médio (PARÁ, 2021, p. 239-240).

O documento curricular paraense, etapa Ensino Médio, apresenta como referência a BNCC. Deste modo, a área de Matemática e suas Tecnologias estabelece a continuidade, a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos vivenciados pelos alunos nas etapas anteriores na Educação Básica.

Na Prova Brasil, as competências e habilidades do componente curricular de matemática são avaliados nos eixos: espaço e forma, grandezas e medidas, números e operações e tratamento da informação. Com isso, na matriz de referência de matemática do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), o objeto trigonometria é abordado dentro do eixo espaço e forma, e para o ensino médio apresenta os seguintes descritores:

> D2 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais. (BRASIL, 2022, p. 8)
>
> D5 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente). (BRASIL, 2022, p. 8)

Assim, é possível verificar que o conteúdo trigonometria está presente nas diversas propostas curriculares. Olgin e Groenwald (2020) salientam que os documentos oficiais apresentam uma preocupação com a organização curricular, conforme indicações do Plano Nacional de Educação. Além disso,

> Estes documentos enfatizam a necessidade de o Currículo de Matemática ser desenvolvido de forma a proporcionar aos alunos uma rede de problemas/situações que possibilitem compreender a realidade econômica, social, cultural, política e natural do meio em que vivem. (OLGIN; GROENWALD, 2020, p. 912)

Esta visão das autoras sobre os documentos oficiais, no que tange a concepção curricular de matemática, reflete a realidade prevista na BNCC para o currículo de matemática para o ensino médio. Nesta etapa da educação básica, se propõe o desenvolvimento de uma visão integrada da matemática, considerando a realidade e sua aplicação em diferentes contextos tais como, vivência cotidiana, impacto das tecnologias na vida das pessoas, novidades do mercado de trabalho, diversidade do país e as mídias sociais (BRASIL, 2017).

Godoy e Santos (2012), evidenciam uma preocupação com o pouco espaço que as discussões sobre o currículo de ensino de matemática ocupam no cenário educacional do Brasil. Para corroborar essa preocupação, apontam que até o ano de 2012, o Banco de Teses da CAPES continha oito dissertações de mestrado e três teses de doutorado, envolvendo discussões acerca do currículo de matemática no Ensino Médio.

Nesta perspectiva, os debates sobre os fins da educação matemática ganham ainda mais relevância para a construção do currículo de matemática, principalmente quando se pensa no período de educação obrigatória, que no Brasil corresponde o ensino dos 4 aos 17 anos. É importante salientar que, a matemática possui relevantes contribuições no que diz respeito aos fins gerais da educação e as necessidades da sociedade, como o preparo do indivíduo para a vida adulta em sociedade, de modo a reconhecer a utilidade da matemática em sua vida social e cotidiana, além de contribuir com desenvolvimento do raciocínio do indivíduo.

Para Godoy e Santos (2012), os trabalhos teóricos, além de buscar estruturar o sistema curricular têm se preocupado com a questão dos fins da educação matemática. Dentre os fins da educação, os autores enumeram que as questões relacionadas as dimensões culturais, formativa, cognitiva, política e social, precisam ter prioridades nas reflexões sobre a organização curricular.

Além disso, embora os objetivos da educação matemática sejam diversos, podemos afirmar que, quanto a natureza pragmática, objetiva-se a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da matemática. Quanto ao cunho científico, visa o desenvolvimento da educação matemática enquanto campo de investigação e produção de conhecimentos. Nesta perspectiva, o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo visa, com base em aplicações cotidiana, que o aluno consiga agregar os valores necessários para uma base de ensino e vivência em sociedade e fazer as relações matemáticas com o seu dia a dia como proposta de interação e assimilação do conhecimento, pelo contexto de ensino e aprendizagem.

Diante dos expostos, apresentaremos a seguir uma análise da forma com que o objeto matemático em questão é abordado nos livros didáticos do Ensino Médio.

3.4. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

O Livro Didático (LD) é um grande auxiliador na construção do conhecimento escolar, pois é nele que o professor busca apoiar-se em sua prática docente, principalmente os iniciantes do magistério. Neste sentido, realizamos uma análise dos livros didáticos de matemática utilizados pelos professores nas turmas do Ensino Médio. A presente análise concentra-se exclusivamente no conteúdo específico das relações trigonométricas.

> A análise de conteúdos de livros didáticos de Matemática pode ser um norte que direciona o professor a realizar suas atividades e ensinar/mediar processos de aprendizagem matemática que desenvolva no estudante o raciocínio crítico-reflexivo-transformador (JANUARIO, 2018, p. 33).

Nesse cenário, segundo Januario (2018,) é importante que os conteúdos abordados no livro didático favoreçam a promoção do currículo escolar orientado pelos documentos oficiais. Além disso, o LD deve potencializar o desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas nos estudantes. Neste sentido, apresentaremos a seguir, uma breve análise da abordagem do conteúdo de trigonometria, presentes em 10 (dez) obras distintas, de diversas editoras e autores, a saber:

Tabela 2: Caracterização dos LD analisados

Livro	Autor(es)	Título	Editora	Ano
LD 1	Luiz Roberto Dante & Fernando Viana	Matemática em contextos	Ática	2020
LD 2	Fábio Martins de Leonardo	Conexões com a matemática	Moderna	2016
LD 3	Rodrigo Balestri	Matemática: Interações e Tecnologia	Leya	2016
LD 4	Luiz Roberto Dante	Matemática: Contextos e Aplicações	Ática	2016
LD 5	Joamir Roberto de Souza & Jacqueline da S. R. Garcia	#contato Matemática	FTD	2016
LD 6	Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz	Matemática para compreender o mundo	Saraiva	2016
LD 7	José Roberto Bonjorno [*et al*]	Matemática completa	FTD	2016
LD 8	Eduardo Chavante & Diego Prestes	Quadrante Matemática	SM	2016
LD 9	Gelson Iezzi [*et al*]	Matemática: Ciências e Aplicações	Saraiva	2014
LD 10	Manoel Paiva	Matemática	Moderna Plus	2010

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

A tabela 3, expõe a quantidades de página que os livros didáticos analisados dispõem para o conteúdo de trigonometria.

Tabela 3: Quantidade de páginas disponíveis para o conteúdo trigonometria

Livro	Quant. Páginas
LD 1	26
LD 2	11
LD 3	14
LD 4	22
LD 5	12
LD 6	13
LD 7	22
LD 8	09
LD 9	07
LD 10	17

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

Nas obras analisadas foi possível constatar uma baixa quantidade de páginas disponíveis para o objeto trigonometria no triângulo, com algumas obras dispondo de menos de dez páginas para o conteúdo, a exemplo dos livros LD 08 e LD 09, que apresentam nove e sete páginas, respectivamente. Com efeito da pouca disponibilidade de espaço nos LD para a temática em questão, é perceptível também a presença de poucas atividades, a exemplo do que ocorre no LD 09 que dispões de sete páginas e sete questões que abordam o conteúdo de trigonometria no triângulo.

A presente análise buscou relacionar as questões sobre o ensino de trigonometria aos níveis da Taxionomia de Bloom. Segundo Orsi, Santos e Lunkes (2016), a Taxonomia de Bloom sustenta-se sobre uma classificação dos níveis de aprendizagem baseada em uma interpretação sistemática de uma área de conhecimento, assim como também busca organizar os níveis de aquisição das habilidades cognitivas possibilitando a mensuração da realização dos objetivos educacionais.

Ferraz e Belhot (2010), apresentam os seis níveis da Taxionomia de Bloom:

> 1. Lembrar: Relacionado a reconhecer e reproduzir ideias e conteúdos [...].
> 2. Entender: Relacionado a estabelecer uma conexão entre o novo e o conhecimento previamente adquirido [...].
> 3. Aplicar: Relacionado a executar ou usar um procedimento numa situação específica e pode também abordar a aplicação de um conhecimento numa situação nova [...].
> 4. Analisar: Relacionado a dividir a informação em partes relevantes e irrelevantes, importantes e menos importantes e entender a inter-relação existente entre as partes [...].
> 5. Avaliar: Relacionado a realizar julgamentos baseados em critérios e padrões qualitativos e quantitativos ou de eficiência e eficácia [...].

> 6. Criar: Significa colocar elementos junto com o objetivo de criar uma nova visão, uma nova solução, estrutura ou modelo utilizando conhecimentos e habilidades previamente adquiridos [...] (FERRAZ e BELHOT, 2010, p. 429).

Neste sentido, quanto ao ensino de matemática, mais especificamente ao conteúdo de trigonometria no triângulo, apresentamos na tabela a seguir, um levantamento de como as questões presentes nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio estão distribuídas entre os níveis da Taxionomia de Bloom.

Tabela 4: Quantidade de questões por Níveis da Taxionomia de Bloom

Níveis	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10
Conhecimento	3	1	0	2	0	0	0	0	0	1
Compreensão	2	1	1	2	2	0	0	0	0	1
Aplicação	32	19	24	21	24	26	26	20	6	34
Análise	5	0	4	2	1	3	2	5	1	1
Avaliação	2	0	0	0	0	1	2	0	0	1
Criação	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
TOTAL	**45**	**21**	**29**	**27**	**28**	**30**	**31**	**25**	**7**	**39**

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

Ao analisar a quantidade de questões entre os níveis da Taxionomia de Bloom, é notório que o maior quantitativo se concentra no **Nível Aplicação**. Neste sentido, há uma baixa quantidade de atividades voltadas para os níveis do Conhecimento e Compreensão. Estes dois níveis são fundamentais para o decorrer da abordagem do conteúdo a ser estudado, pois é nesta fase que o professor busca realizar um diagnóstico inicial a respeito do que os alunos compreendem, lembram e entendem sobre a temática trabalhada, buscando estabelecer uma conexão com os conhecimentos previamente adquiridos.

Além disso, é perceptível nos dez livros de matemática, que há uma baixa exigência dos níveis mais elevados da Taxionomia Bloom, principalmente nos níveis da **Avaliação** e **Criação**. Estes dois níveis são fundamentais para o desenvolvimento das habilidades intelectuais do estudante, pois instiguem a resolução de situações complexas de forma criativa, antecipando-se aos fatos e buscando a solução mais adequada aos problemas matemáticos.

A tabela 5, contém a quantidade de questões matemáticas presentes nos livros didáticos analisados que são classificadas como contexto matemático e contexto não matemáticos.

Tabela 5: Quantidade de questões de Contexto Matemático e Contexto não Matemático

Questões	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10
Contexto matemático	43	21	29	27	26	30	31	25	6	39
Contexto não matemático	2	0	0	0	2	0	0	0	1	0
TOTAL	**45**	**21**	**29**	**27**	**28**	**30**	**31**	**25**	**7**	**39**

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

Verifica-se na tabela 5 que em todos os livros analisados a quantidade de questões de contexto matemático apresentam-se quase que a totalidade das questões presentes nos livros, no que concerto ao objeto matemático trigonometria. Segundo Nascimento (2018) para refletirmos a importância de promover um ensino da matemática contextualizado precisamos nos remeter à origem etimológica da palavra contexto, que vem do latim *contextus*, que apresenta como significado, “relação de dependência entre as situações que estão ligadas a um fato ou circunstância” (CONTEXTO, 2022).

Desta forma, podemos afirmar que “sempre teremos um contexto, pois um fato nunca é isolado, mas está situado numa conjuntura que o justifica e o influencia” (NASCIMENTO, 2018, p. 1). Para a autora, a ideia de contextualização do ensino de matemática, na maioria das vezes, está associada apenas a conexões estabelecidas entre a matemática e o cotidiano. Com isso, este entendimento de uma contextualização do ensino de matemática voltado apenas para situações cotidianas dos alunos restringe o conhecimento matemática sistematizado. Desta forma, segundo Nascimento (2018), é preciso mostrar ao educando os contextos de outras áreas do conhecimento escolar, tais como: históricos, socioculturais, econômicos, políticos, contextos do cotidiano extraescolar e contextos da própria matemática.

Além disso, outro fator analisado nos livros didáticos foram as questões que apresentam excesso de informações e/ou informações desnecessária em seu comando. Desta forma, 50% das obras analisadas apresentam, ainda que em pouca quantidade, questões com informações desnecessárias para resolução, conforme indicado na tabela a seguir:

Tabela 6: Quantidade de questões informações desnecessárias

Questões	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10
Informações Desnecessárias	2	1	1	0	1	2	0	0	0	0

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

Assim, ressaltamos que para resolver questões matemáticas é importante ler e compreender o enunciado, identificar os dados, elaborar um plano de resolução, organizar a solução e validar a resposta. Para isso, é importante saber que nem todas as informações contidas na questão são necessárias para a resolução. Neste sentido, caso a situação tenha informações desnecessárias, faz-se necessário uma leitura atenciosa para identificar as informações relevantes para a solução da questão.

Na presente análise, nos detemos também, em analisar as questões e atividades de matemáticas, que se apresentam dentro da Matriz de Referência da Prova Brasil. É importante ressaltar que as avaliações de larga escala, a exemplo da Prova Brasil, já fazem parte do dia a dia escolar e foram estabelecidas, segundo o MEC – Ministério da Educação e Cultura, com o objetivo de "[...] avaliar a Educação Básica brasileira e contribuir para a melhoria de sua qualidade" (BRASIL, 2011, p. 8).

A tabela 7 expõe o quantitativo de questões disponíveis nos livros analisados, que atendem a Matriz de Referência da Prova Brasil:

Tabela 7: Quantidade de questões de multiplica escola e do tipo Prova Brasil

Questões	**LD1**	**LD2**	**LD3**	**LD4**	**LD5**	**LD6**	**LD7**	**LD8**	**LD9**	**LD10**
Múltipla escolha	0	9	0	4	1	0	6	7	0	8
Prova Brasil	2	0	0	0	2	0	0	0	1	0

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

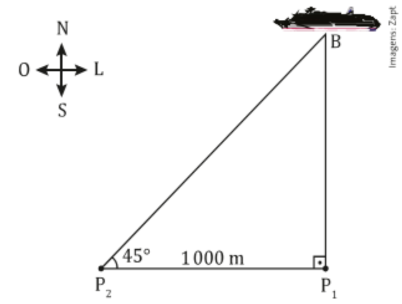
Observando a tabela 7, é possível constatar que os livros didáticos analisados apresentam uma baixa quantidade de questões de múltipla escolha (6 livros) ou nenhuma questão de múltipla escolha (4 livros). Isto nos revela que não é preocupação dos autores destas obras o preparo dos estudantes para as avaliações de larga escala, tais como: ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), Prova Brasil, SisPAE (Sistema Paraense de Avalição Escolar) e outros sistemas estaduais de avaliação, além de concursos públicos e vestibulares, que utilizam, quase que em sua totalidade, questões de múltiplas escolhas no processo avaliativo.

Os itens da Prova Brasil, por exemplo, são elaborados com base numa matriz de referência, que é um documento norteador das habilidades a serem verificadas, as quais são chamadas de descritores. Neste sentido, a Prova Brasil consiste em uma avaliação aplicada a cada dois anos aos alunos concluintes dos ciclos finais da Educação Básica: 5º ano do Ensino Fundamental, 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. Nesta avaliação, os alunos respondem a questões de Língua

Portuguesa, com foco na leitura, e de Matemática, com foco na resolução de problemas.

Figura 16: Questão do tipo Prova Brasil (D5)

24. (UEL–PR) Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição $\mathbf{P_1}$, um barco ancorado no horizonte norte na posição **B**. Nesta posição $\mathbf{P_1}$, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90°, como mostrado na figura a seguir.



Ele corre aproximadamente 1 000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição $\mathbf{P_2}$. Neste novo ponto de observação $\mathbf{P_2}$, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45°.

Qual é a distância P_2B aproximadamente?

a) 1 000 metros
b) 1 014 metros
c) 1 414 metros
d) 1 714 metros
e) 2 414 metros

(SMOLE e DINIZ, 2016, p. 242)

Portanto, no Ensino Médio, tendo em vista a consolidação, ampliação e aprofundamento de aprendizagens essenciais, e os conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe para o ensino de matemática no ensino médio, o desenvolvimento de habilidades específicas relacionadas, principalmente, a raciocinar, representar e comunicar (BRASIL, 2017). Na unidade temática geometria, os estudantes aprendem a localizar e deslocar figuras no plano cartesiano, reduzir figuras, bem como resolver problemas aplicando conceitos de congruência e semelhança de figuras e resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas no triângulo.

Na tabela 8 apresentamos o quantitativo de questões presentes nos livros didáticos analisados, que apresentam, em seu enunciado, linguagem imperativa e linguagem não imperativa.

Tabela 8: Quantidade de questões com linguagem imperativa e linguagem não imperativa no enunciado da questão

Linguagem	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10
Imperativa	3	3	5	4	3	3	5	3	0	4
Não Imperativa	42	18	24	23	25	27	26	22	7	35
TOTAL	**45**	**21**	**29**	**27**	**28**	**30**	**31**	**25**	**7**	**39**

Fonte: Livros Didáticos de Matemática analisados.

De acordo com Agostini (2019), as sentenças com linguagem imperativas nos enunciados das questões possuem uma estrutura morfológica que provocam um ato ilocucionário de ordem, essa ação tem como composição a força diretiva. Dentre as principais expressões imperativas, destacam-se: calcule; resolva; encontre; faça; determine, dentre outras.

Assim, como é possível observar, em todas as obras destacadas o quantitativo de questões que apresentam linguagem não imperativa é muito superior ao quantitativo das questões com linguagem imperativas em seus enunciados. Vemos este indicativo como algo importante e satisfatório, uma vez que os livros didáticos em análise estão favorecendo a interpretação do contexto matemático pelo aluno.

Outrossim, faz-se necessário salientar que a presente análise se limitou somente ao capítulo de cada livro didático de matemática do ensino médio, que tratava no conteúdo específico de trigonometria no triângulo. Portanto, a presente análise não pode ser generalizada a obra completa.

3.5. REVISÃO DE ESTUDOS

Nesta seção apresentamos a revisão bibliográfica acerca do ensino de trigonometria, com o intuído de obtermos um panorama ampliados dos estudos e pesquisas que se tem desenvolvidos a respeito da temática deste trabalho. E assim, embasarmos a nossa fundamentação teórica, item indispensável em qualquer pesquisa científica.

Para isso, realizamos a busca por trabalhos científicos a níveis de Mestrado e Doutorado, publicados no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ e nos repositórios das seguintes instituições: UFOPA: https://repositorio.ufopa.edu.br/; UNB: https://repositorio.unb.br/, UEPA: https://ccse.uepa.br/ppged/, e https://ccse.uepa.br/ppgem/; UFRN: http://repositorio.ufrn.br; UFS: https://ri.ufs.br/; UFMG: http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/, UFMA: http://tedebc.ufma.br/ e UNICAMP: http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/. Nesta fase, a busca pelos escritos foi guiada pelas seguintes palavras chaves: trigonometria, trigonometria no triângulo retângulo, ensino de trigonometria, razões trigonométricas e relações trigonométricas.

Desta forma, o presente levantamento bibliográfico ocorreu no período de fevereiro a novembro de 2022. Para tanto, foram catalogados 07 estudos que abordavam as diversas metodologias de pesquisas, que estão listados no quadro a seguir segundo a ordem cronológica de publicação:

Quadro 3 - Estudos Revisados

Nº	Autor(es)	Título do Estudo	Instituição/ UF	Ano
01	GOMES, Rosana Pereira	O Ensino das Relações Trigonométricas no triângulo por Atividades	UEPA/PA	2013
02	SOUSA, Miguel Angelo Moraes de	Experimentos de trigonometria em sala de aula	UFOPA/PA	2014
03	SANTOS, Ivana Maria Nascimento dos	Processos de ensino e aprendizagem de trigonometria em triângulos quaisquer a partir da engenharia didática	UNIVATES/ RS	2015
04	FERREIRA, Anderson Portal	O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades	UEPA/PA	2018
05	FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves	Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal	UnB/DF	2018
06	MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de	O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra	UEPA/PA	2018
07	LUCENA, Laecio Amaury da Silva	Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico	UFMA/MA	2020

Fonte: Pesquisa Bibliográfica (2022)

As pesquisas foram subdivididas nas seguintes categorias de análise: Estudos Diagnósticos; Estudos Experimentais e Estudos Teóricos/Investigativos, conforme descritos a seguir.

- Estudos Diagnósticos

Os Estudos Diagnósticos buscam analisar e identificar potenciais dificuldades apresentadas pelos alunos no ensino de trigonometria, e assim, apresentar uma proposta para sanar tais dificuldades no percurso do processo de Ensino e Aprendizagem.

- Estudos Experimentais

Os Estudos Experimentais são aqueles apresentados como proposição de atividades, no âmbito do objeto matemático, visando o desenvolvimento das habilidades, competências e cognitivo dos estudantes.

- Estudos Teóricos/Investigativos

Os estudos teórico/investigativos apresentam um processo de investigação a fim de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria.

No quadro a seguir, apresentamos a divisão dos estudos revisados por categorias de análise. A saber:

Quadro 4 - Estudos revisados por categorias de análise

Estudos Diagnósticos	Estudos Experimentais	Estudos Teóricos/Investigativos
Gomes (2013) Feijó (2018)	Gomes (2013) Sousa (2014) Ferreira (2018) Medeiros (2018) Lucena (2020)	Santos (2015)

Fonte: Pesquisa Bibliográfica (2022)

3.5.1. Estudos Diagnósticos

O estudo realizado por Feijó (2018) buscou identificar os principais erros e dificuldades enfrentados pelos alunos do 2º ano do ensino médio das escolas públicas do Distrito Federal na aprendizagem de trigonometria. Segundo a autora, os estudos sobre as dificuldades enfrentadas ao se aprender trigonometria são escassos, não somente no Brasil, mas também no mundo. Como embasamento teórico de sua pesquisa Feijó (2018) utilizou-se dos estudos de Weber (2005), Moore (2010), Demir (2012) e Demir & Heck (2013).

Como objetivo de pesquisa, Feijó (2018) propôs analisar como os alunos veem a trigonometria e quais são os obstáculos enfrentados por eles no seu aprendizado. Para alcançar os objetivos traçados na pesquisa, a autora fez uso de uma metodologia de caráter misto, qualitativo e quantitativo. Os dados quantitativos foram obtidos por meio de um questionário de múltipla escola, os quais foram analisados pela Teoria Clássica dos Testes (TCT) e pela Teoria de Resposta ao Item (TRI). Quanto a parte qualitativa, a autora realizou uma entrevista com os sujeitos da pesquisa, que foram os alunos do 2º ano do Ensino Médio matriculados da rede pública de ensino do Distrito Federal.

Para alcançar os objetivos de uma pesquisa, é necessário que ela esteja bem estruturada. Neste sentido, Feijó (2018), no intuito de identificar os principais problemas no aprendizado de trigonometria, elaborou uma matriz de referência, que serviu de base para a construção de um questionário da avaliação diagnóstica.

Para isso, segundo a autora os alunos deveriam ser avaliados dentro dos subtemas escolhidos apresentados a seguir.

Quadro 5 - Subtemas escolhidos

Subtemas	
T_1	Razões trigonométricas
T_2	Ângulos e plano cartesiano
T_3	Semelhança de triângulos
T_4	Definição de radiano
T_5	Funções trigonométricas

Fonte: Feijó (2018, p. 23)

Além disso, segundo Feijó (2018,) foi necessário traçar as competências e habilidades que contemplassem o que se queria analisar no decurso da investigação. Em razão disso, a autora selecionou duas competências do Currículo em Movimento da SEE - DF[5] e quatro habilidades da matriz de referência usada na disciplina de Cálculo 1 do departamento de matemática do Campus Darcy Ribeiro da Universidade de Brasília – UnB.

Quadro 6 - Habilidades e Competências selecionadas

Habilidades	
H_1	Identificar linguagens e traduzir sua significação; interpretar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes.
H_2	Interpretar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras.
H_3	Ler e interpretar dados e informações e expressar-se com clareza e precisão.
H_4	Fazer inferências indutivas, dedutivas e analógicas.

Competências	
C_1	Reconhecer situações que podem ser escritas em linguagem matemática e modelá-las.
C_2	Raciocinar, expressar-se matematicamente e aplicar métodos matemáticos.

Fonte: Feijó (2018, p. 23)

[5] SEE – DF: Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal.

Feijó (2018) também elencou os obstáculos mais perceptíveis no processo de aprendizagem da trigonometria. Cabe ressaltar que as escolhas dos presentes obstáculos foram pautadas na experiência adquirida, enquanto professora de matemática, pela pesquisadora.

Quadro 7 - Obstáculos selecionados

Obstáculos	
Diferenciar as razões trigonométricas entre sim	O_1
Ampliar as razões trigonométricas para qualquer ângulo	O_2
Identificar coordenadas de ponto sobre o círculo trigonométrico	O_3
Relacionar triângulos semelhantes no círculo trigonométrico	O_4
Dominar transformações de graus para radianos e vice-versa	O_5
Reconhecer funções trigonométricas e suas características e comportamentos	O_6

Fonte: Feijó (2018, p. 24

Definido os temas a serem trabalhados, as habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos alunos, a autora elaborou um questionário contendo 15 questões de múltipla escola, como uma forma de avaliação diagnóstica. As questões foram selecionadas a partir da matriz de referência da prova Brasil de 2013 disponível na Plataforma do INEP[6], objetivando evidenciar as principais lacunas no aprendizado de trigonometria. Para isso, fez-se necessário definir as habilidades específicas para cada item.

Quadro 8 - Habilidades específicas para o ensino de trigonometria

Item	**Habilidade específica**	**Tema**	**Habilidade**	**Obstáculo**
1	Reconhecer cateto oposto e hipotenusa e saber lidar com razões diretamente proporcionais	T_1	H_1	O_1
2	Reconhecer cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa e diferenciar seno de cosseno	T_1	H_1	O_1
3	Entender a definição de radiano	T_4	H_1	O_5
4	Identificar o comprimento da circunferência de raio 1 como 2π e analisar os quadrantes correspondentes a um certo intervalo da reta real	T_2	H_2	O_3
5	Identificar a existência de até dois pontos de ordenada sen y_0 para y_0 fixado	T_2	H_2	O_2
6	Reconhecer o comportamento das funções trigonométricas dentro de um domínio específico	T_5	H_1	O_7
7	Identificar as raízes das funções seno e cosseno em um intervalo determinado	T_5	H_3	O_7
8	Reconhecer semelhança de triângulo do tipo lado, ângulo, lado (LAL) e, a partir da proporção constante	T_3	H_3	O_4 e O_5

[6] INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

	entre os lados correspondentes, determinar as suas medidas			
9	Fazer a transformação de medida de graus para radianos e identificar o comprimento de uma circunferência de raio unitário como 2π	T_4	H_3	O_5
10	Identificar as coordenadas de pontos sobre a circunferência em função de seno e cosseno	T_2	H_2	O_3
11	Identificar a lei fundamental da trigonometria a partir do teorema de Pitágoras	T_5	H_3	O_2
12	Reconhecer o gráfico da função seno a partir da sua lei de formação	T_5	H_2	O_6
13	Reconhecer as características da função cosseno a partir da lei de formação e do gráfico	T_5	H_1	O_6
14	Identificar coordenadas de um ponto em função de seno e cosseno no círculo trigonométrico após mudança de posição	T_2	H_4	O_3
15	Reconhecer a periodicidade das funções seno e cosseno	T_5	H_1	O_6

Fonte: Feijó (2018, p. 25)

Portanto, a pesquisa realizada por Feijó (2018) revelou que os estudantes apresentam dificuldades e erros, desde definições e conceitos até multiplicações, inferências e generalizações da trigonometria. Tais problemas no aprendizado são perceptíveis desde os fundamentos da trigonometria, segundo a autora, os alunos apresentaram desempenho insatisfatório à medida que as habilidades específicas dos itens se tornavam mais complexas.

3.5.2. Estudos Experimentais

O estudo realizado por Gomes (2013), apresenta como problemática e justificativa o fato de frequentemente, o ensino da matemática assumir um papel na sociedade de exclusão e de seleção, tornando difícil o acesso dos estudantes a esse conhecimento, aliado ao baixo nível do desempenho dos alunos paraense na avaliação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)[7]. Para direcionamento de sua pesquisa, a autora apresentou a seguinte questão norteadora: Como o ensino das relações trigonométricas em um triângulo por meio de atividades,

[7] Criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), é realizado a cada dois anos, como o objetivo de medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

pode possibilitar a construção do conhecimento dos alunos do 2º ano do Ensino Médio?

Em face da problemática levantada, Gomes (2013) propôs como objetivo: verificar como um conjunto de atividades sobre o ensino das Relações Trigonométricas pode favorecer a construção do conhecimento de alunos do 2° ano do ensino médio no processo de ensino e aprendizagem matemática. Para isso, a autora realizou sua pesquisa junto a 100 (cem) alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do município de Belém/PA, com idades entre 15 a 19 anos, sendo que que 51% dos estudantes são mulheres e 49% são do sexo masculino.

Quanto aos procedimentos metodológicos utilizados por Gomes (2013), em sua pesquisa, para a construção de seu objeto de estudo, a autora faz uso dos pressupostos da Engenharia Didática de Michelle Artigue (1990), Pais (2008) e Almouloud (2007), dividida em quatro em seções: a primeira, denominada Análise Prévias, traz os resultados de um estudo da arte realizado a luz das Relações Trigonométricas, de um questionário aplicado junto a 100 (cem) professores de Matemática e 100 (cem) alunos do 3° ano do ensino médio da rede pública; na segunda seção, Concepção e Análise *a Priori*, a pesquisadora produziu atividades, listas de exercícios, e as atividades de fixação; a terceira seção, corresponde a fase de Experimentação, onde são destacados como foram desenvolvidos os encontros, e para tanto, foram anotados com o auxílio de um bloco de anotações e uma câmera digital, todos os questionamentos, registos de conclusão, e atitudes dos alunos perante o ato da aplicação das atividades; e por fim, a quarta seção, consistiu nas Análises *a Posteriori* e Validação, que por sua vez, são destacados as coletas e observação dos dados obtidos para validar a sequência didática.

Gomes (2013), concluiu que os resultados através da análise *a posteriori*, que antes do conjunto de atividades os alunos não conseguiram resolver nenhuma das 10 (dez) questões propostas no pré-teste, e que depois da aplicação da sequência didática, os alunos obtiveram um resultado positivo quanto ao desempenho no pós-teste. Dessa forma, pôde pontuar que esta metodologia de ensino possibilitou um melhor desempenho dos alunos, no que diz respeito ao processo de aprendizagem das relações trigonométricas.

Gomes (2013), conclui que devido à existência de limitações e dificuldades surgidas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, mais precisamente no ensino das Relações Trigonométricas, e para melhor atender as necessidades dos alunos, apresentaram como sugestão a aplicação da Atividade de Revisão dos elementos de um Triângulo Retângulo como sendo a primeira atividade da sequência didática, pois concluiu que ao final da pesquisa esta atividade seja mais bem aproveitada quando utilizada antes de iniciar o conjunto de atividades.

Sousa (2014), propôs em sua pesquisa verificar a influência de atividades concretas e de ambientes computacionais no processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria. Para isso, o autor auxiliou os alunos na construção de um teodolito escolar para utilização na aferição dos ângulos de inclinação, para em seguida, medir a altura de algum objeto usando os conhecimentos trigonométricos. Além disso, Sousa (2014), escolheu o GeoGebra como programa computacional para auxiliar no desenvolvimento das atividades.

Segundo o autor, os professores, em especial os de matemática, possuem diversas opções de materiais concretos que podem ser trabalhados em sala de aula nos diversos temas relacionados a disciplina de matemática. Para Sousa (2014, p. 30), “o uso de material concreto faz com que o estudante perceba aspectos do assunto estudado sem abstrações excessivas”. Além disso, “o uso de ambientes computacionais pode proporcionar mais motivação para o estudante” (SOUSA, 2014, p. 30). Desta forma, o uso da tecnologia digitais em sala de aula, além de auxiliar o professor no processo de ensino e aprendizagem, é uma ferramenta que contribui para a independência dos estudantes na busca pelo conhecimento.

O estudo de Sousa (2014) foi desenvolvido com 55 alunos do 2° ano do ensino médio, em uma escola da rede estadual de ensino do estado do Pará, no município de Santarém/PA. Com direcionamento da pesquisa, o autor buscou responder aos seguintes questionamentos norteadores: o que os estudantes do 2° ano do Ensino Médio lembram sobre Trigonometria do 9° ano do Ensino Fundamental? O uso do programa computacional GeoGebra ou de materiais concretos favorece a aprendizagem do tema?

Sousa (2014) levantou algumas hipóteses para o seu problema de pesquisa:

> • Os estudantes do 2° Ano do Ensino Médio lembram pouco da Trigonometria supostamente vista no 9° do Ensino Fundamental.
> • Atividades com ambientes computacionais podem ter boa aceitação e bom rendimento com estudantes do 2° Ano do Ensino Médio no ensino de Trigonometria.
> • Atividades com materiais concretos podem ter boa aceitação e bom rendimento com estudantes do 2° Ano do Ensino Médio no ensino de Trigonometria. (SOUSA, 2014, p. 48)

Ao término da pesquisa, Sousa (2014) constatou que durante o levantamento diagnósticos os alunos apresentaram conhecimento prévio, adquirido no ensino fundamental, abaixo do esperado. No entanto, após a aplicação das atividades os estudantes obtiveram resultados satisfatório no que foi proposto para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo.

Na mesma perspectiva, Ferreira (2018), aponta com problema, o ensino através da realização de exercícios repetitivos, memorização de definições e fórmulas amplamente consolidada em nosso sistema educacional, mas que, não tem sido traduzido pelos resultados, como os vistos nas avaliações em larga escala: SisPae, Prova Brasil e Enem.

No trabalho desenvolvido por Ferreira (2018), o objetivo foi avaliar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, por meio de atividades estruturadas, tem no ensino de relações métricas no triângulo retângulo no 9º ano do ensino fundamental. Ferreira (2018), trabalhou com 100 alunos, egressos do Ensino Fundamental, que cursam o 1° ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do Município de Belém/Pará. Quanto ao gênero, a participação de 57% feminino e 43% masculino com idades entre 13 a 23 anos, entretanto 86% estavam na faixa etária entre 15 a 17 anos e, com uma concentração de 44% com a idade de 16 anos.

Para responder à questão de pesquisa, Ferreira (2018) se apoiou na ideia de construção dos conceitos da Didática da Matemática, na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986), na noção de Transposição Didática de Yves Chevallard (1991) e no uso das novas tecnologias da informação e comunicação (TIC).

No trabalho de Ferreira (2018), os resultados da comparação apontam para um aumento considerável nas notas do pós-teste. De acordo com o autor, os resultados foram comprovados estatisticamente e, além disso, constatou-se que os fatores socioeconômicos não tiverem influência nos resultados obtidos. Desta forma, Ferreira (2018) conclui que a metodologia de ensino aplicada na pesquisa teve efeito satisfatório. O autor sugere que novas pesquisas na área sejam realizadas e que a sequência didática seja reaplicada com a utilização de calculadora por todos os alunos, objetivando novas formas de ensinar e aprender.

Seguindo com o mesmo pensamento dos autores anteriores, Medeiros (2018), enfatiza a importância do conhecimento matemático para a sociedade em face do papel que ela desempenha no campo da ciência e na vida das pessoas. No entanto, enquanto disciplina, a matemática não tem despertado o gosto e interesse da maioria dos alunos, visto os altos índices de reprovação escolar e os baixos rendimentos obtidos nas avaliações externas na disciplina de matemática.

O autor pontua como questão norteadora para sua pesquisa o seguinte questionamento: a aplicação de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra favorece ao aluno do 9º ano do ensino fundamental à transposição de conhecimento para a construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo? E como objetivo, Medeiros (2018) buscou investigar uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, com vistas à construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo.

A pesquisa de Medeiros (2018) foi realizada em uma escola pública de Ensino Fundamental, localizada na zona urbana do município de Marabá/PA, desenvolvida inteiramente no laboratório de informática. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma turma do turno matutino, com faixa etária de 13 a 15 anos.

Medeiros (2018), fundamenta sua pesquisa nos princípios da Didática da Matemática, especialmente na Teoria das Situações Didáticas, na noção de Transposição Didática e nas reflexões acerca do uso das novas tecnologias (TIC) na educação. Seus autores bases foram: Almouloud (2007), Guy Brousseau (1986), Freitas (2016), Pais (2008), Borba e Penteado (2001), Yves Chevallard (1991) e na Engenharia Didática nos princípios propostos por Artigue (1990).

Medeiros (2018), adotou como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática conforme os estudos de Michelle Artigue (1988 e 1990) e utilizou os métodos qualitativo e quantitativo.

Segundo Medeiros (2018), a sequência didática aplicada favoreceu a transposição didática do objeto matemático, bem como possibilitou a construção dos conceitos básicos da trigonometria, especialmente das razões trigonométricas.

Além disso,

> os resultados obtidos nesta pesquisa evidenciam que o uso de ferramentas tecnológicas, especialmente os softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra, auxiliam a construção de conceitos básicos ligados à trigonometria, constituindo-se como um recurso didático valioso ao professor no sentido de promover uma transposição didática mais efetiva. (MEDEIROS, 2018, p. 119)

Nesta perspectiva, uma sequência didática bem estruturada torna-se uma ferramenta indispensável a qualquer docente de matemática que deseja realizar uma abordagem diversificada na introdução do conteúdo trigonometria no triângulo retângulo.

Lucena (2020) realizou sua pesquisa a partir das dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem dos conteúdos de trigonometria na educação básica. O autor enfatiza que essas dificuldades podem gerar problemas também no ensino superior, durante sua formação profissional. Para isso, Lucena (2020) desenvolveu uma sequência didática para o ensino de trigonometria, objetivando diminuir a distância entre o ensino e a aprendizagem deste conteúdo.

Para Lucena (2020), com a aplicação a sequência didática:

> [...] foi possível verificar as inúmeras dificuldades e também os conhecimentos que os alunos e alunas possuem, os quais não são possíveis de se perceber totalmente no dia a dia escolar, diante de várias complicações, como o tempo, falta de planejamento, desinteresse e da grande quantidade de alunos em sala de aula. (LUCENA, 2020, p. 31)

Desta forma, o autor destaca que a o processo de resolução de problemas em sala de aula é de grande valia, pois, além de melhorar o desempenho dos alunos, lhes proporcionam mais segurança na resolução das atividades. Lucena (2020) enfatiza que durante o processo de aplicação da SD, a maior dificuldade apresentada pelos alunos foi na leitura e interpretação dos enunciados das questões, problema que foi amenizado com o auxílio do professor.

3.5.3. Estudos Teóricos / Investigativos

Sobe a ótica da Engenharia Didática, Santos (2015) desenvolveu sua pesquisa com o objetivo de investigar a produtividade de uma sequência didática relacionada ao tema trigonometria em triângulos quaisquer, junto aos alunos de 2º ano do Ensino Médio, de uma escola da rede pública de Santana-AP. A autora buscou realizar esta investigação em virtude dos índices preocupantes da educação brasileira, relacionados ao baixo desempenho matemático dos estudantes nas avaliações de larga escala.

Para a autora, um dos fatores culminantes para o insucesso dos alunos nas avaliações externas é forma como a disciplina de matemática tem sido apresentada aos alunos. Em sua maioria das vezes como um conjunto de símbolo e regras a serem seguindo, de forma mecânica, abstrata e descontextualizada do contexto social dos aprendizes. A trigonometria, por exemplo é um vasto campo do conhecimento matemático com de aplicabilidades em outras áreas, como a Física e Astronomia, além do campo geométrico.

Santos (2015) descreve o Ensino da Matemática, as investigações desenvolvidas no campo do ensino da trigonometria, e as aplicações da trigonometria em contextos diversos. Além disso, faz um estudo sobre as dificuldades e obstáculos no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo em questão, sob a ótica dos professores e alunos.

Para isso, autora aplicou uma avaliação diagnóstica com o intuito de verificar quais as dificuldades e os conhecimentos dos alunos com relação a temática estudada e, constatou que os estudantes:

> [...] apresentavam dificuldades na aprendizagem, sobretudo em questões relacionadas aos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, como, por exemplo, aplicar corretamente as leis trigonométricas e pequenos erros de cálculos matemáticos. (SANTOS, 2015, p. 95)

No entanto, Santos (2015), ao final de sua pesquisa, após a aplicação das cinco atividades que compunham a sequência didática, afirma que:

> [...] o trabalho docente, apoiado nos pressupostos da Engenharia Didática através das situações didáticas, possibilitou investigar a problemática envolvendo os processos de ensino e aprendizagem da trigonometria em triângulos quaisquer, bem como os aspectos que ocorriam na construção e aquisição do conhecimento dos alunos. (SANTOS, 2015, p. 97)

Neste sentido, é possível afirmar que segundo a pesquisa desenvolvida pela autora, a sequência didática desenvolvida, auxiliou de forma significativa no desempenho dos alunos na aprendizagem de trigonometria.

Portanto, nos estudos analisados nas três categorias (diagnósticos, experimentais e teóricos/investigativos), após a aplicação das sequências didáticas e realizada as análises dos dados, foi possível identificar que as notas obtidas nos pós-testes foram significativamente melhores que as dos pré-testes, constatando assim, que as metodologias de ensino utilizadas nas pesquisas surtiram efeitos, levando a melhora no desempenho dos alunos.

Neste sentido, é fundamental o desenvolvimento de sequências didática para o ensino de matemática, particularmente para o conteúdo de trigonometria, que contemple diferentes níveis de dificuldades. Estas sequências devem constar de uma lista de questões com enunciados para que os discentes possam analisar e interpretar os dados, para em seguida montar um modelo matemático que seja viável para a resolução das questões propostas.

A seguir, apresentamos os aspectos matemáticos da trigonometria, item indispensável para a elaboração da Sequência Didática.

3.6. CARACTERIZAÇÃO DOS DOCENTES, COLABORADORES DA PESQUISA

Com o intuito de identificar a realidade do processo de ensino e aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo, aplicamos no período de abril e maio de 2022 um questionário, como instrumento de pesquisa a 53 professores de matemática com experiência na docência no 2º ano do Ensino Médio, a fim de realizarmos um levantamento com relação ao perfil dos docentes pesquisados, de modo a verificar: sexo, faixa etária, tempo de formação e atuação profissional na educação básica. Além disso, identificar as metodologias utilizadas no ensino de trigonometria, bem como as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos ao estudarem a temática em questão

Geograficamente os docentes consultados atuam nos municípios paraense de Ananideua (1), Altamira (3), Belém (2), Canaã dos Carajás (4), Garrafão do Norte (1), Goianésia do Pará (1), Igarapé-Mirim (1), Itaituba (4), Itupiranga (1), Jacundá (2), Marabá (7), Maracanã (1), Parauapebas (21), Rondon do Pará (2), São Miguel do Guamá (1) e Tailândia (1).

Inicialmente, constatamos que há uma predominância, entre os docentes que lecionam a disciplina de matemática, de professores do sexo masculino, conforme ilustrado na tabela a seguir:

Tabela 9: Distribuição dos professores por sexo

SEXO	%
Feminino	35,8%
Masculino	64,2%
TOTAL	**100%**

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Desta forma, ao analisarmos este percentual, podemos apontar que há um número superior de professores do sexo masculino, que lecionam a disciplina de matemática, atuando nas escolas da rede pública do Estado do Pará. Estes dados não correspondem aos apresentados pelo Censo Escolar realizado no ano de 2020. Segundo o (INEP, 2020), do total de professores atuantes no ensino médio, 57,8% são do sexo feminino e 42,2% do sexo masculino. Neste caso, é importante frisar que o levantamento realizado pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira levou em consideração o total de docentes atuantes em todas as disciplinas, e não especificamente na disciplina de matemática.

Na tabela a seguir, pode-se constatar que, com relação a faixa etária e o sexo dos participantes desta pesquisa, a distribuição das idades se concentram nas faixas de 31 a 35 anos e 41 a 45 anos, equivalendo a 49% do total dos consultados.

Tabela 10: Número de docentes do ensino médio pesquisados, segundo a faixa etária e o sexo

Sexo	Intervalos de Idades							
	26 – 30 Anos	31 - 35 anos	36 - 40 anos	41 - 45 anos	46 - 50 anos	51 - 55 anos	56 - 60 anos	61 - 65 anos
Feminino	3	5	3	3	2	2	0	1
Masculino	1	11	5	7	4	2	4	0
TOTAL	**4**	**16**	**8**	**10**	**6**	**4**	**4**	**1**

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Em relação à faixa etária, foi possível constar que a maioria dos professores consultados se concentram nas faixas de 31 a 45 anos, e assim, podemos inferir que estes docentes adquiriram o saber da experiência, desenvolvido no exercício de suas funções e práticas profissionais. Para Gomes (2013, p. 36), "esse saber é limitado por ser individual e não comprovados cientificamente, mas contribui para o saber ensinar". Dessa forma, o saber docente adquirido torna-se imprescindível para um desempenho melhor da prática docente. Ressaltamos que estes dados são corroborados pelo Censo Escolar do ano de 2020, indicando que a distribuição das idades dos docentes brasileiros que lecionam no ensino médio, concentra-se nas faixas de 30 a 39 anos e de 40 a 49 anos (INEP, 2020).

Constata-se também que todos os professores consultados possuem formação em nível superior na disciplina de matemática.

Tabela 11: Escolaridade dos docentes de matemática do Ensino Médio

Formação Acadêmica				
Escolaridade	Nível Superior	Pós-Graduação *Lato Sensu*	Mestrado	Doutorado
Quantidade	53	43	3	0
Percentual %	100%	81,1%	5,7%	0%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Em tratando-se de Brasil, de acordo com o Inep (2020), dos docentes que atuam no ensino médio, 97,1% têm nível superior completo. Além disso, segundo o indicador de adequação da formação docente para o ensino médio, um dos melhores resultados do indicador de adequação da formação docente são observados para a disciplina de Matemática com um percentual de 77,2%.

Quanto ao tempo de serviço, 42% dos professores apresentam entre 6 a 15 anos de experiência em sala de aula, enquanto que, 4% estão atuando na função docente a menos de um ano.

Tabela 12: Distribuição dos professores por tempo de serviço

Tempo de Serviço	%
Menos de um ano	4%
1 a 5 anos	13%
6 a 10 anos	21%
11 a 15 anos	21%
16 a 20 anos	17%
21 a 25 anos	11%
26 a 30 anos	9%
31 a 35 anos	2%
Mais de 35 anos	2%
TOTAL	**100%**

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Os presentes dados revelam que a maioria dos docentes consultados possuem o saber da experiência adquiridos em sala de aula, favorecendo, assim, o desenvolvimento da sua própria habilidade em ensinar. No entanto, cabe salientar que “somente esse saber não melhorara o processo de ensino e aprendizagem, pois o docente necessita também de outros saberes proveniente de vários meios, como por exemplo, da formação profissional” (GOMES, 2013, p. 37).

Quando questionados sobre o método utilizado para introduzir os conteúdos nas aulas de matemática, a maioria dos professores iniciam o tema partindo de uma situação problema para depois introduzir o assunto.

Tabela 13: Método utilizado para a introdução dos conteúdos nas aulas de matemática

Métodos	**%**
Com uma situação problema para depois introduzir o assunto	58,5%
Pelo conceito seguido de exemplos e exercícios	32,1%
Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo	7,5%
Com jogos para depois sistematizar os conceitos	1,9%
TOTAL	**100%**

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Desta forma, conforme demonstrado nos dados acima, é preocupante o fato de que 32,1% dos docentes iniciarem as aulas de matemática pelo conceito seguido de exemplos e exercícios. Isto revela que os mesmos não contextualizam suas aulas, mostrando uma prevalência do ensino tradicional, pautado na memorização de fórmula e conceitos, aulas expositivas e desvinculada da vida cotidiana do aluno.

Para Gaya e Freitas (2020), esta concepção objetiva a transmissão dos padrões, normas e modelos dominantes, e cujos conteúdos escolares não estão presentes na realidade social e na capacidade cognitiva dos alunos, sendo impostos como verdade absoluta. Nesse contexto, o ensino e aprendizagem são processos paralelos, mas que não estão estreitamente relacionados.

Ao serem perguntados sobre a forma que selecionam os conteúdos de matemáticas para trabalhar em sala de aula, 72% responderam que o fazem a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e 53% utilizam o livro didático.

Tabela 14: Você seleciona os conteúdos de matemática a partir de que?

Respostas (pode ser indicado mais de uma opção)	**%**
Base Nacional Comum Curricular – BNCC	72%
Livro Didático	53%
Caderno de orientações da rede	34%
Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN	17%
Outros	9%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Destacamos que nesta questão os docentes poderiam fazer a indicação de mais de uma opção de seleção de conteúdo. Assim, apesar de que 72% dos docentes indicarem que fazem uso da BNCC no ato da escolha dos conteúdos, nos chamou atenção o fato de mais da metade (53%) dos docentes fazerem esta seleção utilizando o livro didático. Segundo Melo (2014), este ato pode-se caracterizar como uma opção curricular centrada mais conhecimento e menos na aprendizagem. Segundo a autora, esta é uma prática que ainda predomina em muitas salas de aulas.

Sobre as principais forma de avaliação que costumam utilizar para avaliar os alunos, 98% dos docentes responderam que fazem uso da prova escrita e 81% realizam trabalhos individuais ou em grupos. Neste questionamento, os professores poderiam selecionar mais de uma opção, caso fosse necessário.

Tabela 15: Formas de avaliação que os professores costumam aplicar/utilizar (marque mais de uma opção, se necessário)

Formas de Avaliação (pode ser indicado mais de uma opção)	**%**
Prova escrita	98%
Trabalhos em grupo ou individuais	81%
Produções no caderno	66%
Autoavaliação	30%
Prova oral	15%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Percebe-se que, em quase sua totalidade, os docentes ainda fazem uso da prova escrita como método avaliativo. Enquanto professores, não nos posicionamos contra a esta metodologia, mas é preciso salientar que a prova escrita não pode ser utilizada como uma forma classificatória e distante da realidade social, política e cultural em que se encontram inseridos os alunos.

De acordo com LDB 9.394/96 em seu artigo 24, inciso V, alínea “a”, a avaliação deverá ocorrer de forma “[...] contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais” (BRASIL, 1996). Para tanto, segundo a BNCC, no Ensino Médio, a avaliação escolar tem como objetivo “construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos” (BRASIL, 2017, p. 17).

Em relação ao método utilizado para a fixação do conteúdo Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo, foi possível constatar que 96% dos professores apresentam uma lista de exercícios para serem resolvidos pelos alunos; 68% mandam os alunos resolverem os exercícios do livro didático e 51% apresentam jogos relacionados ao assunto e/ou propõem a resolução de questões por meio de *softwares*, para fixar o conteúdo e melhorar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Em matemática, a BNCC propões cinco unidades temáticas, cujas habilidades devem ser desenvolvidas ao logo do Ensino Médio, sendo estas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Ao serem questionados sobre a importância destes blocos de conteúdos, 54,7% dos docentes, consideraram a unidade "números" como a de maior relevância no ensino da matemática.

Tabela 16: Unidade temática da matemática considerada mais importante pelos professores

Unidades Temáticas	%
Números	54,7%
Álgebra	20,8%
Geometria	13,2%
Grandezas e medidas	7,5%
Probabilidade e estatística	3,8%
TOTAL	**100%**

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Neste item em específico, solicitamos que os professores justificassem a sua escolha. A respostas obtidas caminharam no mesmo contexto. Como justificativa da escolha, afirmaram que o bloco dos números é a base da linguagem matemática, sendo este, necessário para compreensão de todos os demais conteúdos matemáticos e, uma vez desenvolvida as habilidades dos números, os alunos não apresentarão dificuldades no desenvolvimento das demais habilidades.

Os dados referentes à tabela 18, apresentam as principais dificuldades de aprendizagens apresentadas pelos alunos, na concepção dos professores.

Tabela 17: Maiores dificuldades dos alunos nas aulas de matemática, segundo os professores

Dificuldades	%
Resolução dos problemas	66%
Realizar cálculo	58,5%
Compreensão dos conceitos/ideias	56,6%
Compreensão das regras	41,5%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Como é possível constatar, a maior dificuldade que os alunos apresentam quando estudam trigonometria no triângulo está relacionada a resolução de problemas. Isto tem ocorrido, segundo os PCNs de Matemática, em virtude de os conceitos sobre a resolução de problemas ainda serem desconhecidos por parte de muitos docentes.

> [...] a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos. (BRASIL, 1997, p. 22)

Desta forma, os PCNs, defende que ao ser colocada em foco a resolução de problemas, deve-se considerar alguns princípios, dentre eles:

> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> [...]
> A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1997, p. 32-33)

Assim, ao analisar estes resultados, entre os seis tópicos com maior grau de dificuldades, observa-se que cinco estão relacionados a resolução de problemas envolvendo as relações trigonométricas da Tangente, da Lei dos Senos e dos Cossenos. Desta forma, é importante que os professores direcionem suas atenções para estes tópicos, propondo atividades que visam sanar essas dificuldades.

Tabela 18: Tópicos considerados difíceis ou muito difíceis na concepção dos professores

Ordem	Tópicos	%
1º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos senos contendo imagens da figura geométrica envolvida.	81%
2º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos senos não contendo imagens da figura geométrica envolvida	81%
3º	Lei dos senos.	79%
4º	Resolução de problemas envolvendo as aplicações da relação fundamental entre seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.	75%
5º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos cossenos contendo imagens da figura geométrica envolvida.	74%
6º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos cossenos sem imagens da figura geométrica envolvida.	74%
7º	Lei dos cossenos.	72%
8º	Tangente em ângulos complementares.	68%
9º	Seno em ângulos complementares.	66%
10º	Resolução de problemas com aplicações das relações trigonométricas no triângulo retângulo no cotidiano.	66%
11º	Determinação do cosseno de um ângulo a partir da figura de um triangulo retângulo.	64%
12º	Determinação da tangente de um ângulo a partir da figura de um triangulo retângulo.	64%
13º	Relação fundamental entre seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.	64%
14º	Cosseno em ângulos complementares.	64%
15º	Resolução de problemas envolvendo as relações métricas no triângulo retângulo.	60%

16º	Determinação do seno de um ângulo a partir da figura de um triangulo retângulo.	60%
17º	Cálculo do valor das razões trigonométricas de ângulos agudos: construção da tabela dos ângulos notáveis.	60%
18º	Resolução de problemas envolvendo semelhança de triângulos.	51%
19º	Formalização das relações métricas no triângulo retângulo.	51%
20º	Semelhança de triângulos.	38%
21º	Conceito de semelhança de triângulos.	32%
22º	História da Trigonometria.	9%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

As dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas relacionados a temática em questão, podem ser associadas a ausência desta metodologia nas aulas de matemática. Ao serem questionados sobre os presentes tópicos, cerca de 11% a 13% responderam que não trabalham a resolução de problemas em sala de aula.

> A sala de aula pode ser um ambiente ideal para explorar ainda mais o raciocínio lógico do aluno a partir de questionamentos voltados à organização dos dados do problema e a que operação selecionar para encontrar a solução. A Resolução de Problemas surge como uma das alternativas para desmistificar a Matemática, fazendo com que o aluno confronte-se com seus conceitos e ideias, de maneira contextualizada, dessa forma ele possa compreender os processos que envolvem a solução dos problemas (PEREIRA, CORRÊA, ZARDO, 2016, p. 7-8)

A presente estratégia deve estar centrada na ideia de superação dos obstáculos, não sendo de resolução imediata, mas na busca de caminhos e estratégias metodológicas que visam a solucionar os desafios estabelecidos pelo professor. Desta forma, uma vez que o professor evita trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula, as dificuldades dos alunos não serão sanadas, pois estes não são estimulados a resolver problemas matemáticos.

Esta busca por estratégia de ensino que visam a superar os obstáculos no ensino de matemática, pode refletir, também, na percepção que alguns docentes têm sobre a disciplina. Ao serem perguntados se consideram a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada, 30,2% responderam que sim. Além disso, 62,3% dos professores afirmaram que os seus alunos não gostam de estudar matemática.

Neste sentido, é perceptível que “[...] a Matemática ainda é muito “temida” por muitos estudantes, que acreditam que esta disciplina é muito complexa e destinada apenas a algumas pessoas mais “privilegiadas”” (DAMASCENO, OLIVEIRA e CARDOSO, 2018, p. 121).

Outro fator que chama atenção é o fato de o tópico “história da trigonometria” não ser trabalhado em sala de aula por 36% dos professores. É sabido que a matemática é uma ciência que busca modelar a realidade em fórmulas, estruturas e padrões.

Tabela 19: Tópicos que os professores não trabalham em sala de aula

Ordem	Tópicos não trabalhados em sala de aula	%
1º	História da Trigonometria.	36%
2º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos cossenos sem imagens da figura geométrica envolvida.	13%
3º	Seno em ângulos complementares.	11%
4º	Resolução de problemas com aplicações das relações trigonométricas no triângulo retângulo no cotidiano.	11%
5º	Lei dos cossenos.	11%
6º	Resolução de problemas envolvendo a lei dos cossenos contendo imagens da figura geométrica envolvida.	9%

Fonte: Pesquisa de Campo (abril e maio de 2022).

Desta forma, ensinar a matemática sob sua perspectiva histórica oportuniza uma leitura e reflexão dos conteúdos e conhecimentos matemáticos de forma contextualizada historicamente, auxiliando o crescimento intelectual e cultural dos envolvidos.

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1997, p. 42).

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que a história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento, e ainda, deve incluir os aspectos sociais, culturais e históricos dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, o ensino matemático poderá deixar de ser algo tortuoso e se tornar mais prazeroso à medida que os docentes contextualizarem o seu ensino, apresentando vivências em que a matemática própria do cotidiano extraescolar contribui no processo ensino aprendizagem. Nesta perspectiva, apresentamos na seção a seguir, intitulada Tendência na Educação Matemática, breves discursões sobre a Resolução de Problemas; Jogo Matemático e Modelagem Matemática.

3.7. TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Apresentamos a seguir as Tendências em Educação Matemática abordadas na Sequência Didática que produzimos nesta pesquisa, sendo elas: (1) Ensino de Matemática por Atividades Experimentais; (2) Resolução de Problemas Matemáticos e (3) Jogo Matemático. Essas tendências têm como objetivo tornar o ensino de matemática mais atraente e eficaz, incentivar a participação dos alunos e desenvolver habilidades e competências matemática.

3.7.1. Ensino de Matemática por Atividades Experimentais

O ensino por atividades é uma abordagem pedagógica que enfatiza a aprendizagem ativa dos alunos por meio de atividades práticas e experiências. Em vez de simplesmente transmitir informações em uma aula expositiva, o ensino por atividades incentiva os alunos a participar ativamente de sua própria aprendizagem, envolvendo-se em tarefas e atividades que os ajudam a aplicar conceitos e habilidades em situações do mundo real.

Ao usar o ensino de matemática por atividades, os professores podem criar um ambiente de aprendizagem mais envolvente e interativo, onde os alunos têm a oportunidade de explorar e experimentar ideias em um contexto prático. Isso pode incluir atividades como jogos matemáticos, simulações, estudos de caso, trabalhos em grupo, dentre outros.

Segundo Sá (2019) o ensino por atividades apresenta as seguintes características:

> 1) É diretivo;
> 2) Tem compromisso com o conteúdo;
> 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado;
> 5) É sequencial;
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas;
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes;
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade;
> 9) Não dispensa a participação do professor;
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos;
> 11) É iterativo entre estudantes e professor (SÁ, 2019, p. 16-17)

Essas características do ensino de matemática por atividade a distinguem de outras tendências em Educação Matemática. Desta forma, a exemplo das demais tendências, o Ensino de Matemática por Atividades apresenta sua organização, sendo elas: (1) quanto ao objetivo e (2) quanto ao modo de desenvolvimento, conforme detalho a seguir:

- (1) Quanto ao Objetivo:

Segundo Sá (2019), quanto ao objetivo as atividades experimentais classificam-se em dois tipos básicos: conceituação ou redescoberta. O propósito da atividade de conceituação, segundo Sá (2019) é guiar o aluno a detectar a presença de uma certa situação/tipo de objeto matemático, e desta forma, defini-lo. Assim, as atividades de conceituação de trigonometria no triângulo, propostas nesta pesquisa, auxiliarão os alunos a entender melhor os conceitos de catetos, hipotenusa, seno, cosseno e tangente e aplicá-los em situações práticas.

Na atividade de redescoberta o objetivo é guiar o aluno a encontrar uma conexão ou característica em relação a um determinado objeto ou operação matemática (SÁ, 2019). Assim, "uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado" (SÁ, 2019, p.17).

Deste modo, as atividades de redescoberta de trigonometria no triângulo propostas neste trabalho, foram projetadas para ajudar os alunos a redescobrir os conceitos das relações trigonométricas por conta própria, em vez de simplesmente recebê-los de um professor ou livro didático. Em uma das atividades, por exemplo, os alunos serão desafiados a explorar triângulos retângulos e descobrir por si mesmos a relação entre os ângulos e os lados, e como isso pode ser usado para calcular a altura de um objeto ou a distância entre dois pontos.

- (2) Quanto ao modo de desenvolvimento:

Quanto ao método de desenvolvimento, o Ensino de Matemática por Atividades pode ser por demonstração ou experimental (SÁ, 2019):

> No modo de demonstração o professor realiza as ações enquanto os estudantes registram os resultados para em seguida interagirem com os resultados e chegarem ao resultado planejado para a atividade.
> [...] No modo experimental o professor elabora o experimento que é executado pelos estudantes. As atividades experimentais também podem servir tanto para conceituação como para redescoberta (SÁ, 2019, p. 18).

Em ambos os modos (demonstração e experimental), as atividades podem servir tanto para conceituação como para redescoberta.

Para diferenciar o Ensino de Matemática por Atividades das demais Tendências em Educação Matemática, Sá (2020) a chamou de Ensino de Matemática por Atividades Experimentais. Desta forma, com base nos expostos, a Sequência Didática propostas para o ensino de trigonometria no triângulo, neste trabalho, quanto aos objetivos caracterizam-se como conceituação e redescoberta. Quanto ao modo de desenvolvimento, adotaremos o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais.

As atividades experimentais podem ser uma ótima ferramenta para ensinar matemática de uma forma mais dinâmica e interessante para os alunos. Posto que, o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais é um processo didático que se desenvolve por meio da realização de tarefas que envolvem determinado material ou ideias, idealizadas pelo professor com o objetivo de expor os alunos a determinados conhecimentos de um objeto matemática específico (SÁ, 2020). Essas atividades permitem que os alunos trabalhem com conceitos matemáticos de uma forma mais prática e tangível, o que pode ajudar a tornar o assunto mais acessível.

Nesta perspectiva, segundo Sá (2020) uma aula de matemática por meio de Atividade Experimental, de conceituação ou de redescoberta, tem os seguintes momentos: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização, conforme detalhado no quadro a seguir:

Quadro 9: Momentos da Atividade Experimental

Momento: Organização
Neste momento a turma deve ser organizada preferencialmente em equipes com até 4 participantes. A função do professor nesta etapa é dirigir e orientar as formações dos grupos, mas sem fazer imposições. Além disso, o docente precisa demonstrar segurança e planejamento das Atividades com o objetivo de evitar desperdício de tempo pelos alunos com ações não relativas à organização da turma.
Momento: Apresentação
Nesta etapa compete ao professor a distribuição do material necessário para a realização da Atividade Experimental, incluindo o roteiro da atividade. Este roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro, a depender das condições estruturais da escola em fornecer o material impresso. Para evitar desperdício de tempo e facilitar a distribuição, é preferível que o material seja organizado em kits para facilitar sua distribuição.
Momento: Execução
Este momento corresponde à etapa da experimentação, isto é, quando o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Para isso, é esperado que cada grupo realize os procedimentos estabelecidos na Atividade Experimental. Ao professor cabe as equipes trabalharem livremente, supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar nas dúvidas, quando solicitado ou perceber dificuldade de execução, que possam surgir em cada equipe no

ocorrer da realização do procedimento. Os alunos devem seguir as instruções previstas no roteiro da atividade; evitar conversas paralelas e evitar deixar o grupo ou ficar visitando outros grupos. Além disso, os estudantes devem ter a oportunidade de agir para obter os resultados almejados, assim como, orientações claras e precisas quando tiverem dificuldades ou dúvidas para realizar alguma ação prevista.
Momento: Registro
Esta etapa corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa científica. Neste momento espera-se que cada equipe registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro. Para isso, é fundamental que o roteiro da Atividade Experimental contenha espaço suficiente para o registro das informações. Assim, além de facilitar o registro das informações, evitará gasto de tempo desnecessário. Ao professor cabe supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo.
Momento: Análise
Neste momento espera-se que cada equipe analise os dados registrados e encontre uma relação válida entre eles. Esta etapa é decisiva para a concretização do objetivo da Atividade Experimental porque é o momento em que os alunos têm acesso pela primeira vez à informação pretendida pelo professor. Durante a análise, se algum grupo apresentar dificuldades em identificar uma relação válida a partir dos dados registrados, o professor deve ajudar a equipe formulando perguntas que ajudem seus membros a ver uma relação válida. O momento da análise corresponde a uma análise dos resultados da investigação científica. Este momento deve ser finalizado com a elaboração da conclusão do grupo.
Momento: Institucionalização
A institucionalização é o momento em que, com base nas conclusões tiradas por cada grupo em relação à análise, é elaborada uma conclusão formal pela turma. Este momento corresponde aproximadamente ao momento da preparação dos últimos aspectos do trabalho científico. A afirmação apresentada na primeira Atividade Experimental, feita por uma turma inexperiente nessa modalidade de ensino, costuma não preencher as condições de um texto conclusivo. Assim, independentemente da forma de conclusão das equipes, o professor deve solicitar a um representante de cada grupo que vá ao quadro e registre a conclusão de seu grupo. Após analisar as conclusões registradas, o professor deve perguntar aos grupos quais das conclusões apresentadas permitiriam a alguém que não estivesse envolvido na atividade entender a relação que se formou. Este momento é propício para o professor refletir com os alunos sobre as características da conclusão. Por fim, o professor pode tirar uma conclusão com a turma que permita a alguém que não esteve envolvido na atividade experimental compreender a relação estabelecida.

Fonte: Adaptado de Sá (2020).

Portando, o Ensino de Matemática por meio de Atividades Experimentais é uma metodologia de ensino que tem se mostrado bastante eficaz na aprendizagem dos alunos. É uma forma de tornar a matemática mais concreta e acessível, permitindo que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos de maneira mais significativa. Além disso, a utilização de atividades experimentais permite que os alunos trabalhem em grupo, desenvolvendo habilidades de cooperação e comunicação, bem como a capacidade de observar e registrar resultados de forma clara e objetiva.

3.7.2. Resolução de Problemas Matemáticos

A resolução de problemas como metodologia de ensino possibilita aos alunos desenvolver as habilidades matemática, e potencializa o processo de ensino e aprendizagem de matemática, bem como amplia seus conhecimentos e proporciona aos estudantes a ampliação da visão que têm dos problemas. Além disso, favorece a construção de conceitos, desenvolve a autonomia e contextualiza as diversas situações do cotidiano.

Desta forma, de acordo com os PCNs de matemática, a resolução de problemas:

> [...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1997, p. 40)

Mas o que vem a ser um problema? Segundo Sá (2021):

> [...] um problema é caracterizado por ser uma questão a qual ainda não foi apresentada uma solução aceita pela comunidade de matemáticos profissionais. Assim, dificilmente encontraremos enunciados de problemas genuínos nos livros didáticos da educação básica. Apesar de existirem questões que ainda são problemas matemáticos e podem ser entendidos pelos estudantes da Educação Básica. (SÁ, 2021, p. 14)

Sá (2021) enfatiza ainda que, nem toda situação matemática pode ser considerada um problema. Segundo o autor, quando o sujeito já é conhecedor do percurso que o leve ao resultado da situação, tal situação é um exercício, e não um problema. Deste modo, uma situação de contexto matemático só será um problema, para os estudantes que ainda não sabem obter o resultado.

No livro “A arte de resolver problemas”, uma obra sobre resolução de problema, Polya (1995) afirma que a resolução de problemas favorece a melhoria das habilidades para resolver o problema. Nesta obra, Polya discute como compreender, como criar estratégias e como executar um plano de ação na resolução de problemas em matemática.

Polya (1995, p. 3) destaca que:

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução.

Neste sentido, Polya (1995) enfatiza que para solucionar um problema é necessário seguir quatro fases. A 1ª Fase: Compreender o problema – Compreender um problema é etapa essencial para solucioná-lo, e para isso, é necessário lê-lo com muita atenção, e durante a leitura do problema deve-se buscar respostas para alguns questionamentos, tais como: O que o problema quer saber? qual a incógnita? Quais são os dados? 2ª Fase: Estabelecer um plano de resolução – Definir o caminho a ser seguido que levará o aluno a solucionar o problema. Nesta etapa, deve-se elaborar um esquema da resolução do problema. Para isso, é fundamental que o professor ponha em prática o seu conhecimento teórico e suas próprias experiências de sucessos e insucessos na resolução de problemas.

Com um plano de resolução, definido na etapa anterior, o próximo passo é realizar a execução deste plano para obter a solução do problema. 3ª Fase: Executar o plano – Nesta fase, para colocar o plano em prática é fundamental aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos. Além disso, é necessário verificar se cada passo da resolução está correto. E por fim, 4ª Fase: Análise da Solução – Nesta etapa deve-se verificar se a(s) solução(ões) obtida(s) satisfazem o problema, e caso não exista mais soluções deve-se elaborar a resposta final para o problema.

Essa estrutura para a resolução de problemas apresentada por Polya (1995) é corroborada por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais ao enfatizar que ao resolver um problema, pressupõe que o aluno:

> - Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, simular hipóteses).
> - Compare seus resultados com os de outros alunos.
> - Valide seus procedimentos. (BRASIL, 1997, p.44-45)

Na mesma perspectiva da estrutura apresentada por Polya (1995), Onuchic (2012) apresenta nove passos para a resolução de problemas. Além disso, enfatiza que há diferentes caminhos para o processo de ensino-aprendizagem-avaliação em matemática, dentre eles, a resolução de problemas. Para a autora, nesse processo metodológico, o ensino e aprendizagem devem ocorrer de forma concomitante durante a construção do conhecimento.

Deste modo, Onuchic (2012) apresenta um roteiro de procedimentos, contendo 9 (nove) etapas, que visa orientar os docentes na condução da resolução de problemas em sala de aula.

> 1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador [...];
> 2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;
> 3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. (ONUCHIC, 2012, p. 12)

Onuchic (2012) ressalta que é fundamental que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula. Além disso, caso o aluno apresente dificuldades na leitura do problema, o professor, como mediador do processo, pode auxiliá-lo na leitura e intepretação do problema.

> 4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.
> 5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. (ONUCHIC, 2012, p. 13)

Para a autora, nestas etapas, considerando que o professor já formalizou o conteúdo matemático, os alunos devem propor sugestões para a resolução do problema em grupo. Enquanto isso, o professor deve deixá-los livres, analisar e acompanhar o trabalho, enquanto mediador do processo, estimulando-os a pensar em uma solução para o problema.

> 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.
> 7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.
> 8) Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> 9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” [...]. (ONUCHIC, 2012, p. 13-14)

Onuchic (2012) enfatiza que todas as resoluções, independentemente se estejam corretas ou erradas, devem ser expostas para todos os alunos, que deverão analisá-las e discuti-las. Nesta etapa, o professor é o mediador do processo, incentivando os alunos a participarem ativamente das discussões e proposições para a solução do problema.

Neste contexto, um dos conteúdos matemáticos que os alunos apresentam dificuldades, por meio da não compreensão da resolução de problemas é o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Esta temática desempenha um importante papel no processo formativo do educando, pois por meio das relações trigonométricas, podemos calcular, além das medidas de ângulos de um triângulo, as distâncias teoricamente inacessíveis.

3.7.3. Jogo Matemático

Enquanto professor de matemática na Educação Básica presenciei diversos relatos sobre o ensino da matemática, tanto de alunos, quanto de professores. Alguns estudantes acreditam que a matemática é uma disciplina desinteressante e sem aplicabilidade em sua vida. Alguns professores acreditam que os currículos escolares estão defasados, mas também há aqueles que procuram deixar o ensino mais atrativo e lúdico.

Diante destes pensamentos enraizados por professores e alunos, será que é possível aprender matemática e se divertir ao mesmo tempo? E nós, enquanto professores de matemática, o que podemos fazer para que o ensino da matemática se torne mais atraente e menos angustiantes para os nossos alunos? Para responder tais questionamentos, buscamos respaldo em estudos que destacam que o uso de jogos em sala de aula é benéfico aos estudantes e transcendem a educação matemática, contribuindo com as relações sociais, inclusão e desenvolvimento cognitivo.

A palavra jogo vem do latim *ladus* que apresentam vários significados, dentre eles diversão e brincadeira. De acordo com Moreira, Fonseca e Nascimento (2016), os jogos surgiram a partir das necessidades e estímulos do ser humano de forma intuitiva, e com o decurso do tempo foram incorporados a determinadas culturas da sociedade.

Deste modo, um processo de ensino da Matemática que reconheça o protagonismo do aluno durante a aprendizagem exige, do docente, a busca por alternativas didáticas e metodológicas que contribuam para promover uma prática de sala de aula que supere a transmissão de conhecimento. No contexto de ensino da matemática, a utilização de jogos apresenta-se como uma possibilidade para uma aprendizagem com mais sentido, na qual os alunos podem compreender e atribuir significado aos conceitos estudados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) defendem a importância da utilização de jogos nas aulas de matemática.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exige soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1997, p. 46).

Como é notório, os jogos não se restringem somente aos aspectos lúdicos do ensino de matemática, mas trabalha também, o caráter emocional do estudante, a criatividade, o planejamento, o raciocínio lógico, dentre outras vantagens pedagógicas, que estimulam o gosto pela matemática e desenvolve a aprendizagem de forma prazerosa.

Segundo Arruda e Freitas (2015),

> O jogo na sala de aula pode aparecer como uma ferramenta criativa para o educador explorá-la de forma que suas aulas afaste-se da monotonia de cálculos e resoluções de problemas em lousas e tornem-se mais atrativas para os alunos. (ARRUDA; FREITAS, 2015, p. 2)

Para as autoras, o jogo como estratégia de ensino em matemática, coloca os estudantes em novas situações, que exigem deles concentração, trabalho em grupo, respeito a regras, planejamento, raciocínio lógico, estratégias e desenvolvimento de problemas.

> O jogo apresenta o potencial de fazer com que o aluno desenvolva sua capacidade de refletir, analisar e compreender os conceitos abordados, levantando hipóteses, testando-as e avaliando-as, sempre de forma autônoma e cooperativa. [...] contribui para a aprendizagem de conceitos e torna atraente o ato de aprender, pois os alunos têm a oportunidade de

> elaborar estratégias para chegar à resolução do desafio lançado no jogo. (PIMENTA; CANEIRO; LASARETTO, 2014, p. 230)

Desta forma, de acordo com Almeida *et al* (2017), tanto as brincadeiras quantos os jogos podem ser vistos como estratégias e ferramentas eficazes no processo de ensino-aprendizagem da matemática. No entanto, os autores ressaltam que:

> [...] a utilização de jogos para o ensino de conteúdos matemáticos não irá garantir que a totalidade da turma compreenda determinado conceito, mas poderá tornar a aula mais agradável e interessante para a maioria dos discentes, pois quando o professor cria um ambiente propício à aprendizagem levando em conta o contexto dos alunos, o desenvolvimento cognitivo pode acontecer. (AMLMEIDA *et al,* 2017, p. 4).

Além disso, o interesse do estudante pelas atividades lúdicas com a utilização de jogos estimula sua prática prazerosa. No entanto, cabe ressaltar que é necessário que a proposta pedagógica seja compatível com os objetivos pretendidos pelo docente, ao planejar o momento lúdico propício a aprendizagem dos alunos.

> [...] o jogo para trazer resultados positivos para a aprendizagem matemática, precisa estar adequado à faixa etária do aluno e ao objetivo do professor a ser alcançado com aquela atividade. Pois, um jogo que é interessante para uma criança de quatro anos de idade, provavelmente não será para uma de doze anos, porque as necessidades culturais, sociais e cognitivas são diferentes. (AMLMEIDA *et al,* 2017, p. 3).

Neste sentido, o uso de jogos como ferramenta metodológica pode auxiliar o professor no trabalho com os estudantes com alguma dificuldade de aprendizado, promovendo assim, desafios matemáticos que eles possam enfrentá-los de forma lúdica e divertida.

No entanto, é que os jogos sejam utilizados com proposta de intervenção didático-pedagógica determinada previamente pelo professor, e não somente como uma atividade de sala de aula para preenchimento de tempo. Para isso, o jogo precisa estar de acordo com os objetivos de aprendizagem traçados pelo professor a serem alcançados com a atividade proposta. Além disso, é necessário que o jogo atenda a faixa etária e série/ano de cada turma, pois, uma atividade lúdica que serve para uma classe, não necessariamente contempla a aprendizagem de uma outra turma.

4. CONCEPÇÕES E ANÁLISES A PRIORI

Conforme estabelecido nas etapas da Engenharia Didática, apresentamos nesta seção a Fase 2: Concepções e análises *a priori*. Assim, propomos uma Sequência Didática (SD) para o Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais fazendo as análises de cada etapa e discutindo as possíveis estratégias de resolução e dificuldades, inclusive na perspectiva dos alunos. Além disso, detalhamos os procedimentos a serem adotados, bem como os materiais necessários para a realização das atividades.

4.1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A presente SD consistiu-se em 15 (quinze) atividades, sendo: um pré-teste, uma atividade de conceituação, oito atividades de redescoberta, quatro atividades de aprofundamento e um pós-teste. Destacamos, que tais atividades propostas sofreram algumas adaptações da pesquisa realizada por Gomes (2013), a qual apresentou resultados satisfatórios ao serem aplicadas a 100 (cem) alunos do 3º ano do Ensino Médio, da rede pública estadual, no município de Belém – PA.

Outro estudo, dentre as várias pesquisas realizadas utilizando a Engenharia Didática como uma metodologia satisfatória ao ensino de matemática, foi desenvolvida por Santos (2017), com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, no município de Gararu – SE. O autor destaca que:

> Diante das análises apresentadas, é possível afirmar que os resultados deste estudo objetivaram-se de forma satisfatória a mobilização da aprendizagem das noções de Trigonometria (razões trigonométricas no triângulo retângulo – seno, cosseno e tangente). (SANTOS, 2017, p. 112-113).

Do mesmo modo, acreditamos que a presente SD pode favorecer a construção do conhecimento, estimulando o desenvolvimento das habilidades e conceitos matemáticos relacionados a trigonometria no triângulo. Portanto, apresentamos a seguir a Sequência Didática desta pesquisa, que será aplicada de forma experimental aos alunos do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola da rede pública estadual de ensino, no município de Parauapebas – PA, para posterior validação.

4.1.1. Testes Gerais

Esta atividade refere-se aos Testes Gerais (pré-teste e pós-teste) cujo objetivo é verificar como os alunos resolveriam exercícios sobre as Relações Trigonométricas, antes e depois da aplicação da Sequência Didática sobre o assunto estudado.

Título: Pré-Teste

Objetivo: Verificar como os alunos resolveriam exercícios sobre Relações Trigonométricas, antes e depois da sequência de atividades sobre o assunto estudado.

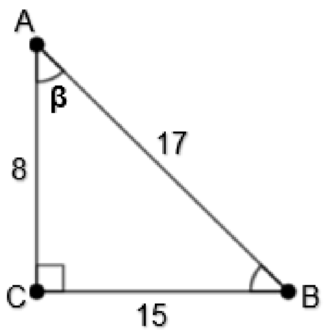
Material: Folha de teste.

Procedimentos: Entregar para cada aluno uma cópia da folha de teste e solicitar que resolva os exercícios.

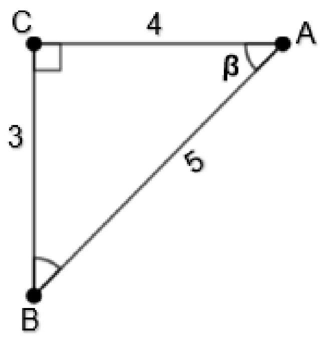
RESOLVA AS SEGUINTES QUESTÕES:

Questão 01) Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo **β** dos triângulos retângulos representados a seguir.

a)

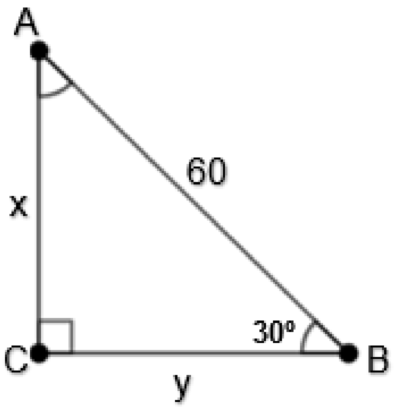


b)



- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos, em sua maioria, utilizarão as definições das razões trigonométricas: $sen\beta = \frac{C.O}{HIP}$; $cos\beta = \frac{C.A}{HIP}$; $tg\beta = \frac{C.O}{C.A}$, para calcular o seno, cosseno e tangente do ângulo destacado em ambas as questões. Além disso, para calcular a tangente. Além disso, para calcular a tangente acreditamos que alguns alunos utilizarão a relação seno dividido pelo cosseno.

Questão 02) Determine as medidas dos catetos ***x*** e ***y*** do triângulo retângulo a seguir. (Dados: Sen 30º = 0,50   Cos 30º = 0,86   Tg 30º = 0,57)

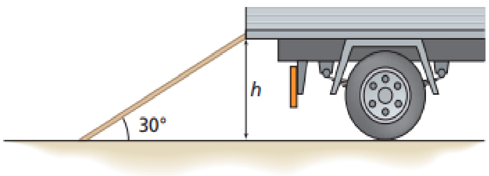


- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria utilizarão as razões trigonométrica seno e cosseno relativos ao ângulo de 30º para encontrar o valor correspondente aos catetos x e y, respectivamente. Além disso, alguns alunos após encontrarem o valor de um desses catetos, utilizarão o teorema de Pitágoras para calcular o valor do outro cateto. Assim, encontrarão a resposta correta do problema proposto.

Questão 03) Uma rampa lisa, com medida de comprimento de 10 metros, faz com o plano horizontal um ângulo com medida de abertura de 30°. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente? (Dados: sen 30º = 0,50, cos 30º = 0,86, tg 30º = 0,57)

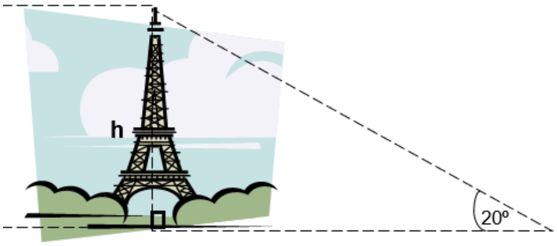
- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria não apresentarão dificuldades para resolver o problema, pois aplicarão corretamente a razão trigonométrica seno correspondente ao ângulo de 30º. Desta forma, encontrarão o valor correto referente a altura da rampa em relação ao solo.

Questão 04) Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão por uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por *h*? (Dados: sen 30º = 0,50, cos 30º = 0,86, tg 30º = 0,57)



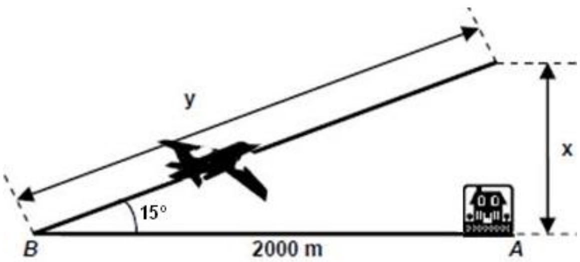
- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria não apresentarão dificuldades para resolver a questão proposta, pois aplicarão corretamente a razão trigonométrica seno correspondente ao ângulo de 30º. Assim, encontrarão a altura entre a caçamba e o solo, conforme solicita a questão.

Questão 05) A uma distância de 50 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20º, como nos mostra a figura. Determine a altura **h** da torre. (Dados: sen 20º = 0,34, cos 20º = 0,94 e tg 20º = 0,36)



- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria não apresentarão dificuldades para resolver o problema, pois aplicarão corretamente a razão trigonométrica tangente relativa ao ângulo de 20º, para calcular corretamente a altura da torre.

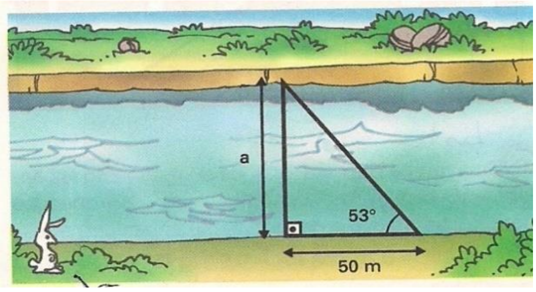
Questão 06) Um avião levanta voo em **B** e sobe fazendo um ângulo constante de 15º com a horizontal. A que altura está e qual distância percorrida, quando alcançar a vertical que passa por um prédio **A** situado a 2 km do ponto de partida?
(Dados: sen 15º = 0,26, cos 15º = 0,97 e tg 15º = 0,27)



- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria não apresentarão dificuldades para resolver o problema proposto, pois aplicarão corretamente a razão trigonométrica tangente relativa ao ângulo de 15º.

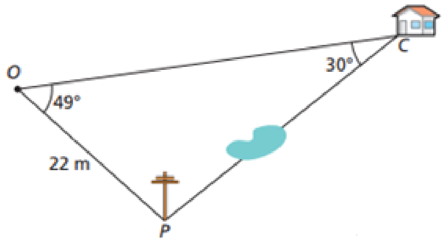
Questão 07) Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo?

(Use: sen 53º = 0,80; cos 53º = 0,60; tg 53º = 1,32.)



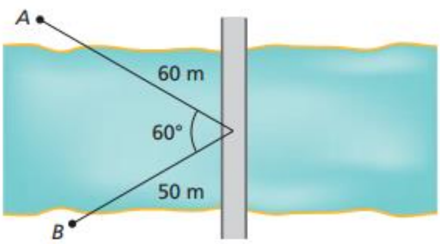
- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria não apresentarão dificuldades para resolver a questão proposta, pois aplicarão corretamente a razão trigonométrica tangente relativa ao ângulo de 53º.

Questão 08) Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Calcule aproximadamente o comprimento de fio necessário para unir o poste à casa.



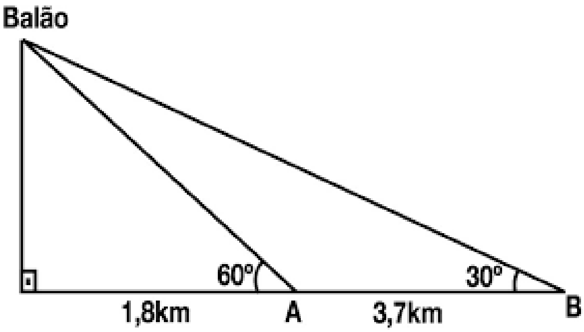
- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria conseguirão resolver o problema proposto. Mas, alguns alunos terão como dificuldade, na aplicação da lei do seno, identificar o terceiro ângulo, ou seja, o ângulo de 101°.

Questão 09) De uma ponte, um engenheiro observa dois edifícios, um em cada margem de um rio. O edifício **A** está a 60 m de distância do engenheiro, e o edifício **B**, a 50 m. Considerando as medidas indicadas na figura abaixo, determine a menor distância entre os edifícios **A** e **B**.



- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria conseguirão resolver o problema. Assim, após analisar os dados da questão, concluirão que para resolver o problema proposto deverão utilizar a lei do cosseno.

Questão 10) Duas pessoas avistaram um balão. A "**pessoa A"** estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a "**pessoa B**" estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a "pessoa A", e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?



- **Análise *a priori* do pré-teste**: os alunos não conseguirão resolver o problema.
- **Análise *a priori* do pós-teste**: os alunos em sua maioria conseguirão resolver o problema, tendo duas possibilidades para resolução utilizando a relação trigonométrica tangente, ou seja, poderão utilizar um dos dois ângulos, 30° ou 60°. E assim, encontrarão a solução para o problema.

4.1.2. Atividade 1

Esta é uma atividade de **CONCEITUAÇÃO** que consiste em uma lista de 22 (vinte e dois) questionamentos que serão respondidos com base em um quadro de triângulos com a intenção de apresentar aos estudantes o conceito de catetos e hipotenusa em um triângulo retângulo.

Título: Os catetos e a hipotenusa

Objetivo: Conceituar catetos e hipotenusa.

Materiais necessários: Quadro de triângulos retângulos 1, roteiro da atividade, papel e caneta ou lápis.

Procedimento: Responda as questões propostas a seguir:

QUESTÕES

1) No triângulo 1 do Quadro de Triângulos quais são os lados do triângulo que formam um ângulo de 90°?

2) No triângulo 2 do Quadro de Triângulos quais são os lados do triângulo que formam um ângulo de 90°?

3) No triângulo 3 do Quadro de Triângulos quais são os lados triângulo que formam um ângulo de 90°?

4) No triângulo 4 do Quadro de Triângulos quais são os lados do triângulo que formam um ângulo de 90°?

5) No triângulo 5 do Quadro de Triângulos quais são os lados do triângulo que formam um ângulo de 90°?

Informação: Os lados de um triângulo retângulo que formam um ângulo de 90° são denominados de catetos.
A palavra cateto vem de Grego *káthetos*, que significa “vertical, perpendicular”.

6) No triângulo 6 do Quadro de Triângulos quais são as medidas dos catetos do triângulo?

7) No triângulo 7 do Quadro de Triângulos quais são as medidas dos catetos do triângulo?

8) No triângulo 8 do Quadro de Triângulos quais são as medidas dos catetos do triângulo?

9) No triângulo 9 do Quadro de Triângulos quais são as medidas dos catetos do triângulo?

10) No triângulo 10 do Quadro de Triângulos quais são as medidas dos catetos do triângulo?

11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?

12) No triângulo 1 do Quadro de Triângulos qual é o lado oposto ao ângulo de 90°?

13) No triângulo 2 do Quadro de Triângulos qual é o lado oposto ao ângulo de 90°?

14) No triângulo 3 do Quadro de Triângulos qual é o lado oposto ao ângulo de 90°?

15) No triângulo 4 do Quadro de Triângulos qual é o lado oposto ao ângulo de 90°?

16) No triângulo 5 do Quadro de Triângulos qual é o lado oposto ao ângulo de 90°?

Informação: O lado oposto ao ângulo de 90° de um triângulo retângulo é denominado de hipotenusa.
A palavra hipotenusa vem do Latim *hypotenusa* e do Grego *hypoteinousa*, que significa “o lado mais comprido de um triângulo retângulo”.

17) No triângulo 6 do Quadro de Triângulos qual é a medida da hipotenusa?

18) No triângulo 7 do Quadro de Triângulos qual é a medida da hipotenusa?

19) No triângulo 8 do Quadro de Triângulos qual é a medida da hipotenusa?

20) No triângulo 9 do Quadro de Triângulos qual é a medida da hipotenusa?
21) No triângulo 10 do Quadro de Triângulos qual é a medida da hipotenusa?
22) O que é a hipotenusa de um triângulo retângulo?

Quadro 10 - Quadro de Previsões para Atividade 1

Conclusão	Classificação
Os lados do triângulo que formam um ângulo de 90° são os catetos.	Válida e desejável
Os catetos são os lados menores do triângulo.	Válida e desejável
A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º.	Válida e desejável
A hipotenusa é o lado maior do triângulo.	Válida e desejável
Os lados do triângulo que formam o ângulo de 90º são os catetos e a hipotenusa.	Parcialmente válida e não desejável
A hipotenusa é o lado menor do triângulo.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 1

Os alunos deverão analisar os triângulos retângulos presentes no quadro de triângulo 1, e identificar os lados (catetos e hipotenusa) de cada triângulo e suas respectivas medidas. Ao final, espera-se que os estudantes compreendam que os lados de um triângulo retângulo que formam um ângulo de 90° são denominados de catetos, e que o lado oposto ao ângulo de 90° de um triângulo retângulo é denominado de hipotenusa.

4.1.3. Atividade de Aprofundamento 1

Esta é uma atividade de **APROFUNDAMENTO** que consiste em um *quiz* contendo de 10 (dez) afirmações que deverão ser julgadas pelos alunos como válida ou inválida, cuja intenção é aprofundar o conhecimento sobre os lados (catetos e hipotenusa) de um triângulo retângulo.

Título: *Quiz* sobre o Triângulo Retângulo

Objetivo: Aprofundar o conhecimento sobre os lados de um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Lista de afirmações, caneta ou lápis.

Procedimento: Analise as afirmações a seguir e as julguem, escrevendo dentro do parêntese, como VÁLIDA ou INVÁLIDA. Justifique sua resposta.

QUIZ

1) (__________________) Triângulo Retângulo: é formado por dois catetos e a hipotenusa. Por quê?

2) (__________________) Catetos: são considerados os lados menores do triângulo retângulo. Por quê?

3) (__________________) Hipotenusa: é o lado oposto ao ângulo reto. Justifique.

4) (__________________) Catetos: são os lados do triângulo que formam o ângulo reto. Por quê?

5) (__________________) Hipotenusa: considerado o menor lado do triângulo retângulo. Por quê?

6) (__________________) Catetos: são classificados em cateto adjacente e cateto oposto. Por quê?

7) (__________________) Cateto Oposto: é lado oposto ao ângulo de 90º. Por quê?

8) (__________________) Cateto Adjacente: é considerado o maior lado do triângulo. Por quê?

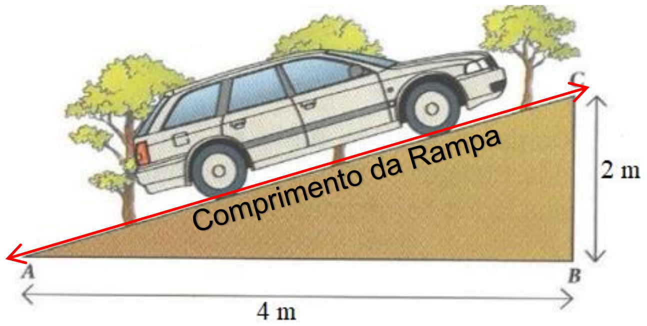
9) (__________________) Hipotenusa: é o lado que forma o ângulo de 90º. Por quê?

10) (_________________) Cateto Oposto é o lado em frente a um dado ângulo e o Cateto Adjacente é o lado colado a este mesmo ângulo. Por quê?

4.1.4. Atividade 2

Esta é uma atividade de **REDESCOBERTA** que consiste em levar o estudante a descobrir uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, com a intenção de perceber que um triângulo é retângulo quando este satisfaz ao teorema de Pitágoras, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

QUESTÃO INICIAL: Ao subir uma rampa um veículo eleva-se a uma altura máxima de 2 m, conforme ilustrado na figura a segui:



Neste sentido, qual a distância AC percorrida pelo veículo ao subir completamente esta rampa?

Título: Teorema de Pitágoras

Objetivo: Descobrir uma relação entre os lados de um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 2, papel, caneta ou lápis.

Procedimentos: Para cada triângulos do Quadro de Triângulos:

- Considere como ***a*** o maior lado em cada triângulo;
- Considere como **b** e **c** os demais lados;

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	a	b	c	a^2	b^2	c^2	b^2+c^2	O triângulo é retângulo?		$a^2 = b^2 + c^2$	
								Sim	Não	Sim	Não
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 11 - Quadro de Previsões para Atividade 2

Conclusão	Classificação
Em alguns triângulos o lado a^2 é igual aos lados $b^2 + c^2$.	Válida e desejável
Se o lado a^2 for igual aos lados $b^2 + c^2$ o triângulo é retângulo.	Válida e desejável
O lado maior do triângulo é a hipotenusa e os lados menores são os catetos.	Válida e desejável
Todos os triângulos são retângulos.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori da atividade 2*

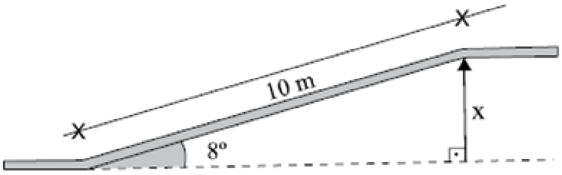
Os alunos deverão realizar os procedimentos solicitados e preencher o quadro com os dados obtidos. Assim, espera-se que ao analisar os dados, os estudantes compreendam, internalizem e concluam que, independentemente dos valores dos lados, um triângulo é retângulo quando satisfaz ao teorema de Pitágoras, ou seja, o maior lado (hipotenusa) elevado ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos dois lados menores (catetos), isto é, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Desta forma, acreditamos que os alunos classificarão de forma correta a classificação dos triângulos quanto aos ângulos (retângulo, obtusângulo ou acutângulo).

4.1.5. Atividade 3

Esta é uma atividade de **CONCEITUAÇÃO** que consiste em levar o estudante a perceber a ocorrência de um padrão de regularidade na razão entre o cateto oposto a um ângulo com a hipotenusa do triângulo, quando se tratar de um mesmo ângulo, com a intenção de apresentar aos estudantes o conceito de seno de um ângulo.

QUESTÃO INICIAL: Para ter acesso a sala de aula, um estudante cadeirante sobe uma rampa lisa com 10 m de comprimento, que faz um ângulo de 8° com o plano horizontal. Qual é a altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida, indicada por x na figura?



Título: Seno de um ângulo no triângulo retângulo

Objetivo: Descobrir uma relação entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa em um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 3, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulos 3, faça o seguinte:

- Determine a medida do cateto oposto ao ângulo indicado (C.O);
- Determine a medida da hipotenusa (h) do triângulo;

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo	Medida do cateto oposto (C.O)	Medida da hipotenusa (h)	$\frac{(C.O)}{(h)}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 12 - Quadro de Previsões para Atividade 3

Conclusão	Classificação
A razão entre o cateto oposto de um dado ângulo e a hipotenusa do triângulo será sempre um valor constante (igual).	Válida e desejável
A razão entre o cateto oposto de um ângulo e a hipotenusa do triângulo é igual ao seno do ângulo.	Válida e desejável
A razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de qualquer ângulo é sempre igual.	Parcialmente válida e não desejável
A divisão do cateto oposto de um ângulo pela hipotenusa do triângulo é igual a divisão da hipotenusa pelo cateto oposto.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 3

Para iniciar a atividade 3, apresentamos uma questão motivadora aos estudantes, para que determinem a altura de uma rampa. Inicialmente, espera-se que os alunos não conseguirão respondê-lo, pois trabalhamos com a hipótese de que os estudantes desconhecem a relação da razão entre o cateto oposto ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo.

Em seguida, os alunos receberão uma atividade, composta por um quadro a ser preenchido com os dados obtidos, acompanhado de outro quadro contendo 12 triângulos retângulos. Posteriormente deverão registrar os procedimentos conforme foram solicitados. Nesta etapa, espera-se que os estudantes não apresentem dificuldades quanto a compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento do quadro com os dados obtidos.

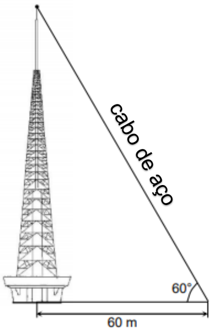
Além disso, espera-se que os alunos compreendam que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, ambos para o ângulo de 30º, será o valor constante de 0,5; que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa para o ângulo de 45º, será sempre um valor constante igual a 0,707, e a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, do ângulo de 60º é igual a constante 0,866.

Portanto, após a observância dos padrões de regularidade, ao retornar ao problema introdutório, os alunos conseguirão apresentar a resposta esperada para a questão motivadora.

4.1.6. Atividade 4

Esta é uma atividade de **CONCEITUAÇÃO** que consiste em levar o estudante a perceber a ocorrência de um padrão de regularidade na razão entre o cateto adjacente a um ângulo com a hipotenusa do triângulo, quando se tratar de um mesmo ângulo, com a finalidade de conceituar o cosseno de um ângulo.

QUESTÃO INICIAL: Um cabo de aço foi fixado no topo de uma torre até certo ponto do solo formando um ângulo de 60º com o plano horizontal.



Sabendo que a distância entre a torre e a extremidade do cabo no solo é de 60 m, qual é o tamanho do cabo de aço?

Título: O Cosseno de um ângulo

Objetivo: Descobrir uma relação entre o cateto adjacente a um ângulo e a hipotenusa em um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 3, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulos 3, faça o seguinte:

- Determine a medida do cateto adjacente ao ângulo indicado (C.A);
- Determine a medida da hipotenusa (h) do triângulo;

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo	Medida do cateto adjacente (C.A)	Medida da hipotenusa (h)	$\frac{(C.A)}{(h)}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 13 - Quadro de Previsões para Atividade 4

Conclusão	Classificação
A razão entre o cateto adjacente de um ângulo e a hipotenusa do triângulo será sempre um valor constante (igual).	Válida e desejável
A razão entre o cateto adjacente de um ângulo e a hipotenusa do triângulo é igual ao cosseno do ângulo.	Válida e desejável
A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa de qualquer ângulo é sempre igual.	Parcialmente válida e não desejável
A divisão do cateto adjacente de um ângulo pela hipotenusa do triângulo é igual a divisão da hipotenusa pelo cateto adjacente.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 4

Acreditamos que os estudantes apresentarão dificuldades para solucionar o problema, uma vez que partimos da hipótese de que alunos desconhecem a relação da razão entre o cateto adjacente ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo.

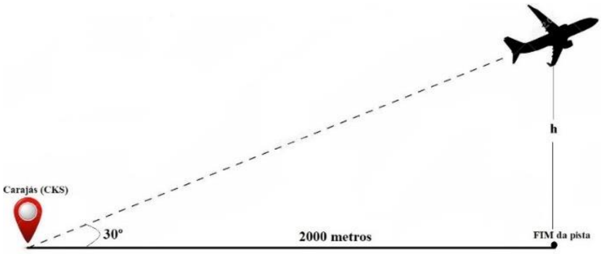
Posteriormente, apresentaremos aos estudantes uma atividade composta por um quadro a ser preenchido com os dados obtidos, acompanhada de um quadro de triângulos (12 triângulos retângulos). Em seguida deverão registrar os procedimentos conforme os procedimentos solicitados. Nesta fase, espera-se que os educandos não apresentem dificuldades quanto a compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento da tabela.

Por conseguinte, ao final da atividade, esperamos que os alunos compreendam que a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, ambos para o ângulo 30º, será o valor constante de 0,866; que a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa para o ângulo de 45º, será sempre um valor constante igual a 0,707, e a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, do ângulo de 60º é igual a constante 0,5. Desta forma, ao retornar ao problema inicial, espera-se que os alunos apresentem corretamente o valor referente ao tamanho do cabo de aço.

4.1.7. Atividade 5

Esta é uma atividade de **CONCEITUAÇÃO** que consiste em levar o estudante a perceber a ocorrência de um padrão de regularidade na razão entre o cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo, quando se tratar de um mesmo ângulo, com a intenção de conceituar a tangente de um ângulo.

QUESTÃO INICIAL: Ao levantar voo no aeroporto de Carajás (CKS), um avião forma um ângulo de 30° em relação à pista, que possui 2000 m de comprimento. Qual será a altura deste avião quando estiver sobrevoando o FIM da pista?



Título: Tangente de um ângulo no triângulo retângulo

Objetivo: Descobrir uma relação entre o cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo em um triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 3, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulos 3, faça o seguinte:

- Determine a medida do cateto oposto ao ângulo indicado (C.O);
- Determine a medida do cateto adjacente ao ângulo indicado (C.A);

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo	Medida do cateto oposto (C.O)	Medida do cateto adjacente (C.A)	$\frac{(C.O)}{(C.A)}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 14 - Quadro de Previsões para Atividade 5

Conclusão	Classificação
A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um mesmo ângulo será sempre um valor constante (igual).	Válida e desejável
A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um ângulo é igual a tangente desse mesmo ângulo.	Válida e desejável
A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de qualquer ângulo é sempre igual.	Parcialmente válida e não desejável
A divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente de um ângulo é igual a divisão do cateto adjacente pelo cateto oposto.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 5

Assim como nas atividades anteriores, iniciamos a atividade 5 com uma questão motivadora. Desta vez, com o objetivo de introduzir a relação trigonométrica tangente. Em virtude deste conteúdo ser algo novo para os estudantes, possivelmente apresentarão dificuldades para solucionar a questão, pois ainda desconhecem a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

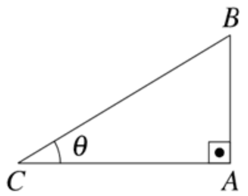
Após a execução, pelos estudantes, dos procedimentos solicitados na atividade, espera-se que os mesmos compreendam que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, ambos para o ângulo 30º, será o valor constante 0,577; para o ângulo de 45º será o valor 1 e para o ângulo de 60º é igual a constante 1,732.

Desta forma, ao retornar a questão inicial, acreditamos que os alunos apresentarão corretamente a solução do problema, conforme fora solicitado.

4.1.8. Atividade 6

Esta é uma atividade de **REDESCOBERTA** que consiste em levar o estudante a descobrir que a razão entre o cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo é a mesma razão entre o seno e o cosseno, quando se tratar de um mesmo ângulo.

QUESTÃO INICIAL: O professor de matemática solicitou a João que calculasse a tangente do ângulo **ɵ** no triângulo a seguir. No entanto, os únicos dados que o professor informou foi: **seno ɵ = 0,848** e **cosseno ɵ = 0,53**. Sabendo que a questão foi respondida corretamente, qual foi o valor encontrado por João para a tangente do ângulo **ɵ**?



Título: Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo

Objetivo: Descobrir a razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 3, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulos 3, faça o seguinte:

- Determine o seno do ângulo indicado;
- Determine o cosseno do ângulo indicado;
- Determine a tangente do ângulo indicado;

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo β	Seno β	Cosseno β	Tangente β	$\frac{sen\beta}{cos\beta}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

OBSERVAÇÃO:
CONCLUSÃO:

Quadro 15 - Quadro de Previsões para Atividade 6

Conclusão	Classificação
A razão entre o seno e o cosseno de um ângulo será sempre um valor constante (igual).	Válida e desejável
A razão entre o seno e o cosseno de um ângulo é igual a tangente desse mesmo ângulo.	Válida e desejável
O seno dividido pelo cosseno é sempre igual.	Parcialmente válida e não desejável
A divisão do seno pelo cosseno de um ângulo é igual a divisão do cosseno pelo seno.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 6

Os alunos deverão calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos indicados em cada figura. Em seguida, calcular a razão entre os valores encontrados para o seno e cosseno. Ao realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com dados obtidos. Espere-se que os estudantes, ao analisarem os dados e realizarem as comparações, concluirão que o valor da tangente de um ângulo será igual ao valor da razão (divisão) entre seno e cosseno deste mesmo ângulo.

Desta forma, ao retornarem à resolução da questão motivadora os alunos encontrão a resposta correta para o problema.

4.1.9. Atividade de Aprofundamento 2

Esta é uma atividade de **APROFUNDAMENTO** que consiste em um baralho das relações trigonométricas no triângulo retângulo contendo 80 (oitenta) cartas que deverão ser jogadas de modo a formar trincas com uma carta de triângulo e duas cartas das relações trigonométricas relacionadas o triângulo. O objetivo da atividade é aprofundar a aprendizagem das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Título: Baralho das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Objetivo: Aprofundar a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

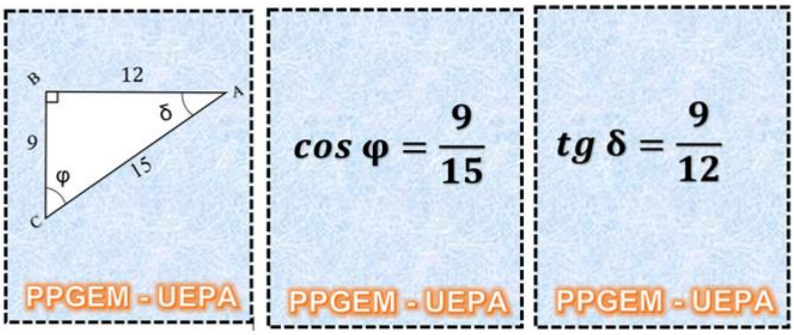
Participantes: 03 ou 04.

Material: 32 Cartas Triângulo e 48 Cartas Relações Trigonométricas.

Regra do Jogo:

1. A turma deve ser organizada em grupos e cada um desses grupos receberá um Baralho das Relações Trigonométrico;
2. As cartas dever ser embaralhadas e distribuídas em quantidade de 06 (seis) cartas para cada estudante;
3. As cartas restantes ficarão sobre a mesa com a face virada para baixo;
4. Um dos estudantes inicia a partida "comprando" uma carta do monte sobre a mesa, podendo ficar com a cada comprada ou descartá-la;
5. O objetivo é formar uma trinca composta por: 1 Carta Triângulo e 2 Cartas Relação Trigonométrica;
6. O jogo continua, com os alunos tendo duas opções de compra, ou do monte de cartas ou a última carta descartada do jogo;
7. Ganha o jogo quem conseguir forma, primeiro, 02 (duas) trincas.

Veja o exemplo de uma trinca:



Observação: A presente atividade (Baralho Trigonométrico) foi adaptada de Gomes (2013).

Análise *a priori* das atividades de aprofundamentos 2

Esperamos que por meio desta atividade lúdica, os alunos possam desenvolver/aprimorar as seguintes habilidades:

- Cálculo mental;
- Compreensão e fixação dos algoritmos;
- Análise e interpretação das relações trigonométricas no triângulo retângulo;
- Interação em grupos, comunicação e relações sociais.

Desta forma, o jogo Baralho Trigonométrica auxiliará na fixação do conteúdo trigonometria trabalhado com alunos do 2º ano do Ensino Médio, possibilitando uma melhor compreensão do objeto matemático em questão, por meio de uma atividade lúdica planejada previamente.

4.1.10. Atividade de Aprofundamento 3

Esta é uma atividade de **APROFUNDAMENTO** que consiste na resolução de situações problemas, com o objetivo de consolidar a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo senos, cosseno e tangente.

Título: Situações problemas envolvendo as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo

Objetivo: Consolidar o aprendizado das Relações Trigonométricas no triângulo retângulo por meio de uma lista de exercícios contendo 08 questões.

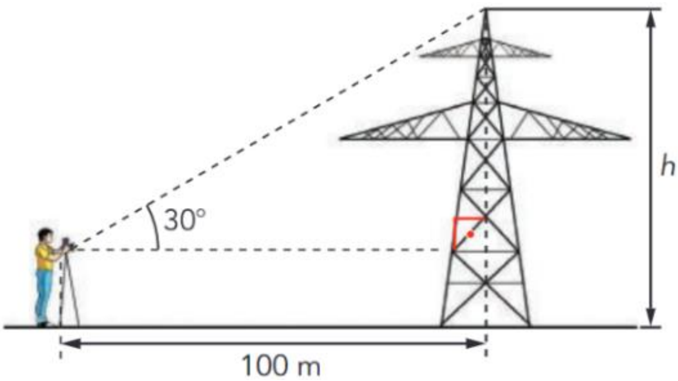
Material Necessário: Folha de exercícios.

Procedimento: Entregar a cada aluno uma cópia da folha de exercício, e solicitar que resolvam as questões.

QUESTÕES

Questão 01: Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo.

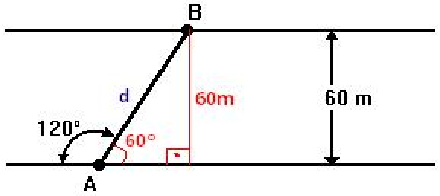
Questão 02: Para determinar a altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de medida de abertura de 30°, conforme mostra a imagem. O teodolito é um instrumento que mede a abertura de ângulos horizontais ou verticais, muito utilizado em topografia.



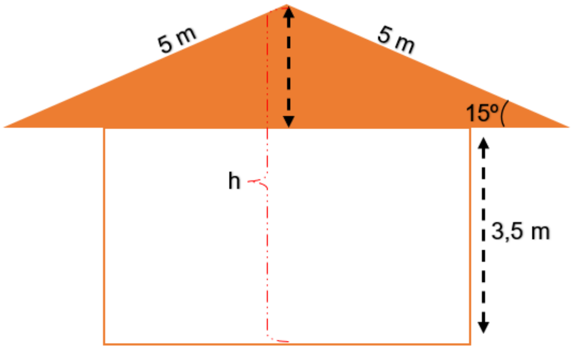
Fonte: (Dante, 2020, p. 27)

Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é a medida de comprimento aproximada da altura da torre?

Questão 03: Um barco parte do ponto “**A”** para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

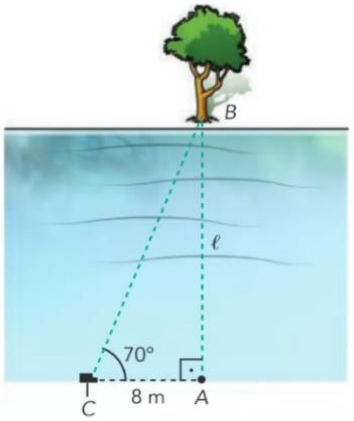


Questão 04: Um engenheiro projetou o seguinte *croqui* de uma casa.



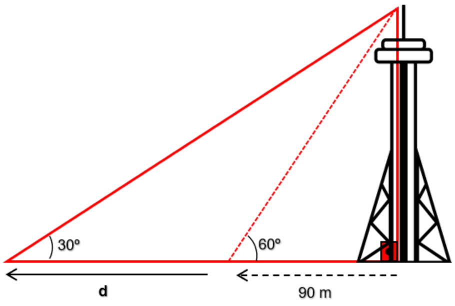
Determine a altura (distância entre o ponto mais alto em relação ao solo) desta casa.

Questão 05: Considere que, em determinado rio, a medida de distância entre os pontos C e A seja de 8 metros, e que a medida obtida para a abertura do ângulo $B\hat{C}A$ tenha sido de 70°, como na imagem a seguir. Nessas condições, qual é medida de comprimento da largura desse rio?

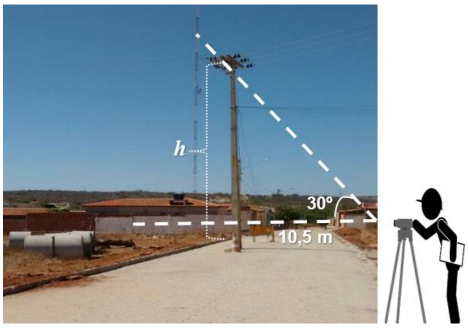


Fonte: (Dante, 2020, p. 28)

Questão 06: Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de uma torre, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C da torre, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo da torre sob um ângulo de 30°?

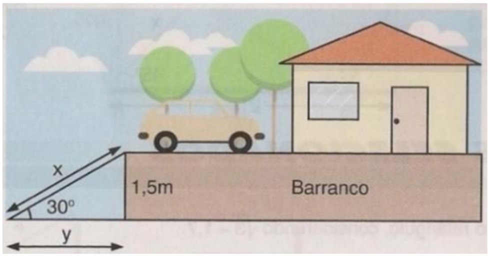


Questão 07: Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um poste de energia elétrica. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 10,5 m do poste e mediu o ângulo de 30º, como indicado na figura a seguir:



Sabendo que a luneta do teodolito está a uma altura de 1 metro do solo, qual é a altura (h) aproximada deste poste?

Questão 08: Observe a figura e determine:



a) Qual é o comprimento da rampa?

b) Qual é a distância do início da rampa ao barranco?

Análise *a priori* das atividades de aprofundamentos 3

A atividade de aprofundamento 3 servirá para desenvolver nos alunos a habilidade na resolução de questões por meio de situações cotidianas de aplicações práticas das razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente). Desta forma, esta atividade favorecerá o diálogo entre alunos e docente, no decurso das discursões a respeito das dúvidas que surgirem.

4.1.11. Atividade 7

Esta é uma atividade de **REDESCOBERTA** que consiste em levar o estudante a descobrir uma relação entre o seno e cosseno de um mesmo ângulo no triângulo retângulo.

QUESTÃO INICIAL:

Determine o valor aproximado do seno de 25º, sabendo que cos25º ≅ 0,906.

Título: Teorema Fundamental da Trigonometria

Objetivo: Descobrir uma relação entre seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 3, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulos 3, faça o seguinte:

- Determine o seno do ângulo indicado;
- Determine o cosseno do ângulo indicado.

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo β	senβ	Cosβ	$sen^2β$	$cos^2β$	$sen^2β + cos^2β$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 16 - Quadro de Previsões para Atividade 7

Conclusão	Classificação
Em qualquer triângulo retângulo, o seno ao quadrado de um ângulo mais o cosseno ao quadrado desse mesmo ângulo será sempre igual a 1 ($sen^2\beta + cos^2\beta = 1$).	Válida e desejável
O seno ao quadrado de um ângulo mais o cosseno ao quadrado de qualquer ângulo será sempre igual a 1.	Parcialmente válida e não desejável
Em qualquer triângulo retângulo, o seno mais o cosseno é igual a 1.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

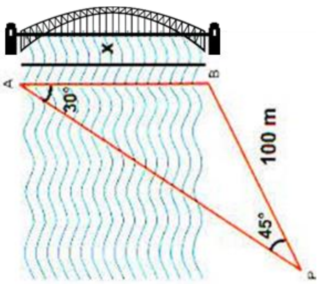
Análise *a priori* da atividade 7

Ao realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com os dados obtidos, espere-se que os estudantes ao analisarem estes resultados e realizarem as comparações, compreenderão o conceito do Teorema Fundamental da Trigonometria, que garante que a soma entre o quadrado do seno e o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo é igual a 1 (um).

4.1.12. Atividade 8

Esta é uma atividade de **REDESCOBERTA** que consiste em levar o estudante a descobrir uma relação entre as razões dos lados de um triângulo qualquer e os valores do seno dos respectivos ângulos opostos deste triângulo.

QUESTÃO INICIAL: Sob o rio Parauapebas será construída uma ponte AB. De um ponto P, a 100 m de B, mediu-se o ângulo APB = 45º e do ponto A, mediu-se o ângulo PAB = 30º. Calcule o comprimento da ponte.



Título: Lei dos Senos

Objetivo: Descobrir uma relação entre as razões dos lados e os valores do seno dos respectivos ângulos opostos de um triângulo qualquer.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 4, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo do quadro de triângulo 4, faça o seguinte:

- Anote as medidas (a, b, c) correspondentes a cada lado do triângulo;
- Calcule o valor do seno dos ângulos indicados em cada triângulo;
- Determine a relação entre as razões dos lados e os respectivos valores do seno do ângulo oposto a esses lados.

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Lados			Seno dos ângulos			$\frac{a}{sen\,\hat{A}}$	$\frac{b}{sen\,\hat{B}}$	$\frac{c}{sen\,\hat{C}}$
	A	B	c	$sen\,\hat{A}$	$sen\,\hat{B}$	$sen\,\hat{C}$			
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

OBSERVAÇÃO:
CONCLUSÃO:

Quadro 17 - Quadro de Previsões para Atividade 8

Conclusão	Classificação
Em qualquer triângulo, a razão $\frac{a}{sen\,\hat{A}}$, $\frac{\boldsymbol{b}}{sen\,\hat{B}}$ e $\frac{c}{sen\,\hat{C}}$ é um valor constante (igual).	Válida e desejável
Em um triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.	Válida e desejável
Os lados do triângulo são proporcionais aos ângulos.	Parcialmente válida e não desejável
Os lados do triângulo são sempre iguais aos senos dos ângulos.	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 8

Iniciaremos a atividade com uma questão motivadora, onde os estudantes deverão calcular o valor referente ao tamanho de uma ponte que será construído sobre um rio. Acreditamos que os alunos não conseguirão resolver de forma correta tal problema, pois o conhecimento que eles têm ainda está muito limitado as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

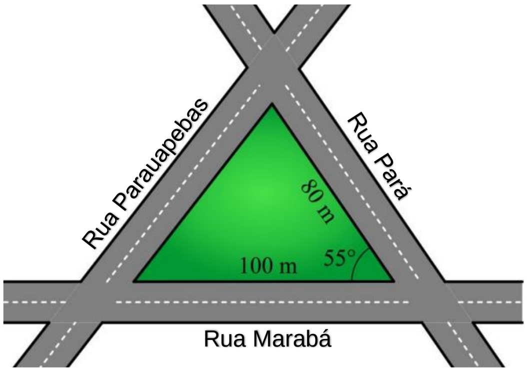
Após a realização da atividade proposta com todos os procedimentos solicitados, espera-se que os alunos compreendam que a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. Além disso, com base na análise dos dados, os alunos deverão concluir que em um mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante.

No final, ao retornarem para questão motivadora, espera-se que os estudantes resolvam de forma correta o problema inicial.

4.1.13. Atividade 9

Esta é uma atividade de **REDESCOBERTA** que consiste em levar o estudante a descobrir uma relação entre a medida dos lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um dos seus ângulos.

QUESTÃO INICIAL: Uma pracinha triangular será construída entre três ruas, como mostra a figura.



Determine o comprimento do lado da pracinha referente a Rua Parauapebas.

Título: Lei dos Cossenos

Objetivo: Descobrir uma relação entre a medida dos lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um dos seus ângulos.

Materiais necessários: Quadro de triângulos 4, lápis ou caneta, papel e calculadora (opcional).

Procedimentos: Para cada triângulo da Lista de Triângulo 4, faça o seguinte:

- Anote a medida do ângulo $\hat{A}$;
- Determine o valor do cosseno do ângulo $\hat{A}$;
- Anote os valores correspondentes as medidas dos alados do triângulo (a, b, c);

COM OS DADOS OBTIDOS PREENCHA O QUADRO A SEGUIR

Triângulo	Ângulo($\hat{A}$)	cos($\hat{A}$)	A	B	c	a^2	b^2	c^2	$b^2+c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Quadro 18 - Quadro de Previsões para Atividade 9

Conclusão	**Classificação**
O valor de $\mathbf{a^2}$ é sempre igual a: $b^2+c^2 – 2.b.c.\cos(\alpha)$	Válida e desejável
O valor de **a** é sempre igual a: $b+c – 2.b.c.\cos(\alpha)$	Parcialmente válida e não desejável
O valor de a^2 é igual a: $b^2 + c^2$	Inválida e não desejável

Fonte: Autores (2023)

Análise *a priori* da atividade 9

A relação entre a medida dos lados de um triângulo e o cosseno de um dos seus ângulos, denominada lei dos cossenos, permite descobrir a medida de um dos lados de um triângulo qualquer quando é conhecida a medida de outros dois lados e o ângulo oposto ao lado que se quer descobrir.

Assim, ao realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com os dados obtidos, espere-se que os estudantes ao analisarem os dados, compreendam, sem dificuldades, a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer. Desta forma, os alunos deverão concluir que o quadrado da medida de um dos lados de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

4.1.14. Atividade de Aprofundamento 4

Esta é uma atividade de **APROFUNDAMENTO** que consiste na resolução de situações problemas, com o objetivo de consolidar a aprendizagem das relações trigonométricas em um triângulo qualquer.

Título: Situações problemas envolvendo as Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

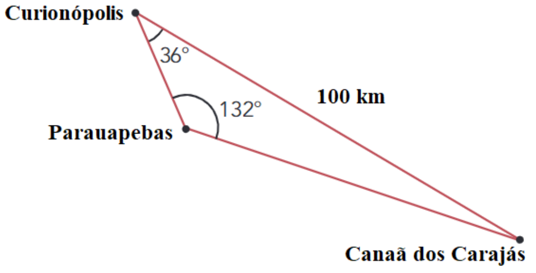
Objetivo: Consolidar o aprendizado das Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer por meio de uma lista de exercícios contendo 08 questões.

Material Necessário: Folha de exercícios.

Procedimento: Entregar a cada aluno uma cópia da folha de exercício, e solicitar que resolvam as questões.

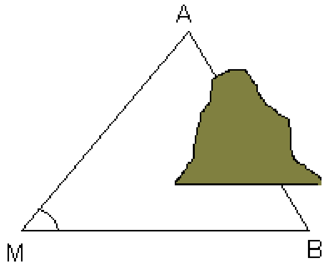
QUESTÕES

Questão 01: Curionópolis, Parauapebas e Canaã dos Carajás são cidades do sudeste paraense e a localização delas pode ser representada pelo triângulo a seguir.

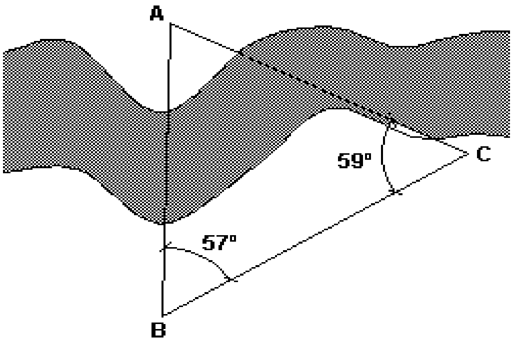


Considerando os dados indicados na figura, determine a medida de distância aproximada entre Parauapebas e Canaã dos Carajás.

Questão 02: Calcule a distância dos pontos A e B, entre os quais há uma montanha, sabendo que suas distâncias a um ponto fixo M são de 2km e 3km, respectivamente. A medida do ângulo $A\hat{M}B$ é igual a 60º.

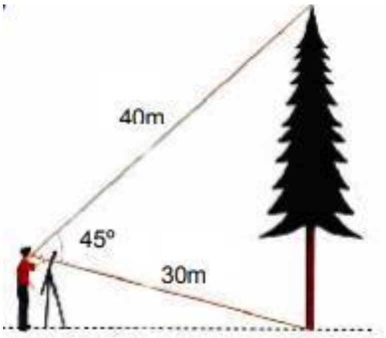


Questão 03: Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, conforme ilustrado na figura a seguir.

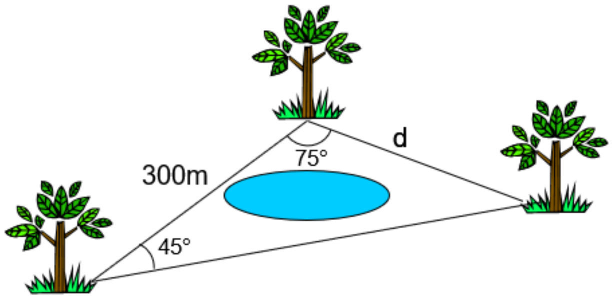


Para calcular o comprimento $\overline{AB}$, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos $C\hat{B}A$ = 57° e $A\hat{C}B$ = 59°. Sabendo que $\overline{BC}$ mede 30m, indique, em metros, a distância $\overline{AB}$. (Dado: use as aproximações sen(59°) ≈ 0,87 e sen(64°) ≈ 0,90)

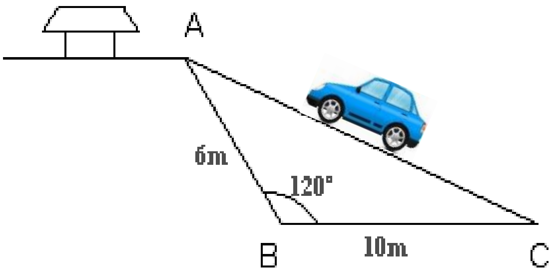
Questão 04: A figura mostra um topógrafo medindo uma árvore. Pode-se dizer que a altura da árvore é: (Use: $\sqrt{2} = 1{,}4$)



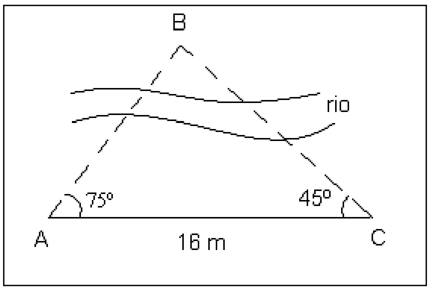
Questão 05: Um agrimensor quer medir a distância entre duas árvores. De acordo com os dados, determine a distância (d) indicada na figura.



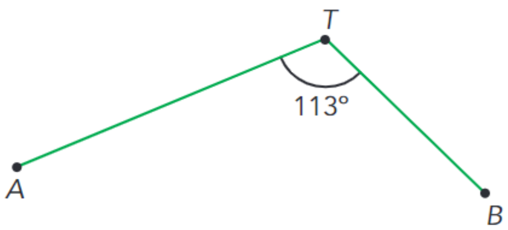
Questão 06: A figura abaixo mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta, $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos à casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de A a B é de 6 m, de B a C é de 10 m e o ângulo ABC mede 120º. Qual deve ser o valor do comprimento da rampa em metros?



Questão 07: Um topógrafo pretende medir a distância entre dois pontos (A e B) situados em margens opostas de um rio. Para isso, ele escolheu um ponto C na margem em que está, e mediu os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{A}B$, encontrando, respectivamente, 45° e 75º. Determine $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{AC}$ mede 16 m. (Utilize $\sqrt{2} \cong 1,4$).



Questão 08: Dois barcos partem de um ponto T, percorrendo rotas lineares em direção aos pontos A e B, com medidas de velocidade constante de 60 km/h e 45 km/h, respectivamente. Os barcos chegam aos pontos A e B após 2 horas, e a medida de abertura do ângulo formado entre os percursos é de aproximadamente 113°. Nessa situação, qual é a medida de distância entre os barcos nesses pontos?



Análise *a priori da atividade de aprofundamento 4*

Nesta atividade, os alunos colocarão em prática a utilização correta das leis trigonométricas (Lei do Seno e Lei do Cosseno), por meio de situações da realidade. Desta forma, a presente atividade proporcionará aos estudantes a oportunidade de esclarecimento quanto as dúvidas que ainda têm a respeito do conteúdo estudado, por meio do processo de resolução dos problemas.

4.1.15. Pós-Teste

Ao término de todas as atividades anteriores, os alunos realizarão um Pós-Teste. Este, é o mesmo aplicado no início desta Sequência Didática (4.1.1 Testes Gerais). O objetivo da reaplicação desta atividade é verificar como os alunos resolveriam os exercícios sobre Relações Trigonométricas, depois da sequência de atividades sobre o assunto estudado.

5. EXPERIMENTAÇÃO

A finalidade desta seção é apresentar a execução da Sequência Didática, bem como a informações produzidas em sala de aula no decurso da etapa Experimentação. Esta etapa ocorreu em uma escola de ensino médio pertencente a rede pública de ensino do estado do Pará, localizada na cidade de Parauapebas. A escolha por esta instituição de ensino ocorreu em virtude de ser o ambiente de trabalho do professor pesquisador e a turma escolhida está sob sua responsabilidade. Destacamos que o ano letivo nesta unidade de ensino iniciou três semanas após as demais escolas da rede estadual, em virtude da escola apresentar problemas estruturais e falta de servidores que inviabilizava o início das aulas.

A sequência didática produzida nas análises *a priori* foi aplicada em sala de aula, nos dias de segunda-feira e quarta-feira, no turno da tarde, das 15h00min às 16h20min, de acordo com o cronograma de aulas da escola para o ano letivo de 2023, em um total de 13 (treze) encontros. Ressaltamos que cada encontro compunha um tempo de 2 horas-aula de 40 minutos cada uma, para a realização da experimentação.

A seguir, apresentamos o cronograma de aplicação da Sequência Didática.

Quadro 19 - Cronograma de aplicação da Sequência Didática

Seções	**Datas**	**Títulos das Atividades**	**Classificação das Atividades**	**Tempo de Aplicação**
I	03/04/2023	**Questionário**: Entrevista com os alunos	Entrevista	40 minutos
		Testes Gerais	Pré-Teste	40 minutos
II	05/04/2023	**Atividade 1**: Os catetos e a hipotenusa	Conceituação	41 minutos
		Aprofundamento 1: *Quiz* sobre os catetos e a hipotenusa	Aprofundamento	32 minutos
		Avaliação da aula		7 minutos
III	10/04/2023	Minicurso sobre o uso da Calculadora	*	80 minutos
IV	12/04/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 2: Hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente		50 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		8 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		11 minutos
V	17/04/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 3: Seno de um ângulo no triângulo retângulo		44 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		5 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		12 minutos
VI	19/04/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 4: O Cosseno de um ângulo		36 minutos

		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		4 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		7 minutos
VII	24/04/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 5: Tangente de um ângulo no triângulo retângulo		22 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		6 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		8 minutos
		Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 6: Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo		17 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		2 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		5 minutos
VII	03/05/2023	**Aprofundamento 2**: Baralho das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo	Aprofundamento	30 minutos
		Aprofundamento 3: Situações problemas envolvendo as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo		47 minutos
		Avaliação da aula		3 minutos
IX	22/05/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 7: Relação entre seno e cosseno no triângulo retângulo		24 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		7 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		9 minutos
X	24/05/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 8: Lei dos Senos		20 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		5 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		8 minutos
XI	29/05/2023	Questão Inicial (resolução *a priori*)	Re(descoberta)	5 minutos
		Atividade 9: Lei dos Cossenos		22 minutos
		Questão Inicial (resolução *a posteriori*)		3 minutos
		Avaliação da aula, observações, conclusões e formalização		5 minutos
XII	31/05/2023	**Aprofundamento 4**: Situações problemas envolvendo as Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	Aprofundamento	42 minutos
		Avaliação da aula		3 minutos
XIII	06/06/2023	**Testes Gerais**	Pós-Teste	80 minutos

Fonte: Elaborado pelos Autores (2023).

Destacamos que, com exceção do pré-teste e pós-teste que foram realizados individualmente, as demais atividades foram desenvolvidas em grupos com até 4 (quatro) estudantes. Quanto a formação das equipes, esta função coube aos próprios alunos, sendo o professor o mediador do processo. Acreditamos que o trabalho em grupo auxilia no desenvolvimento de habilidades de cooperação e comunicação, bem como a capacidade de observar e registrar resultados de forma clara e objetiva.

Em todos os encontros o professor pesquisador esteve acompanhado de uma professora observadora. A função da professora observadora é auxiliar o professor pesquisador nos registros das ocorrências em sala de aula durante a experimentação. Para isso, a observadora dispunha de uma ficha de acompanhamento para cada encontro, onde registrou o comportamento do professor e de cada equipe durante a realização das atividades propostas.

Portanto, mediante a aplicação da Sequência Didática, dos registros de observações e dos *feedbacks* dos estudantes, foram produzidas as informações necessárias para análise da pesquisa. No quadro a seguir, apresentamos um resumo das informações produzidas durante o processo de experimentação que serão elementos norteadores para a análise *a posteriori*.

Quadro 20 - Informações produzidas na Experimentação

Informações	**Como?**	**Por quê?**
Socioeducacionais	Mediante a aplicação de um questionário socioeducacional.	O questionário permite ao pesquisador/professor ter uma compreensão mais profunda do contexto em que os alunos estão inseridos. Ele fornece informações sobre o ambiente familiar, recursos disponíveis, acesso a materiais educacionais, suporte familiar e outras variáveis socioeconômicas que podem influenciar a aprendizagem dos alunos.
Conhecimentos prévios	Mediante a aplicação de um pré-teste sobre o conteúdo trigonometria no triângulo.	O pré-teste permite ao pesquisador/professor avaliar o nível de conhecimento que os alunos possuem sobre o tema que será abordado na sequência didática.
Observações sobre o processo experimental	Registrar as observações sobre como os alunos estão executando as atividades, quais estratégias eles estão usando, quais dificuldades eles estão enfrentando e quais abordagens estão sendo bem-sucedidas.	Essas observações fornecerão informações sobre o processo de aprendizagem e as habilidades dos estudantes na aplicação dos conceitos trigonométricos.
Respostas, observações e conclusão dos alunos	Ao realizar atividades experimentais, os estudantes fornecerão respostas e conclusões sobre os resultados que estão obtendo e sobre os	Essas respostas podem revelar o nível de compreensão dos participantes, suas interpretações dos resultados e suas capacidades de aplicar os

	conceitos de trigonometria que estão sendo aplicados.	conceitos em diferentes contextos.
Discussões e interações entre os participantes	Durante as atividades experimentais, os participantes podem interagir entre si, discutir suas ideias, compartilhar estratégias e debater os resultados obtidos.	Essas interações podem fornecer informações sobre como os alunos constroem o conhecimento em conjunto, como se apoiam mutuamente e como comunicam suas ideias relacionadas à trigonometria no triângulo.
Estratégias de resolução de problemas	Essas estratégias podem variar desde o uso das relações trigonométricas básicas, como o teorema de Pitágoras até a aplicação de técnicas mais avançadas, como a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.	Observar e analisar as estratégias utilizadas pelos participantes pode fornecer informações sobre sua compreensão dos conceitos e sua habilidade em aplicá-los de forma eficiente.
Erros e dificuldades	Durante as atividades experimentais, é comum que os participantes cometam erros ou enfrentem dificuldades na resolução dos problemas propostos.	Identificar os erros mais frequentes ou as dificuldades encontradas pode ajudar a identificar conceitos específicos que requerem maior atenção e revisão.
Percepções e *feedback* dos alunos	Coletar as opiniões sobre a utilidade das atividades, a clareza das instruções, a relevância dos conceitos abordados e qualquer sugestão para melhorias futuras.	Essas informações podem ajudar a avaliar a eficácia das atividades e a adaptá-las às necessidades dos alunos.
Tempo de realização das atividades	Essas informações foram produzidas mediante o registro do tempo de início e término de cada atividade realizada pelos alunos.	A análise do tempo que os alunos levam para resolver uma atividade fornece informações valiosas sobre seu desempenho, dificuldades, ritmo de aprendizagem e progresso ao longo do tempo.
Frequência dos alunos	Mediante o controle de chamada/frequência realizada em cada encontro da aplicação da Sequência Didática.	A frequência e a participação nas atividades são fatores que podem influenciar no desempenho dos alunos.
Conhecimentos adquiridos	Mediante a aplicação de um pós-teste.	O pós-teste permite analisar o desenvolvimento dos estudantes antes e depois da aplicação da Sequência Didática.

Fonte: Elaborado pelos Autores (2023).

Assim, a análise dessas informações envolverá a identificação de padrões, tendências, temas recorrentes e a interpretação dos dados para obter uma compreensão mais aprofundada do processo de aprendizagem e das experiências dos estudantes durante as atividades experimentais. Deste modo, apresentaremos a seguir uma transcrição minuciosa e fidedigna dos fatos ocorridos durante cada encontro da aplicação da Sequência Didática.

5.1. ENCONTRO I

O Primeiro Encontro com a turma para aplicação da Sequência Didática ocorreu no dia 03 de abril de 2023 (segunda-feira), às 15h00min, com duração de 2 horas-aula. Neste dia aplicamos um questionário socioeconômico com o intuito de identificar o perfil social dos estudantes. Além disso, aplicamos um pré-teste contendo 10 (dez) questões sobre o objeto matemático trigonometria no triângulo. O objetivo deste teste foi verificar como os alunos resolveriam os problemas propostos, antes e depois da sequência de atividades sobre o conteúdo estudado.

Antes da aplicação do pré-teste, apresentamos aos alunos a forma como os trabalhos seriam conduzidos, como por exemplo, que as atividades seriam desenvolvidas em grupos, com exceção dos testes inicial e final que seriam realizados individualmente. Após essa breve explanação da metodologia que utilizaríamos, solicitamos aos alunos que se organizassem em fileiras. Em seguida, entregamos a cada um o questionário socioeconômico, cujos resultados e análise estão dispostos no item 5.1.1, e posteriormente entregamos o teste a cada estudante.

Ao iniciarem a leitura do teste, foi perceptível a troca de olhares entre os estudantes demonstrando que não conheciam o conteúdo abordado na atividade. Como esperado, os alunos não apresentaram um bom desempenho, mas nos surpreendeu o fato de todos os testes terem sido devolvidos em branco.

Ao final do encontro, questionamos os alunos o porquê de não terem resolvidos as questões propostas. As respostas dadas apresentaram o mesmo significado: *“Não sei o que é isso”. “Nunca estudei esse assunto”. “Nem consegui ler”*. Com isso, percebe-se uma ausência de conhecimento sobre o conteúdo trigonometria. Esta falta de conhecimento pode estar relacionada a falta de aulas, uma vez que, como mencionado anteriormente, os alunos desta turma estudaram o 8º e 9º do ensino fundamental de forma remota, além disso, não tiveram professor de matemática durante todo o 1º ano no ensino médio.

5.1.1. PERFIL DOS ESTUDANTES

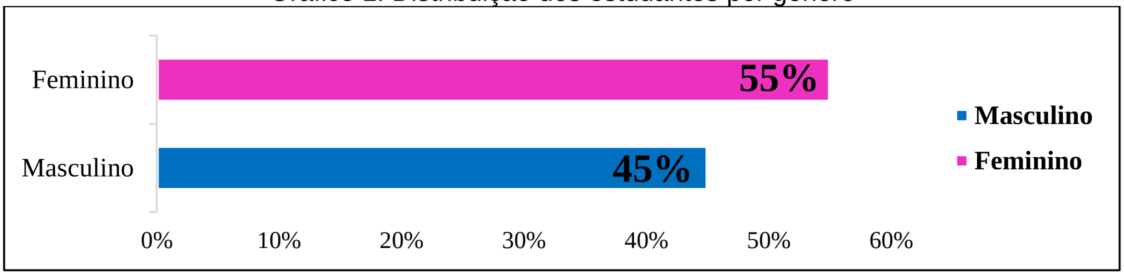
Os sujeitos do presente estudo são alunos do 2º ano Ensino Médio, de uma escola da rede pública de ensino do estado do Pará, localizada no município de Parauapebas. A escolha por esta Unidade de Ensino ocorreu em virtude de o professor pesquisar residir no município e ser professor efetivo de matemática nesta escola. A turma é composta por 40 estudantes e foi escolhida de forma intencional em virtude de apresentar uma característica que a distingue das demais 9 (nove) turmas de 2º ano que escola contém.

Característica essa que se dá pelo fato de a última série que esses alunos haviam assistido aulas de matemática de forma presencial foi no 7º ano do Ensino Fundamental, no ano 2019. Isto porque, em decorrência da pandemia do vírus COVID-19, as aulas do 8º e 9º ano (2020 e 2021) ocorreram de forma remota. No ano de 2022, quando ingressaram no 1º ano do Ensino Médio, por falta de professor, esta turma ficou mais um ano letivo sem estudar a disciplina de matemática.

De acordo com a gestora da escola, os professores de matemática foram lotados na demais turma, contemplando o limite de carga horária que cada docente poderia lecionar, ficando esta turma sem docente. A Gestão da escola realizou várias tentativas na busca de um professor de matemática para esses alunos, porém sem sucesso. Desta forma, acreditamos que será algo desafiador aplicar uma sequência de atividades sobre o Ensino de Trigonometria no Triângulo a esta turma, mas acreditamos também nos bons resultados que esta Sequência Didática poderá desempenhar na aprendizagem desses alunos.

Assim, com o objetivo de traçar o perfil dos estudantes, sujeitos deste estudo, aplicamos um questionário de forma presencial contendo perguntas relacionadas ao perfil social e acadêmico dos alunos. Desta forma, inicialmente levantamos o perfil dos estudantes quanto ao gênero, conforme está disposto no gráfico a seguir:

Gráfico 1: Distribuição dos estudantes por gênero

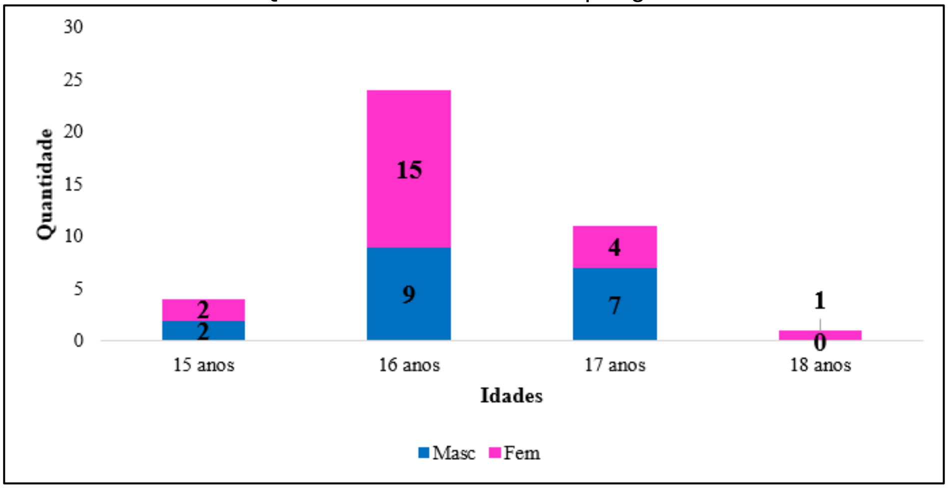


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Com base no levantamento dos dados da pesquisa, identificamos uma a presença maior de estudantes do sexo feminino. Esses dados podem ser corroborados com a pesquisa realizada por Tourão (2020), que ao analisar um quantitativo de 27 alunos, constatou que 56% eram do sexo feminino e 44% do sexo masculino. Por sua vez, Brayner Júnior (2021) observou que em sua pesquisa o percentual de discentes do sexo feminino correspondia a 70% dos sujeitos investigados, mais que o dobro em relação ao sexo masculino.

Quanto a faixa etária, identificamos que 87,5% dos alunos encontram-se com idade entre 16 e 17 anos, conforme o gráfico a seguir:

Gráfico 2: Quantitativo de estudantes por gênero e idade

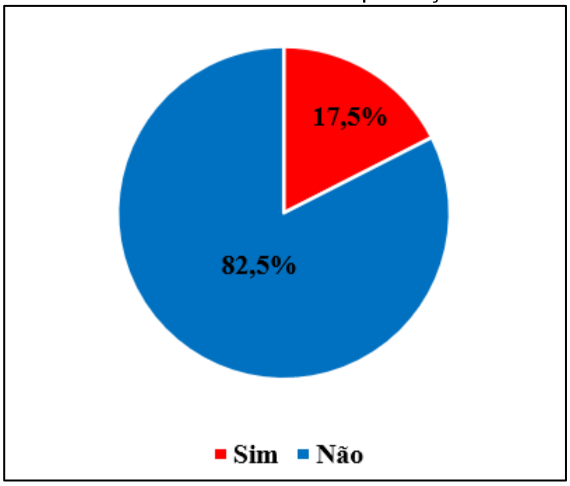


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Assim, podemos afirmar que 97,5% dos estudantes consultados estão com a idade dentro do previsto pela legislação brasileira para cursarem o 2º ano do ensino médio. De acordo com o INEP (2022), a distorção idade/série ocorre quando a diferença entre a idade do aluno e a idade prevista para a série é de dois anos ou mais, assim, apenas um estudante da turma encontra-se nesta condição. Comparando com panorama nacional e estadual, pode-se afirmar que a turma consultada apresenta dados estatísticos positivos, pois segundo levantamento do Censo Escolar do ano de 2022, o Brasil apresentou, para o ensino médio, um percentual de distorção idade/série de 22,2%, enquanto o estado do Pará alcançou os elevados 40,9%, mais que o dobro da taxa nacional.

Mesmo a turma apresentando um baixo índice de distorção idade/série, um fator bem peculiar apresentado pelos consultados é o fato de a turma apresentar um índice de 17,5% de reprovação escolar em alguma série/ano anterior.

Gráfico 3: Taxa de Reprovação

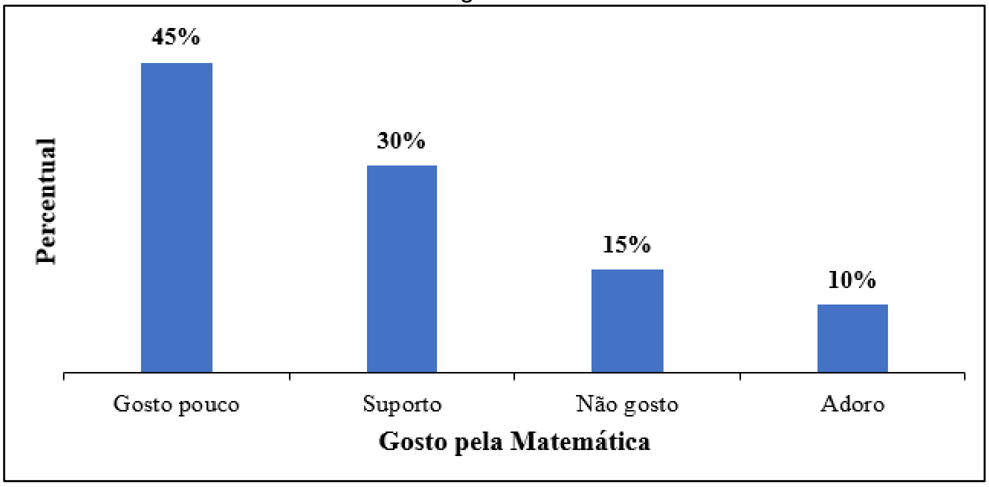


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Ao responder que havia reprovado em alguma série anterior, os alunos deveriam informar em qual ou quais disciplinas isto teria ocorrido. Assim, todos responderam que haviam ficado retidos em virtude da disciplina matemática. Segundo Medeiros (2018) essa problemática vem ocorrendo em virtude da matemática, enquanto disciplina escolar, não despertar o interesse da enorme maioria dos estudantes, tendo em vista os elevados índices de reprovação nesta disciplina.

Reflexo disso, é que quando questionados sobre gosto pela matemática, pouco mais da metade, isto é, 55% dos alunos consultados responderam ter algum apreço em estudar a disciplina, conforme exposto no seguinte gráfico:

Gráfico 4: Você gosta de Matemática?

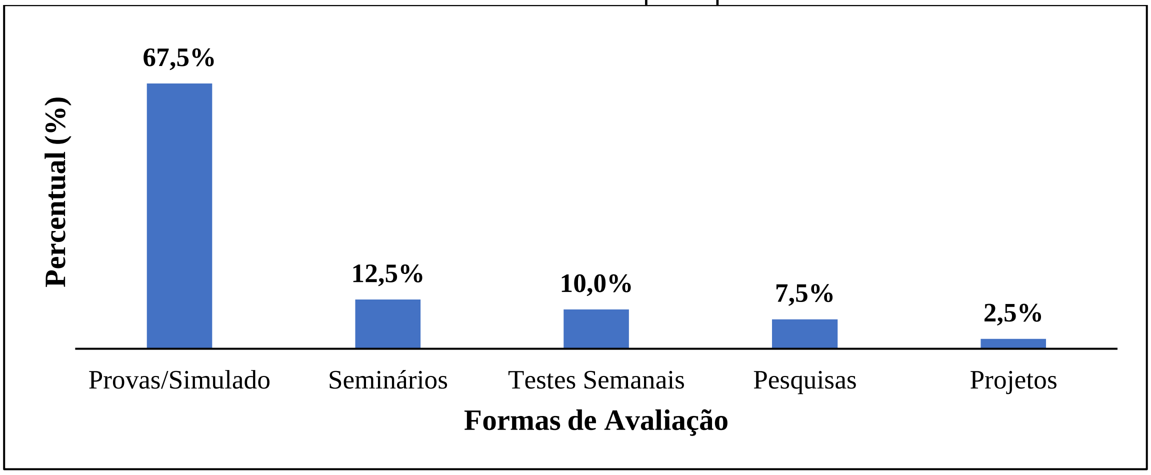


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Destacamos que, enquanto docente, é fundamental compreender o interesse e a motivação dos alunos e as suas expectativas em relação à disciplina de matemática, posto que, esses fatores podem auxiliar na compressão de suas necessidades, e assim, orientar as ações pedagógicas visando um engajamento maior dos alunos a melhorar seu desempenho. Além disso, foi possível constar que 62,5% dos estudantes apresentam algum desconforto quando se encontra diante de uma avaliação de matemática. Destes, 40% afirmaram sentir medo quando precisam realizar uma avaliação da disciplina em questão.

Neste sentido, faz-se necessário identificar a percepção dos alunos em relação à matemática, seu nível de confiança e autoestima em relação à disciplina. Assim, buscamos identificar quais os instrumentos avaliativos mais utilizados pelos docentes, na percepção dos estudantes.

Gráfico 5: Instrumentos avaliativos utilizados pelos professores de matemática.



Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Conforme exposto no gráfico acima, 67,5% dos estudantes afirmaram que seus professores de matemática, até a série anterior, utilizavam as provas e simulados como principal instrumento avaliativo. Silva, Santos e Silva (2022), haviam constado um percentual ainda mais elevado na percepção dos próprios docentes, segundo esses autores, 98% dos professores fazem uso da prova escrita como forma de avaliação. Cabe salientar, que este instrumento não é inválido, no entanto, não poderá ser o único a ser utilizado pelo professor, sob a premissa de a avaliação perder o seu caráter formativo e tornar-se uma forma de classificação, reprovação e exclusão escolar.

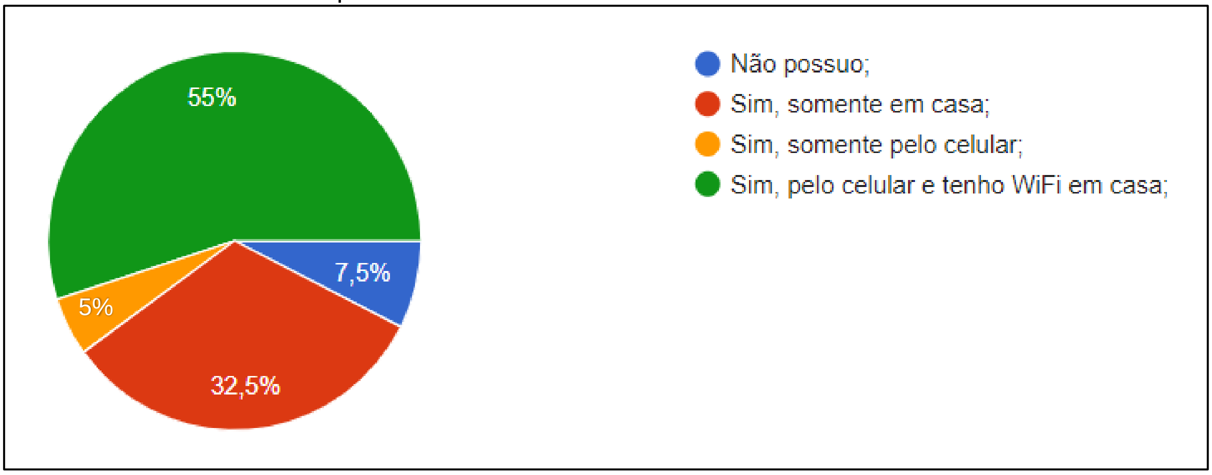
Além disso, buscamos identificar a forma que o professores de matemática, até a série anterior, iniciavam a abordagem dos conteúdos matemáticos. Para 70%

dos estudantes afirmaram que seus professores iniciavam um conteúdo pela definição seguida de exemplos e exercícios; para 15% iniciavam com o uso da história do assunto para em seguida explorar os conceitos dos objetos matemáticos e os demais 15% responderam que uma situação problema era a primeira abordagem realizada em sala de aula.

Outro fator importante relevado pela pesquisa é que 87,5% dos docentes, segundo a percepção dos discentes, utilizam como ferramenta para fixação do conteúdo estudado, listas de exercícios para serem resolvidos (52,5%) ou resolução de questões do livro didático (35%). Tendências no ensino de matemática como a resolução de problemas, modelagem matemática e jogo matemático, não foram apontados pelos estudantes como instrumentos de ensino utilizados pelos professores.

Além disso, o presente levantamento buscou identificar se os alunos pesquisados possuem acesso a rede mundial de computadores (*internet*) e de que forma esse acesso acontece.

Gráfico 6: Acesso à internet pelos estudantes

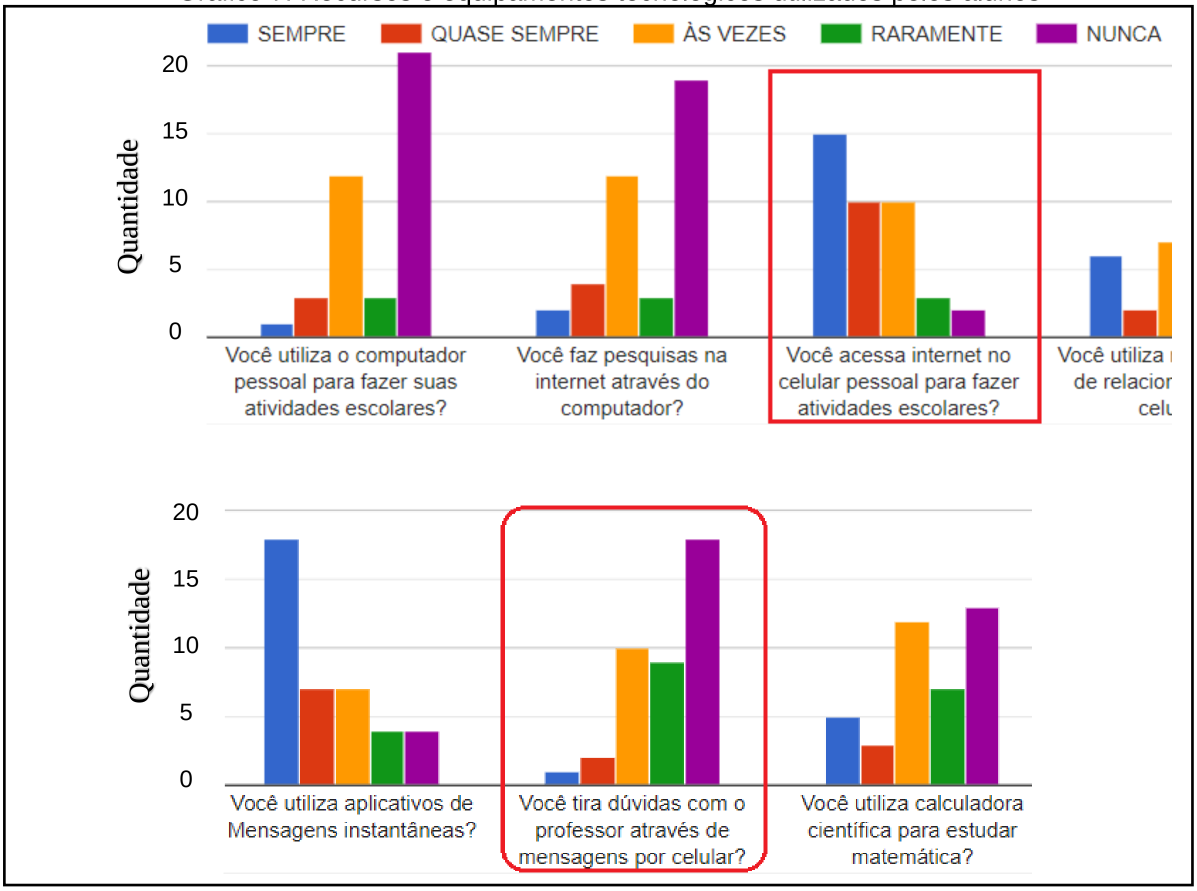


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Conforme exposto no gráfico acima, 92,5% dos estudantes possuem, de alguma forma, acesso à *internet*. Cabe ressaltar que a *internet* oferece uma ampla variedade de recursos de aprendizado, incluindo vídeos instrutivos, tutoriais, jogos, atividades interativas e exercícios práticos. Além disso, existem muitas ferramentas de *software* disponíveis na internet que podem ajudar os alunos a entender conceitos matemáticos complexos. Por exemplo, aplicativos de gráficos podem ser usados para plotar gráficos e analisar dados, enquanto *softwares* de álgebra podem ajudar na resolução de equações complexas.

Assim, o uso de equipamentos tecnológicos nas aulas de matemática pode ser muito útil para tornar o aprendizado mais interativo e visual (SILVA, NOVELLO, 2020). Neste sentido, buscamos identificar alguns dos equipamentos tecnológicos utilizados pelos alunos e a frequência de uso desses itens na aprendizagem da matemática.

Gráfico 7: Recursos e equipamentos tecnológicos utilizados pelos alunos

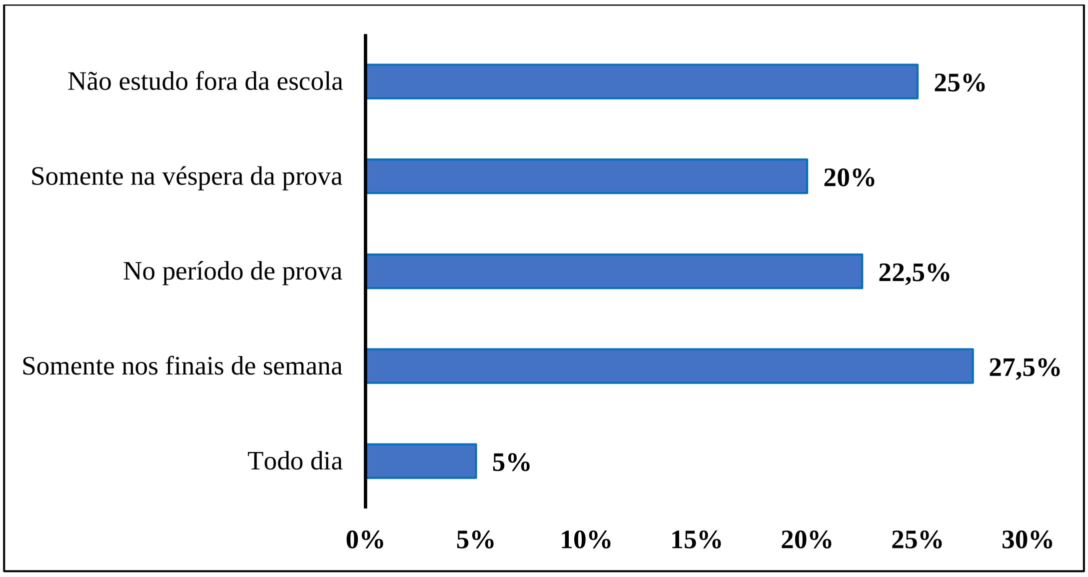


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Conforme os dados descritos no gráfico acima, o celular é o recurso tecnológico mais usado pelos estudantes, no entanto, não é um meio utilizado com frequência pelos alunos como um canal de comunicação para tirar dúvidas com o professor sobre os conteúdos matemáticos. Ressaltamos que a *internet* é um meio que pode auxiliar os professores a se comunicar com seus alunos de maneira mais eficaz, como por exemplo, enviar tarefas e projetos por e-mail, usar fóruns de discussão para discutir tópicos relacionados à matemática e realizar videoconferências para responder perguntas e oferecer ajuda aos alunos.

Um dos fatores que contribuem para um bom desempenho escolar do estudante é a rotina de estudo que ele segue (CARVALHO, 2012). Pensando nisso, questionamos aos alunos sobre seus hábitos de estudos dentro e fora da escola. Os dados estão dispostos no gráfico a seguir:

Gráfico 8: Hábito dos alunos em estudar matemática.

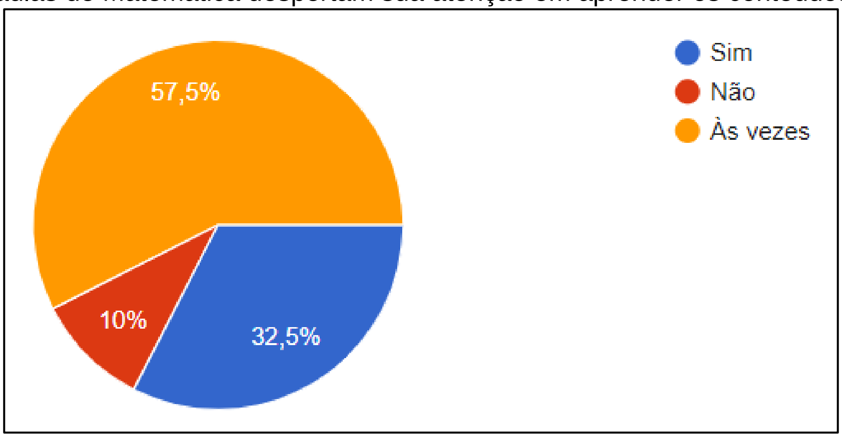


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Como é perceptível, o percentual de alunos que possuem o hábito de estudo diário é muito baixo (5%). Além disso, 25% dos estudantes afirmaram que não possuem o hábito de estudar fora do ambiente escolar. Para Carvalho (2012) este é um dado preocupante, pois os alunos que estudam mais horas por dia ou que estudam com mais frequência em casa, têm uma tendência de apresentar um melhor desempenho escolar.

Além disso, as aulas de matemática não têm despertado o interesse dos estudantes em aprender os conteúdos ministrados, conforme detalhado no gráfico a seguir, onde somente 32,5% dos alunos confirmaram esse interesse.

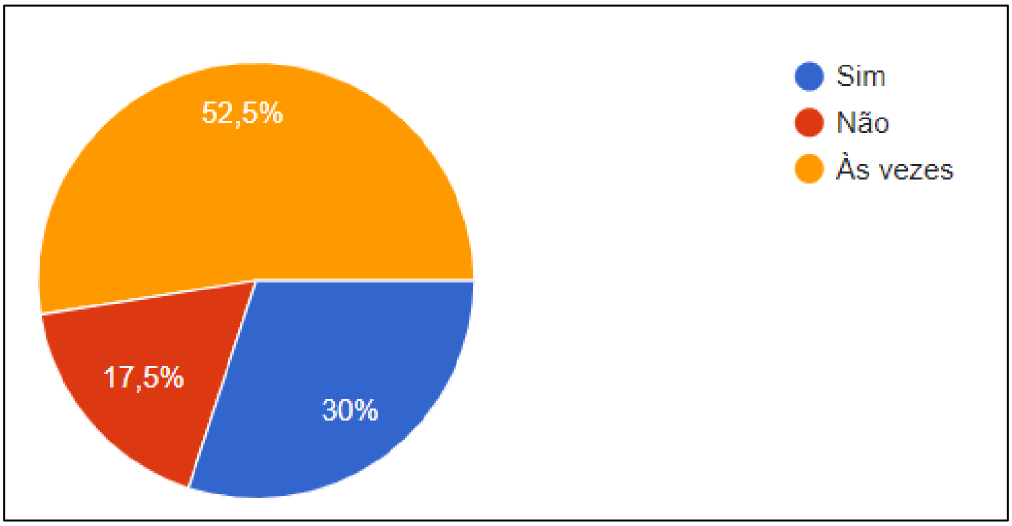
Gráfico 9: As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?



Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Nesta perspectiva, esse baixo interesse que a disciplina de matemática tem despertado nos estudantes, reflete em outra problemática: 17,5% dos alunos não conseguem relacionar os conteúdos matemáticos ensinado em sala de aula com as situações problemas do seu dia a dia, e 52,5%, em algumas vezes, conseguem fazer essa relação entre o que é ensinado na escola com o seu cotidiano. Isto ocorre, porque a matemática ensinada na escola é um processo mecânico, que visa a repetição e despreza as suas referências históricas e seus significados (SCHMIDT; PRETTO; LEIVAS, 2016).

Gráfico 10: Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?

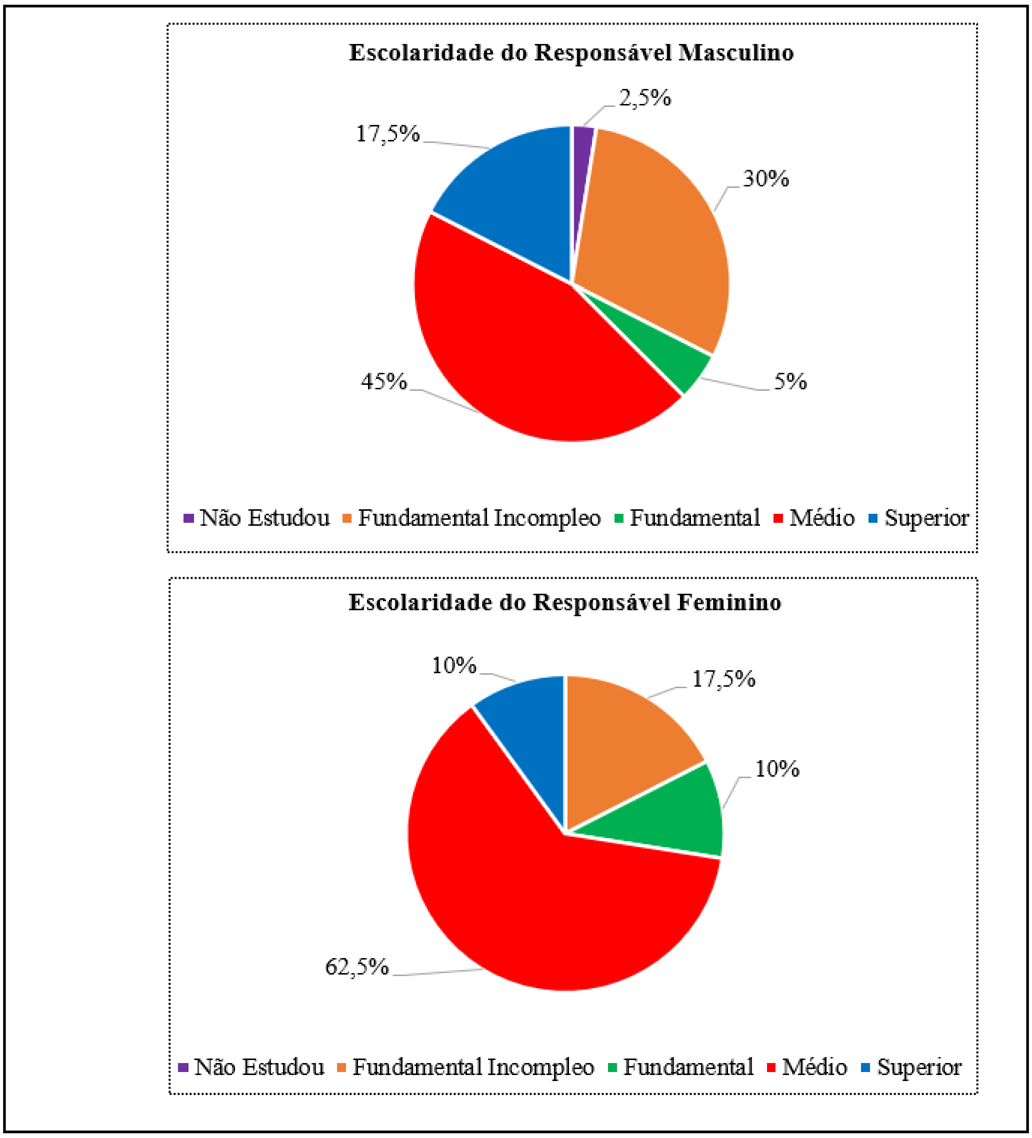


Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Como demostrado no gráfico 10, apenas 30% dos alunos consultados afirmaram que conseguem fazer a relação teoria e prática dos conteúdos matemáticos ensinados na escola com a sua vida cotidiana. Desta forma, Segundo Silva e Silva (2023), um dos grandes desafios dos atuais e futuros profissionais da educação que atuarão na área da matemática é desenvolver metodologias e estratégias de ensino que permitam que o aluno deixe de ser mero espectador dentro da sala de aula e se torne um ser ativo, capaz de construir o conhecimento a partir de reflexões, investigações e análises.

Para finalizar questionário, coletamos as respostas dos discentes quanto ao nível de escolaridade dos seus responsáveis masculino e feminino. Para tal, os dados estão dispostos no gráfico 11:

Gráfico 11: Nível de escolaridade dos responsáveis pelos estudantes



Fonte: Pesquisa de Campo (2023)

Como visto nos dados acima, 62,5% dos responsáveis masculino e 72,5% dos responsáveis femininos pelos alunos, concluíram no mínimo o ensino médio. Assim, compreender melhor o contexto familiar dos alunos nos leva a identificar o papel dos pais ou responsáveis no processo de aprendizagem desses estudantes, posto que, segundo Santos, Mariano e Costa (2019), os melhores rendimentos acadêmicos dos filhos estão associados diretamente aos maiores níveis de escolaridade dos pais. Além disso, quanto mais elevado for o nível de escolaridade dos pais melhores serão as habilidades dos filhos na disciplina de matemática (SANTOS, MARIANO, COSTA, 2019).

5.2. ENCONTRO II

O segundo encontro ocorreu no dia 05 de abril (quarta-feira) de 2023, às 15 horas, no período de 2 horas-aula com a aplicação da Atividade 1: Os catetos e a hipotenusa e Atividade de Aprofundamento 1: *Quiz* sobre o Triângulo Retângulo. Antes de iniciar a aplicação das atividades solicitamos que a turma se dividisse em grupos com três ou quatro estudantes em cada grupo, e realizamos uma breve exposição/apresentação sobre os lados de um triângulo retângulo.

- Atividade 1: Os catetos e a hipotenusa

Inicialmente, entregamos a cada equipe uma cópia da atividade 1 e uma cópia do quadro de triângulos 1 (Apêndice A). Com cada grupo de posse dos materiais necessário, explicamos que a atividade objetivava conceituar os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo. Para isso, seria necessário seguir os procedimentos listados na atividade.

Esta atividade continha 22 questões nas quais as questões de 1 a 5 os alunos deveriam identificar e nomear os lados do triângulo que formam o ângulo de 90º. Nessas cinco questões os alunos não apresentaram dificuldades, e afirmaram que os lados do triângulo que formam o ângulo de 90º são denominados de catetos. Nas questões 6 a 10 os alunos deveriam identificar as medidas relativas aos catetos do triângulo, fator que ocorreu sem dificuldades.

Além disso, para finalizar as questões relativas aos catetos, cada equipe deveria responder a seguinte questão: “**11) o que são os catetos de um triângulo retângulo?**” As respostas de cada equipe estão descritas no quadro a seguir:

Quadro 21 - Solução da Questão 11 da Atividade 1

Grupo (G)	Respostas dos Alunos	Classificação
G1 A_7, A_{28} e A_{32}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** Os catetos são os lados do triongo que formamo angulo de 90°. **Transcrição**: *“Os catetos são os lados do “triango” que formam o ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** as catita são os lados que formam os lado de 90°	Resposta Parcialmente Correta

	Transcrição: *“Os catetos são os lados que formam os lado de 90º.”*	
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** Os catetos de um triângulo retângulo são os lados que formam o ângulo 90° **Transcrição**: *“Os catetos de um triângulo são os lados que formam o ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G4 A_{2}, A_{26} e A_{27}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** São os lados que formam o ângulo de 90° **Transcrição**: *“São os lados que formam o ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G5 A_{9}, A_{33} e A_{35}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** São os lados do triângulo que formam o ângulo de 90° **Transcrição**: *“São os lados do triângulo que formam o ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** Os catetos do triângulo retângulo, são os lados que formam o ângulo de 90° graus. **Transcrição**: *“Os catetos do triângulo retângulo, são os lados que formam o ângulo de 90º graus.”*	Resposta Correta
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** R- Os catetos são os lados que formam o ângulo de 90° no triângulo Retângulo **Transcrição**: *“Os catetos são os lados que formam o ângulo de 90º no triângulo retângulo.”*	Resposta Correta
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** OS catetos ~~são~~ do triangulo que formam 90° **Transcrição**: *“Os catetos ~~são~~ do triangulo que formam 90º.”*	Resposta Parcialmente Correta
G9 A_{4}, A_{20} e A_{21}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** Os catetos de um triângulo retângulo são os lados que formam 90°. **Transcrição**: *“Os catetos de um triângulo retângulo são os lados que formam 90º.”*	Resposta Correta
G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**11) O que são os catetos de um triângulo retângulo?** Os catetos de triangulo que formam 90° **Transcrição**: *“Os catetos de triangulo que formam 90º.”*	Resposta Parcialmente Correta

Fonte: Experimentação (2023).

De acordo com as transcrições das respostas apresentadas no quadro acima, percebe-se que a grande maioria dos estudantes compreenderam o conceito de catetos de um triângulo retângulo. Ao finalizar esse bloco de questões (1 a 11) reforçamos que os lados de um triângulo retângulo que formam um ângulo de 90° são denominados de catetos e, que a palavra cateto vem de grego *káthetos*, que significa “vertical, perpendicular”.

As questões de 12 a 16 tinham como objetivo levar os estudantes a identificar e nomear o lado do triângulo retângulo oposto ao ângulo de 90º. Desta forma, ao analisar cada figura (triângulo), os alunos chegaram à conclusão de que este corresponde a hipotenusa do triângulo. Nas questões seguintes (17 a 21) cada equipe deveria identificar a medida correspondente a hipotenusa do triângulo.

Para finalizar as questões relativas hipotenusa, cada grupo deveria responder a seguinte questão: “**22) o que é a hipotenusa de triângulo retângulo?**” As respostas de cada equipe estão descritas no quadro a seguir:

Quadro 22 - Solução da Questão 22 da Atividade 1

Grupo (G)	Respostas dos Alunos	Classificação
G1 A_7, A_{28} e A_{32}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** O lado oposto do angulo de um triangulo é hipotenusa **Transcrição**: *“O lado oposto do ângulo de um triangulo é hipotenusa.”*	Resposta Parcialmente Correta
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** A hipotenusa do triângulo retangulo é o lado que não esta conectado no 90° **Transcrição**: *“A hipotenusa do triângulo retângulo é o lado que não está conectado no 90º.”*	Resposta Correta
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** O lado maior de triangulo retangulo oposto ao ângulo de 90°. **Transcrição**: *“O lado maior de triangulo retangulo oposto ao ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G4 A_2, A_{26} e A_{27}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** É o lado oposto do ângulo de 90. **Transcrição**: *“É o lado oposto do ângulo de 90º.”*	Resposta Correta
G5 A_9, A_{33} e A_{35}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** a hipotenusa e o lado oposto do ângulo de 90° do triangulo retângulo. **Transcrição**: *“A hipotenusa e o lado oposto do ângulo de 90º do triangulo retângulo.”*	Resposta Correta
G6 A_1, A_3, A_{14} e A_{22}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** É o lado oposto e maior ao ângulo de 90° graus de um triângulo retangulo. **Transcrição**: *“É o lado oposto e maior ao ângulo de 90º graus de um triângulo retângulo.”*	Resposta Correta
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** R= A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90° de um triângulo Retângulo. **Transcrição**: *“A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º de um triângulo retângulo.”*	Resposta Correta
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** O triangulo Retângulo e formado por dois catetos e uma hipotenusa **Transcrição**: *“O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa.”*	Resposta Parcialmente Correta
G9 A_4, A_{20} e A_{21}	**22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo?** O lado oposto ao ângulo de 90° **Transcrição**: *“O lado oposto ao ângulo de 90º.”*	Resposta Correta

G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	22) O que é a hipotenusa de triangulo retângulo? A Hipotenusa do Triângulo é o lado oposto do ângulo de 90° **Transcrição**: *"A hipotenusa do triângulo é o lado oposto do ângulo de 90º."*	Resposta Correta

Fonte: Experimentação (2023).

Ao finalizar o bloco de questões referentes a hipotenusa do triângulo retângulo, a maioria dos grupos afirmaram que a hipotenusa se refere ao lado oposto ao ângulo de 90º, assim como é o maior lado do triângulo. Deste modo, podemos afirmar que os objetivos propostos para a atividade 1 foram alcançados, pois etimologicamente a palavra hipotenusa vem do latim *hypotenusa* e do grego *hypoteinousa*, que significa "o lado mais comprido de um triângulo".

- Atividade de Aprofundamento 1: *Quiz* sobre o Triângulo Retângulo

Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos sobre os lados de um triângulo retângulo, às 15h42min, iniciamos a aplicação da Atividade de Aprofundamento 1, em formato de um *quiz*, composto de 10 (dez) afirmações em que os alunos deveriam julgar cada afirmativas como "válidas" ou "inválidas", e justificar suas respostas.

Esta atividade de aprofundamento buscou explorar de forma mais detalhada e estimulante os conceitos matemático inerentes aos lados do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa). Assim, cotinha perguntas desafiadoras visando testar o entendimento mais profundo dos conceitos relacionados a esses elementos em triângulos retângulos.

A maioria dos grupos julgaram as questões (válida ou inválida) do *quiz* de maneira correta. A resposta mais comum entre os alunos para justificar as perguntas relacionadas aos catetos foram: "os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos"; "o cateto adjacente é aquele que está ao lado do ângulo indicado e o cateto oposto é aquele que está do outro lado do ângulo". Além disso, reforçamos que os catetos são sempre perpendiculares um ao outro. Em relação a hipotenusa, a maioria dos grupos responderam: "a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º"; "é o maior lado do triângulo retângulo" e "está conectando os dois catetos".

Às 16h20min encerramos o encontro e solicitamos que cada grupo realizasse a avaliação da aula, bem como das atividades desenvolvidas em sala, conforme apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 23 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro II

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_7, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** aula um pouco complicada, pois foi o início do assunto de trigonometria. **Transcrição**: *“Aula um pouco complicada, pois foi o início do assunto de trigonometria.”*
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Nota mil conteúdo fácil e rápido **Transcrição**: *“Nota mil conteúdo fácil e rápido”*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei, porém um pouco confuso **Transcrição**: *“Gostei, porém um pouco confuso”*
G4 A_2, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** inicio da atividade sobre trigonometria foi bem explicativo **Transcrição**: *“Início da atividade sobre trigonometria foi bem explicativo”*
G5 A_9, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Eu gostei achei muito interessete. **Transcrição**: *“Eu gostei achei muito interessante”*
G6 A_1, A_3, A_{14} e A_{22}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A aula de hoje foi interessante. **Transcrição**: *“A aula de hoje foi interessante.”*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A aula de hoje foi legal **Transcrição**: *“A aula de hoje foi legal”*
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** esta aula foi dificil no inicio mas Depois que você explicou deta-lhadamente ficou mais fácil **Transcrição**: *“Esta aula foi difícil no início mas depois que você explicou detalhadamente ficou mais fácil”*
G9 A_4, A_{20} e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Bom, a aula de hoje foi legal, Porque eu achei muito facil **Transcrição**: *“Bom, a aula de hoje foi legal, porque eu achei muito fácil”*
G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Não achei dificil o assunto gostei muito da aula **Transcrição**: *“Não achei difícil o assunto gostei muito da aula”*

Fonte: Experimentação (2023).

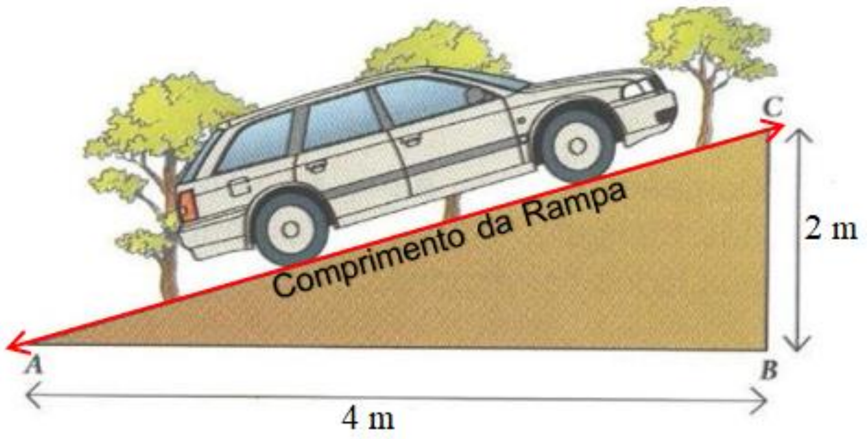
A maioria dos alunos avaliaram positivamente a aula e as atividades realizadas neste encontro. No entanto, os grupos G1 e G8 relataram que acharam a atividade difícil, mas acreditamos que isso seja em decorrência deste ter sido o primeiro contato dos estudantes com o conteúdo trigonometria.

5.3. ENCONTRO III

No dia 10 de abril (segunda-feira) de 2023, às 15h00min iniciamos o terceiro encontro da experimentação, com a aplicação da Atividade 2: “Teorema de Pitágoras”, cujo objetivo foi levar o aluno a descobrir uma relação entre os lados de um triângulo retângulo. Após a turma se organizar em grupos entregamos a cada equipe uma folha contendo o seguinte problema inicial:

Quadro 24 - Questão inicial da Atividade 2

QUESTÃO INICIAL: Ao subir uma rampa um veículo eleva-se a uma altura máxima de 2 m, conforme ilustrado na figura a segui:



Neste sentido, qual a distância AC percorrida pelo veículo ao subir completamente esta rampa?

Fonte: Experimentação (2023).

A presente questão inicial faz referência a uma rampa no formato de um triângulo retângulo, na qual o aluno deve calcular o comprimento da rampa (hipotenusa), sabendo que as medidas dos outros dois lados (catetos) são 2 e 4 metros. Para solucionar o problema os estudantes devem aplicar o teorema de Pitágoras, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. Estimamos 5 minutos para que os grupos solucionassem a questão, e passado este tempo nenhuma equipe apresentou a solução correta. No entanto, algumas respostas nos chamou a atenção, como a solução a seguir:

Quadro 25 - Resolução *a priori* da questão inicial da Atividade 2

G5 A_9, A_{18}, A_{33} e A_{35}	$a^2=b^2+c^2$ $a^2=4^2+2^2$ $a^2=16+4$ $20=20$

Fonte: Experimentação (2023).

Ao analisarmos as soluções apresentadas pelos demais grupos, foi perceptível que algumas equipes traçaram estratégias parecidas, mesmo que não tenham alcançado êxito na resolução. Isso nos revelou que o teorema de Pitágoras não era um conteúdo desconhecido pelos estudantes, mas que eles não recordavam de como aplicá-lo na resolução de problemas. Neste caso, o estudante deveria aplicar a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade, porém, igualou os resultados, pois entendeu que a^2 era igual a 20.

Posteriormente, cada grupo recebeu uma cópia da atividade 2 e do quadro de triângulos 2 (Apêndice B). Nesta atividade, para cada triângulo os alunos deveriam considerar "a" como o maior lado em cada triângulo, e "b" e "c" os demais lados. Após realizarem os procedimentos propostos na atividade, os estudantes deveriam identificar quais dos triângulos eram retângulos.

Para realização da atividade, deixamos os alunos livres para fazerem uso do aplicativo de calculadora no celular. Para nossa surpresa, a maioria dos alunos não conseguiam operacionalizar a calculadora nas operações envolvendo radicais. Com isso, suspendemos a realização da atividade, pois percebemos a necessidade de uma intervenção pedagógica quanto ao uso da calculadora.

Segundo Sá e Salgado (2015) é:

> [...] imprescindível que a escola, enquanto espaço de formação, proporcione aos seus alunos a oportunidade de conhecer e saber como bem usar as tecnologias que fazem parte de seu cotidiano, evitando desta forma, que sejam colocados a margem da sociedade. (SÁ e SALGADO, 2015, p. 15-16)

Neste sentido, com o auxílio da professora observadora realizamos um "minicurso" de 2 horas aulas sobre o uso correto da calculadora, com o objetivo de superar as dificuldades que se apresentava no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Deste modo, finalizamos a aula às 16h20min na expectativa que no encontro seguinte os estudantes conseguiriam realizar a atividade proposta.

5.4. ENCONTRO IV

No dia 12 de abril (quarta-feira), às 15h00min, demos continuidade a atividade da aula anterior (Encontro III) que se trava do teorema de Pitágoras. Iniciamos a aula com uma recapitulação do que havíamos realizado no encontro anterior, com o objetivo de ajudar a reativar a memória dos alunos e estabelecer uma conexão com o ponto em que a intervenção havia ocorrido. Para isso, realizamos uma breve revisão escrevendo 3 (três) exemplos na lousa, e solicitando que os alunos resolvessem.

Em seguida, os estudantes receberam a folha de atividades e o quadro de triângulos, os mesmos da aula anterior. Durante a realização da atividade alguns alunos apresentaram dificuldades específicas e, com o auxílio da professora observadora fornecemos apoio individualizado para ajudá-los a preencher essas lacunas. Ao término da aula, verificamos que a atividade foi desenvolvida com êxito pelos estudantes, conforme demonstrado no registro a seguir:

Quadro 26 - Solução da Atividade 2

<table>
<tr><th>Grupo (G)</th><th>Resposta do Grupo</th></tr>
<tr><td>G7
A_{10}, A_{19},
A_{38} e A_{39}</td><td>
<table>
<tr><th rowspan="2">Triângulo</th><th rowspan="2">a</th><th rowspan="2">b</th><th rowspan="2">c</th><th rowspan="2">a^2</th><th rowspan="2">b^2</th><th rowspan="2">c^2</th><th rowspan="2">$b^2 + c^2$</th><th colspan="2">O triangulo é retângulo?</th><th colspan="2">$a^2 = b^2 + c^2$</th></tr>
<tr><th>Sim</th><th>Não</th><th>Sim</th><th>Não</th></tr>
<tr><td>1</td><td>17</td><td>15</td><td>8</td><td>289</td><td>225</td><td>64</td><td>289</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\sqrt{3}+3$</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$3\sqrt{2}$</td><td>22,35</td><td>12</td><td>18</td><td>30</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$2\sqrt{2}$</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>$(\sqrt{6}+\sqrt{2})$</td><td>8</td><td>2</td><td>1,071</td><td>3,071</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>$3\sqrt{3}$</td><td>36</td><td>9</td><td>27</td><td>36</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>25</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>100</td><td>64</td><td>36</td><td>100</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>$2\sqrt{3}+1$</td><td>4</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>29,85</td><td>16</td><td>24</td><td>40</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>9</td><td>20</td><td>12</td><td>16</td><td>400</td><td>144</td><td>256</td><td>400</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>$5\sqrt{3}$</td><td>5</td><td>5</td><td>75</td><td>25</td><td>25</td><td>50</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

Finalizados os procedimentos da atividade, solicitamos a cada grupo que conversassem entre seus componentes a fim de apresentarem suas observações com relação a atividade. As observações apontadas por cada grupo estão transcritas no quadro a seguir:

Quadro 27 - Observações da Atividade 2

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** Foi fácil **Transcrição**: *“Foi fácil”*	Observação Inválida
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** Todo triangulo retângulo tem hipotenusa e cateto **Transcrição**: *“Todo triangulo retângulo tem hipotenusa e cateto.”*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** A calculadora ajudou muito no Cálculo. **Transcrição**: *“A calculadora ajudou muito no cálculo.”*	Observação Inválida
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** A atividade é sobre triângulo retângulo. **Transcrição**: *“A atividade é sobre triângulo retângulo.”*	Observação Válida
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** A hipotenusa é o maior lado **Transcrição**: *“A hipotenusa é o lado maior.”*	Observação Válida
G6 A_1, A_3 e A_{14}	**Observação:** Alguns triângulos são retângulos. **Transcrição**: *“Alguns triângulos são retângulos.”*	Observação Válida
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** atividade simples e facil **Transcrição**: *“Atividade simples e facil”*	Observação Inválida
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** A hipotenusa é sempre maior **Transcrição**: *“A hipotenusa é sempre maior”*	Observação Válida
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** Os triângulos retângulos tem um ângulo de 90 graus **Transcrição**: *“Os triângulos retângulos tem um ângulo de 90 graus.”*	Observação Válida
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Observação:** Complicado mas conseguimos **Transcrição**: *“Complicada mas conseguimos”*	Observação Inválida

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta atividade, que propunha aos alunos a descoberta da relação entre os lados de um triângulo retângulo através do Teorema de Pitágoras, constatou-se que, entre os 10 grupos participantes, 6 deles conseguiram apresentar observações válidas, embora algumas delas fossem de natureza simplificada. Isso sugere que a maioria dos grupos alcançou um entendimento básico e funcional desses princípios matemáticos, demonstrando uma capacidade de aplicação do Teorema de Pitágoras.

No entanto, também foi observado que 4 grupos fizeram observações inválidas, apontando para desafios significativos em sua compreensão ou na capacidade de aplicação adequada do conceito.

Quadro 28 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 2

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	O triângulo é retângulo quando o lado maior ao quadrado for igual aos Lados menores ao quadrado somados. **Transcrição**: *"O triângulo é retângulo quando o lado maior ao quadrado for igual aos lados menores ao quadrado somados."*	Válida, prevista e desejada
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	éuma forma criativa para saber triânGulo retânGulo **Transcrição**: *"é uma forma criativa para saber triângulo retângulo."*	Inválida, não prevista e não desejada
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	Para saber se um triângulo é retângulo, o resultado de b^2+c^2 precisa ser igual a a^2. **Transcrição**: *"Para saber se um triângulo é retângulo, o resultado do de $b^2 + c^2$ precisar ser igual a a^2."*	Válida, prevista e desejada
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	Alguns triângulos são retângulos pois o a^2 é igual a soma do b^2+c^2 **Transcrição**: *"Alguns triângulos são retângulos pois o a^2 é igual a soma do $b^2 + c^2$."*	Válida, prevista e desejada
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	minha observação foi que a raiz quadrada se encaixa duas vezes para somar. **Transcrição**: *"Minha observação foi que a raiz quadrada se encaixa duas vezes para somar."*	Inválida, não prevista e não desejada
G6 A_1, A_3 e A_{14}	OS TRIÂNGULOS 1, 3, 5, 6, 7, 10 SÃO TODOS RETÂNGULOS. **Transcrição**: *"Os triângulos 1, 3, 5, 6, 7, 10 são todos retângulos."*	Válida, não prevista e não desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	o triângulo é retângulo quando obedecer a fórmula $a^2=b^2+c^2$. **Transcrição**: *"O triângulo é retângulo quando obedecer a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$."*	Válida, prevista e desejada
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	Alguns triângulos são retângulos outros não são retângulos. **Transcrição**: *"Alguns triângulos são retângulos outros não são retângulos."*	Válida, não prevista e não desejada
G9 A_4, A_8 e A_{21}	Difícil e um pouco complicada. **Transcrição**: *"Difícil e um pouco complicada."*	Inválida, não prevista e não desejada
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	O triângulo é retângulo quando $a^2=b^2+c^2$ **Transcrição**: *"O triângulo é retângulo quando $a^2 = b^2 + c^2$."*	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023).

No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 2:

Quadro 29 - Características das conclusões da atividade 2

Características das Conclusões	**Frequência (Quant.)**	**Percentual (%)**
Válida, prevista e desejada	5	50%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	2	20%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	3	30%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise do quadro acima oferece uma visão inicialmente positiva do progresso dos alunos na sequência didática, com um percentual considerável (70%) apresentando conclusões válidas. Desses, metade conseguiu atingir as conclusões previstas e desejadas, o que é um sinal promissor de que os estudantes estão compreendendo e aplicando os conceitos de forma adequada. Além disso, a presença de 20% de conclusões não previstas e não desejadas sugere que alguns alunos estão explorando caminhos diferentes de resolução, o que pode indicar um pensamento crítico e criativo em desenvolvimento.

Por outro lado, os 30% de conclusões inválidas apontam para desafios significativos que alguns estudantes enfrentaram na aplicação do teorema de Pitágoras. No entanto, é importante destacar que esta foi a primeira atividade em que os alunos foram convidados a expressar suas conclusões por escrito, e é possível que a habilidade de comunicação e reflexão melhore à medida que a sequência didática avance.

Mediantes as conclusões apresentadas convidamos os estudantes a construirmos conjuntamente uma conclusão para a atividade 2. Para isso, apresentamos um breve histórico sobre o teorema de Pitágoras, onde alguns alunos relataram que o havia estudado no 9º ano Ensino Fundamental. Por fim, formalizamos em conjunto o seguinte conceito: **“um triângulo é retângulo quando as medidas de seus lados satisfazem ao teorema de Pitágoras, ou seja, o maior lado (hipotenusa) elevado ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos dois lados menores (catetos), ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.”**

Em seguida apresentamos uma situação em que a partir da medida de dois lados de um triângulo dever-se-ia calcular a medida do terceiro lado. Mais uma vez alguns estudantes revelaram ter conhecimento sobre o teorema de Pitágoras, mas que não lembravam de sua aplicação. Deste modo, solicitamos que os estudantes resolvessem a questão inicial apresentada no início da aula.

Quadro 30 - Resultado da resolução a posteriori da questão inicial da Atividade 2

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	2	20%
Resolução CORRETA	8	80%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Como demonstrado no quadro acima, 80% solucionaram corretamente a questão e 20% apresentaram uma solução parcial. Quanto aos dois grupos que solucionaram parcialmente o problema, os estudantes não aplicaram a raiz quadrada, ou seja, após somar os quadrados dos catetos, os alunos esqueceram de tirar a raiz quadrada do resultado para obter o valor do lado desconhecido (comprimento da rampa) do triângulo.

Além disso, ao ´término do encontro, os estudantes receberam uma ficha para avaliarem a aula. Selecionamos a avaliação de um dos membros de cada equipe que mais se assemelhasse com as avaliações dos demais componentes da equipe, conforme expostas no quadro a seguir:

Quadro 31 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro IV

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** na aula de Hoje foi bom, pois tinha dificul-dade nesse assunto. **Transcrição**: *"Na aula de hoje foi bom, pois tinha dificuldade nesse assunto"*
G2 A_{5}, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Amei Conteúdo fácil de ser aprendido. **Transcrição**: *"Amei o conteúdo fácil de ser aprendido"*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi uma aula com muito aprendizagem. **Transcrição**: *"Foi uma aula com muito aprendizagem."*
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** zeros pontos negativos, conteudo facil de se compreender e com uma otima explicação do professor.
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** foi muito legal. **Transcrição**: *"Foi muito legal."*
G6 A_{1}, A_{3} e A_{14}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A aula de hoje serviu para tirar algumas das minhas duvidas sobre o assunto.

	Transcrição: *“A aula de hoje servio para tirar algumas das minhas dúvidas sobre o assunto”*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Eu achei o assunto facil e interessante. **Transcrição**: *“Eu achei o assunto fácil e interessante”*
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** aula foi boa. **Transcrição**: *“A aula foi boa”*
G9 A_{4}, A_{8} e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Bom, eu achei bastante In-teressante **Transcrição**: *“Bom eu achei bastante interessante”*
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** O assunto parece dificil mas é muito facil aula interessante **Transcrição**: *“O assunto parece difícil mas é muito fácil aula interessante”*

Fonte: Experimentação (2023).

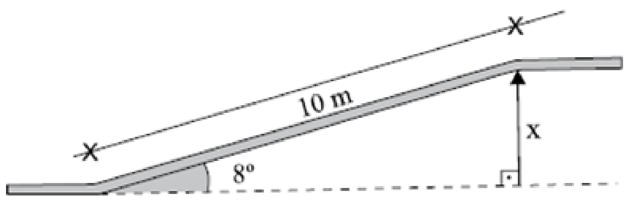
Os alunos avaliaram positivamente a aula e, isso é um indicativo de que eles se sentiram engajados, aprenderam e desfrutaram da experiência. Além disso, a experiência de aprendizado foi satisfatória pois os objetivos educacionais traçadas foram alcançados. Deste modo, às 16h14min, encerramos o encontro agradecendo aos estudantes pelo empenho no desenvolvimento da atividade.

5.5. ENCONTRO V

O quinto encontro ocorreu na data de 17 de abril (segunda-feira), às 15h00min, com a aplicação da Atividade 3: “Seno de um ângulo no triângulo retângulo”, cujo objetivo foi levar o estudante a descobrir uma relação entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Após a organização dos grupos entregamos a cada equipe uma cópia da seguinte questão inicial:

Quadro 32 - Questão inicial da Atividade 3

QUESTÃO INICIAL: Para ter acesso a sala de aula, um estudante cadeirante sobe uma rampa lisa com 10 m de comprimento, que faz um ângulo de 8° com o plano horizontal. Qual é a altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida, indicada por ***x*** *na figura?*



Fonte: Experimentação (2023).

A presente questão faz referência a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa, ou seja, trata-se de um problema envolvendo a relação trigonométrica seno. Estimamos um tempo de 5 minutos para a solução do problema e, passado este tempo nenhuma das equipes havia apresentado uma solução para o problema. Deste modo, recolhemos a folha contendo a questão e explicamos que ao final da aula a entregaria novamente aos grupos.

Em seguida, entregamos uma cópia da folha de atividade 3, juntamente com o quadro de triângulos 3, e realizamos a leitura do título, objetivo e procedimentos para realização da atividade. Nesta atividade, para cada triângulo do quadro de triângulos 3 (Apêndice C) os alunos deveriam determinar a medida do cateto oposto (C.O) ao ângulo indicado e a medida da hipotenusa (h) do triângulo, em seguida, calcular a razão (divisão) entre o cateto oposto (C.O) e a hipotenusa (h) do triângulo.

Durante a realização da atividade, os alunos ainda apresentavam dificuldades na operacionalização da calculadora, com isso, a todo instante éramos chamados por alguma equipe para auxiliá-los nesse processo. Percebemos que as maiores dificuldades eram com relação as medidas que envolviam radicais, como por exemplo, no triângulo 5 onde a medida do cateto oposto (C.O) correspondia a $2\sqrt{3}$ e a medida da hipotenusa era $2\sqrt{6}$. A seguir apesentamos uma demonstração desse erro:

Figura 17: ERRADO X CORRETO de operacionalizar a calculadora

Fonte XX: Experimentação (2023)

Assim, ao digitar os valores na calculadora alguns alunos não estavam separando os valores correspondente a cada medida entre parênteses, o que ocasionava em uma solução incorreta quanto a medida do seno do ângulo. Com isso, ao compreender a forma correta de manusear a calculadora, as equipes apresentaram resultados satisfatórios na realização da atividade 3. A seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 4:

Quadro 33 - Solução da Atividade 3

<table>
<tr><th>Grupo (G)</th><th>Resposta do Grupo</th></tr>
<tr><td>G4
A_2, A_6, A_{26} e A_{27}</td><td>
<table>
<tr><th>Triângulo</th><th>Ângulo</th><th>Medida do cateto oposto (C.O)</th><th>Medida da hipotenusa (h)</th><th>$\frac{(C.O)}{(h)}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>β- 30°</td><td>2</td><td>4</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>β= 30°</td><td>6</td><td>12</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>β= 30°</td><td>5</td><td>10</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>β= 30°</td><td>4</td><td>8</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>β= 45°</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$2\sqrt{6}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>6</td><td>β= 45°</td><td>3</td><td>$3\sqrt{2}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>7</td><td>β= 45°</td><td>7</td><td>$7\sqrt{2}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>8</td><td>β= 45°</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>10</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>9</td><td>β= 60°</td><td>$2\sqrt{6}$</td><td>$4\sqrt{2}$</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>10</td><td>β= 60°</td><td>$5\sqrt{3}$</td><td>10</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>11</td><td>β= 60°</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>2</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>12</td><td>β= 60</td><td>$10\sqrt{3}$</td><td>20</td><td>0,866</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

Durante a realização da atividade, observamos que a maioria dos estudantes não apresentou dificuldades em identificar as medidas do cateto opostos ao ângulo indicado e a medida da hipotenusa do triângulo. Deste modo, os grupos realizaram os cálculos corretamente e preencheram o quadro de resultados com os dados obtidos, conforme solicitado nos procedimentos da atividade.

Finalizados os cálculos, solicitamos aos estudantes que analisassem os resultados obtidos e anotassem a observação do grupo a respeito da atividade.

Quadro 34 - Observações da Atividade 3

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** O resultado é sempre igual **Transcrição**: *"O resultado é sempre igual"*	Observação Parcialmente Válida
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** Deu o mesmo resultado para todos de 30° e 45° e 60° **Transcrição**: *"Deu o mesmo resultado para todos de 30º e 45º e 60º."*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** O resultado é o mesmo. **Transcrição**: *"O resultado é o mesmo."*	Observação Parcialmente Válida
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** O de 30° é 0,5, o de 45° é 0,707, o de 60° é 0,866. **Transcrição**: *"O de 30º é 0,5, o de 45º é 0,707 o de 60º é 0,866."*	Observação Válida

G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** Resultado igual para ângulo igual. **Transcrição**: *“Resultado igual para ângulo igual.”*	Observação Válida
G6 A_1, A_3 e A_{14}	**Observação:** Essa atividade foi mais complicada. **Transcrição**: *“Essa atividade foi mais complicada.”*	Observação Inválida
G7 A_{10}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** os valores todos são iguais para cada ângulo. **Transcrição**: *“Os valores todos são iguais para cada ângulo.”*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** O mesmo resultado **Transcrição**: *“O mesmo resultado”*	Observação Parcialmente Válida
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** As divisões deu o mesmo valor para cada ângulo, muito interessante isso. **Transcrição**: *“As divisões deu o mesmo valor para cada ângulo, muito interessante isso.”*	Observação Válida
G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**Observação:** Foi facil Pois deu o mesmo valor **Transcrição**: *“Foi facil pois deu o mesmo valor”*	Observação Parcialmente Válida

Fonte: Experimentação (2023).

Na atividade que abordou o conceito de seno e exigiu a identificação de um padrão de regularidade, as observações dos alunos revelaram um panorama misto. Cinco grupos demonstraram um entendimento sólido ao apresentar observações completamente válidas, evidenciando uma capacidade adequada de identificar o padrão desejado. Quatro grupos ofereceram observações parcialmente válidas, indicando um nível de compreensão em desenvolvimento, enquanto apenas um grupo fez observações inválidas, sugerindo a necessidade de apoio adicional na compreensão do tema.

Em seguida, cada grupo compartilhou a sua conclusão com turma, realizando a leitura, em voz alta, conforme transcritas a seguir:

Quadro 35 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 3

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	todo seno de 30° é 0,5, 45 é 0,707 e de 60 é 0,866 **Transcrição**: *“Todo seno de 30º é 0,5. 45º é 0,707 e 60º é 0,866.”*	Válida, prevista e desejada
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	A divisão entre o cateto oposto (C.O) com a hipotenusa (H) de acordo com o ângulo irão dar o mesmo valor. **Transcrição**: *“A divisão entre o cateto oposto (C.O) com a hipotenusa (h) de acordo com o ângulo irão dar o mesmo valor.”*	Válida, prevista e desejada

G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	Os ângulos que possuem a mesma medida obtiveram o mesmo resultado **Transcrição**: *"Os ângulos que possuem a mesma medida obtiveram o mesmo resultado."*	Válida, não prevista e não desejada
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	Os angulos que possuiam as mesmas medidas, obtinham os mesmos resultados. **Transcrição**: *"Os ângulos que possuíam as mesmas medidas, obtinham os mesmos resultados."*	Válida, não prevista e não desejada
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	Todos os ângulos de 30° graus dão mesmo resul Todos os ângulo de 60°, 45 etc.. tambem deram o mesmo resultados, é tipo uma "pegadinha". quase (caso) todos eles deram o mesmo resultados. **Transcrição**: *"Todos os ângulos de 30º graus dão o mesmo resultado. Todos os ângulos de 60º, 45º etc... também deram o mesmo resultado, é tipo uma "pegadinha". (caso) todos eles deram o mesmo resultado."*	Válida, não prevista e não desejada
G6 A_1, A_3 e A_{14}	Os triângulos que possuem os ângulos iguais, obtêm o mesmo resultado, independente das medidas do C.O e h.. **Transcrição**: *"Os triângulos que possuem os ângulos iguais, obtém o mesmo resultado, independente do C.O e h,."*	Válida, não prevista e não desejada
G7 A_{10}, A_{38} e A_{39}	o Ângulo que possui as mesma medidas possui o mesmo resultado **Transcrição**: *"O ângulo que possui as mesmas medidas possui o mesmo resultado."*	Válida, não prevista e não desejada
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	Concluimos sobre o Seno dos ângulos 30°-45° 60° são consecutivamente 0,5-0,707-0,866 independentemente das medidas catetos e hip. **Transcrição**: *"Concluímos sobre o seno dos ângulos 30º, 45º, 60º são consecutivamente 0,5, – 0,707 – 0,866 independente das medidas cateto e hip.."*	Válida, prevista e desejada
G9 A_4, A_8 e A_{21}	DE ACORDO COM O ÂNGULO A MEDIDA DO C.O/HIPOTENUSA É O MESMO VALOR. **Transcrição**: *"De acordo com o ângulo a medida do C.O/Hipotenusa é o mesmo valor."*	Válida, prevista e desejada
G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	Os ângulos que tem o mesmo tamanho vai ter o mesmo resultado. **Transcrição**: *"Os ângulos que tem o mesmo tamanho vai ter o mesmo resultado."*	Válida, não prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023).

No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 3:

Quadro 36 - Características das conclusões da atividade 3

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	4	40%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	6	60%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das transcrições do quadro acima indica que, embora os alunos apresentem uma certa "imaturidade" na expressão escrita de suas conclusões, todas as 10 conclusões podem ser consideradas válidas. É notável que 4 dessas conclusões se enquadram nas expectativas previstas e desejadas, enquanto as outras 6 são classificadas como válidas, embora não tenham sido previstas ou desejadas inicialmente. Essa constatação revela que, apesar das dificuldades dos estudantes em expressar suas ideias de forma clara, eles conseguiram perceber o padrão de regularidade presente na atividade em relação aos ângulos que compartilham as mesmas medidas.

Deste modo, os estudantes compreenderam que em um triângulo retângulo a razão entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa do triângulo para o ângulo 30º, será o valor constante 0,5; para o ângulo de 45º será o valor 0,707 e para o ângulo de 60º é igual a constante 0,866. Diante disso, realizamos a formalização do conceito de seno aos alunos: **"a razão (divisão) entre a medida do cateto oposto (C.O) a um ângulo e a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre um valor constante, denominado de seno, ou seja,** $\boldsymbol{sen\beta = \frac{C.O}{Hipotenusa}}$**."**

Além disso, apresentamos a turma situações do seu dia a dia em que a relação trigonométrica seno é aplicada. Feito isso, ao devolvermos a questão inicial, apresentada no início da aula, a maioria dos grupos conseguiram apresentar a solução correta para o problema.

Quadro 37 - Resultados da questão inicial da Atividade 3

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	2	20%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	8	80%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Os resultados do quadro 37 revelam que um percentual de 20% dos estudantes não conseguiu solucionar a questão inicial. Foi perceptível que os alunos tiveram dificuldades em identificar corretamente qual lado é o cateto oposto e qual é a hipotenusa. Para finalizar o encontro solicitamos a turma que fizesse uma avaliação, de forma escrita, da aula e da atividade desenvolvida, conforme o quadro a seguir:

Quadro 38 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro V

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi fácil de entender, eu gostei. **Transcrição**: *"Foi fácil de aprender, eu gostei"*
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Adorei o conteúdo e suas formas de explicação **Transcrição**: *"Adorei o conteúdo e sua forma de aplicação"*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi uma aula com muito aprendizagem. **Transcrição**: *"Foi uma aula com muita aprendizagem"*
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** AULA SOBRE O SENO FOI MUITO INTERESSANTE. **Transcrição**: *"Aula sobre o seno foi muito interessante"*
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** As vezes achei complicada mais deu para entender. **Transcrição**: *"As vezes achei complicado mais deu para entender"*
G6 A_1, A_3 e A_{14}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Hoje a aula foi boa. **Transcrição**: *"Hoje a aula foi boa"*
G7 A_{10}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Eu gostei bastante, aprendi muito. **Transcrição**: *"Eu gostei bastante, aprendi muito"*
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** esta aula foi dificil, mais agora já consigo fazer os calculos com um pouco de dificuldade mas consigo. **Transcrição**: *"Esta aula foi difícil, mas agora já consigo fazer os cálculos com um pouco de dificuldade mas consigo"*
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Bom, eu achei o assunto facil. **Transcrição**: *"Bem, eu achei o conteúdo fácil"*
G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Um pouco dificil mas consegui aprender ótima explicação **Transcrição**: *"Um pouco difícil mas consegui aprender ótima explicação"*

Fonte: Experimentação (2023).

As transcrições acima revelam que os estudantes gostaram da aula. Os alunos dos grupos G5 e G8 pontuaram que tiveram dificuldades, mas que ao final conseguiram compreender o conteúdo e desenvolver a atividade proposta. Assim, às 16h07min encerramos a atividade e utilizamos o tempo restante da aula para revisarmos o conceito de seno de um ângulo.

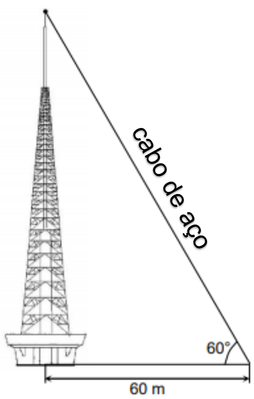
5.6. ENCONTRO VI

Com o objetivo de levar o aluno a descobrir uma relação entre o cateto adjacente a um ângulo e a hipotenusa em um triângulo, na data de 19 de abril (quarta-feira), às 15h00min, aplicamos a Atividade 4: “Cosseno de um ângulo no triângulo retângulo”. Após a organização dos grupos, entregamos a cada equipe uma cópia da seguinte questão inicial:

Quadro 39 - Questão inicial da Atividade 4

QUESTÃO INICIAL: Um cabo de aço foi fixado no topo de uma torre até certo ponto do solo formando um ângulo de 60º com o plano horizontal.

Sabendo que a distância entre a torre e a extremidade do cabo no solo é de 60 m, qual é o tamanho do cabo de aço?



Fonte: Experimentação (2023)

Esta é uma questão que faz alusão as medidas do cateto adjacente a um ângulo e a medida da hipotenusa de um triângulo, ou seja, refere-se a relação trigonométrica cosseno. O tempo estimado para a solução deste problema foi de 5 minutos, e decorrido este tempo nenhum dos grupos apresentou a solução do problema. Percebemos que algumas equipes tentaram solucionar a questão por meio da relação trigonométrica seno, estudada no encontro anterior, porém sem sucesso. Deste modo, recolhemos a questão inicial e explicamos que iniciaríamos o estudo de uma nova relação trigonométrica no triângulo retângulo.

Assim, entregamos a cada grupo uma cópia da Atividade 4 e do quadro de triângulos 3 (Apêndice C). Nesta atividade, para cada triângulo apresentado os estudantes deveriam determinar a medida do cateto adjacente ao ângulo indicado e a medida da hipotenusa (h) do triângulo, em seguida calcular a razão (divisão) entre o cateto adjacente (C.A) e a hipotenusa (h) do triângulo, e preencher o quadro de respostas com os dados obtidos. No quadro a seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 10:

Quadro 40 - Solução da Atividade 4

<table>
<tr><th>Grupo (G)</th><th>Resposta do Grupo</th></tr>
<tr><td>G10
A_{15}, A_{16}, A_{23} e A_{34}</td><td>
<table>
<tr><th>Triângulo</th><th>Ângulo</th><th>Medida do cateto adjacente (C.A)</th><th>Medida da hipotenusa (h)</th><th>$\frac{(C.A)}{(h)}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>30°</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>4</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>2</td><td>30°</td><td>$6\sqrt{3}$</td><td>12</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>3</td><td>30°</td><td>$5\sqrt{3}$</td><td>10</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>4</td><td>30°</td><td>$4\sqrt{3}$</td><td>8</td><td>0,866</td></tr>
<tr><td>5</td><td>45°</td><td>$2\sqrt{3}$</td><td>$2\sqrt{6}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>6</td><td>45°</td><td>3</td><td>$3\sqrt{2}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>7</td><td>45°</td><td>7</td><td>$7\sqrt{2}$</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>8</td><td>45°</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>10</td><td>0,707</td></tr>
<tr><td>9</td><td>60°</td><td>$2\sqrt{2}$</td><td>$4\sqrt{2}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>60°</td><td>3</td><td>10</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>11</td><td>60°</td><td>1</td><td>2</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>60°</td><td>10</td><td>20</td><td>0,5</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

A partir desta atividade percebemos uma maior autonomia dos estudantes na identificação das medidas dos lados do triângulo e na realização dos cálculos. Além disso, percebemos que os estudantes apresentaram maior habilidade com uso da calculadora, fator que os deixou mais confiantes e autônomos na realização da atividade. Em seguida, solicitamos aos grupos que analisassem os resultados da atividade e apresentassem as suas observações. No quadro a seguir apresentamos a observação de cada equipe:

Quadro 41 - Observações dos alunos sobre a Atividade 4

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** Se os ângulos são os resultados tambem são iguais **Transcrição**: *"Se os ângulos são os resultados também são iguais"*	Observação Válida
G2 A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** Os resultados deu diferente da outra atividade mesmo sendo os mesmos triângulos **Transcrição**: *"Os resultados deu diferente da outra atividade mesmo sendo os mesmos triângulos"*	Observação Inválida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** foi fácil, pois os valores são iguais. **Transcrição**: *"Foi fácil, pois os valores são iguais."*	Observação Parcialmente Válida
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** Foi interessante que o resultado é o mesmo **Transcrição**: *"Foi interessante que o resultado é o mesmo"*	Observação Válida

G5 A_{9}, A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** Os valores são os mesmo quando dividimos o cateto adjacemte pela hipotemusa, pois os ângulos são os mesmos **Transcrição**: *“Os valores são os mesmo quando dividimos o cateto adjacente pela hipotenusa, pois os ângulos são os mesmos”*	Observação Válida
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	**Observação:** C.A/h deu o mesmo resultado. **Transcrição**: C.A/h deu o mesmo resultado.”	Observação Válida
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** Se os ângulos são iguais a divisão também é igual **Transcrição**: *“Se os ângulos são iguais a divisão também é igual”*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** dividindo a hipotenusa pelo c.A dá o mesmo valor nos ângulos. **Transcrição**: *“Dividindo a hipotenusa pelo C.A dá o mesmo valor nos ângulos.”*	Observação Inválida
G9 A_{4}, A_{8} e A_{21}	**Observação:** Foi parecido com a outra atividade, os resultados se repetem **Transcrição**: *“Foi parecido com a outra atividade, os resultados se repetem.”*	Observação Parcialmente Válida
G10 A_{15}, A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Observação:** A divisão deu igual em cada ângulo **Transcrição**: *“A divisão deu igual em cada ângulo”*	Observação Válida

Fonte: Experimentação (2023).

O quadro anterior revela que 60% dos grupos demonstraram compreensão sólida, apresentando observações válidas; 20% dos grupos mostraram um nível intermediário de compreensão, com observações parcialmente válidas e 20% dos grupos exibiram dificuldades, fornecendo observações inválidas. No quadro a seguir, apresentamos as conclusões de cada

Quadro 42 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 4

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	todo cosseno de 30° é 0,866, 45° é 0,707 e de 60° é 0,5 **Transcrição**: *“Todo cosseno de 30º é 0,5, 45º é de 0,707 e de 60º é 0,866.”*	Válida, prevista e desejada
G2 A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Transcrição**: *“A divisão entre o cateto adjacente (C.A) com a hipotenusa (h) de acordo com o ângulo irão dar o mesmo resultado.”* A divisão entre o cateto adjacente (C.A) com a hipotenusa (H) de acordo com o ângulo irão dar o mesmo valor.	Válida, prevista e desejada

G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Transcrição**: *“Os ângulos que possuem o mesmo tamanho tiveram o mesmo resultado.”*	Válida, não prevista e não desejada
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Transcrição**: *“Os ângulos com mesmo tamanho, obtém o mesmo resultado.”*	Válida, prevista e desejada
G5 A_{9}, A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Transcrição**: *“Todos do ângulos de 30º graus dão mesmo resultado, os ângulos de 60º, 45º etc... também deram o mesmo resultado, é tipo uma “pegadinha”, quase todos eles deram o mesmo resultado.”*	Válida, prevista e desejada
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	**Transcrição**: *“Os triângulos que possuem medidas iguais sempre obtém os resultados iguais.”*	Inválida, não prevista e não desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Transcrição**: *“O triângulo que possui o mesmo ângulo tem o mesmo resultado.”*	Válida, não prevista e não desejada
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Transcrição**: *“Concluímos sobre o cosseno que ele apenas muda a ordem dos ângulos de 30º e 60º (a ordem do 0,866 e do 0,5 = resultado).”*	Inválida, não prevista e não desejada
G9 A_{4}, A_{8} e A_{21}	**Transcrição**: *“A medida do C.A sobre a hipotenusa tem o mesmo valor de acordo com o ângulo.”*	Válida, prevista e desejada
G10 A_{15}, A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Transcrição**: *“O ângulo que possuem a mesmas medida vai possui o mesmo resultado.”*	Válida, não prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023).

No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 4:

Quadro 43 - Características das conclusões da atividade 4

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	5	50%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	3	30%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	2	20%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das conclusões apresentadas pelas equipes revela uma distribuição variada em termos de validade e alinhamento com as expectativas. Das 8 conclusões válidas, a maioria, ou seja, 5 delas, foi considerada válida, prevista e desejada, demostrando que uma parcela significativa dos alunos conseguiu atingir as metas estabelecidas, aplicando corretamente os conceitos e métodos esperados na atividade. Por outro lado, 3 delas foram classificadas como válidas, porém não previstas e não desejadas, indicando que esses grupos de alunos encontraram abordagens alternativas para o problema, que, embora válidas, não estavam dentro das expectativas iniciais. Além disso, é relevante notar que 2 conclusões foram consideradas inválidas e não estavam de acordo com as expectativas *a priori*, sugerindo a presença de dificuldades conceituais na aplicação do conhecimento matemático.

Deste modo, percebemos que a maioria dos alunos compreenderam o padrão de regularidade presente na atividade, na qual a razão entre o cateto adjacente a um ângulo e a hipotenusa do triângulo, para o ângulo 30º, será o valor constante 0,866; para o ângulo de 45º será o valor 0,707 e para o ângulo de 60º é igual a constante 0,5. Assim, em conjunto com a turma construímos uma conclusão formal para o conceito de cosseno de um ângulo: **"a razão (divisão) entre a medida do cateto adjacente a um ângulo e a medida da hipotenusa de um triângulo é sempre um valor constante, denominado de cosseno, ou seja, $\boldsymbol{cos\beta = \frac{C.A}{Hipotenusa}}$."**

Para finalizar a atividade, apresentamos situações do cotidiano dos alunos onde são aplicadas a relação trigonométrica cosseno. Em seguida, solicitamos que resolvessem o problema apresentado no início da atividade. Como resultado, todas as equipes conseguiram solucionar a questão, conforme o quadro de resultados a seguir:

Quadro 44 - Resultados da questão inicial da Atividade 4

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	10	100%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

A compreensão do conteúdo e a resolução correta da questão inicial mostram que os alunos estão internalizando os conceitos e aplicando as estratégias corretas para resolver problemas trigonométricos relacionados ao cosseno. Isso é fundamental para o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas e demonstra um bom progresso e compreensão por parte dos alunos no decurso da Sequência Didática.

No quadro a seguir apresentamos as avaliações dos estudantes a respeito da aula e da atividade desenvolvida.

Quadro 45 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro VI

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? A explicação foi boa e a atividade também. **Transcrição**: *"A explicação foi bo e a atividade também."*
G2 A_{30}, A_{36} e A_{37}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? Foi muito boa a aula e muito bem explica-da. **Transcrição**: *"Foi muito boa a aula e muito bem explicada."*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? foi nota 10000..... **Transcrição**: *"Foi nota 10000...."*
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? ESSA AULA DO COSSENO FOI BOA **Transcrição**: *"Essa aula do cosseno foi boa"*
G5 A_{9}, A_{18}, A_{33} e A_{35}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? foi uma aula bem legal e imperativa. **Transcrição**: *"Foi uma aula bem legal e imperativa"*
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? Fácil tambeem pois é o mesmo processo do seno So muda o catito **Transcrição**: *"Fácil também pois é o mesmo processo do seno só muda o cateto"*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? foi uma aula muito interessante. **Transcrição**: *"Foi uma aula muito interessante"*
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? GOSTEI DA EXPLICAÇÃO ~~DO~~ DO PROFESSOR E DA ATIVIDADE. **Transcrição**: *"Gostei da explicação do professor e da atividade"*
G9 A_{4}, A_{8} e A_{21}	Dê sua opinião sobre a aula de hoje? Foi ótima, pois resolvi a atividade sem dificuldades.

	Transcrição: *“Foi ótima, pois resolvi a atividade sem dificuldades”*
G10 A_{15}, A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei muito pois entendi o assunto **Transcrição**: *“Gostei muito, pois entendi o assunto”*

Fonte: Experimentação (2023).

A resposta positiva dos alunos indica que a atividade conseguiu cumprir seu propósito de tornar o aprendizado do cosseno mais interessante e compreensível. Às 15h52 min finalizamos o encontro parabenizando os alunos pelo entusiasmo e pela receptividade à atividade, e os agradecemos por seu envolvimento e interesse em aprender sobre o cosseno de um ângulo.

5.7. ENCONTRO VII

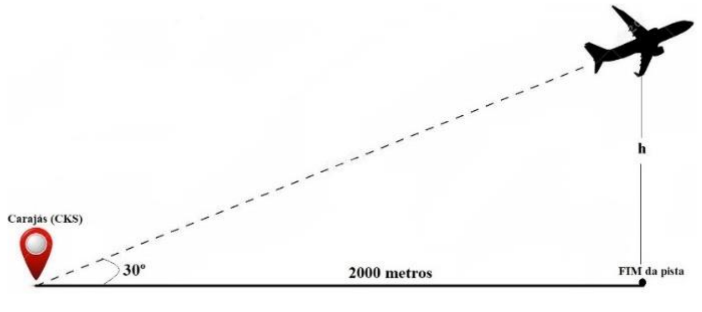
O sétimo encontro ocorreu na data de 24 de abril (segunda-feira), iniciando às 15h00min com a aplicação da Atividade 5: “Tangente de um ângulo no triângulo retângulo” e Atividade 6: “Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo”.

- Atividade 5: Tangente de um ângulo no triângulo retângulo

Esta atividade tinha como objetivo levar os estudantes a descobrir uma relação entre o cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo em um triângulo retângulo. Deste modo, inicialmente entregamos a cada grupo uma folha contendo o seguinte problema inicial:

Quadro 46 - Questão inicial da Atividade 5

QUESTÃO INICIAL: Ao levantar voo no aeroporto de Carajás (CKS), um avião forma um ângulo de 30° em relação à pista, que possui 2000 m de comprimento. Qual será a altura deste avião quando estiver sobrevoando o FIM da pista?



Fonte: Experimentação (2023).

Este problema refere-se a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente, ou seja, faz alusão a relação trigonométrica tangente. Passado o tempo destinado a resolução da questão nenhum grupo conseguiu resolvê-la corretamente, pois alguns alunos estavam aplicando as relações trigonométricas seno e outros tentaram solucionar fazendo uso do cosseno, ambas relações estudadas nas aulas anteriores.

Posteriormente, cada equipe recebeu uma cópia da folha de atividade 5 e do quadro de triângulos 3 (Apêndice C). Em seguida, realizamos a leitura do título, objetivo e explicamos os procedimentos para a consecução da atividade. A seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 2:

Quadro 47 - Solução da Atividade 5

Grupo (G)	**Resposta do Grupo**				
	Triângulo	Ângulo	Medida do cateto oposto (C.O)	Medida do cateto adjacente (C.A)	$\frac{(C.O)}{(C.A)}$
G2 A5, A30 e A37	1	30°	2	$2\sqrt{3}$	0,577
	2	30°	6	$6\sqrt{3}$	0,577
	3	30°	5	$5\sqrt{3}$	0,577
	4	30°	4	$4\sqrt{3}$	0,577
	5	45°	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	1
	6	45°	3	3	1
	7	45°	7	7	1
	8	45°	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	1
	9	60°	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	1,732
	10	60°	$5\sqrt{3}$	5	1,732
	11	60°	$\sqrt{3}$	1	1,732
	12	60°	$10\sqrt{3}$	10	1,732

Fonte: Experimentação (2023).

Os alunos desenvolveram os cálculos no tempo de 22 minutos e ao analisar os resultados, percebe-se que todos os grupos realizaram os cálculos de forma correta e não apresentaram dificuldades em identificar as medidas referentes aos catetos oposto e adjacente. Assim, após a execução da atividade solicitamos que cada grupo escolhesse um componente para realizar a leitura da observação apresentada por sua equipe. As observações estão descritas, transcritas e classificadas no quadro a seguir:

Quadro 48 - Observações dos alunos sobre a Atividade 5

Grupo (G)	**Observações**	**Validade**
G1 A7, A12, A28 e A32	**Observação:** Como nas outras atividades os resultados se repetem em cada ângulo **Transcrição**: *"Como nas outras atividades os resultados se repetem em cada ângulo"*	Observação Parcialmente Válida

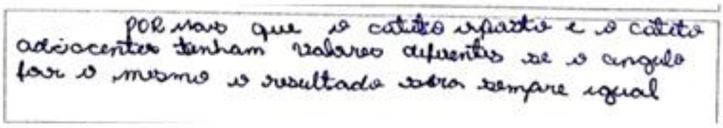
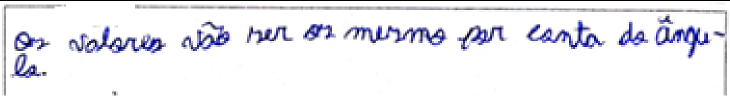
G2 A_5, A_{30} e A_{37}	**Observação:** A atividade é interessante pois os resultados continuam dando iguais para todos os triângulos **Transcrição**: *"A atividade é interessante pois os resultados continuam dando iguais para todos os triângulos"*	Observação Parcialmente Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** Mesmo valor no 30° graus, mesmo valor no 45° graus e mesmo valor no 60° graus **Transcrição**: *"Mesmo valor no 30º graus, mesmo valor no 45º graus e mesmo valor no 60º graus"*	Observação Válida
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** O resultado da divisão do C.O/C.A resulta sempre no mesmo valor para cada triângulo de 30°, 45° e 60° **Transcrição**: *"O resultado da divisão C.O/C.A resulta sempre no mesmo valor para cada ângulo de 30º, 45º e 60º."*	Observação Válida
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** todos divisões entre os catetos resultou o mesmo resultado para os ângulos de 30 graus e os demais **Transcrição**: *"Todas divisões entre os catetos resulta o mesmo resultado para os ângulos de 30 graus e os demais"*	Observação Válida
G6 A_3, A_{14} e A_{22}	**Observação:** Os valores finais continuam se repetindo em todos os ângulos. **Transcrição**: *"Os valores finais continuam se repetindo em todos os ângulos."*	Observação Parcialmente Válida
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** O cateto oposto dividido pelo cateto adjacente em 30° = 0,5,77, 45° = 1 e 60° = 1,73 **Transcrição**: *"O cateto oposto dividido pelo cateto adjacente em 30º = 0,577, 45º = 1 e 60º = 1,73."*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** No ângulo de 45° = 1 pois é o valor dividido por ele mesmo. **Transcrição**: *"No ângulo de 45º = 1 pois é o valor dividido por ele mesmo."*	Observação Válida
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** Mesmo resultado **Transcrição**: *"Mesmo resultado"*	Observação Parcialmente Válida
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Observação:** Continua repetida os valores **Transcrição**: *"Continua repetindo os valores"*	Observação Inválida

Fonte: Experimentação (2023).

As observações obtidas revelam uma diversidade em termos de compreensão. Cinco grupos demonstraram um entendimento sólido, fornecendo observações inteiramente válidas, indicando uma proficiência eficaz na identificação da relação desejada. Quatro grupos ofereceram observações parcialmente válidas, sugerindo um progresso em seu entendimento do conceito, enquanto um grupo apresentou observação inválida, apontando para a necessidade de apoio adicional para uma compreensão completa. Quanto as conclusões, temos que:

Quadro 49 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 5

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	Por mais que o cateto oposto e o cateto adjacente tenham valores diferentes se o ângulo for o mesmo o resultado sera sempre igual. **Transcrição**: *“Por mais que o cateto oposto e o cateto adjacente tenham valores diferentes se o ângulo for o mesmo o resultado será sempre igual.”*	Válida, prevista e não desejada
G2 A_5, A_{30} e A_{37}	Quando o ângulo for o mesmo, a divisão de C.O sobre o C.A sempre será o mesmo resultado **Transcrição**: *“Quando o ângulo for o mesmo, a divisão de C.O sobre o C.A sempre será o mesmo resultado.”*	Válida, prevista e desejada
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	independente das medidas dos catetos, quando o angulo é igual, os resultados sempre serão os mesmos. **Transcrição**: *“Independente das medidas dos catetos, quando o ângulo é igual, os resultados sempre serão os mesmos.”*	Válida, prevista e não desejada
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	resultado igual para os ângulos iguais. **Transcrição**: *“Resultado igual para os ângulos iguais.”*	Válida, prevista e não desejada
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	idependente do tamanho do triângulo os resultados serão iguais. **Transcrição**: *“Independente do tamanho do triângulo os resultados serão iguais.”*	Válida, prevista e não desejada
G6 A_3, A_{14} e A_{22}	Quando os ângulos tiverem a mesma medida o resultado sempre será o mesmo. **Transcrição**: *“Quando os ângulos tiverem a mesma medida o resultado sempre será o mesmo.”*	Válida, prevista e não desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	Não depende do angulo, e sim dos catetos dessa vez **Transcrição**: *“Não depende do ângulo, e sim dos catetos dessa vez.”*	Inválida, não prevista e não desejada
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Conclusão:** Não depende do angulo, e sim dos catetos desso vez	Inválida, não prevista e não desejada

	Transcrição: *"Não depende do angulo, e sim dos catetos dessa vez."*	
G9 A_4, A_8 e A_{21}	 **Transcrição**: *"Por mais que o cateto oposto e o cateto adjacente tenham valores diferentes se o ângulo for o mesmo o resultado será sempre igual."*	Válida, prevista e não desejada
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	 **Transcrição**: *"Os valores serão o mesmo por conta do ângulo."*	Válida, prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023).

No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 5:

Quadro 50 - Características das conclusões da atividade 5

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	1	10%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	7	70%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	2	20%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das conclusões apresentadas pelos grupos revela que das 8 conclusões válidas, 1 delas foi classificada como válida, prevista e desejada, enquanto as outras 7 foram consideradas válidas, porém não previstas e não desejadas. Esse resultado sugere que a maioria dos grupos foi capaz de chegar a conclusões que estavam dentro dos limites aceitáveis, embora essas não fossem necessariamente as respostas esperadas inicialmente.

No entanto, chama a atenção o fato de que 2 grupos (G7 e G8) apresentaram conclusões inválidas e, além disso, compartilharam a mesma transcrição textual. A observação da professora registrando que esses grupos estavam conversando entre si durante a aula fornece uma explicação plausível para a semelhança nas conclusões. Isso ressalta a importância de monitorar a colaboração entre os alunos durante as atividades para garantir que o trabalho seja genuíno e que os alunos desenvolvam suas habilidades de forma individual.

Deste modo, os estudantes compreenderam que em um triângulo retângulo a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente para o ângulo 30º, será o valor constante 0,577; para o ângulo de 45º será o valor 1 e para o ângulo de 60º é igual a constante 1,732. Assim, formalizamos junto aos alunos o conceito de tangente: **“a razão (divisão) entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente de um triângulo retângulo é sempre um valor constante, denominado de tangente, ou seja, $tg\beta = \frac{C.O}{C.A}$.”**

Formalizado o conceito da relação trigonométrica tangente, realizamos uma demonstração de como o conteúdo trabalhado na aula seria aplicado na resolução de situações problemas do dia a dia. Deste modo, ao entregamos a folha contendo a questão inicial, apresentada no início da atividade, todos os grupos conseguiram apresentar a solução correta.

Quadro 51 - Resultados da questão inicial da Atividade 5

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	10	100%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

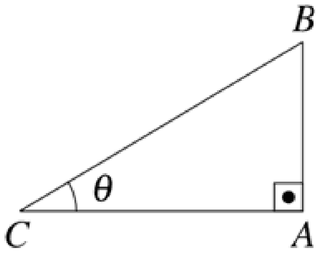
Os resultados do quadro 51 revelam que com o passar das atividades os estudantes apresentam melhoras na resolução das atividades iniciais, demonstrando que as habilidades desenvolvidas nas atividades anteriores contribuem com o desempenho dos alunos nas atividades seguintes. Além disso, os estudantes apresentaram maior habilidade com o uso da calculadora, fator que contribuiu para que a atividade fosse resolvida em um tempo total de 41 minutos.

- Atividade 6: Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo

Às 15h42min iniciamos a aplicação da Atividade 6: “Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo”. Esta atividade objetivava instigar os estudantes a descobrir a razão entre seno e cosseno, de um mesmo ângulo, no triângulo retângulo. Para isso, inicialmente entregamos a cada grupo uma folha contendo a seguinte questão inicial:

Quadro 52 - Questão inicial da Atividade 6

QUESTÃO INICIAL: O professor de matemática solicitou a João que calculasse a tangente do ângulo ***ɵ*** *no triângulo a seguir. No entanto, os únicos dados que o professor informou foi:* ***seno ɵ = 0,848*** *e* ***cosseno ɵ = 0,53****. Sabendo que a questão foi respondida corretamente, qual foi o valor encontrado por João para a tangente do ângulo* ***ɵ****?*



Fonte: Experimentação (2023).

Esta questão faz alusão a relação trigonométrica tangente por meio da razão entre o seno e o cosseno de um mesmo ângulo. Os alunos ficaram inquietos diante do problema, chegando a afirmar que se tratava de uma “pegadinha[8]”. Questionados sobre o porquê de se tratar de uma “pegadinha”, o aluno A_{16} se expressou afirmando que pelo fato de não haver medidas dos lados do triângulo não seria possível calcular a tangente do ângulo, e que neste caso se tratava de uma “pegadinha”, o que foi confirmado por outros alunos num coro de “Verdade, professor!”.

Diante desta inquietude da turma, acalmamos os ânimos dos alunos e entregamos a cada equipe uma cópia da folha de atividade 6 e explicamos os procedimentos para a realização da atividade. A seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 8:

Quadro 53 - Solução da Atividade 6

Grupo (G)	Resposta do Grupo					
	Triângulo	Ângulo β	Seno β	Cosseno β	Tangente β	$\frac{sen\beta}{cos\beta}$
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	1	30°	0,5	0,866	0,577	0,577
	2	30°	0,5	0,866	0,577	0,577
	3	30°	0,5	0,866	0,577	0,577
	4	30°	0,5	0,866	0,577	0,577
	5	45°	0,707	0,707	1	1
	6	45°	0,707	0,707	1	1
	7	46°	0,707	0,707	1	1
	8	45°	0,707	0,707	1	1
	9	60°	0,866	0,5	1,732	1,732
	10	60°	0,866	0,5	1,732	1,732
	11	60°	0,866	0,5	1,732	1,732
	12	60°	0,886	0,5	1,732	1,732

Fonte: Experimentação (2023).

Durante a realização desta atividade os grupos G3 e G9 levantaram a hipótese de que, devido os ângulos desta atividade apresentarem as mesmas medidas dos ângulos das atividades 3, 4 e 5, não seria necessário realizar os cálculos para

[8] Uma pegadinha em matemática é uma questão ou problema que é planejado para enganar ou confundir os alunos.

encontrar o seno, cosseno e tangente, mas sim, somente da razão seno/cosseno, pois os demais cálculos encontravam-se anotados no caderno. Assim, deixamos os grupos livres para executar a atividade de acordo com as conclusões prévias de cada equipe. Deste modo, os resultados revelaram que a atividade foi realizada de forma satisfatória pelas 10 (dez) equipes.

Após calcular a tangente de cada ângulo e compará-la com a razão (divisão) entre os valores encontrados para o seno e cosseno, os estudantes concluíram que resultava no mesmo valor. Deste modo, cada grupo apresentou a sua observação, conforme descrita no quadro a seguir:

Quadro 54 - Observações dos alunos sobre a Atividade 6

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** igual o atividade 5 **Transcrição**: *"Igual a atividade 5"*	Observação Inválida
G2 A_{5}, A_{30} e A_{37}	**Observação:** Deu o mesmo valor que a tangente, então é tangente também **Transcrição**: *"Deu o mesmo valor que a tangente, então é tangente também"*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** O sen/cos também resulta no valor da tangente **Transcrição**: *"O sen/cos também resulta no valor da tangente"*	Observação Válida
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Observação:** Essa atividade também é de tangente. **Transcrição**: *"Essa atividade também é de tangente."*	Observação Válida
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** C.O/C.A = sen/cos **Transcrição**: *"C.O/C.A = sen/cos"*	Observação Válida
G6 A_{3}, A_{14} e A_{22}	**Observação:** Acreditamos que também é tangen-te, pois resultou no mesmo valor da tan-gente. **Transcrição**: *"Acreditamos que também é tangente, pois resultou no mesmo da tangente."*	Observação Válida
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** Igual a atividade de tangente **Transcrição**: *"Igual a atividade de tangente"*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** A divisão deu o mesmo valor da tangente **Transcrição**: *"A divisão de o mesmo valor da tangente"*	Observação Válida

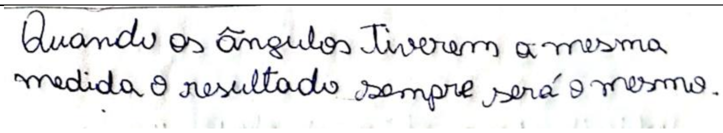
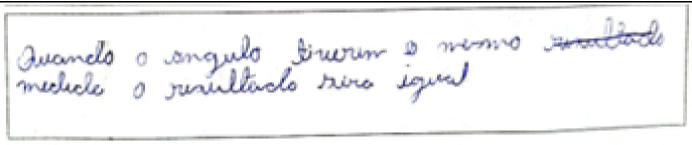
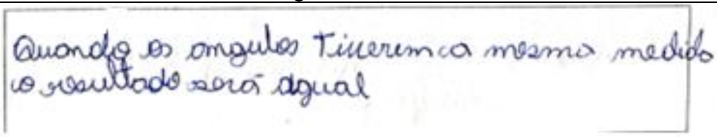
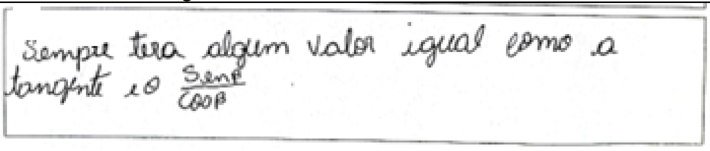
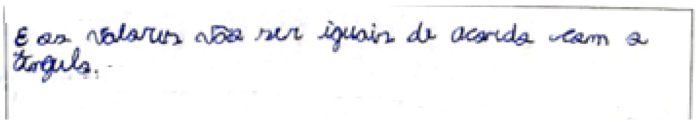
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** O seno dividido pelo cosseno também é deu o valor da tangente **Transcrição**: *"O seno dividido pelo cosseno também é deu o valor da tangente"*	Observação Válida
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Observação:** O resultado dessa vez é a tangente **Transcrição**: *"O resultado dessa vez é a tangente"*	Observação Válida

Fonte: Experimentação (2023).

Essas observações destacam um desempenho positivo dos alunos na atividade, com a maioria (9 grupos) demonstrando uma compreensão sólida da relação entre seno e cosseno. A segui, apresentamos as conclusões dos alunos a respeito da atividade 6:

Quadro 55 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 6

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	sempre terá algum valor igual como a tangente e o $\frac{sen\beta}{cos\beta}$ **Transcrição**: *"Sempre terá algum valor igual como a tangente e o senβ / cosβ."*	Válida, prevista e desejada
G2 A_5, A_{30} e A_{37}	A medida da tangente pode ser dividida de duas formas: $\frac{C.O}{C.A}$ e $\frac{seno}{cosseno}$. **Transcrição**: *"A medida da tangente pode ser dividida de duas formas: C.O/C.A e seno/cosseno."*	Válida, prevista e desejada
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	Podemos encontrar a tangente de duas formas, são elas: Cateto oposto, sobre cateto adjacente ou seno sobre o cosseno **Transcrição**: *"Podemos encontrar a tangente de duas formas, são elas: cateto oposto, sobre cateto adjacente ou seno sobre cosseno."*	Válida, prevista e desejada
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	A tangente é igual ao seno dividido pelo cosseno. **Transcrição**: *"A tangente é igual ao seno dividido pelo cosseno."*	Válida, prevista e desejada
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	Mesmo o valor dos ângulos 60; 30° e etc... Cada um vai ter um valor final diferente **Transcrição**: *"Mesmo valor dos ângulos 60º, 30º e etc... cada um vai ter um valor final diferente."*	Válida, não prevista e não desejada

G6 A_3, A_{14} e A_{22}	 **Transcrição**: *"Quando os ângulos tiverem a mesma medida o resultado sempre será o mesmo."*	Válida, não prevista e não desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	 **Transcrição**: *"Quando o ângulo tiverem o mesmo ~~resultado~~ medida o resultado será igual."*	Válida, não prevista e não desejada
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	 **Transcrição**: *"Quando os ângulos tiverem a mesma medida o resultado será igual."*	Válida, não prevista e não desejada
G9 A_4, A_8 e A_{21}	 **Transcrição**: *"Sempre terá algum valor igual como a tangente e o senβ / cosβ."*	Válida, prevista e desejada
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	 **Transcrição**: *"E os valores vão ser iguais de acordo com o ângulo."*	Válida, não prevista e não desejada

Fonte: Experimentação (2023).

Após a análise da conclusão apresentada por cada equipe, classificamos todas com válidas, 50% válidas, previstas e desejadas e 50% válidas, não previstas e não desejadas, conforme revela o quadro a seguir:

Quadro 56 - Características das conclusões da atividade 6

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	5	50%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	5	50%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das conclusões apresentadas pelas equipes é notavelmente positiva, uma vez que todas as conclusões foram classificadas como válidas. Além disso, esse conjunto de conclusões está igualmente dividido entre 50% consideradas válidas, previstas e desejadas, e 50% válidas, não previstas e não desejadas. Esse resultado é um indicativo de que o objetivo proposto na atividade foi alcançado. Além disso, a igualdade na distribuição entre conclusões previstas e não previstas indica que os alunos estão desenvolvendo um entendimento sólido e flexível dos conceitos relacionados ao seno e cosseno em triângulos retângulos.

Assim, apresentamos uma conclusão formal para a atividade 6: **"a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo é igual a tangente desse mesmo ângulo, ou seja, $\boldsymbol{tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}}$"**. Por conseguinte, para finalizar a atividade as equipes retomaram a resolução da questão inicial, e de posse da compreensão do conteúdo todos os grupos solucionaram o problema de forma correta, conforme demostrado no quadro a seguir:

Quadro 57 - Resultados da questão inicial da Atividade 6

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	10	100%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Mais uma vez é perceptível uma melhora significativa no desenvolvimento das habilidades dos estudantes na resolução das atividades proposta. Nesta atividade 6, por exemplo, não recebemos solicitação de ajuda, seja para compreender a atividade ou na operacionalização da calculadora. Nesta perspectiva, o tempo necessário para a realização total da atividade foi de 29 minutos.

No quadro a seguir apresentamos as opiniões dos alunos a respeito da aula sobre a tangente de um ângulo.

Quadro 58 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro VII

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei, pois foi fácil de aprender e resolver as questões. **Transcrição**: *"Gostei, pois foi fácil de aprender e resolver as questões"*
G2 A_5, A_{30} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** amei o conteúdo simples e fácil **Transcrição**: *"Amei o conteúdo simples e fácil"*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Entendi completamente, aula com muito ensino e aprendizagem.

	Transcrição: *"Entendi completamente, aula com muito ensino e aprendizagem"*
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** AMEI AULA SOBRE TANGENTE **Transcrição**: *"Amei aula sobre tangente"*
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei! achei interessant e deu pra entender. **Transcrição**: *"Gostei! Achei interessante e deu para entender"*
G6 A_3, A_{14} e A_{22}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Fácil, pelo fato da ótima explicação **Transcrição**: *"Fácil pelo fato da ótima explicação"*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Demorei pra entender e aprender, mais achei muito legal a aula. **Transcrição**: *"Demorei para entender e aprender, mas achei muito legal a aula."*
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** a aula de hoje foi interessante. **Transcrição**: *"A aula de hoje foi interessante."*
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Aaula de hoje eu aprendi bem mais que as outras e consegui me Aprofundar no Assunto. **Transcrição**: *"A aula de hoje eu aprendi bem mais que as outras e consegui me aprofundar no assunto,"*
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Aula muito boa adorei **Transcrição**: *"Aula muito boa adorei"*

Fonte: Experimentação (2023).

As avaliações do estudante a respeito da aula e da atividade revelam que eles tiveram uma experiência de aprendizado muito positiva e produtiva. Além disso, percebemos os alunos compreenderam bem o conteúdo e se sentiram motivados durante o processo de aprendizagem, e que a abordagem pedagógica e as estratégias utilizadas foram efetivas.

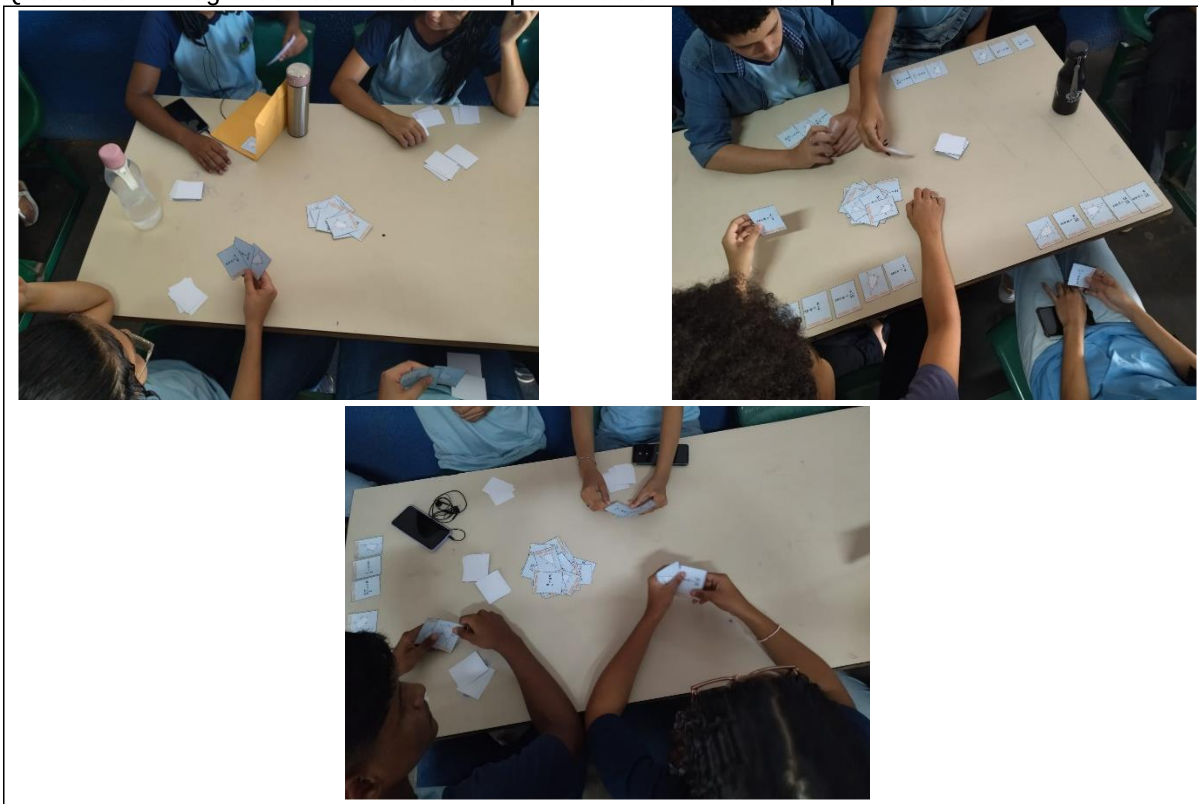
5.8. ENCONTRO VIII

Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos matemáticos relacionados as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, no dia 03 de maio (quarta-feira), aplicamos as Atividades de Aprofundamentos 2 e 3.

Atividade de Aprofundamento 2 consistiu em um Baralho das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Inicialmente, como havíamos preparados 10 (dez) baralhos solicitamos que os alunos se organizassem em grupos, como havia presentes na turma 38 alunos, solicitamos que formasse 8 (oito) equipes com quatro estudantes cada e 2 (duas) equipes com três estudantes. Em seguida, entregamos a cada grupo um balho das relações trigonométricas e uma folha contendo as regras do jogo.

Realizamos a leitura das regras do jogo e explicamos que cada trinca deveria ser formada com uma carta triângulo e duas cartas de relações trigonométricas relacionadas a carta triângulo.

Quadro 59 - Fotografias dos alunos desempenhando a Atividade de Aprofundamento 2



Fonte: Experimentação (2023).

No dia desta atividade, os aparelhos de refrigeração de ar da sala de aula não estavam funcionando, e em virtude da alta temperatura, realizamos a atividade no refeitório da escola. Destacamos que essa mudança de ambiente não acarretou prejuízos no desempenho da atividade. Além disso, o jogo de baralho trigonométrico ofereceu uma oportunidade divertida para que os alunos revisassem e praticassem os conceitos de trigonometria (seno, cosseno e tangente) enquanto jogavam.

Finalizado o jogo e mantendo as equipes, entregamos aos alunos uma lista de exercícios contendo 8 (oito) problemas que deveriam ser solucionados utilizando uma das relações trigonométricas (seno, cosseno ou tangente). Esta atividade forneceu aos alunos uma oportunidade de aprofundar seu conhecimento sobre as relações trigonométricas estudadas. Deste modo, por meio de problemas desafiadores e exercícios práticos, os alunos tiveram a oportunidade de explorar diferentes situações em que essas relações podem ser aplicadas e fortalecer sua compreensão dos conceitos envolvidos.

Ao término do encontro os alunos avaliaram a aula como “ótima”, “interessante”, “legal”, “divertida”, dentre outros adjetivos positivos, conforme descrita no quadro a seguir:

Quadro 60 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro VIII

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** aprendi um pouco mais sobre o assunto. **Transcrição**: *“Aprendi um pouco mais sobre o assunto”*
G2 A_{5}, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** facil absorção de conteudo nota dez **Transcrição**: *“Fácil absorção de conteúdo nota dez”*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi uma aulo onde evolui muito no Conhecimento deste assunto. **Transcrição**: *“Foi uma aula onde evolui muito no conhecimento desse assunto.”*
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi uma aula interessante **Transcrição**: *“Foi uma aula interessante.”*
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** foi divertida e Pude Compriender **Transcrição**: *“Foi divertida e pode compreender.”*
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Hoje a aula foi divertida. **Transcrição**: *“Hoje a aula foi divertida.”*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei muito, só demorei um pouco pra entender, mais a aula foi otima **Transcrição**: *“Gostei muito, só demorei um pouco para entender, mas a aula foi ótima.”*
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** está aula foi legal e normal. **Transcrição**: *“Esta aula foi legal e normal.”*
G9 A_{4}, A_{8}, A_{20} e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A Aula de hoje foi interessante **Transcrição**: *“A aula de hoje foi interessante”*

G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Achei muito interresamte o conteúdo **Transcrição**: *“Achei muito interessante o conteúdo”*

Fonte: Experimentação (2023).

Os alunos avaliaram a aula como “ótima”, “interessante”, “legal”, “divertida”, dentre outros adjetivos positivos. Essas considerações positivas dos estudantes a respeito da aula é um indicativo de que eles tiveram uma experiência de aprendizado altamente positiva e produtiva, pois aprofundaram bem o conteúdo sobre as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente e se sentiram motivados durante o processo de aprendizagem. Além disso, isso demonstra que o método de ensino, a abordagem pedagógica e as estratégias utilizadas foram eficazes.

5.9. ENCONTRO IX

No dia 22 de maio (segunda-feira) de 2023, às 15h00min, realizamos o nono encontro para aplicação da Atividade 7: “Relação entre seno e cosseno no triângulo retângulo”. Esta atividade objetivava levar os estudantes a descobrir uma relação entre seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo. Para isso, foi entregue a cada grupo uma folha contendo a seguinte questão inicial:

Quadro 61 - Questão inicial da Atividade 7

QUESTÃO INICIAL: Determine o valor aproximado do seno de 25º, sabendo que cos25º ≅ 0,906.

Fonte: Experimentação (2023).

A questão acima refere-se a Relação Fundamental da Trigonometria, válida para qualquer valor de x, onde x é um ângulo. Essa relação representa uma propriedade fundamental das funções trigonométricas seno e cosseno, mostrando que o quadrado do seno de um ângulo somado ao quadrado do cosseno desse mesmo ângulo é igual a 1. Ao término dos 5 minutos destinados a resolução da questão, os alunos não haviam solucionado a questão inicial.

Assim, prosseguimos com a aplicação da atividade, entregando a cada grupo uma cópia da folha de atividade 7 e do quadro de triângulos 3 (Apêndice C). No quadro a seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 1:

Quadro 62 - Solução da Atividade 7

<table>
<tr><th>Grupo (G)</th><th>Resposta do Grupo</th></tr>
<tr><td>G1
A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}</td><td>
<table>
<tr><th>Triângulo</th><th>Ângulo β</th><th>senβ</th><th>cosβ</th><th>sen²β</th><th>cos²β</th><th>sen²β + cos²β</th></tr>
<tr><td>1</td><td>30°</td><td>0,5</td><td>0,866</td><td>0,25</td><td>0,749</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>2</td><td>30°</td><td>0,5</td><td>0,866</td><td>0,25</td><td>0,749</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>3</td><td>30°</td><td>0,5</td><td>0,866</td><td>0,25</td><td>0,749</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>4</td><td>30°</td><td>0,5</td><td>0,866</td><td>0,25</td><td>0,749</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>5</td><td>45°</td><td>0,707</td><td>0,707</td><td>0,499</td><td>0,499</td><td>0,998</td></tr>
<tr><td>6</td><td>45°</td><td>0,707</td><td>0,707</td><td>0,499</td><td>0,499</td><td>0,998</td></tr>
<tr><td>7</td><td>45°</td><td>0,707</td><td>0,707</td><td>0,499</td><td>0,499</td><td>0,998</td></tr>
<tr><td>8</td><td>45°</td><td>0,707</td><td>0,707</td><td>0,499</td><td>0,499</td><td>0,998</td></tr>
<tr><td>9</td><td>60°</td><td>0,866</td><td>0,5</td><td>0,749</td><td>0,25</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>10</td><td>60°</td><td>0,866</td><td>0,5</td><td>0,749</td><td>0,25</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>11</td><td>60°</td><td>0,866</td><td>0,5</td><td>0,749</td><td>0,25</td><td>0,999</td></tr>
<tr><td>12</td><td>60°</td><td>0,866</td><td>0,5</td><td>0,749</td><td>0,25</td><td>0,999</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta atividade foi perceptível que nenhum dos grupos apresentou dificuldades na operacionalização da calculadora. Este fator fez com os alunos apresentassem maior autonomia na realização dos cálculos e apresentassem maior confiança diante das novas descobertas matemáticas. Diante disso, solicitamos que cada grupo socializasse com a turma a sua observação mediante os resultados encontrados. As observações de cada equipe estão expressas, transcritas e classificadas no quadro a seguir:

Quadro 63 - Observações dos alunos sobre a Atividade 7

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** O resultado do sen² + cos² = 0,99 **Transcrição**: *"O resultado do sen^2 + cos^2 = 0,99"*	Observação Válida
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** O resultado Final foi igual, isto é, sen² + cos² = 1 para todos os ângulos **Transcrição**: *"O resultado final foi igual, isto, é sen^2 + cos^2 = 1 para todos os ângulos"*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** Todos os valores deram 1 **Transcrição**: *"Todos os valores deram 1"*	Observação Válida

G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** O resultado foi 1 ou próximo de 1 em todos triâng... **Transcrição**: *"O resultado foi 1 ou próximo de 1 em todos triângulos."*	Observação Válida
G5 A_9, A_{33} e A_{35}	**Observação:** Arredondamdo o valor final resulta 1 **Transcrição**: *"Arredondando o valor final resulta 1."*	Observação Válida
G6 A_1, A_3, A_{14} e A_{22}	**Observação:** Somando $sen^2+cos^2=1$, **Transcrição**: *"Somando $sen^2 + cos^2 = 1$."*	Observação Válida
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** O resultado foi igual para todos os triangula, ou seja 0,99 **Transcrição**: *"O resultado foi igual para todos os triângulos, ou seja 0,99."*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** O Valor final do $sen^2+cos^2=0,99$ em todos os ângulos e triângulos. **Transcrição**: *"O valor final do $sen^2 + cos^2 = 0,99$ em todos os ângulos e triângulos.*	Observação Válida
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** O resultado deu 0,999 ou 0,998 **Transcrição**: *"O resultado deu 0,999 ou 0,998"*	Observação Válida
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Observação:** Dessa vez os resultados são Praticamente igual em todos os triangulos **Transcrição**: *"Dessa vez os resultados são praticamente igual em todos os triângulos."*	Observação Válida

Fonte: Experimentação (2023).

Na atividade que abordou a relação fundamental da trigonometria, os resultados revelaram um desempenho notavelmente positivo por parte dos alunos. Todos os grupos participantes, conseguiram apresentar observações válidas, indicando um entendimento sólido e consistente da relação fundamental. Essa uniformidade de observações válidas reflete uma compreensão eficaz do conceito e demonstra que os alunos assimilaram com sucesso o conteúdo abordado na atividade. A seguir, apresentamos as conclusões de cada equipe:

Quadro 64 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 7

Grupo (G)	**Conclusões**	**Validade**
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Transcrição**: *"O resultado sempre será 1 ou será aproximado."*	Válida, prevista e desejada
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Transcrição**: *"Independente do ângulo sen^2 + cos^2 é igual a 1 ou um número aproximado."*	Válida, prevista e desejada
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Transcrição**: *"A soma entre o quadrado do seno de um ângulo e o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo é igual a 1."*	Válida, prevista e desejada
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Transcrição**: *"Mesmo o ângulo tendo tamanhos diferentes no final sempre chega próximo de 1."*	Válida, prevista e desejada
G5 A_9, A_{33} e A_{35}	**Transcrição**: *"A soma entre o quadrado do seno com o quadrado do cosseno do mesmo ângulo será um."*	Válida, prevista e desejada
G6 A_1, A_3, A_{14} e A_{22}	**Transcrição**: *"O sen$^2\beta$ + cos$^2\beta$ dos ângulos são = 1."*	Válida, prevista e desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Transcrição**: *"Que o sen$^2\beta$ + cos$^2\beta$ ao ângulo 30º é igual a 0,999."*	Válida, prevista e desejada
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Transcrição**: *"O seno ao quadrado mais o cosseno ao quadrado é igual a um."*	Válida, prevista e não desejada
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Transcrição**: *"Pode-se dizer que o sen^2 + cos^2 da o mesmo resultado."*	Inválida, não prevista e não desejada
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Transcrição**: *"A soma do quadrado do seno com o quadrado do cosseno de um ângulo resulta 1."*	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das conclusões apresentadas pelos alunos revela que houve uma melhora notável na capacidade dos estudantes de expressar suas conclusões de maneira mais clara e organizada. Essa evolução é um indicativo positivo, pois a escrita é uma habilidade crucial não apenas para a matemática, mas também para a comunicação eficaz de ideias em geral. No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 7:

Quadro 65 - Características das conclusões da atividade 7

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	8	80%
Válida, prevista e não desejada	1	10%
Válida, não prevista e não desejada	1	10%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A observação de que todos os 10 grupos apresentaram conclusões válidas é um marco importante, indicando que os alunos conseguiram compreender e aplicar com sucesso o conceito relacionado ao seno e cosseno em triângulos retângulos. Além disso, a divisão das conclusões em três categorias – válidas e previstas, válidas e não previstas, e válidas, previstas e não desejadas – demonstra uma capacidade variada de aplicação do conhecimento.

Além disso, é notável que três grupos (G3, G5 e G10) conseguiram formalizar suas conclusões utilizando a linguagem matemática de maneira apropriada. Esse é um sinal positivo de que os alunos estão não apenas compreendendo os conceitos, mas também estão adquirindo a capacidade de comunicar suas ideias de forma precisa e matematicamente correta. Assim, os resultados demonstram que o objetivo proposto para a atividade foi alcançado, pois os alunos descobriram a relação existente entre seno e cosseno de um ângulo no triângulo retângulo.

Deste modo, em conjunto com os estudantes chegamos a uma conclusão formal para a atividade 7: **“O seno ao quadro de um ângulo, mais o cosseno ao quadrado desse mesmo ângulo é igual a 1 (um), isto é, $\mathrm{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$**, e que esta relação trigonométrica e conhecida com a “Relação Fundamental da Trigonometria”.

Em seguida, ao retomarem a questão inicial, e de posse da compreensão do conteúdo 8 (oito) grupos solucionaram o problema de forma correta, conforme demostrado no quadro a seguir:

Quadro 66 - Resultados da questão inicial da Atividade 7

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	2	20%
Resolução CORRETA	8	80%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Analisado as respostas dos alunos evidenciou-se que 2 (dois) grupos não finalizaram a resolução da questão, apresentando como resultado $sen^2 25º = 0{,}179164$. Neste caso, os alunos deveriam ter aplicado a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade para obterem o resultado $sen25º \cong 0{,}423$. Por este motivo, classificamos a resposta destas duas equipes com “parcialmente correta”.

Ao término da atividade solicitamos aos alunos que avaliassem o encontro e a atividade desenvolvida na aula, conforme expressas no quadro a seguir:

Quadro 67 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro IX

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Um pouco confusa de início, mas depois ficou fácil de entender. **Transcrição**: *“Um pouco confusa de início, mas depois ficou fácil de entender”*
G2 A_{5}, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei bastante, por ser algo simples e facil. **Transcrição**: *“Gostei bastante, por ser algo simples e fácil”*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Foi uma aula bem legal e imperativa. **Transcrição**: *“Foi uma aula bem legal e imperativa”*
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** De cara achei complicado mas depois vi que também era fácil **Transcrição**: *“De cara achei complicada mas depois vi também era fácil”*
G5 A_{9}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** legal, só um pouco dificil de entender **Transcrição**: *“legal, só um pouco difícil de entender”*
G6 A_{1}, A_{3}, A_{14} e A_{22}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei porque não tive tanta dificuldade **Transcrição**: *“Gostei porque não tive tanta dificuldade”*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei muito. Uma aula com conteúdo muito fácil. **Transcrição**: *“Gostei muito. Uma aula com conteúdo muito fácil.”*

G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** UMA AULA MUITO LEGAL E INTERESSANTE DE APRENDER. **Transcrição**: *“Uma aula muito legal e interessante de aprender”*
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei por que a aula foi fácil de aprender. **Transcrição**: *“Gostei por que a aula foi fácil de aprender.”*
G10 A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** seguem o mesmo processo dos outros acima. gostei muito e de compreensão fácil. **Transcrição**: *“Seguem o mesmo processo das outras acima. Gostei muito e de compreensão fácil.”*

Fonte: Experimentação (2023).

A atividade proposta conseguiu envolver e motivar os alunos, proporcionando uma experiência de aprendizado prazerosa. Quando os alunos experimentam um sentimento positivo em relação às atividades, isso indica que eles se sentem engajados, interessados e valorizados durante o processo de aprendizagem.

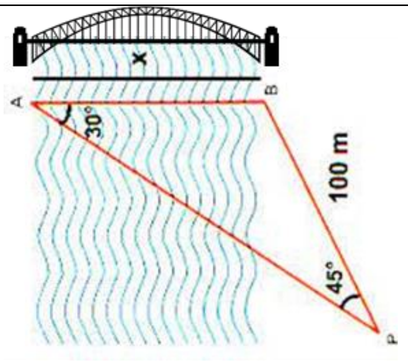
Finalizamos a atividade às 15h45min e utilizamos o tempo restante da aula para resolvermos mais dois problemas envolvendo a Relação Fundamental da Trigonometria. Destacamos o entusiasmo dos alunos quando conferiam o resultado correto na calculadora.

5.10. ECONTRO X

A aplicação da Atividade 8: “Lei dos Senos” ocorreu no dia 24 de maio (segunda-feira) de 2023, com início às 15h00min. Nesta atividade os alunos deveriam descobrir uma relação entre as razões dos lados e os valores do seno dos respectivos ângulos opostos de um triângulo qualquer. Deste modo, assim como na atividade anterior, iniciamos o encontro propondo um problema aos alunos, conforme o exposto a seguir:

Quadro 68 - Questão inicial da Atividade 8

QUESTÃO INICIAL: Sob o rio Parauapebas será construída uma ponte AB. De um ponto P, a 100 m de B, mediu-se o ângulo APB = 45º e do ponto A, mediu-se o ângulo PAB = 30º. Calcule o comprimento da ponte.



Fonte: Experimentação (2023).

A questão acima faz alusão a Lei dos Senos, uma relação trigonométrica que descreve a proporção entre os comprimentos dos lados de um triângulo e os senos dos ângulos opostos a esses lados. Destinamos 5 minutos para que os alunos respondessem o problema, e passado este tempo nenhum grupo o havia solucionado.

Com isso, explicamos a turma que na aula do dia seria estudado uma nova relação trigonométrica no triângulo. Assim, cada grupo recebeu uma cópia da folha de atividade 8 e do quadro de triângulos 4 (Apêndice D). Para auxiliar os estudantes na compreensão da atividade, explicamos os procedimentos que eles deveriam realizar na atividade e como deveriam identificar cada um dos lados do triângulo. A seguir, apresentamos a resposta dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 3:

Quadro 69 - Solução da Atividade 8

Grupo (G)	Resposta do Grupo
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	(tabela abaixo)

Triângulo	Lados			Seno dos ângulos			$\frac{a}{sen\,\hat{A}}$	$\frac{b}{sen\,\hat{B}}$	$\frac{c}{sen\,\hat{C}}$
	a	b	c	$sen\,\hat{A}$	$sen\,\hat{B}$	$sen\,\hat{C}$			
1	5	$5\sqrt{3}$	5	0,5	0,866	0,5	10	10	10
2	15	15	15	0,866	0,966	0,866	17,32	17,32	17,32
3	$5(1+\sqrt{3})$	10	$5\sqrt{2}$	0,966	0,707	0,5	14,14	14,14	14,14
4	$(\sqrt{3}+3)$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	0,965	0,707	0,866	4,899	4,899	4,899
5	2	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2\sqrt{2}$	0,5	0,259	0,707	4	4,012	4
6	$2(\sqrt{3}+1)$	4	$2\sqrt{6}$	0,866	0,707	0,965	5,657	5,657	5,657
7	10	10	10	0,866	0,866	0,866	11,54	11,54	11,54
8	$10\sqrt{3}$	10	10	0,866	0,5	0,5	20	20	20

Fonte: Experimentação (2023).

Familiarizados com o uso da calculadora e com o sentimento de autonomia, aos alunos não apresentaram dificuldades na resolução da atividade. Durante a realização da atividade, em um certo momento, percebemos uma inquietude entre os alunos. Questionados sobre o porquê da agitação, os alunos do grupo G7 responderam que atividade continha um erro, pois os cálculos para o triângulo 5 não apresentavam os mesmos resultados. Com isso, os demais grupos também fizeram a mesma afirmação.

Com o auxílio da professora observadora, visitamos os grupos para verificar se a atividade continha algum erro de digitação, ou se os alunos estavam cometendo algum erro procedimental na realização da atividade. Para nossa "surpresa", os alunos estavam corretos e o lado "a" do triângulo 5 constavam a medida $\sqrt{2}$, onde deveria ser 2. Ficamos surpresos e felizes como o ocorrido, pois foi algo que demonstrou que os alunos estavam atentos e entendendo os procedimentos propostos para a atividade.

Após a correção da medida do lado "a" do triângulo 5, os alunos finalizaram a atividade sem mais dificuldades, e apresentaram suas observações com relação a atividade.

Quadro 70 - Observações dos alunos sobre a Atividade 8

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** Dessa vez os resultados são iguais para cada triângulos **Transcrição**: "Dessa vez os resultados são iguais para cada triângulos."	Observação Válida
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$ em cada triângulo **Transcrição**: *"$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$ em cada triângulo"*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** As três divisões resultam no mesmo valor **Transcrição**: *"As três divisões resultam no mesmo valor."*	Observação Válida
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Observação:** A divisão é igual para $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{B}{sen\hat{B}} = \frac{C}{sen\hat{C}}$. **Transcrição**: *"A divisão é igual para $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$"*	Observação Válida
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Observação:** O valor final das três divisões são iguais **Transcrição**: *"O valor final das três divisões são iguais."*	Observação Válida
G6	**Observação:** Resulta no mesmo valor final.	Observação Válida

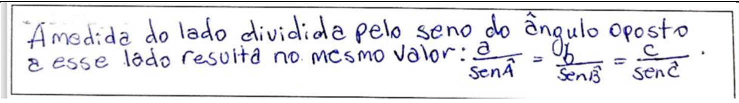
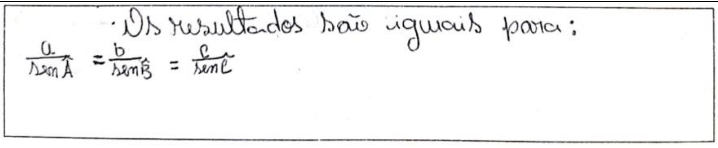
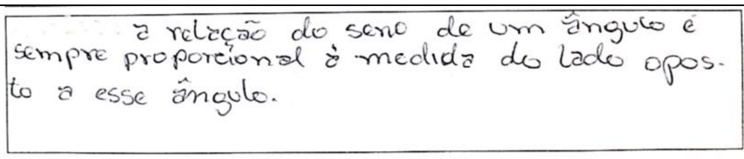
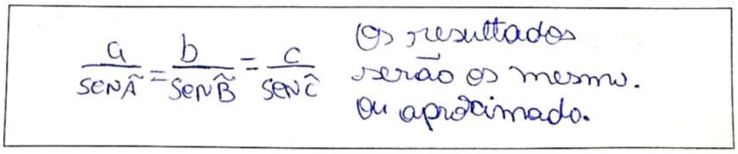
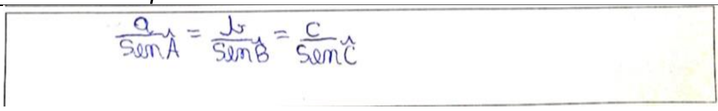
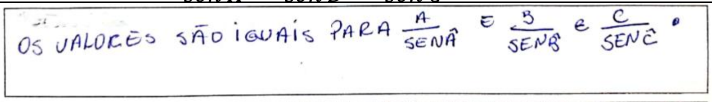
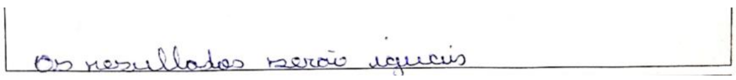
A_1, A_3 e A_{14}	**Transcrição**: *"Resulta no mesmo valor final."*	
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Observação:** os três valores são o mesmo **Transcrição**: *"Os três valores são o mesmo."*	Observação Válida
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Observação:** O $\frac{a}{sen\hat{A}}$ e' igual $\frac{b}{sen\hat{B}}$ e igual $\frac{c}{sen\hat{C}}$ ou seja, e' o mesmo valor **Transcrição**: *"O $\frac{a}{sen\,\hat{A}}$ é igual $\frac{b}{sen\,\hat{B}}$ e igual $\frac{c}{sen\,\hat{C}}$ ou seja, é o mesmo valor."*	Observação Válida
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Observação:** As razões sempre iguais em cada triângulo **Transcrição**: *"As razões sempre iguais em cada triângulo."*	Observação Válida
G10 A_{16} e A_{23}	**Observação:** no mesmo triângulo o $\frac{a}{sen\hat{A}}$ e' igual $\frac{b}{sen\hat{B}}$ e do $\frac{c}{sen\hat{C}}$ **Transcrição**: *"No mesmo triângulo o $\frac{a}{sen\,\hat{A}}$ é igual $\frac{b}{sen\,\hat{B}}$ e do $\frac{c}{sen\,\hat{C}}$"*	Observação Válida

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta atividade, que envolve a Lei dos Senos revelou que todos os 10 grupos participantes conseguiram apresentar observações válidas. Isso não apenas indica um entendimento sólido e consistente da Lei dos Senos, mas também evidencia uma uniformidade nas observações válidas, sugerindo uma assimilação bem-sucedida do conceito desta relação trigonométrica. No quadro a seguir, apresentamos as conclusões de cada grupo a respeito da atividade:

Quadro 71 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 8

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	O lado oposto dividido pelo seno de cada ângulo resulta no mesmo valor. **Transcrição**: *"O lado oposto dividido pelo seno de cada ângulo resulta no mesmo valor."*	Válida, prevista e desejada
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	Quando dividimos o lado pelo o seno do ângulo oposto resulta no mesmo valor para todos os lados. **Transcrição**: *"Quando dividimos o lado pelo seno do ângulo oposto resulta no mesmo valor para todos os lados."*	Válida, prevista e desejada
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	a relação dos lados sempre será proporcional ao seno dos ângulos o resultado sempre dá quasse igual. $\frac{a}{sen\hat{A}}$ $\frac{b}{sen\hat{B}}$ $\frac{c}{sen\hat{C}}$	Válida, prevista e desejada

	Transcrição: *"A relação dos lados sempre será proporcional ao seno dos ângulos o resultado sempre dá quase igual.* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.*"*	
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	 **Transcrição**: *"A medida do lado dividida pelo seno do ângulo oposto a esse lado resulta o mesmo valor:* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.*"*	Válida, prevista e desejada
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	 **Transcrição**: *"Os resultados são iguais para:* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.*"*	Válida, prevista e desejada
G6 A_1, A_3 e A_{14}	 **Transcrição**: *"A relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo."*	Válida, prevista e desejada
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	 **Transcrição**: *"* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$*. Os resultados serão os mesmo ou aproximado."*	Válida, prevista e desejada
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	 **Transcrição**: *"* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.*"*	Válida, prevista e desejada
G9 A_4, A_8 e A_{21}	 **Transcrição**: *"Os valores são iguais para* $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.*"*	Válida, prevista e desejada
G10 A_{16} e A_{23}	 **Transcrição**: *"Os resultados serão iguais."*	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023).

No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 8:

Quadro 72 - Características das conclusões da atividade 8

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	10	100%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

Dentre os registros realizados pelos alunos, todos os grupos apresentaram conclusões válidas, previstas e desejadas. Além disso, destacamos que os grupos G3 e G6 apresentaram as conclusões mais próximas da que construímos juntos posteriormente. Assim, solicitamos que um representante de cada grupo lesse a conclusão de seu grupo, e construímos em conjunto a seguinte conclusão para a Atividade 8: **"Em um triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a estes lados, ou seja, $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$"**, e esta relação trigonométrica é conhecida com a "Lei dos Senos".

Em seguida, ao retomarem a questão inicial, todos os grupos solucionaram o problema de forma correta, conforme demostrado no quadro a seguir:

Quadro 73 - Resultados da questão inicial da Atividade 8

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	10	100%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Deste modo, os resultados evidenciam que o objetivo proposto para a atividade foi alcançado, pois os alunos descobriram a relação entre as razões dos lados e os valores do seno dos respectivos ângulos opostos em um triângulo. Às 15h38min finalizamos a atividade solicitando que os estudantes apresentassem, de forma escrita, suas opiniões sobre a aula e a atividade desenvolvida em sala.

Quadro 74 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro X

Grupo (G)	Avaliações
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei apesar do nunca ten estudado ou ouvido falar. **Transcrição**: *"Gostei apesar de nunca ter estudado ou ouvido falar"*

G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Algo simples que é fácil de entender e legal de se fazer. **Transcrição**: *“Algo simples e fácil de entender e legal de se fazer.”*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** amei, muito fácil de aprender. **Transcrição**: *“Amei, muito fácil de aprender.”*
G4 A_2, A_6, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** FOI MUITO LEGAL APRENDE A LEI DOS SENOS. AMEI **Transcrição**: *“Goi muito legal aprender a lei dos senos. Amei.”*
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** achei um conteudo interessante **Transcrição**: *“Achei o conteúdo interessante.”*
G6 A_1, A_3 e A_{14}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Interessante, dificuldade mediano mas nada que a prática não resolva. **Transcrição**: *“Interessante, dificuldade mediana mas nada que a prática não resolva.”*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Excelente aula, com muito aprendizado. **Transcrição**: *“Excelente aula, com muito aprendizado.”*
G8 A_{17}, A_{24}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** FOI UMA AULA MUITO BOA. **Transcrição**: *“Foi uma aula muito boa.”*
G9 A_4, A_8 e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Muito boa! muito produtiva. **Transcrição**: *“Muito boa! Muito produtiva.”*
G10 A_{16} e A_{23}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** outro conteúdo de facil entendimente e que gostei bastante **Transcrição**: *“Outro conteúdo de fácil entendimento e que gostei bastante.”*

Fonte: Experimentação (2023).

A avaliação positiva dos alunos indica que eles compreenderam e aplicaram corretamente a Lei dos Senos na resolução da questão inicial, identificando os elementos necessários, formulando a proporção correta e utilizando as informações fornecidas para resolver o problema proposto de forma precisa. Além disso, é um testemunho do esforço e da dedicação deles, bem como do planejamento e da condução eficaz da atividade.

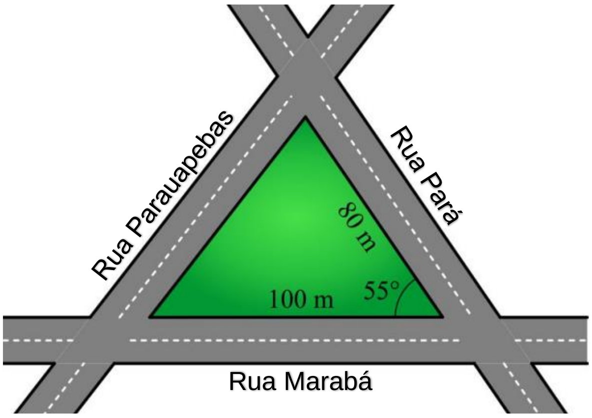
Ressaltamos que neste mesmo encontro havíamos planejado a aplicação da atividade 9, no entanto, diante da empolgação dos alunos com a resolução da questão inicial, resolvemos propor a resolução de outros problemas envolvendo a lei dos senos. Assim, a atividade referente a lei dos cossenos foi aplicada no encontro seguinte.

5.11. ENCONTRO XI

Na data de 29 de maior (segunda-feira) de 2023 foi aplicada a Atividade 9: “Lei dos Cossenos”, com início às 15h00min. Nesta atividade os alunos deveriam descobrir uma relação entre a medida dos lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um dos seus ângulos. Deste modo, iniciamos o encontro apresentando aos estudantes uma questão inicial onde eles onde eles deveriam calcular o comprimento do lado de uma praça triangular, conforme o exposto a seguir:

Quadro 75 - Questão inicial da Atividade 9

QUESTÃO INICIAL: *Uma pracinha triangular será construída entre três ruas, como mostra a figura.*



Determine o comprimento do lado da pracinha referente a Rua Parauapebas.

Fonte: Experimentação (2023).

A questão acima faz alusão a Lei dos Cossenos, um teorema da geometria analítica que relaciona os lados de um triângulo com os seus ângulos. Essa lei é uma generalização do teorema de Pitágoras e permite calcular o comprimento de um lado desconhecido de um triângulo quando os comprimentos dos outros dois lados e o ângulo entre eles são conhecidos.

Destinamos 5 minutos para que os estudantes respondessem à questão inicial, e durante a resolução percebemos que os alunos tentaram resolvê-la aplicando a relação trigonométrica lei dos senos, no entanto, não lograram êxito em virtude de o triângulo apresentar dois ângulos com medidas desconhecidas. Diante disso, demos início a aplicação da atividade entregando a cada grupo uma cópia da folha de atividade 9 e do quadro de triângulos 4 (Apêndice D).

Em seguida, explanamos aos alunos o objetivo da atividade e explicamos os procedimentos a serem adotados para a consecução dos resultados. No quadro a seguir, apresentamos os resultados dos participantes da pesquisa que integravam o Grupo 5:

Quadro 76 - Solução da Atividade 9

Grupo (G)	**Resposta do Grupo**
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	(see table below)

Triângulo	Ângulo($\hat{A}$)	cos($\hat{A}$)	A	B	c	a^2	b^2	c^2	$b^2+c^2-2.b.c.\cos(\hat{A})$
1	30°	0,866	5	$5\sqrt{3}$	5	25	75	25	25
2	105°	-0,259	$5(1+\sqrt{3})$	10	$5\sqrt{2}$	186,6	100	50	186,6
3	60°	0,5	15	15	15	225	225	225	225
4	75°	0,259	$3+\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	22,39	12	18	22,39
5	30°	0,866	2	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2\sqrt{2}$	4	1,071	8	4
6	60°	0,5	$2\sqrt{6}$	$2(\sqrt{3}+1)$	4	24	29,80	16	24
7	60°	0,5	10	10	10	100	100	100	100
8	120°	-0,5	$10\sqrt{3}$	10	10	300	100	100	300

Fonte: Experimentação (2023).

Mediante o preenchimento do quadro de resultados, os dados revelaram que todos os grupos realizaram a atividade proposta com êxito. Diante disso, questionamos os alunos sobre suas percepções mediante os resultados obtidos na atividade, a resposta mais comum que obtivemos foi que: “o resultado é igual ao a^2”. As observações apresentadas por cada equipe estão transcritas e classificadas no quadro de observações a seguir:

Quadro 77 - Observações dos alunos sobre a Atividade 9

Grupo (G)	Observações	Validade
G1 A_7, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Observação:** O valor final é igual ao a^2 **Transcrição**: *“O valor final é igual ao a^2.”*	Observação Válida
G2 A_5, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Observação:** O a^2 é igual $b^2+c^2-2.b.c.\cos(\hat{A})$. **Transcrição**: *“$a^2$ é igual $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$.”*	Observação Válida
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Observação:** $a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos(\hat{A})$ **Transcrição**: *“$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$.”*	Observação Válida

G4 A2, A6, A26 e A27	**Observação:** O resultado final é igual ao resultado do a² **Transcrição**: *"O resultado final é igual ao resultado do a².*"	Observação Válida
G5 A18, A33 e A35	**Observação:** Dá um esmo valor do a² **Transcrição**: *"Dá um esmo valor do a².*"	Observação Válida
G6 A1, A3 e A14	**Observação:** É sempre igual ao a². **Transcrição**: *"É sempre igual ao a².*"	Observação Válida
G7 A10, A19, A38 e A39	**Observação:** $a^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\cos(\hat{A})$ **Transcrição**: *"$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$."*	Observação Válida
G8 A17, A29 e A31	**Observação:** O a² é igual o valor do $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$ e diferente do b² e c² **Transcrição**: *"O a² é igual o valor do $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$ e diferente do b² e c²."*	Observação Válida
G9 A4, A8, A20 e A21	**Observação:** O valor do a² é o mesmo valor do $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(A)$ **Transcrição**: *"O valor do a² é o mesmo valor do $b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$"*	Observação Válida
G10 A15, A16, A23 e A34	**Observação:** O a² é igual ao resultado **Transcrição**: *"O a² é igual ao resultado."*	Observação Válida

Fonte: Experimentação (2023).

Estas observações demonstram que todos os grupos participantes apresentaram observações válidas. Esse feito indica uma compreensão da Lei dos Cossenos por parte dos alunos, refletindo um domínio do conceito e evidenciando que os alunos assimilaram com sucesso o conteúdo matemático. No quadro a seguir, apresentamos as conclusões apresentadas por cada grupo:

Quadro 78 - Conclusões dos alunos sobre a Atividade 9

Grupo (G)	Conclusões	Validade
G1 A7, A12, A28 e A32	O resultado final é igual ou próximo ao resultado da coluna A² **Transcrição**: *"O resultado final é igual ou próximo ao resultado da coluna do A².*"	Válida, prevista e desejada
G2 A5, A30, A36 e A37	os resultados sempre será igual a a², dependendo dos lados. **Transcrição**: *"Os resultados sempre será igual a a², dependendo dos lados."*	Válida, prevista e desejada

G3 A11, A13, A25 e A40	o resultado final é sempre igual ou aproximado ao a^2 (A ao quadrado). **Transcrição**: *"O resultado final é sempre igual ou aproximado do a^2 (a ao quadrado)"*	Válida, prevista e desejada
G4 A2, A6, A26 e A27	Após todos os calculos feitos, conclui que, o valor de $b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\hat{A})$ é sempre igual/aproximadamente ao valor de "a^2" de todos os triângulos. **Transcrição**: *"Após todos os cálculos feitos, conclui que, os valores de $b^2 + c^2 – 2b.c.\cos(\hat{A})$ é igual/aproximadamente ao valor de "a^2" de todos os triângulos"*	Válida, prevista e desejada
G5 A18, A33 e A35	O resultado final é igual a a^2. **Transcrição**: *"O resultado final é igual a a^2"*	Válida, prevista e desejada
G6 A1, A3 e A14	o resultado sempre da o mesmo valor que a^2 ou da um valor aproximado uma casa a mais ou a menos. **Transcrição**: *"O resultado sempre da o mesmo valor que a^2 ou da um valor aproximado uma casa a mais ou a menos."*	Válida, prevista e desejada
G7 A10, A19, A38 e A39	O quadrado de um dos lados do triângulo é igual a soma do quadrado dos outros lados do triângulo menos o dobro do produto desses lados multiplicado pelo cosseno do ângulo relacionado. **Transcrição**: c	Válida, prevista e desejada
G8 A17, A29 e A31	O resultado final é igual ao próximo ao resultado da coluna A^2 **Transcrição**: *"O resultado final é igual ou próximo ao resultado da cola A^2"*	Válida, prevista e desejada
G9 A4, A8, A20 e A21	O valor do $a^2 = b^2+c^2-2.b.C.\cos(\hat{A})$ **Transcrição**: "*O valor do $a^2 = b^2 + c^2 – 2.b.c.\cos(\hat{A})$.*"	Válida, prevista e desejada
G10 A15, A16, A23 e A34	O resultado sempre será igual ao a^2, b^2 ou c^2 dependendo do lado que você está usando de referência **Transcrição**: *"O resultado sempre será igual ao a^2, b^2 ou c^2 dependendo do lado que você está usando de referência."*	Válida, prevista e desejada

Fonte: Experimentação (2023).

Mediante as conclusões escritas apresentadas pelos alunos, julgamos todas como conclusões válidas. No quadro a seguir, apresentamos as características das conclusões apresentadas pelos alunos para a atividade 9:

Quadro 79 - Características das conclusões da atividade 9

Características das Conclusões	Frequência (Quant.)	Percentual (%)
Válida, prevista e desejada	10	100%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	0	0%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
Não formulada	0	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A análise das conclusões registradas pelos alunos revela um resultado notável e positivo. Todos os grupos conseguiram apresentar conclusões que foram consideradas válidas, previstas e desejadas. Esse resultado sugere que os estudantes não apenas compreenderam o conteúdo ensinado, mas também foram capazes de aplicar esse conhecimento de acordo com as expectativas *a priori*. Esse alinhamento entre o que foi ensinado e o que foi compreendido pelos alunos é um indicativo claro do sucesso da atividade educacional.

Deste modo, abrimos um espaço para discursão e de forma conjunta, construímos a seguinte conclusão para a Atividade 9: "**O quadrado da medida de um dos lados de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam**, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$", e esta relação trigonométrica é denominada de "Lei dos Cossenos".

Posteriormente, solicitamos aos alunos que retomassem a resolução da questão apresentada no início da aula. Deste modo, aplicando a lei dos cossenos todos os grupos solucionaram corretamente o problema, evidenciando assim, que o objetivo proposto para a atividade foi alcançado de forma satisfatória.

Quadro 80 - Resultados da questão inicial da Atividade 9

Correção	Quat. de Grupos	Percentual (%)
Resolução em BRANCO	0	0%
Resolução ERRADA	0	0%
Resolução Parcialmente CORRETA	0	0%
Resolução CORRETA	10	100%
TOTAL	**10**	**100%**

Fonte: Experimentação (2023).

Atingir os objetivos de uma atividade é um indicador de que os alunos compreenderam os conceitos e conseguiram aplicar corretamente a lei dos cossenos. Além disso, isso demonstra que a sequência didática utilizada é eficaz. Assim, ao desafiá-los a aplicar a lei dos cossenos para resolver a questão inicial, os alunos foram estimulados a reflexão e a aplicação prática do conceito matemático estudado.

Ao término do encontro, os alunos foram convidados a expressar suas opiniões quanto a aula e a atividade desenvolvida no encontro, conforme estão descritas no quadro a seguir:

Quadro 81 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro XI

Grupo (G)	**Avaliações**
G1 A_{7}, A_{12}, A_{28} e A_{32}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** foi um pouco mais fácil, pois a lei dos cossenos é mais fácil para mim. **Transcrição**: *"Foi um pouco mais fácil, pois a lei dos cossenos é mais fácil para mim."*
G2 A_{5}, A_{30}, A_{36} e A_{37}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Interessante, bastante desafiador e facil de fazer. **Transcrição**: *"Interessante, bastante desafiador e fácil de fazer."*
G3 A_{11}, A_{13}, A_{25} e A_{40}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei bastante, o assunto foi concluido, e tivemos muito sucesso, **Transcrição**: *"Gostei bastante, o assunto foi concluído, e tivemos muito sucesso."*
G4 A_{2}, A_{6}, A_{26} e A_{27}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** INTERESSANTE E MUITO BOM APRENDE A LEI DOS COSSENOS GOSTEI. **Transcrição**: *"A lei dos cossenos gostei."*
G5 A_{18}, A_{33} e A_{35}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Uma explição muito boa e dui de entender
G6 A_{1}, A_{3} e A_{14}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** essa atividade eu achei interessante **Transcrição**: *"Essa atividade eu achei interessante."*
G7 A_{10}, A_{19}, A_{38} e A_{39}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei muito pois o conteúdo foi muito facil. **Transcrição**: *"Gostei muito pois o conteúdo foi muito fácil."*
G8 A_{17}, A_{29} e A_{31}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** UMA BOA AULA. E UMA ATIVIDADE FÁCIL DE FAZER. **Transcrição**: *"Uma boa aula e uma atividade fácil de fazer."*
G9 A_{4}, A_{8}, A_{20} e A_{21}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Esta aula foi excelente. **Transcrição**: *"Esta aula foi excelente."*
G10 A_{15}, A_{16}, A_{23} e A_{34}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** entendi melhor e achei bem interessanti **Transcrição**: *"Entendi melhor e achei bem interessante."*

Fonte: Experimentação (2023).

Diante das opiniões expressas no quadro acima, percebe-se que os alunos avaliaram positivamente a aula e a atividade sobre a lei dos cossenos. Essa avaliação positiva indica que os estudantes se envolveram e apreciaram a experiência de aprendizado, e sugere que a abordagem utilizada na aula, a apresentação do problema e a atividade foram eficazes em despertar o interesse e o engajamento dos alunos.

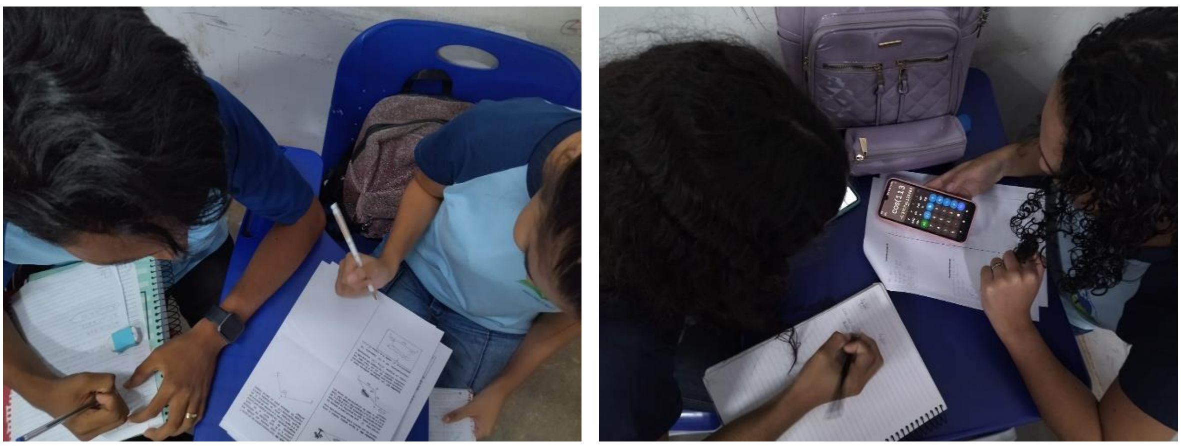
5.12. ENCONTRO XII

No dia 31 de maio (quarta-feira) de 2023 foi realizado o décimo segundo encontro com a aplicação de uma lista contendo 8 (oito) situações problemas envolvendo as Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. Explicamos aos alunos que o objetivo desta atividade era consolidar o aprendizado das Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer por meio da resolução de questões em que deveriam ser utilizado uma das leis (senos ou cossenos) para solucionar cada questão.

Solicitamos aos estudantes que se organizassem em grupos com até 4 (quatro) componentes e os entregamos uma cópia contendo a lista de questões e duas folhas papel A4 para que os alunos pudessem registrar as soluções das questões. Destinamos um tempo de 50 minutos para a realização da atividade, e durante este período percorremos a sala para verificar o andamento da atividade.

No decorrer da atividade alguns grupos nos chamavam para questionar qual das leis trigonométricas deveria ser utilizada na resolução da questão. Neste momento, fazíamos com os alunos pensassem uma estratégia de resolução de acordo com os dados que a questão fornecia. Por exemplo, quando a questão solicitava que fosse calculado a medida de um dos lados do triângulo, e fornecia as medidas dos outros dois lados e a medida de um ângulo, perguntávamos se era possível, sem sobrar nenhum dos dados, utilizá-los na lei dos senos ou na lei dos cossenos. Deste modo, estimulando o raciocínio dos alunos, eles conseguiam identificar o método de solução adequado para a questão.

Quadro 82 - Fotografias dos alunos desempenhando a Atividade de Aprofundamento 4



Fonte: Experimentação (2023)

Esta atividade de aprofundamento ajudou os alunos a consolidarem sua compreensão da lei dos senos e da lei dos cossenos. Por meio de problemas e exercícios desafiadores, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos, reforçando sua compreensão e aprofundando seu conhecimento. Além disso, estimulou o pensamento crítico, o pensamento matemático e o desenvolvimento de estratégias eficazes para resolver situações mais complexas.

Após a correção da atividade na lousa, solicitamos que os alunos avaliassem a aula, conforme está descrita no quadro a seguir:

Quadro 83 - Opiniões dos alunos sobre o Encontro XII

Grupo (G)	Avaliações
G1 A$_7$, A$_{12}$, A$_{28}$ e A$_{32}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** fácil de ser compreendido **Transcrição**: *"Fácil de ser compreendido."*
G2 A$_5$, A$_{30}$, A$_{36}$ e A$_{37}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Assim como os demais, e muito legal! as vezes tem algumas dificu dades mas e legal. **Transcrição**: *"Assim como as demais, é muito legal! As vezes tem algumas dificuldades mas é legal."*
G3 A$_{11}$, A$_{13}$, A$_{25}$ e A$_{40}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A mesma coisa sobre a lei dos senos se aplica a lei dos cossenos. Mas é sempre bom aprender sobre assuntos novos. **Transcrição**: *"A mesma coisa sobre a lei dos senos se aplica a lei dos cossenos. Mas é sempre bom aprender sobre assuntos novos."*
G4 A$_2$, A$_6$, A$_{26}$ e A$_{27}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A aula de hoje foi bastante interessante, aprendi muito. **Transcrição**: *"A aula de hoje foi bastante interessante, aprendi muito"*
G5 A$_{18}$, A$_{33}$ e A$_{35}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** uma conclusão exata! **Transcrição**: *"Uma conclusão exata."*
G6 A$_1$, A$_3$, A$_{14}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** gostei dessa atividade por que nela não tive muita dificuldade **Transcrição**: *"Gostei dessa atividade por que nela não tive muita dificuldade."*
G7 A$_{10}$, A$_{19}$, A$_{38}$ e A$_{39}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** A atividade foi ótima. Conteúdo fácil de aprender. **Transcrição**: *"A atividade foi ótima. Conteúdo fácil de aprender."*
G8 A$_{17}$, A$_{29}$ e A$_{31}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** GOSTEI PORQUE FIZ A ATIVIDADE SEM DIFICULDADE. **Transcrição**: *"Gostei porque fiz a atividade sem dificuldade."*
G9 A$_4$, A$_8$ e A$_{21}$	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Gostei pois colocamos em prática todo conhecimento aprendido. **Transcrição**: *"Gostei pois colocamos em prática todo conhecimento aprendido."*

G10 A_{15}, A_{16} e A_{23}	**Dê sua opinião sobre a aula de hoje?** Com regrinhas basicas e nada dificeis. **Transcrição**: *"Com regrinhas básicas e nada difícil."*

Fonte: Experimentação (2023).

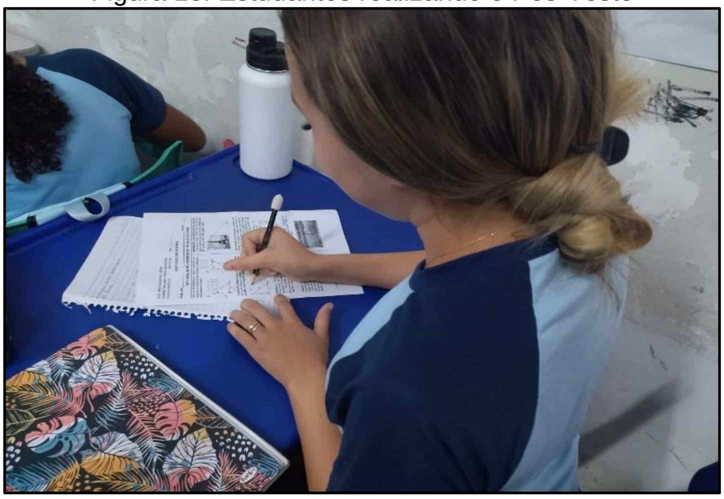
A satisfação dos estudantes com a atividade pode ser constatada no quadro de registro de opiniões. Essa avaliação positiva é um indicativo de que uma atividade foi bem recebida pelos alunos e que eles se sentiram desafiados de maneira adequada, puderam aplicar seus conhecimentos e habilidades de forma prática e tiveram a oportunidade de consolidar seu aprendizado.

5.13. ENCONTRO XIII: PÓS-TESTE

No dia 06 de maio (terça-feira), das 17h10min às 18h30min realizamos o último encontro da Sequência Didática para a aplicação do Pós-Teste. Ao entramos na sala de aula os alunos estavam organizados e revisando os conteúdos. Questionados sobre como estavam se sentindo diante de uma avaliação e, a maioria respondeu que estavam tranquilos, outros que estavam ansiosos. Neste momento, solicitamos que todos se mantivessem calmos e tranquilos, pois esta era mais uma atividade que eles (estudantes) iriam desenvolver.

Além disso, incentivamos os alunos a adotarem uma mentalidade positiva em relação à avaliação, lembrando-os de que é uma oportunidade para mostrar o que aprenderam e cresceram em seu conhecimento. Neste sentido, destacamos a importância do processo de aprendizagem contínuo e incentivamo-los a fazer o melhor que puderem, sem se concentrar apenas nos resultados.

Figura 18: Estudantes realizando o Pós-Teste



Fonte: Experimentação (2023)

Durante a realização do pós-teste observamos que alguns alunos apresentaram dificuldades, em decorrência de estarem ausentes em alguns encontros. Essa ausência nas aulas resultou em lacunas no conhecimento e na falta de prática necessária para compreender e aplicar os conceitos trigonométricos estudados no decorrer da Sequência Didática, por parte desses alunos.

Ao final, expressamos o agradecimento a todos os alunos pelo empenho demonstrados nas atividades que realizamos. Destacamos que o progresso alcançado juntos é resultado do comprometimento de cada aluno e do entusiasmo com o qual eles (os alunos) se envolveram nas atividades.

6. ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

O objetivo desta seção é apresentar a socialização da análise dos resultados das informações produzidas na etapa experimentação, por meio da aplicação do Questionário Socioeconômico, Pré-Teste, Sequência Didática e Pós-Teste. Deste modo, os dados serão analisados e validados por meio de uma análise de pesquisa de método misto, ou seja, uma abordagem que combina elementos da pesquisa qualitativa e quantitativa. Esse tipo de pesquisa permite obter uma compreensão mais abrangente e completa do fenômeno em estudo, ao combinar uma análise de dados descritivos e interpretativos com uma análise estatística (CRESWELL, 2007).

Neste sentido, realizamos uma análise comparativa entre o pré-teste e o pós-teste com o intuito de avaliar desempenho dos estudantes antes e depois da aplicação da sequência didática sobre o conteúdo trigonometria no triângulo. Para isso, comparamos as respostas individuais de cada aluno nos testes, com o objetivo de verificar se o progresso individual de cada participante melhorou ou ainda precisa melhorar. Além disso, realizamos uma análise dos erros cometidos pelos estudantes na realização do pós-teste, e uma análise estatística geral descritiva do desempenho dos estudantes nos testes.

6.1. DESEMPENHO DOS ESTUDANTES NOS TESTES

Nesta subseção apresentaremos os resultados do desempenho dos alunos na realização do pré-teste e pós-teste. Inicialmente, apresentamos no quadro a seguir o percentual de acerto em cada questão do teste inicial.

Tabela 20: Percentual de alunos que acertaram as questões do Pré-Teste

Questões Propostas	**Percentual de alunos que acertaram cada questão**
Questão 1	0%
Questão 2	0%
Questão 3	0%
Questão 4	0%
Questão 5	0%
Questão 6	0%
Questão 7	0%
Questão 8	0%
Questão 9	0%
Questão 10	0%

Fonte: Experimentação (2023).

Os dados obtidos com a aplicação do pré-teste sobre trigonometria no triângulo sugerem que, no momento da aplicação, os alunos possuíam um conhecimento limitado ou nulo sobre o assunto. Isto porque os estudantes podem não terem sidos expostos ou não terem entendido os conceitos trigonométricos, quando estudado. Destacamos que essa ausência de notas não indica necessariamente uma falta de esforço por parte dos alunos, uma vez que eles podem ter enfrentado dificuldades de aprendizagem específicas em relação à trigonometria no triângulo.

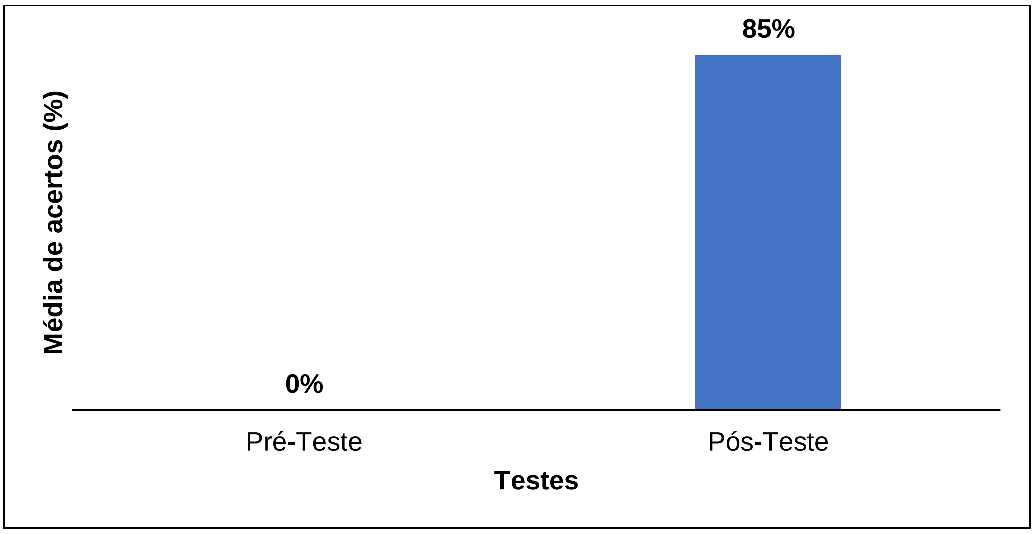
Assim, o resultado uniformemente baixo sugere a necessidade de intervenção imediata para auxiliar os alunos a adquirir os conhecimentos necessários. Neste sentido, foi trabalhada uma Sequência Didática (SD) sobre o ensino de trigonometria no triângulo, e ao final da SD os alunos foram submetidos ao pós-teste, cujos resultados estão dispostos na tabela a seguir:

Tabela 21: Comparação entre o percentual de alunos que acertaram as questões do Pré-Teste e Pós-Teste

Questão	Acerto (%)		Erro (%)		Em branco (%)	
	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
Q1	0%	100%	0%	0%	100%	0%
Q2	0%	83,78%	0%	13,52%	100%	2,70%
Q3	0%	72,97%	0%	24,33%	100%	2,70%
Q4	0%	83,78%	0%	10,82%	100%	5,40%
Q5	0%	91,89%	0%	8,11%	100%	0%
Q6	0%	78,38%	0%	18,92%	100%	2,70%
Q7	0%	89,19%	0%	8,11%	100%	2,70%
Q8	0%	81,08%	0%	13,52%	100%	5,40%
Q9	0%	87,84%	0%	6,76%	100%	5,40%
Q10	0%	81,08%	0%	18,92%	100%	0%

Fonte: Experimentação (2023).

Gráfico 12: Média de acerto nos Testes



Fonte: Experimentação (2023).

Os resultados revelam que a sequência didática sobre o ensino de trigonometria apresentou bons resultados no pós-teste, indicando que a abordagem utilizada foi eficaz em promover o aprendizado dos alunos nesse tópico específico. Tais resultados podem ser corroborado por meio do resultado individual dos alunos no pós-teste, indicando que eles adquiriram um bom conhecimento e compreensão do assunto após a aplicação da sequência didática.

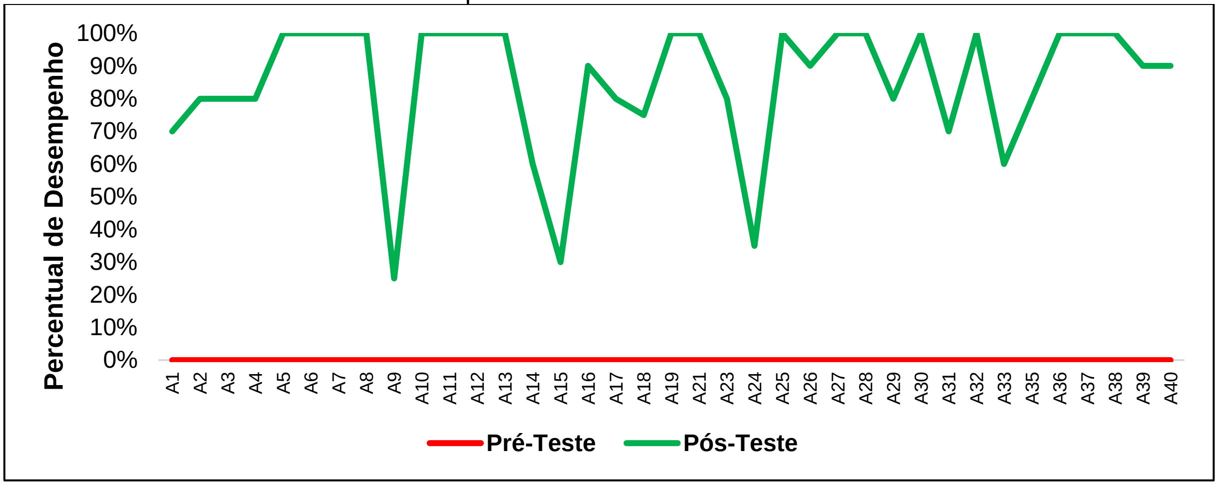
Nos resultados a seguir, apresentamos um comparativo entre o desempenho dos participantes da pesquisa no pré-teste e pós-teste:

Tabela 22: Comparação entre o desempenho dos alunos nos testes aplicados

Alunos	**Percentual de ACERTOS**	
	Pré-Teste	**Pós-Teste**
A_1	0%	70%
A_2	0%	80%
A_3	0%	80%
A_4	0%	80%
A_5	0%	100%
A_6	0%	100%
A_7	0%	100%
A_8	0%	100%
A_9	0%	25%
A_{10}	0%	100%
A_{11}	0%	100%
A_{12}	0%	100%
A_{13}	0%	100%
A_{14}	0%	60%
A_{15}	0%	30%
A_{16}	0%	90%
A_{17}	0%	80%
A_{18}	0%	75%
A_{19}	0%	100%
A_{21}	0%	100%
A_{23}	0%	80%
A_{24}	0%	35%
A_{25}	0%	100%
A_{26}	0%	90%
A_{27}	0%	100%
A_{28}	0%	100%
A_{29}	0%	80%
A_{30}	0%	100%
A_{31}	0%	70%
A_{32}	0%	100%
A_{33}	0%	60%
A_{35}	0%	80%
A_{36}	0%	100%
A_{37}	0%	100%
A_{38}	0%	100%
A_{39}	0%	90%
A_{40}	0%	90%

Fonte: Experimentação (2023).

Gráfico 13: Desempenho individual dos estudantes nos testes



Fonte: Experimentação (2023).

Os resultados positivos no pós-teste indicam um progresso significativo dos alunos em relação ao seu conhecimento prévio de trigonometria, demonstrando que eles foram capazes de assimilar os conceitos e aplicá-los com sucesso no contexto do teste. Assim, os bons resultados no pós-teste destacam a capacidade dos alunos de aprender e dominar os conceitos de trigonometria, e o potencial de alcançar um bom desempenho acadêmico quando são fornecidos os recursos e o suporte adequado. Destacamos que os alunos A_{20}, A_{22} e A_{34} não compareceram a aplicação do pós-teste, e por isso, não forneceram dados que possam indicar o seu desempenho.

Além disso, constatou-se um decrescimento do tempo na realização das atividades que compunham a Sequência Didática, conforme o quadro a seguir:

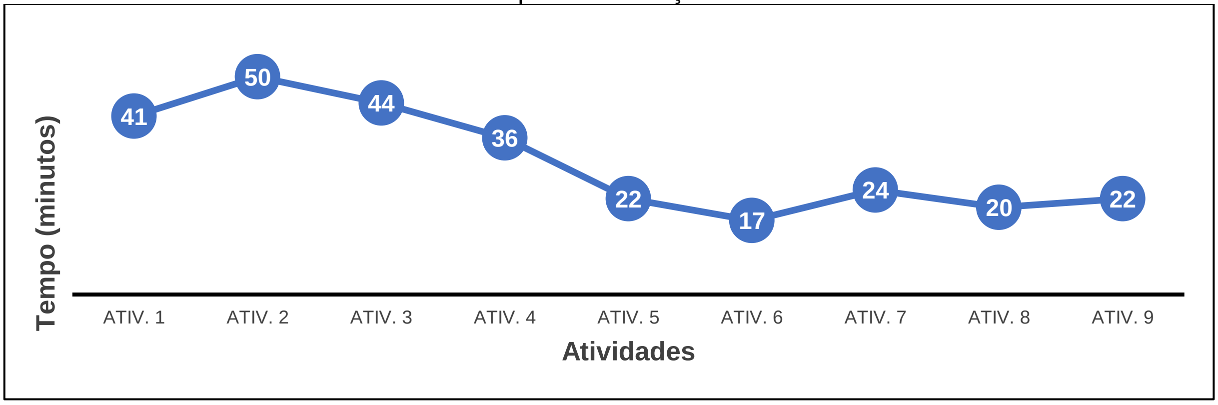
Quadro 84 - Tempo de realização das atividades de Conceituação e Redescoberta

Atividades	Tempo de Realização (minutos)
Atividade 1: Os catetos e a hipotenusa	41 minutos
Atividade 2: Hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente	50 minutos
Atividade 3: Seno de um ângulo no triângulo retângulo	44 minutos
Atividade 4: O Cosseno de um ângulo	36 minutos
Atividade 5: Tangente de um ângulo no triângulo retângulo	22 minutos
Atividade 6: Razão entre seno e cosseno no triângulo retângulo	17 minutos
Atividade 7: Relação entre seno e cosseno no triângulo retângulo	24 minutos
Atividade 8: Lei dos Senos	20 minutos
Atividade 9: Lei dos Cossenos	22 minutos

Fonte: Experimentação (2023).

Para aprimorar a representação do quadro anterior que descreve o tempo de realização das atividades, apresentamos a seguir um gráfico que visualmente ilustra as variações nos períodos de execução de cada atividade.

Gráfico 14: Tempo de realização das atividades



Fonte: Experimentação (2023).

A observação de que o tempo para realizar as atividades experimentais de matemática tende a diminuir durante a aplicação da sequência didática é um indicativo positivo do progresso dos alunos e da eficácia da abordagem de ensino. Conforme observado por Sá (1999), à medida que os estudantes superam as atividades, sua eficiência aumenta, destacando a recompensa posterior para o tempo investido no início do processo de aprendizado. Isso pode ser explicado por vários fatores relacionados ao aprendizado e à familiarização com as atividades. Dentre esses fatores destacamos 6 (seis) que foram observados durante o processo de experimentação:

1. Familiaridade com os Procedimentos: À medida que os alunos se familiarizaram com os procedimentos e etapas das atividades experimentais, eles se tornaram mais eficientes em seguir as instruções e executar as tarefas.

2. Domínio de Habilidades: Com a prática contínua, os alunos desenvolveram e aprimoraram as habilidades específicas necessárias para realizar as atividades, o que os levou a um desempenho mais rápido.

3. Conhecimento dos Conceitos: À medida que os alunos avançaram na sequência didática, eles adquiriram um melhor entendimento dos conceitos mais profundos relativos às atividades, o que os ajudou a tomar decisões mais precisas e realizar as tarefas de maneira mais eficaz.

4. Maior Confiança: À medida que os alunos ganharam confiança em suas habilidades e conhecimentos, eles se sentiram mais à vontade para abordar as atividades de forma mais ágil e assertiva.

5. Desenvolvimento de Estratégias: Com o tempo, os alunos desenvolveram estratégias pessoais para lidar com as atividades, otimizando seu tempo e recursos.

6. Redução da Ansiedade: À medida que os alunos se familiarizam com a sequência de atividades e ganham confiança em suas capacidades, a ansiedade em relação ao tempo diminuiu, permitindo um desempenho mais eficiente.

Portanto, essa tendência de redução no tempo para a realização das atividades é indicativa de que os alunos se adaptaram positivamente à abordagem de ensino, aprendendo com suas experiências anteriores e se tornando mais proficientes nas atividades experimentais. Isso sugere que a sequência didática alcançou seus objetivos de promover o aprendizado ativo, a aquisição de habilidades e a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. A seguir, apresentamos uma análise dos erros cometidos pelos estudantes na realização do pós-teste.

6.2. CARACTERÍSTICAS DAS CONCLUSÕES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

No contexto do processo de ensino e aprendizagem, é essencial reconhecer que os alunos passam por uma jornada contínua de desenvolvimento intelectual. Esta trajetória é caracterizada por uma série de desafios e conquistas que moldam sua compreensão e habilidades ao longo do tempo. As conclusões dos alunos em cada atividade dentro dessa sequência são indicativas do progresso que estão fazendo e das habilidades que estão adquirindo. Neste contexto, o quadro a seguir apresenta um resumo das características das conclusões apresentadas pelos estudantes ao longo da sequência didática.

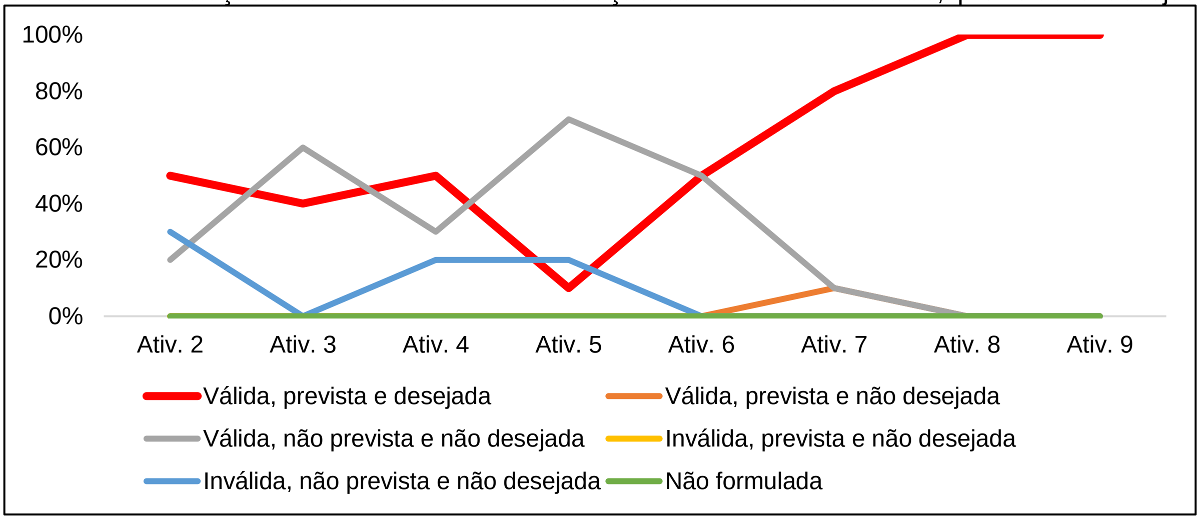
Quadro 85 - Resumo das características das conclusões apresentadas pelos alunos nas atividades 2 a 9

Características das Conclusões	**Atividades**							
	Ativ.2	Ativ.3	Ativ.4	Ativ.5	Ativ.6	Ativ.7	Ativi.8	Ativi.9
Válida, prevista e desejada	50%	40%	50%	10%	50%	80%	100%	100%
Válida, prevista e não desejada	0%	0%	0%	0%	0%	10%	0%	0%
Válida, não prevista e não desejada	20%	60%	30%	70%	50%	10%	0%	0%
Inválida, prevista e não desejada	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Inválida, não prevista e não desejada	30%	0%	20%	20%	0%	0%	0%	0%
Não formulada	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Fonte: Experimentação (2023).

Para exemplificar melhor a tabela anterior, o gráfico a seguir apresenta o percurso educacional dos estudantes, desde a Atividade 2 até a Atividade 9, revelando uma evolução notável em sua capacidade de elaborar conclusões válidas e alinhadas com as expectativas previstas e desejadas.

Gráfico 15: Evolução dos estudantes na elaboração de conclusões válidas, previstas e desejada



Fonte: Experimentação (2023).

O percurso educacional dos estudantes, desde a Atividade 2 até a Atividade 9, revela uma evolução notável em sua capacidade de elaborar conclusões válidas e alinhadas com as expectativas previstas e desejadas. Deste modo, o gráfico revela que ao longo da sequência didática, é possível observar uma notável evolução na capacidade dos alunos em elaborar conclusões válidas, previstas e desejadas. Neste texto, analisaremos essa jornada de aprendizado, destacando a progressão na qualidade das conclusões apresentadas pelos estudantes.

- **Atividade 2: O Início da Jornada:** Na Atividade 2, os alunos apresentaram 5 das 10 conclusões como válidas, previstas e desejadas, representando um sólido começo na sequência didática, evidenciando uma compreensão inicial dos conceitos. A presença de conclusões não previstas e não desejadas (20%) mostra que os alunos também estavam explorando diferentes abordagens e perspectivas, considerado um aspecto positivo da aprendizagem.
- **Atividade 3: Consolidação do Entendimento:** Na Atividade 3, apesar de algumas dificuldades na expressão escrita, 4 das 10 conclusões foram consideradas válidas, previstas e desejadas, sinalizando uma consolidação gradual do entendimento dos conceitos. As outras 6 conclusões, embora não previstas ou desejadas inicialmente, ainda foram consideradas válidas, o que demonstra uma abertura para diferentes interpretações.

- **Atividade 4: Progresso Evidente:** A Atividade 4 revela um progresso evidente. Das 10 conclusões avaliadas, a maioria (5 delas) foi considerada válida, prevista e desejada. Deste modo, uma parcela significativa dos alunos conseguiu atingir as metas estabelecidas, aplicando corretamente os conceitos e métodos esperados. No entanto, 3 conclusões foram classificadas como válidas, mas não previstas e não desejadas, ressaltando a diversidade nas abordagens e interpretações.
- **Atividade 5: Desafio e Aprendizado:** A Atividade 5 representou um desafio, com a maioria das conclusões válidas não se encaixando nas expectativas iniciais. Assim, isso evidencia a capacidade dos alunos de encontrar soluções aceitáveis, mesmo que diferentes das esperadas. Contudo, a presença de conclusões inválidas em alguns grupos destaca a importância da consolidação do conhecimento.
- **Atividade 6: Alcançando o Objetivo:** Na Atividade 6, todas as equipes apresentaram conclusões válidas, sendo 5 das 10 conclusões como válidas, previstas e desejadas. Além disso, a divisão igual entre conclusões válidas, previstas e desejadas, e conclusões válidas, não previstas e não desejadas, indica que o objetivo da atividade foi alcançado de forma consistente.
- **Atividade 7: Conquista Importante:** A observação de que todos os 10 grupos apresentaram conclusões como válidas na Atividade 7 é uma conquista importante. Neste sentido, esse resultado é um indicativo de que os alunos compreenderam e aplicaram com sucesso o conceito relacionado ao seno e cosseno em triângulos retângulos.
- **Atividades 8 e 9: Consistência e Maturidade:** Nas atividades finais, 8 e 9, a análise das conclusões registra um resultado notável e positivo, com todos os 10 grupos alcançando as metas estabelecidas, apresentando as 10 conclusões consideradas válidas, previstas e desejadas. Deste modo, as conclusões apresentadas pelos alunos em ambas as atividades, demonstram uma consistência e maturidade na aplicação dos conceitos nessas etapas finais da sequência didática.

Esse avanço reflete não apenas um domínio mais aprofundado dos conceitos envolvidos, mas também a capacidade dos estudantes de expressar suas ideias de maneira mais clara e concisa. Na Atividade 8, a afirmação dos estudantes do G6 de que, o “[...] seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo”, reflete exatamente o que Dante (2020, p. 30) define na Lei dos Senos, ou seja, “[...] as medidas de comprimento *a*, *b* e *c* dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente”.

Além disso, na Atividade 9, o G7 afirmou que “o quadrado de um dos lados do triângulo é igual a soma do quadrado dos outros lados do triângulo menos o dobro do produto desses lados multiplicado pelo cosseno do ângulo relacionado.” Esta conclusão reflete a definição de Dante (2020) para a Lei dos Cosseno:

> [...] o quadrado da medida de comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas de comprimento desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam. (DANTE, 2020, p.33).

A clareza na escrita é fundamental na matemática, pois permite uma comunicação eficaz de soluções e raciocínios. Portanto, a habilidade demonstrada pelos alunos nas atividades 8 e 9 indicam um progresso significativo em sua compreensão da Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, e na qualidade de sua escrita matemática.

6.3. CARACTERÍSTICAS DAS OBSERVAÇÕES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

A análise das observações sobre as atividades no decorrer da aplicação da sequência didática para o ensino de trigonometria revela informações importantes sobre a evolução dos alunos em relação ao entendimento e execução das atividades propostas. No quadro a seguir apresentamos um resumo das características das observações apresentadas pelos estudantes ao longo da sequência didática.

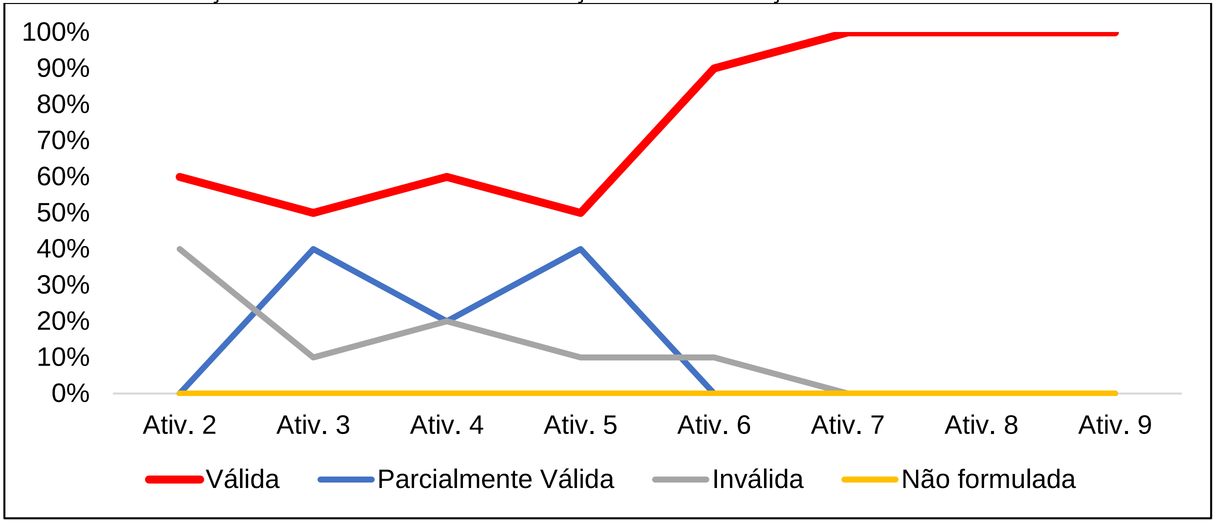
Quadro 86 - Resumo das características das observações apresentadas pelos alunos nas atividades 2 a 9

Características das Observações	**Atividades**							
	Ativ.2	Ativ.3	Ativ.4	Ativ.5	Ativ.6	Ativ.7	Ativi.8	Ativi.9
Válida	60%	50%	60%	50%	90%	100%	100%	100%
Parcialmente Válida	0%	40%	20%	40%	0%	0%	0%	0%
Inválida	40%	10%	20%	10%	10%	0%	0%	0%
Não formulada	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Fonte: Experimentação (2023).

A fim de proporcionar uma representação visual mais clara dos dados apresentados na tabela anterior, o gráfico a seguir ilustra a trajetória educacional dos estudantes, abrangendo desde a Atividade 2 até a Atividade 9. Essa representação visual destaca uma progressão significativa em sua habilidade de elaborar observações válidas ao longo do período analisado.

Gráfico 16: Evolução dos estudantes na elaboração das observações válidas



Fonte: Experimentação (2023).

O percurso educacional dos estudantes, do início da Atividade 2 até o desfecho na Atividade 9, evidencia uma notável evolução em sua habilidade de formular observações válidas. A análise dessas observações revela uma narrativa de aprendizado que merece destaque, pois de acordo com os resultados apresentados nas atividades, é possível perceber uma tendência clara de melhoria no desempenho dos alunos ao longo da sequência didática.

Neste sentido, no que tange às observações válidas, chama a atenção o padrão de consistência demonstrado pelos estudantes. As porcentagens, que variam de 50% a 100%, atestam que a grande maioria dos alunos foi capaz de assimilar o conteúdo e executar com êxito as atividades propostas à medida que a sequência didática avançava. De maneira particularmente significativa, a partir da Atividade 6, as porcentagens de observações válidas registram um notável crescimento, indicando um sólido entendimento e execução das tarefas.

Portanto, essa trajetória educacional, evidenciada pelo aumento nas observações válidas, ilustra de maneira persuasiva a importância de estratégias de ensino que se baseiam na progressão gradual do conhecimento. Os resultados obtidos reforçam a ideia de que os alunos podem se beneficiar significativamente de uma abordagem pedagógica estruturada, que permite a absorção progressiva de conceitos mais complexos. Além disso, a capacidade de elaborar observações válidas, refletida nas atividades, é essencial para o desenvolvimento crítico dos alunos, e a evidência de melhoria substancial nesse aspecto ressalta a eficácia do processo educacional.

6.4. ERROS COMETIDOS NO PÓS-TESTE

Ao desenvolver uma sequência didática sobre trigonometria no triângulo, é importante considerar os diferentes tipos de erros que os alunos podem cometer ao longo do processo. Esses erros podem surgir de diversas fontes, desde conceitos mal compreendidos à problemas na aplicação das fórmulas das relações trigonométricas. Identificar e compreender esses erros é crucial para ajustar as estratégias de ensino e criar um ambiente de aprendizagem mais eficaz.

Neste contexto, esta análise tem como objetivo explorar e avaliar os tipos de erros mais comuns que os alunos podem cometer durante a realização de uma sequência didática sobre o ensino de trigonometria no triângulo. Assim, revisitando os estudos acercas dos erros na resolução de problemas matemáticos, como por exemplo Spinillo *et al* (2016), assumimos, na presente pesquisa que, em síntese, esses erros podem ser agrupados, ao menos, em duas grandes classes: erro conceitual e erro procedimental.

Os erros conceituais estão relacionados ao entendimento equivocado dos conceitos. Isso ocorre quando os alunos não conseguem compreender corretamente as ideias, teorias ou princípios que estão sendo ensinados, ocasionando uma confusão sobre o significado e a aplicação dos conceitos-chave, que podem surgir a partir de interpretações errôneas, simplificações excessivas ou falta de conexão entre os conceitos. Os erros procedimentais, por outro lado, referem-se a falhas no processo ou na aplicação de procedimentos, passos ou métodos. Esses erros ocorrem quando os alunos não seguem as etapas corretas para realizar uma tarefa ou resolver um problema.

Neste sentido, consideraremos as seguintes características para cada tipo de erro cometido pelos estudantes, como delineado no quadro a seguir:

Classificação dos erros cometidos pelos estudantes

Erro Conceitual (EC)	**Erro Procedimental (EP)**
EC_1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente.	EP_1 – Erro de cálculo numérico.
EC_2 – Erro de interpretação dos dados fornecidos.	EP_2 – Erro de correspondência de ângulos.

Fonte: Experimentação (2023).

Após a classificação dos erros, o quadro a seguir apresenta em detalhes os dados relativos ao desempenho de todos os educandos que participaram deste experimento, incluindo informações sobre os tipos de erros, acertos (A) e questões não respondidas, isto é, em branco (B), segmentados por questão.

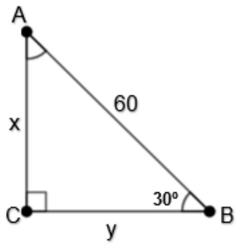
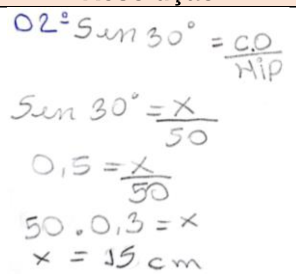
Quadro 87 - Resultado Geral dos Testes: Acertos, Tipos de Erros e Questões em Branco

Alunos	**Quest. 1**		**Quest. 2**		**Quest. 3**		**Quest. 4**		**Quest. 5**		**Quest. 6**		**Quest. 7**		**Quest. 8**		**Quest. 9**		**Quest. 10**	
	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste	Pré-Teste	Pós-Teste
A_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EP_2	B	EC_1	B	A	B	A	B	EC_2
A_2	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EC_2
A_3	B	A	B	EP_1	B	EC_2	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_4	B	A	B	EP_1	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_5	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_6	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_7	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_8	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_9	B	A	B	A	B	EC_1	B	EC_1	B	A	B	EC_2	B	EC_1	B	EP_2	B	EC_1	B	EP_1
A_{10}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{11}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{12}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{13}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{14}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EC_1	B	EC_1	B	EC_1	B	EC_1	B	A	B	A
A_{15}	B	A	B	EC_1	B	EC_2	B	EC_1	B	A	B	EC_1	B	A	B	EP_1	B	EP_2	B	EC_2
A_{16}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EP_2	B	A	B	A
A_{17}	B	A	B	A	B	EP_1	B	A	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{18}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EC_2	B	A	B	EC_1
A_{19}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{21}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{23}	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{24}	B	A	B	A	B	EC_2	B	EP_2	B	A	B	A	B	EP_1	B	EC_1	B	EP_1	B	EP_1
A_{25}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{26}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{27}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{28}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{29}	B	A	B	EP_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EP_2	B	A	B	A
A_{30}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{31}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	EC_2	B	A	B	A	B	EP_1	B	EC_2
A_{32}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{33}	B	A	B	A	B	EP_1	B	EC_1	B	EC_2	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{35}	B	A	B	A	B	EC_2	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{36}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{37}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{38}	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{39}	B	A	B	A	B	A	B	EC_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
A_{40}	B	A	B	A	B	EP_1	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A

Fonte: Experimentação (2023).

A seguir, apresentamos uma análise dos erros mais comuns cometido pelos estudantes participantes deste estudo, durante a realização do pós-teste. Destacamos que a questão 1 desta atividade apresentou 100% de acertos, e por isso, ela não fará parte desta análise.

Quadro 88 - Erro cometido na Questão 2 do Pós-Teste

<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 2</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 02) Determine as medidas dos catetos x e y do triângulo retângulo a seguir.
(Dados: Sen 30º = 0,50   Cos 30º = 0,86   Tg 30º = 0,57)

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
$sen30º = \frac{C.O}{Hip}$
$0{,}5 = \frac{x}{60}$
$x = 30$
$cos30º = \frac{C.A}{Hip}$
$0{,}86 = \frac{y}{60}$
$y = 51{,}6$
Observação: Após encontrar o valor de x = 30, o aluno poderia usá-lo, e desta forma encontrar o valor de y por meio da relação trigonométrica tangente.</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E_{29}</td><td>
</td><td>EP_1 – Erro de cálculo numérico.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

A questão envolve o cálculo das medidas dos catetos *x* e *y* de um triângulo retângulo, com dados fornecidos da relação trigonométrica para um ângulo de 30°. O erro do estudante E_{29} ocorreu ao multiplicar o seno de 30° por 60 e obter 15 como resultado, quando o valor correto deveria ser 30 para o lado correspondente a *x*. Deste modo, considerando que o aluno aplicou a operação correta do seno de 30°, mas obteve um valor não condizente com a solução correta ao multiplicá-lo por 60, o erro é de natureza procedimental, classificado como “EP_1 – Erro de cálculo numérico”, devido à aplicação incorreta dos procedimentos de cálculo.

Quadro 89 - Erro cometido na Questão 3 do Pós-Teste

<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 3</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 03) Uma rampa lisa, com medida de comprimento de 10 metros, faz com o plano horizontal um ângulo com medida de abertura de 30°. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se quantos metros verticalmente? (Dados: sen 30º = 0,50, cos 30º = 0,86, tg 30º = 0,57)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
$sen30º = \frac{C.O}{Hip}$
$0{,}5 = \frac{h}{10}$
$h = 5m$</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E_{40}</td><td>$sen 30^{o} = \frac{CO}{HIP}$
$\frac{0{,}5}{1} = \frac{x}{10}$
$x = 20$</td><td>EP_1 – Erro de cálculo numérico.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

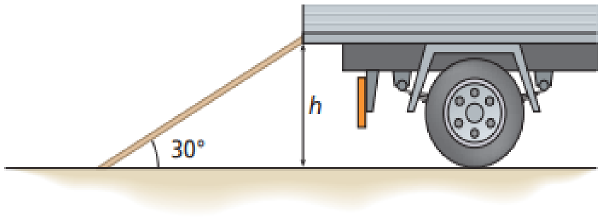
A questão 3 envolve uma rampa lisa de 10 metros de comprimento que forma um ângulo de 30° com o plano horizontal. A pergunta é sobre a altura vertical que uma pessoa se eleva ao subir a rampa inteira. Neste caso, a questão envolve a aplicação da relação trigonométrica seno, que está relacionada com ao ângulo 30º no triângulo.

O erro do aluno ocorreu ao multiplicar o seno de 30º por 10 e obter 20 como resultado, pois considerou a altura vertical *h = sen(30º) x 10 = 20m*, quando deveria resultar em *h = 5m*. Deste modo, ocorreu um erro de natureza procedimental classificado como “EP_1 – Erro de cálculo numérico”, porque está relacionado com a execução errada do procedimento matemático. Assim, apesar de ter um entendimento conceitual básico correto sobre as relações trigonométricas e sua aplicação, o estudante cometeu um erro no processo de cálculo ao multiplicar o seno de 30º por 10, demonstrando assim, uma aplicação errônea do procedimento matemático.

Quadro 90 - Erro cometido na Questão 4 do Pós-Teste

QUESTÃO 4

Questão 04) Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão por uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por *h*? *(Dados: sen 30º = 0,50, cos 30º = 0,86, tg 30º = 0,57)*



Resolução Possível

$$sen30^{\underline{o}} = \frac{C.O}{Hip}$$

$$0{,}5 = \frac{h}{3}$$

$$h = 1{,}5m$$

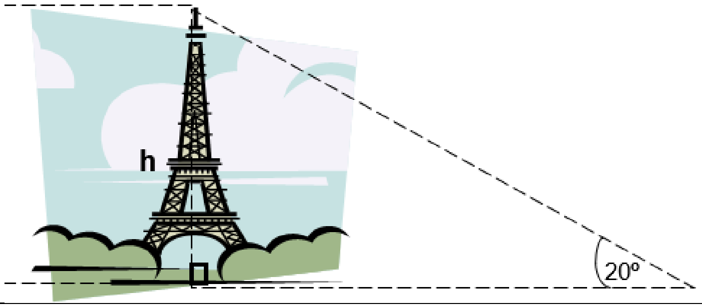
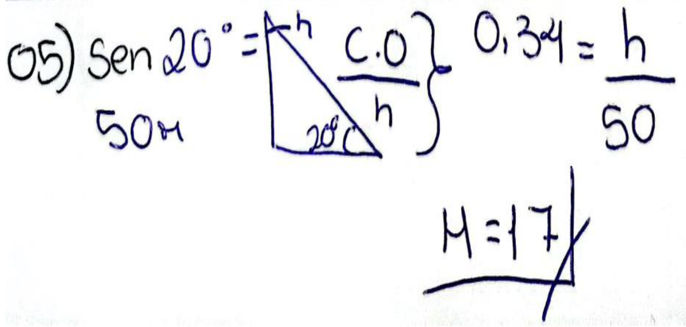
Estudante	Resolução	Erro(s)
E_{39}	4) tang 30° = h/3 0,577 = h/3 h = 1,731	EC_1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente.

Fonte: Experimentação (2023).

Na questão 4, o estudante E_{39} confundiu as propriedades das relações trigonométricas e utilizou a tangente, que relaciona o cateto oposto ao cateto adjacente em um triângulo triangulo, quando deveria ter usado o seno, que relaciona o cateto oposto à hipotenusa. Como resultado, a solução da questão e a interpretação dos resultados ficaram incorretos.

O erro cometido pelo aluno ao usar a tangente em vez do seno é de natureza conceitual, classificado como “EC_1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente”. Erros conceituais como esse podem surgir de uma compreensão insuficiente dos conceitos fundamentais, falta de atenção ao enunciado da questão ou confusão entre as relações trigonométricas.

Quadro 91 - Erro cometido na Questão 5 do Pós-Teste

<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 5</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 05) A uma distância de 50 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20º, como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre. (Dados: sen 20º = 0,34, cos 20º = 0,94 e tg 20º = 0,36)
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
$$tg20º = \frac{C.O}{C.A}$$
$$0,36 = \frac{h}{50}$$
$$h = 18m$$</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E26</td><td></td><td>EC_1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

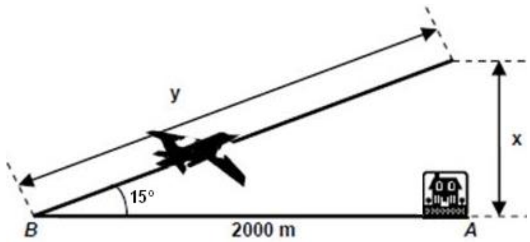
Na questão, o aluno deve determinar a altura da torre usando a informação da distância e do ângulo. A relação correta para esse cenário é a tangente, uma vez que a tangente do ângulo é definida como a razão entre o cateto oposto (altura da torre) e o cateto adjacente (distância até a torre).

Desta forma, como o aluno utilizou a relação seno para encontrar a altura da torre, cometendo um erro de natureza conceitual, classificado como “EC_1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente”, porque este não é o método apropriado para esse contexto. Assim, o aluno demonstrou não compreender corretamente a relação trigonométrica a ser aplicada para resolver o problema, usando a relação seno em vez da tangente.

Quadro 92 - Erro cometido na Questão 6 do Pós-Teste

QUESTÃO 6

Questão 06) Um avião levanta voo em **B** e sobe fazendo um ângulo constante de 15º com a horizontal. A que altura está e qual distância percorrida, quando alcançar a vertical que passa por um prédio **A** situado a 2000 m do ponto de partida? (Dados: sen 15º = 0,26, cos 15º = 0,97 e tg 15º = 0,27)



Resolução Possível

$$tg15º = \frac{C.O}{C.A} \qquad cos15º = \frac{C.A}{Hip}$$

$$0{,}27 = \frac{x}{2000} \qquad 0{,}97 = \frac{y}{2000}$$

$$x = 540m \qquad x = 1940m$$

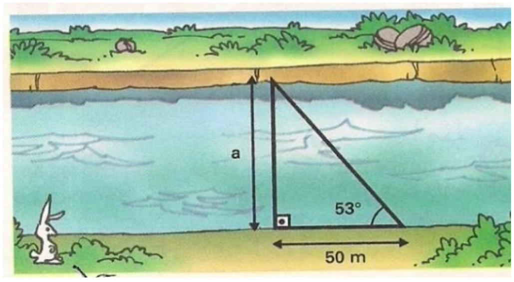
Observação: *Após encontrar o valor de x = 540, o aluno poderia usá-lo, e desta forma encontrar o valor de y por meio da relação trigonométrica seno, assim como, encontrando o valor de y poderia utilizá-lo para encontrar o valor correspondente a x.*

Estudante	Resolução	Erro(s)
E_{31}	$tg\ 15° = \frac{C.O}{C.A}$ $\frac{0{,}577}{1} = \frac{x}{2000}$ $x = 1154M$	EC_2 – Erro de interpretação dos dados fornecidos.

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta questão, o aluno utilizou a relação trigonométrica correta para calcular a altura do avião, mas usou a medida da tangente do ângulo de 30º em vez de 15º. Essa escolha equivocada o levou a um erro de natureza conceitual, classificado como "EC_2 – Erro de interpretação dos dados fornecidos". Assim, essa falha na interpretação dos dados fornecidos e na aplicação dos conceitos trigonométricos, ocasionou a um resultado incorretos para a altura do avião.

Quadro 93 - Erro cometido na Questão 7 do Pós-Teste

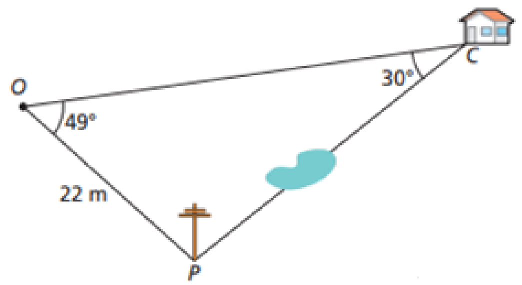
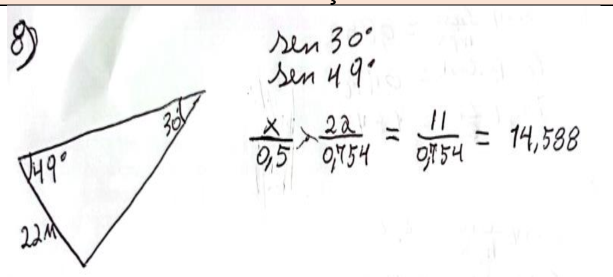
<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 7</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 07) Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo? (Use: sen 53º = 0,80; cos 53º = 0,60; tg 53º = 1,32)

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
$$tg53^{\circ} = \frac{C.O}{C.A}$$
$$1{,}32 = \frac{a}{50}$$
$$h = 66m$$</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E14</td><td>7º) $SEN\ 53^{\circ} = \frac{C.O}{HiP}$
$\frac{0,5}{1} = \frac{X}{50}$
X=25M</td><td>EC1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

Esta questão envolve a determinação da largura de um rio, com dados fornecidos das relações trigonométricas para um ângulo de 53º. No contexto da pergunta, a largura do rio é o cateto oposto ao ângulo, e o cateto adjacente é a distância horizontal entre os pontos de observação. Deste modo, relação trigonométrica definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo em um triângulo retângulo é dada pela tangente, no entanto, o aluno utilizou a relação seno.

Portanto, nesse caso, o aluno cometeu um erro de natureza conceitual, classificado como “EC1 – Erro de uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente”. Isso demonstra uma falta de compreensão dos conceitos da relação trigonométrica apropriadas para o problema em questão.

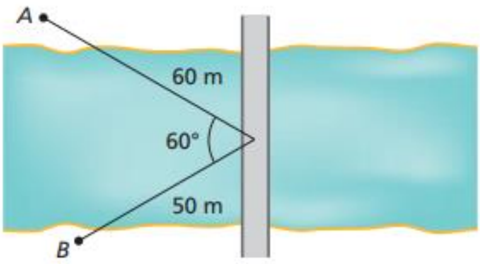
Quadro 94 - Erro cometido na Questão 8 do Pós-Teste

<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 8</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 08) Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Calcule aproximadamente o comprimento de fio necessário para unir o poste à casa.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
Nesta questão, vamos chamar a distância entre o poste e a casa de (d).
$$\frac{d}{sen49º} = \frac{C}{sen30º}$$
$$\frac{d}{0{,}75} = \frac{22}{0{,}5}$$
$$0{,}5.d = 16{,}5$$
$$d = 33m$$</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E16</td><td>
</td><td>EP2 – Erro de correspondência de ângulos.</td></tr>
</table>

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta questão, o aluno inverteu os ângulos, isto é, usou os ângulos errados para os lados correspondentes ao aplicar a lei dos senos. Com isso obteve uma relação indireta entre os lados do triângulo, levando-o a um cálculo dos comprimentos dos lados e, consequentemente, a um valor incorreto para o comprimento total do fio. Deste modo, o aluno cometeu um erro de natureza procedimental, classificado como "EP_2 – Erro de correspondência de ângulos", pois inverteu os ângulos ao relacioná-los com os lados correspondentes na lei dos senos.

Quadro 95 - Erro cometido na Questão 9 do Pós-Teste

<table>
<tr><th colspan="3">QUESTÃO 9</th></tr>
<tr><td colspan="3">Questão 09) De uma ponte, um engenheiro observa dois edifícios, um em cada margem de um rio. O edifício A está a 60 m de distância do engenheiro, e o edifício B, a 50 m. Considerando as medidas indicadas na figura abaixo, determine a menor distância entre os edifícios A e B.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolução Possível
Nesta questão, vamos chamar a distância AB de c.
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos(C)$
$c^2 = 60^2 + 50^2 - 2 * 60 * 50 * 0,5$
$c^2 = 3600 + 2500 - 3000$
$c^2 = 3100$
$\sqrt{c^2} = \sqrt{3100}$
$c \cong 55,68m$</td></tr>
<tr><th>Estudante</th><th>Resolução</th><th>Erro(s)</th></tr>
<tr><td>E_{24}</td><td>9. $a^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\cos A$
$a^2 = (60^2) + (50^2) - 2.B.C.\cos A$
$a^2 = 3.600 + 2.500 - 3.000$
$\boxed{a^2 = 3.100}$</td><td>EP_1 – Erro de cálculo numérico.</td></tr>
</table>

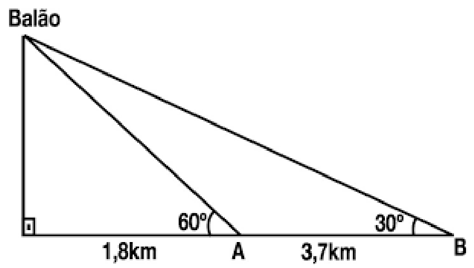
Fonte: Experimentação (2023).

Nesta questão o estudante forneceu o valor a^2 como resposta, que é o quadrado da menor distância entre os edifícios A e B. No entanto, a questão solicitava a menor distância real entre os edifícios, não o valor ao quadrado. Este erro de não aplicar a raiz quadrada em ambos os lados da equação, isto é, $\sqrt{a^2} = \sqrt{3100}$ na solução pela lei dos cossenos é um erro de procedimento, classificado como "EP_1 – Erro de cálculo numérico", devido à aplicação incorreta dos procedimentos de cálculo.

Quadro 96 - Erro cometido na Questão 10 do Pós-Teste

QUESTÃO 10

Questão 10) Duas pessoas avistaram um balão. A "**pessoa A"** estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a "**pessoa B**" estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a "pessoa A", e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?



Resolução Possível

Nesta questão, o aluno tinha duas maneiras para solucionar o problema: (1) utilizando o ângulo de 60º e a medida do cateto oposto igual a 1,8km ou (2) utilizando o ângulo de 30º e a medida do cateto oposto igual a 5,5km.

Solução 1

$$tg60º = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{1,8}$$

$$h \cong 1,8\sqrt{3}\ m$$

Solução 2

$$tg30º = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{5,5}$$

$$h \cong 1,8\sqrt{3}\ m$$

Estudante	Resolução	Erro(s)
E15	Q.10 $tg\ 30° = \frac{C.O}{C.A}$ $0,577 = \frac{h}{3,7}$ $h = 2,13$ Km	EC2 – Erro de interpretação dos dados fornecidos.

Fonte: Experimentação (2023).

Nesta questão, o erro do aluno ocorreu quando ele utilizou o ângulo de 30° para a pessoa B, mas escolheu a medida de lado errado na resolução do problema. Ao resolver para a pessoa B (ângulo de 30° e distância de 5,5 km), o aluno deveria ter utilizado a distância total, que é a soma da distância entre A e B (3,7 km) e a distância entre B e o início da altura do balão (1,8 km), ou seja, 5,5 km. No entanto, o aluno utilizou apenas o valor de 3,7 km. Neste sentido, o estudante cometeu um erro conceitual, classificado como EC2 – Erro de interpretação dos dados fornecidos.

6.5. TESTE EXATO DE FISHER

Para avaliar as possíveis influência dos fatores socioeconômicos no desempenho dos alunos no pós-teste, nesta pesquisa foi utilizado o teste Exato de Fisher com um nível de significância de 5%. Segundo Giolo (2018), esse nível de significância é fundamental para determinar a probabilidade de que qualquer associação ou diferença observada entre as variáveis seja puramente devido ao acaso. Portanto, ao estabelecer um limite de significância de 5%, buscaremos evidências estatísticas sólidas que indiquem que os fatores socioeconômicos desempenharam ou não, um papel significativo no desempenho dos alunos no pós-teste, ao mesmo tempo em que minimizamos as chances de conclusões precipitadas.

Vale destacar que a escolha por este método estatístico se deu, devido ao fato de, ao realizar a análise utilizando o Qui-Quadrado de Pearson, surgiram múltiplos valores esperados inferiores a 5, associados às células da tabela de contingência *s* x *r*. Nessas circunstâncias, segundo Giolo (2018), as probabilidades de interesse devem ser calculadas com base na distribuição hipergeométrica multivariada, da seguinte forma:

$$p = \frac{\prod_{i=1}^{s}(n_{i+})! \prod_{j=1}^{r}(n_{+j})!}{n! \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(n_{ij})!}.$$

Neste contexto, este estudo tem como objetivo analisar a possível influência dos dados socioeconômicos dos estudantes em seu desempenho no pós-teste. Para alcançar esse objetivo, utilizaremos o teste Exato de Fisher, uma ferramenta estatística adequada para situações com conjuntos de dados pequenos e baixos valores esperados, garantindo uma análise precisa e confiável. Neste sentido, para auxiliar na realização das análise utilizamos o *software* estatístico JAMOVI, que possui uma abordagem acessível, gratuita e de código aberto para realizar análises estatísticas rigorosas.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e a frequências nas aulas/atividades

Na tabela a seguir apresentamos a frequência dos alunos durante a aplicação da Sequência Didática, sendo P para os alunos presentes e F para os ausentes. Na última coluna são apresentados os percentuais da diferença de acertos de cada estudante nos testes (Pós-Teste) – (Pré-Teste).

Tabela 23: Frequência dos alunos e o percentual de acertos no pós-teste

Aluno(a)s	**Encontros**													**Diferença %**
	E1	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**	**E9**	**E10**	**E11**	**E12**	**E13**	
A_{1}	P	P	F	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	70%
A_{2}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{3}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{4}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{5}	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{6}	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{7}	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	100%
A_{8}	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{9}	P	P	F	F	F	P	F	P	P	F	F	F	P	25%
A_{10}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{11}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{12}	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{13}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{14}	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	60%
A_{15}	P	P	F	F	P	P	F	P	F	F	P	P	P	30%
A_{16}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	90%
A_{17}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{18}	P	F	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	75%
A_{19}	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{21}	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{23}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{24}	P	F	F	F	P	P	F	P	P	P	F	F	P	35%
A_{25}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{26}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	90%
A_{27}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{28}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{29}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{30}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{31}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	70%
A_{32}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{33}	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	60%
A_{35}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	80%
A_{36}	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	100%
A_{37}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{38}	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100%
A_{39}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	90%
A_{40}	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	90%

Fonte: Experimentação (2023).

Esses dados revelam que os estudantes com baixa frequência apresentaram os menores desempenhos no pós-teste, a exemplo dos alunos A_{9}, A_{15} e A_{24}, que apresentaram desempenho de 25%, 30% e 35%, respectivamente. Deste modo, pode-se inferir que a frequência nas aulas/atividades influenciou diretamente nos resultados do pós-teste desses alunos.

No entanto, para apresentar um resultado mais consistente realizamos uma análise utilizando o teste exato de Fisher com um nível de significância de 5% (α = 0,05). Para isso, levantamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a frequência nas aulas/atividades dos estudantes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a frequência nas aulas/atividades dos estudantes.

Tabela 24: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e a frequências nas aulas/atividades

Diferença de Notas nos Testes	Frequência na Atividades					
	100,00%	**92,31%**	**84,62%**	**61,54%**	**53,85%**	**Total**
2,5	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	0	1
3,5	0	0	0	0	1	1
6	0	2	0	0	0	2
7	1	0	1	0	0	2
7,5	0	0	1	0	0	1
8	7	0	0	0	0	7
9	4	0	0	0	0	4
10	10	8	0	0	0	18
Total	**22**	**10**	**2**	**1**	**2**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		>0.001
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher foi de $p < 0,001$. Deste modo, com um valor de $p < 0,001$ e um nível de significância de 5% (α = 0,05), rejeitamos a hipótese nula (H_0). Assim, com base na análise realizada, encontramos evidências estatísticas extremamente fortes para afirmar que existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a frequência nas aulas/atividades dos estudantes. O valor p obtido ($p < 0,001$) indica que a relação entre essas variáveis é altamente significativa, o que sugere que a frequência nas aulas/atividades está relacionada de forma significativa com a diferença de desempenho nos testes.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e o sexo/gênero dos estudantes

O propósito desta análise é investigar a possível relação entre a diferença de desempenho nos testes e o sexo/gênero dos estudantes. Vamos utilizar o teste exato de Fisher para determinar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas variáveis. Para isso, levantamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o sexo/gênero dos estudantes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o sexo/gênero dos estudantes.

Tabela 25: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e o sexo/gênero dos estudantes

Diferença de Notas nos Testes	Sexo/Gênero		
	Masculino	**Feminino**	**Total**
2,5	0	1	1
3	0	1	1
3,5	0	1	1
6	1	1	2
7	2	0	2
7,5	0	1	1
8	2	5	7
9	2	2	4
10	10	8	18
Total	**17**	**20**	**37**

Testes χ^2		
	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.611
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

Com um valor de $p = 0,611$ e um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), o valor p é muito maior do que o nível de significância ($p > 0,05$). Portanto, não rejeitamos a hipótese nula (H_0) com um nível de significância de 5%. Assim, com base na análise realizada, não encontramos evidências estatísticas suficientes para afirmar que existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o sexo/gênero dos estudantes, pois o valor p obtido (0,611) não atinge o nível de significância estabelecido de 0,05. Portanto, com base nos dados e no nível de significância escolhido, não podemos concluir que o sexo/gênero dos estudantes está relacionado de forma significativa com a diferença de desempenho nos testes.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e o gosto dos alunos pela matemática

Esta análise visa investigar a relação entre a diferença de desempenho nos testes e o gosto dos alunos pela matemática. Utilizaremos o valor de *p* obtido a partir do teste exato de Fisher para determinar se há uma associação significativa entre essas duas variáveis. Para isso, adotamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de nota nos testes e o gosto dos alunos pela matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de nota nos testes e o gosto dos alunos pela matemática.

Tabela 26: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e o gosto dos alunos pela matemática

	Gosto pela Matemática				
Diferença de Notas nos Testes	Suporto	Adoro	Não Gosto	Gosto Pouco	Total
2,5	0	1	0	0	1
3	0	1	0	0	1
3,5	0	0	0	1	1
6	2	0	0	0	2
7	1	0	1	0	2
7,5	0	0	0	1	1
8	1	0	2	4	7
9	1	0	0	3	4
10	6	2	2	8	18
Total	**11**	**4**	**5**	**17**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**P**
Teste Exato de Fisher		0.318
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor obtido a partir do teste exato de Fisher foi de $p = 0,318$, para um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$). Neste caso, com temos $p > \alpha$, isto é, o valor p é maior do que o nível de significância, não rejeitamos a hipótese nula (H_0). Assim, com base nos dados e no teste realizado, não há evidências estatísticas suficientes para concluir que existe uma associação significativa entre a diferença de nota nos testes e o gosto dos alunos pela matemática.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e o hábito de estudos fora da escola

Esta análise tem como objetivo examinar a relação entre a diferença de desempenho nos testes e o hábito de estudos dos estudantes fora da escola. Utilizaremos o valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher para determinar se há uma associação significativa entre essas duas variáveis. Para isso, adotamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o hábito de estudos dos estudantes fora da escola.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o hábito de estudos dos estudantes fora da escola.

Tabela 27: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e a frequência de estudos fora da escola

Diferença de Notas nos Testes	**Hábito de estudos fora da escola**					
	Não estudo fora da escola	Somente nos finais de semana	Todo dia	Só na véspera da prova	No período de prova	Total
2,5	0	1	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0	1
3,5	0	0	0	0	1	1
6	1	1	0	0	0	2
7	2	0	0	0	0	2
7,5	1	0	0	0	0	1
8	1	3	0	3	0	7
9	1	1	0	1	1	4
10	4	3	2	3	6	18
Total	**10**	**10**	**2**	**7**	**8**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.703
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor obtido a partir do teste exato de Fisher foi de $p = 0{,}703$, com o nível de significância (α) de 5% (0,05). Neste caso, com o valor $p > \alpha$, não rejeitaremos a hipótese nula (H_0). Assim, com base na análise estatística realizada, não há evidências estatísticas suficientes para afirmar que existe uma associação significativa entre as duas variáveis, pois o valor p obtido (0,703) não atinge o nível de significância estabelecido de 0,05. Portanto, com base nos dados e no nível de significância escolhido, não podemos concluir que o hábito de estudos fora da escola está relacionado de forma significativa com a diferença de desempenho nos testes.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e as sensações dos estudantes diante das avaliações de matemática

Esta análise tem como objetivo investigar a possível relação entre a diferença de desempenho nos testes e as sensações relatadas pelos estudantes diante das avaliações de matemática. Utilizaremos o valor de p obtidos do teste exato de Fisher para determinar se há uma associação significativa entre essas duas variáveis. Para isso, adotamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e nas sensações dos estudantes diante das avaliações de matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e nas sensações dos estudantes diante das avaliações de matemática.

Tabela 28: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e as sensações dos estudantes diante das avaliações de matemática

Diferença de Notas nos Testes	Sensações dos estudantes diante das Avaliações de Matemática				
	Tranquilo	**Com Medo**	**Com Calafrios**	**Com Raiva**	**Total**
2,5	1	0	0	0	1
3	1	0	0	0	1
3,5	0	1	0	0	1
6	0	1	1	0	2
7	1	1	0	0	2
7,5	0	1	0	0	1
8	3	1	2	1	7
9	2	2	0	0	4
10	7	7	3	1	18
Total	**15**	**14**	**6**	**2**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.956
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor obtido a partir do teste exato de Fisher foi de $p = 0,956$, isto é, $p > \alpha$. Neste sentido, não rejeitaremos a hipótese nula (H_0), pois o valor p de 0,956 é muito maior que o nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$). Portanto, com base na análise realizada, não há evidências estatísticas comprovadas para afirmar que existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e as sensações dos estudantes diante das avaliações de matemática.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e a escolaridade dos responsáveis masculinos pelos estudantes

Esta análise tem como objetivo investigar a relação entre a diferença de desempenho nos testes e o nível de escolaridade do responsável masculino pelos estudantes. Utilizaremos o valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher para avaliar a significância dessa associação. Para isso, adotamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a escolaridade do responsável masculino.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a escolaridade do responsável masculino.

Tabela 29: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e a escolaridade dos responsáveis masculinos pelos estudantes

	Escolaridade: Responsável Masculino					
Diferença de Notas nos Testes	**Não estudou**	**Fundamental Incompleto**	**Fundamental**	**Médio**	**Superior**	**Total**
2,5	0	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1
3,5	0	1	0	0	0	1
6	0	0	2	0	0	2
7	0	1	0	1	0	2
7,5	0	0	0	0	1	1
8	0	1	0	5	1	7
9	0	3	0	0	1	4
10	1	3	1	10	3	18
Total	**1**	**10**	**3**	**17**	**6**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.079
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher foi de 0,079. Neste caso, temos que $p > \alpha$, ou seja, o valor p (0,079) é maior do que o nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$). Por isso, com base na análise estatística realizada, não rejeitamos a hipótese nula (H_0), uma vez que não encontramos evidências estatísticas suficientes para afirmar que existe uma associação significativa entre as variáveis analisadas. Assim, não podemos concluir que a escolaridade do responsável masculino pelos estudantes está relacionada de forma significativa com a diferença de desempenho nos testes.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e a escolaridade dos responsáveis femininos pelos estudantes

A presente análise visa investigar a relação entre a diferença de desempenho nos testes dos estudantes e o nível de escolaridade do responsável feminino por esses estudantes. Utilizaremos o valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher para determinar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas variáveis. Além disso, adotaremos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a escolaridade do responsável feminino pelos estudantes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma diferença significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a escolaridade do responsável feminino pelos estudantes

Tabela 30: Contingência ente a diferença de desempenhos nos testes e a escolaridade dos responsáveis femininos pelos estudantes

	Escolaridade: Responsável Feminino					
Diferença de Notas nos Testes	**Não Estudou**	**Fundamental Incompleto**	**Fundamental**	**Médio**	**Superior**	**Total**
2,5	0	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1
3,5	0	0	1	0	0	1
6	0	1	0	0	1	2
7	0	1	0	1	0	2
7,5	0	0	0	0	1	1
8	0	0	1	5	1	7
9	0	1	0	3	0	4
10	0	2	2	13	1	18
Total	**0**	**6**	**4**	**23**	**4**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.095
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O valor de p obtido a partir do teste exato de Fisher foi de 0,095 para um nível de significância (α) de 5% (0,05). Assim, como temos um valor $p > \alpha$, não rejeitamos a hipótese nula (H_0). Neste sentido, com base na análise estatística realizada, não encontramos evidências estatísticas suficientes para afirmar que existe uma associação significativa entre essas variáveis, pois o valor p obtido (0,095) não atinge o nível de significância estabelecido de 0,05. Portanto, com base nos dados e no nível de significância, não podemos concluir que a escolaridade do responsável feminino está relacionada de forma significativa com a diferença de desempenho nos testes.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e a ocorrência de reprovação em anos escolares anteriores

A análise em questão tem como objetivo analisar a associação entre o desempenho dos alunos em testes e a ocorrência de reprovação em anos escolares anteriores. Para esta investigação, utilizaremos o valor-p obtido por meio do teste exato de Fisher para determinar se existe uma associação estatisticamente relevante entre essas duas variáveis. Para isso, levantamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a ocorrência de reprovação em anos escolares anteriores.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e a ocorrência de reprovação em anos escolares anteriores.

Tabela 31: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e a ocorrência de reprovação em anos escolares anteriores

	Reprovação em anos escolares anteriores		
Diferença de Notas nos Testes	**NÃO**	**SIM**	**Total**
2,5	1	0	1
3	1	0	1
3,5	0	1	1
6	2	0	2
7	1	1	2
7,5	1	0	1
8	5	2	7
9	3	1	4
10	17	1	18
Total	**31**	**6**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.153
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

Neste caso, o valor-p (0,153) é maior que o nível de significância de 5% (0,05), o que significa que não temos evidências suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base na análise do teste de Fisher realizado com um nível de significância de 5%, não encontramos evidências estatísticas suficientes para concluir que a diferença de notas nos testes está significativamente associada à reprovação prévia dos alunos.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e o auxílio nas atividades de matemática extraclasse

A presente análise tem como propósito examinar a possível relação entre o desempenho dos estudantes em testes e o auxílio nas atividades de matemática fora da sala de aula. Com o intuito de investigar essa relação, empregaremos o valor-p obtido através do teste exato de Fisher, com o objetivo de avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para orientar nossa investigação, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o auxílio que os alunos recebem nas atividades de matemática extraclasse.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o auxílio que os alunos recebem nas atividades de matemática extraclasse.

Tabela 32: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e o auxílio nas atividades de matemática extraclasse

Diferença de Notas nos Testes	Auxílio nas atividades de matemática extraclasse			
	Ninguém	**Família**	**Outros**	**Total**
2,5	0	1	0	1
3	1	0	0	1
3,5	1	0	0	1
6	2	0	0	2
7	2	0	0	2
7,5	1	0	0	1
8	6	1	0	7
9	3	0	1	4
10	10	3	5	18
Total	**26**	**5**	**6**	**37**

Testes χ²		
	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.772
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

O resultado do teste exato de Fisher gerou um valor-p ($p = 0,772$), maior que o nível de significância de 5% (0,05). Deste modo, em relação às hipóteses formuladas, não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Neste sentido, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre a diferença de desempenho nos testes e o auxílio que os estudantes recebem nas atividades de matemática extraclasse.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e a distração nas aulas de matemática

O objetivo desta análise consiste em investigar a potencial correlação entre a distração nas aulas de matemática e a diferença de desempenho nos testes. Para explorar essa relação, utilizaremos o valor-p derivado do teste exato de Fisher, buscando determinar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. A formulação das hipóteses orientará a análise, delineando as expectativas em relação aos possíveis vínculos entre a distração durante as aulas e o desempenho dos alunos nos testes.

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre a distração nas aulas de matemática e a diferença de desempenho nos testes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre a distração nas aulas de matemática e a diferença de desempenho nos testes.

Tabela 33: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e a distração nas aulas de matemática

Diferença de Notas nos Testes	Distração na Aula de Matemática			
	Às vezes	**Não**	**Sim**	**Total**
2,5	1	0	0	1
3	0	1	0	1
3,5	1	0	0	1
6	2	0	0	2
7	1	1	0	2
7,5	1	0	0	1
8	6	0	1	7
9	2	2	0	4
10	15	2	1	18
Total	**29**	**6**	**2**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.353
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,353 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao investigar a relação entre a distração nas aulas de matemática e a diferença de desempenho nos testes. Este valor-p sugere a ausência de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Assim, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que há uma associação significativa entre as variáveis em análise.

- Relação entre a diferença de desempenhos nos testes e o interesse em estudar matemática

O propósito desta análise é examinar a possível correlação entre o interesse em estudar matemática e a diferença de desempenho nos testes. Com o intuito de investigar essa relação, empregaremos o valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para orientar este estudo, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o interesse em estudar matemática e a diferença de desempenho nos testes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o interesse em estudar matemática e a diferença de desempenho nos testes.

Tabela 34: Contingência entre a diferença de desempenhos nos testes e o interesse em estudar matemática

Diferença de Notas nos Testes	Interesse em estudar matemática			
	Não	**Às vezes**	**Sim**	**Total**
2,5	0	1	0	1
3	0	0	1	1
3,5	0	1	0	1
6	0	2	0	2
7	1	0	1	2
7,5	0	0	1	1
8	1	4	2	7
9	0	2	2	4
10	0	10	8	18
Total	**2**	**20**	**15**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.330
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,330 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao explorar a relação entre o interesse em estudar matemática e a diferença de desempenho nos testes. Este valor-p sugere que não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre as variáveis analisadas.

- Relação entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes

O objetivo desta análise é explorar a potencial correlação entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes. Para investigar essa possível relação, utilizaremos o valor-p derivado do teste exato de Fisher, buscando avaliar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para guiar esta análise, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes.

Tabela 35: Contingência entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes

	Hábito de Estudo					
Gosto pela Matemática	**Não estudo fora da escola**	**Somente nos finais de semana**	**Todo dia**	**Só na véspera da prova**	**No período de prova**	**Total**
Suporto	4	1	1	3	2	11
Adoro	0	2	0	1	1	4
Não gosto	1	0	0	2	2	5
Gosto pouco	5	7	1	1	3	17
Total	**10**	**10**	**2**	**7**	**8**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.366
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela que o valor-p obtido no teste exato de Fisher é de 0,366, o que ultrapassa o nível de significância estabelecido em 5% ($\alpha = 0,05$). Esse resultado indica que não há diferenças estatisticamente significativas entre as variáveis em estudo. Portanto, com relação às hipóteses estabelecidas, não dispomos de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Nesse contexto, não podemos afirmar que há uma associação significativa entre o gosto pela matemática e os hábitos de estudo dos estudantes.

- Relação entre o gosto pela matemática e o auxílio nas atividades extraclasse

O propósito desta análise é examinar a potencial correlação entre o gosto pela matemática e o auxílio nas atividades extracurriculares. Para investigar essa possível relação, empregaremos o valor-p obtido a partir do teste exato de Fisher, com o intuito de avaliar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para orientar este estudo, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o gosto pela matemática e auxílio nas atividades extraclasse.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o gosto pela matemática e o auxílio nas atividades extraclasse.

Tabela 36: Contingência entre o gosto pela matemática e o auxílio nas atividades extraclasse

	Auxílio nas atividades de matemática extraclasse			
Gosto pela Matemática	**Ninguém**	**Família**	**Outros**	**Total**
Suporto	9	1	1	11
Adoro	2	2	0	4
Não gosto	3	1	1	5
Gosto pouco	12	1	4	17
Total	**26**	**5**	**6**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.369
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela que o valor-p obtido no teste exato de Fisher é de 0,369, ultrapassando o nível de significância estabelecido em 5% (α = 0,05). Esse resultado sugere a inexistência de diferenças estatisticamente significativas entre as variáveis em estudo. Assim, em relação às hipóteses formuladas, não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Dessa forma, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre o gosto pela matemática e o auxílio nas atividades extraclasse.

- Relação entre o gosto pela matemática e a distração nas aulas de matemática

O propósito desta análise é explorar a possível correlação entre o gosto pela matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Para investigar essa relação, empregaremos o valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Nesse sentido, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o gosto pela matemática e a distração nas aulas de matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o gosto pela matemática e a distração nas aulas de matemática.

Tabela 37: Contingência entre o gosto pela matemática e a distração nas aulas de matemática

	Distração na Aula de Matemática			
Gosto pela Matemática	**Às vezes**	**Não**	**Sim**	**Total**
Suporto	10	1	0	11
Adoro	3	1	0	4
Não gosto	4	0	1	5
Gosto pouco	12	4	1	17
Total	**29**	**6**	**2**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.626
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,626 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao examinar a relação entre o gosto pela matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Esse valor-p sugere a falta de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre as variáveis analisadas.

- Relação entre os hábitos de estudos e o auxílio nas atividades extraclasse

O objetivo desta análise é explorar a possível correlação entre os hábitos de estudo e o auxílio nas atividades extracurriculares. Para investigar essa relação em potencial, utilizaremos o valor-p derivado do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Com o propósito de guiar esta investigação, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre os hábitos de estudo e o auxílio nas atividades extracurriculares.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre os hábitos de estudo e o auxílio nas atividades extracurriculares.

Tabela 38: Contingência entre os hábitos de estudos e o auxílio nas atividades extraclasse

	Auxílio nas atividades de matemática extraclasse			
Hábito de Estudo	**Ninguém**	**Família**	**Outros**	**Total**
Não estudo fora da escola	8	0	2	10
Somente nos finais de semana	6	2	2	10
Todo dia	2	0	0	2
Só na véspera da prova	7	0	0	7
No período de prova	3	3	2	8
Total	**26**	**5**	**6**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.218
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística indica que o valor-p obtido no teste exato de Fisher é de 0,218, ultrapassando o nível de significância estabelecido em 5% ($\alpha = 0,05$). Este resultado sugere a ausência de diferenças estatisticamente significativas entre as variáveis em estudo. Assim, em relação às hipóteses estabelecidas, não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, não é possível afirmar que existe uma associação significativa entre os hábitos de estudo e o auxílio nas atividades extracurriculares.

- Relação entre os hábitos de estudo e a distração nas aulas de matemática

O propósito desta análise é investigar a potencial correlação entre os hábitos de estudo e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Para explorar essa relação, utilizaremos o valor-p derivado do teste exato de Fisher, buscando determinar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Com o intuito de orientar esta investigação, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre os hábitos de estudo e a distração nas aulas de matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre os hábitos de estudo e a distração nas aulas de matemática.

Tabela 39: Contingência entre os hábitos de estudo e a distração nas aulas de matemática

	Distração na Aula de Matemática			
Hábito de Estudo	**Às vezes**	**Não**	**Sim**	**Total**
Não estudo fora da escola	7	2	1	10
Somente nos finais de semana	8	2	0	10
Todo dia	1	1	0	2
Só na véspera da prova	6	0	1	7
No período de prova	7	1	0	8
Total	**29**	**6**	**2**	**37**

Testes χ^2

	Valor	**P**
Teste Exato de Fisher		0.650
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,650 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao examinar a relação entre os hábitos de estudo e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Esse valor-p sugere a falta de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre os hábitos de estudo e o nível de distração durante as aulas de matemática.

- Relação entre o gosto pela matemática e o interesse em estudar matemática

O propósito desta análise é examinar a possível correlação entre o gosto pela matemática e o interesse dos estudantes em estudar essa disciplina. Com o intuito de investigar essa relação, faremos uso do valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para orientar este estudo, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o gosto pela matemática e o interesse em estudar matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o gosto pela matemática e o interesse em estudar matemática.

Tabela 40: Contingência entre o gosto pela matemática e o interesse em estudar matemática

	Interesse em estudar matemática			
Gosto pela Matemática	**Não**	**Às vezes**	**Sim**	**Total**
Suporto	0	7	4	11
Adoro	0	2	2	4
Não gosto	2	3	0	5
Gosto pouco	0	8	9	17
Total	2	20	15	37

Testes χ^2

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.014
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p significativamente baixo de 0,014 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao examinar a relação entre o gosto pela matemática e o interesse em estudar a disciplina matemática. Essa descoberta indica fortes indícios de uma associação estatisticamente significativa entre essas variáveis. Portanto, rejeitamos a Hipótese Nula (H_0) e adotamos a Hipótese Alternativa (H_1), pois com base nos dados analisados, podemos inferir que há uma relação estatisticamente relevante entre as variáveis analisadas.

- Relação entre os hábitos de estudo e o interesse em estudar matemática

O propósito desta análise é examinar a possível correlação entre os hábitos de estudos e o interesse dos estudantes em estudar matemática. Com o intuito de investigar essa relação, faremos uso do valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para orientar este estudo, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre os hábitos de estudos e o interesse dos estudantes em estudar matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre os hábitos de estudos e o interesse dos estudantes em estudar matemática.

Tabela 41: Contingência entre os hábitos de estudos e o interesse em estudar matemática

	Interesse em estudar matemática			
Hábito de Estudo	**Não**	**Às vezes**	**Sim**	**Total**
Não estudo fora da escola	1	4	5	10
Somente nos finais de semana	0	5	5	10
Todo dia	0	1	1	2
Só na véspera da prova	1	5	1	7
No período de prova	0	5	3	8
Total	**2**	**20**	**15**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.748
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,748 no teste exato de Fisher, ao adotar um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), enquanto se explora a relação entre os hábitos de estudo e o interesse dos estudantes em estudar matemática. Esse resultado indica que não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não se pode afirmar, de maneira estatisticamente significativa, que exista uma associação entre os hábitos de estudos e o interesse dos estudantes em estudar matemática.

- Relação entre o auxílio nas atividades e o interesse em estudar matemática

O objetivo desta análise é explorar a potencial correlação entre o auxílio nas atividades e o interesse dos estudantes em estudar matemática. Para investigar essa relação, utilizaremos o valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Para guiar este estudo, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o auxílio nas atividades e o interesse dos estudantes em estudar matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o auxílio nas atividades e o interesse dos estudantes em estudar matemática.

Tabela 42: Contingência entre o auxílio nas atividades e o interesse em estudar matemática

Auxílio nas atividades de matemática extraclasse	Interesse em estudar matemática			
	Não	**Às vezes**	**Sim**	**Total**
Ninguém	2	14	10	26
Família	0	3	2	5
Outros	0	3	3	6
Total	**2**	**20**	**15**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		1.000
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 1,000 no teste exato de Fisher, utilizando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao investigar a relação entre o auxílio nas atividades e o interesse dos estudantes em estudar matemática. Esse dado indica a falta de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não se pode afirmar, de maneira estatisticamente significativa, que existe uma associação entre o auxílio que os estudantes recebem nas atividades e o seu interesse em estudar a disciplina matemática.

- Relação entre o auxílio nas atividades e a distração nas aulas de matemática

O objetivo desta análise consiste em examinar a possível correlação entre o auxílio nas atividades e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Para investigar essa relação, faremos uso do valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Formulamos as hipóteses para orientar esta investigação, delineando as expectativas em relação às possíveis relações:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o auxílio nas atividades e a distração nas aulas de matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa entre o auxílio nas atividades e a distração nas aulas de matemática.

Tabela 43: Contingência entre o auxílio nas atividades e a distração nas aulas de matemática

Auxílio nas atividades de matemática extraclasse	Distração na Aula de Matemática			
	Às vezes	**Não**	**Sim**	**Total**
Ninguém	19	6	1	26
Família	5	0	0	5
Outros	5	0	1	6
Total	**29**	**6**	**2**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.364
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,364 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), ao investigar a relação entre o auxílio nas atividades e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Este valor-p sugere a ausência de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H_0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre as variáveis analisadas.

- Relação entre o interesse em estudar matemática e a distração nas aulas de matemática

O propósito desta análise é explorar a potencial correlação entre o interesse em estudar matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Para investigar essa relação, utilizaremos o valor-p proveniente do teste exato de Fisher, buscando avaliar se há uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis. Com o intuito de orientar esta investigação, formulamos as seguintes hipóteses:

Hipótese Nula (H_0): Não há associação significativa entre o interesse em estudar matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática.

Hipótese Alternativa (H_1): Existe uma associação significativa o interesse em estudar matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática.

Tabela 44: Contingência entre o interesse em estudar matemática e a distração nas aulas de matemática

	Distração na Aula de Matemática			
Interesse nas aulas matemáticas	**Às vezes**	**Não**	**Sim**	**Total**
Não	1	0	1	2
Às vezes	18	2	0	20
Sim	10	4	1	15
Total	**29**	**6**	**2**	**37**

Testes χ²

	Valor	**p**
Teste Exato de Fisher		0.076
N	37	

Fonte: Experimentação (2023).

A análise estatística revela um valor-p de 0,076 no teste exato de Fisher, considerando um nível de significância de 5% (α = 0,05), ao examinar a relação entre o interesse em estudar matemática e a distração dos alunos nas aulas de matemática. Este valor-p sugere a falta de evidências estatísticas suficientes para rejeitar a Hipótese Nula (H0). Portanto, com base nos dados disponíveis, não podemos afirmar que existe uma associação significativa entre as variáveis em análise.

- Síntese do teste exato de Fisher

No quadro a seguir, apresentamos um resumo dos resultados do teste exato de Fisher (p) das variáveis analisadas:

Quadro 97 - Resumo do teste exato de Fisher

Variáveis	**Valor-p de Fisher**	**Hipótese**
Diferença de desempenho nos testes X Frequências dos alunos	$p < 0,001$	H_1
Diferença de desempenho nos testes X Sexo/Gênero	$p = 0,611$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Gosto pela matemática	$p = 0,318$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Frequência de estudos	$p = 0,703$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Sensações diante das avaliações	$p = 0,956$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Escolaridade: Responsável Masculino	$p = 0,079$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Escolaridade: Responsável Feminino	$p = 0,095$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Reprovação em anos/séries anteriores	$p = 0,153$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Auxílio nas atividades extraclasse	$p = 0,772$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Distração nas aulas de matemática	$p = 0,353$	H_0
Diferença de desempenho nos testes X Interesse em estudar matemática	$p = 0,330$	H_0
Gosto pela matemática X Hábitos de estudo dos estudantes	$p = 0,366$	H_0
Gosto pela matemática X Auxílio nas atividades extracurriculares	$p = 0,369$	H_0
Gosto pela matemática X Distração dos alunos nas aulas de matemática	$p = 0,626$	H_0
Hábitos de estudo X Auxílio nas atividades extracurriculares	$p = 0,218$	H_0
Gosto pela matemática X Interesse dos estudantes em estudar essa disciplina	$p = 0,014$	H_0
Hábitos de estudo X Distração dos alunos nas aulas de matemática	$p = 0,650$	H_0
Hábitos de estudos X Interesse dos estudantes em estudar matemática	$p = 0,748$	H_0
Auxílio nas atividades X Interesse dos estudantes em estudar matemática	$p = 1,000$	H_0
Auxílio nas atividades X Distração dos alunos nas aulas de matemática	$p = 0,364$	H_0
Interesse em estudar matemática X Distração dos alunos nas aulas de matemática	$p = 0,076$	H_0

Fonte: Experimentação (2023).

Os resultados estatísticos do teste exato de Fisher revelam que os fatores socioeconômicos não influenciar significativamente no desempenho desses estudantes nos testes. Deste modo, ao compararmos as notas dos alunos no pré-teste e pós-teste, podemos afirmar que após a aplicação da Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria no Triângulo houve um aumento significativo no desempenho dos estudantes, isso pode ser interpretado como um exemplo de que a Sequência Didática foi eficaz em atingir seus objetivos educacionais.

6.6. TESTE DE HIPÓTESES

Nesta subseção, apresentaremos os resultados do Teste de Hipótese com o objetivo de avaliar a eficácia da Sequência Didática (SD) sobre o Ensino de Trigonometria no Triângulo, por meio da análise da diferença nas notas dos testes. Assim, buscamos fornecer uma base objetiva para avaliar se a SD alcançou seu objetivo educacional, contribuindo assim para a melhoria contínua dos métodos de ensino e aprendizagem em um campo tão fundamental como a matemática.

Tabela 45: Diferença de desempenho entre as médias dos testes

Alunos	**NOTA no Pré-Teste** $(\mathbf{X})$	**NOTA no Pós-Teste** $(\mathbf{Y})$	**DIFERENÇA (d):** $(\mathbf{Y}-\mathbf{X})$	$\boldsymbol{d-\bar{D}}$	$(\boldsymbol{d-\bar{D}})^2$
A_{1}	0	7,0	7,00	-1,50	2,25
A_{2}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{3}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{4}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{5}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{6}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{7}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{8}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{9}	0	2,5	2,50	-6,00	36
A_{10}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{11}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{12}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{13}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{14}	0	6,0	6,00	-2,50	6,25
A_{15}	0	3,0	3,00	-5,50	30,25
A_{16}	0	9,0	9,00	0,50	0,25
A_{17}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{18}	0	7,5	7,50	-1,00	1
A_{19}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{21}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{23}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{24}	0	3,5	3,50	-5,00	25
A_{25}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{26}	0	9,0	9,00	0,50	0,25
A_{27}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{28}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{29}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{30}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{31}	0	7,0	7,00	-1,50	2,25
A_{32}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{33}	0	6,0	6,00	-2,50	6,25
A_{35}	0	8,0	8,00	-0,50	0,25
A_{36}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{37}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{38}	0	10,0	10,00	1,50	2,25
A_{39}	0	9,0	9,00	0,50	0,25
A_{40}	0	9,0	9,00	0,50	0,25
$\sum$	**0,0**	**314,5**	**314,5**	**-**	**152,5**
$\bar{X}$	**0,0**				
$\bar{Y}$	**8,5**				
$\bar{D}$	**8,5**				

Fonte: Experimentação (2023).

Assim, de acordo com os dados expressos na tabela anterior, temos que as médias de acertos no pré-teste ($\overline{\boldsymbol{X}}$), no pós-teste ($\overline{\boldsymbol{Y}}$) e da diferença entre e pré-teste e pós-teste ($\overline{\boldsymbol{D}}$) são respectivamente: 0,0; 8,5 e 8,5.

Diante disso, sendo $n = 37,$ no passo seguinte calculamos a Variância (s^2) da diferença das notas dos testes, seguindo a seguinte expressão:

$$\mathrm{s}^2 = \frac{\sum(d - \overline{D})^2}{n - 1}$$

Deste modo, temos que a variância da diferença das notas dos testes é:

$$\mathrm{s}^2 = \frac{152{,}5}{36} \cong 4{,}24$$

Em seguida, calculamos o Desvia Padrão (S) da diferença das notas dos testes, dada pela expressão:

$$\mathrm{S}_d = \sqrt{s^2}$$

Assim, o Desvia Padrão da diferença das notas dos testes é:

$$\mathrm{S}_d = \sqrt{4{,}2} \cong 2{,}06$$

O Erro Padrão da diferença entre as médias é dado por:

$$\mathrm{S}_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n - 1}}$$

Deste modo, temos que:

$$\mathrm{S}_{\bar{d}} = \frac{2{,}06}{\sqrt{37 - 1}}$$

$$\mathrm{S}_{\bar{d}} \cong 0{,}343$$

Diante disso, calculamos o valor de ***t*** dado por:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}}}{\mathbf{S}_{\bar{\boldsymbol{d}}}}$$

$$t = \frac{0 - 8{,}5}{0{,}343}$$

$$t = \frac{-8{,}5}{0{,}343}$$

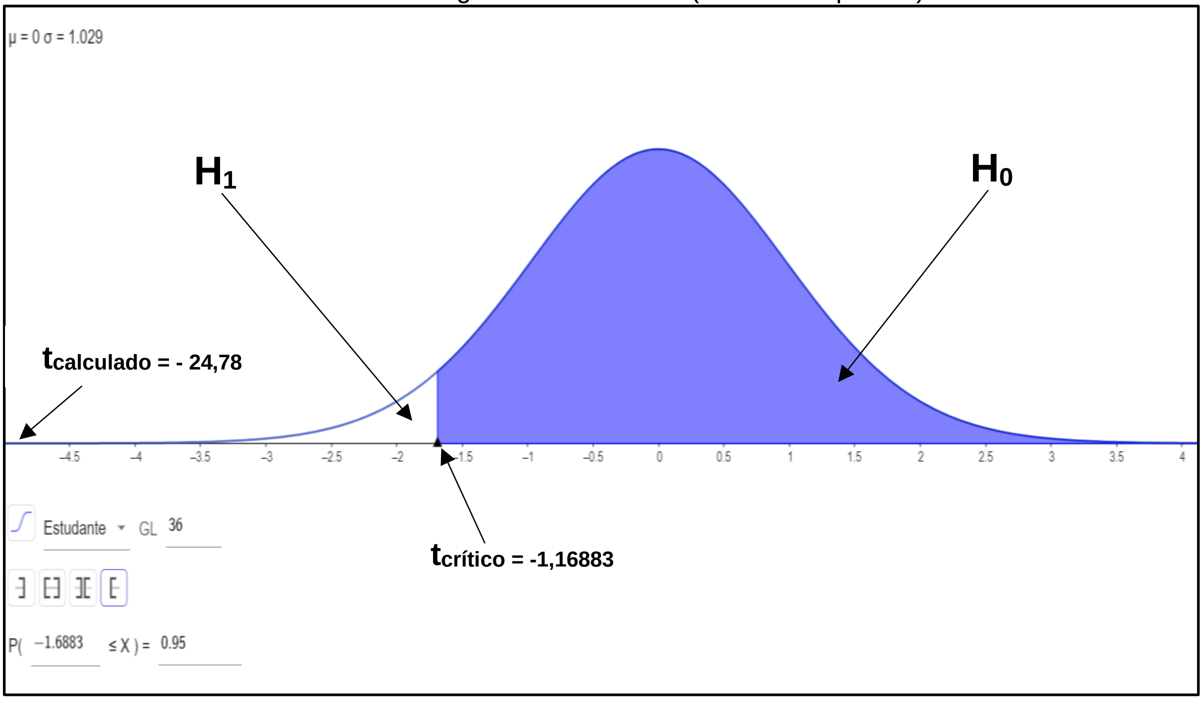
$$t = -24{,}78$$

A análise de diferença nas notas entre o pré-teste e pós-teste da Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria no Triângulo requer a formulação de hipóteses nulas e alternativas, a escolha de um nível de significância, a seleção do teste científico apropriado e a interpretação dos resultados obtidos. Deste modo, mediante os dados obtidos, o passo seguinte é testar as hipóteses. Para isso, tem-se que:

- **Hipótese Nula (H_0):** $\mu_1 \geq \mu_2$, isto é, não há diferença significativa entre as notas antes e depois da Sequência Didática;
- **Hipótese Alternativa (H_1):** $\mu_1 < \mu_2$, isto é, há diferença significativa entre as notas antes e depois da Sequência Didática.

Apresentaremos a seguir o gráfico de hipótese, uma ferramenta visual que auxilia na interpretação dos resultados de um teste estatístico. Este gráfico ilustra as distribuições das amostras sob a hipótese nula e permite identificar as regiões críticas, ajudando-nos a determinar se os resultados observados são estatisticamente experimentados. Neste contexto, utilizaremos o gráfico de hipótese para analisar a diferença nas notas do pré-teste e pós-teste da nossa sequência didática sobre trigonometria, a fim de avaliar sua eficácia educacional.

Gráfico 17: Diagrama t de Student (Teste de Hipótese)



Fonte: Experimentação (2023).

Este é um teste unilateral a esquerda com um nível de significância $\alpha = 0{,}05$ (5%). Neste caso, tem-se um valor calculado de t muito baixo, $t_{calculado}$ = *-24,78*, e um valor crítico de $t_{crítico}$ = *-1,6883*, com 36 graus de liberdade. Assim, dado que o valor calculado de t está muito além do valor crítico, significa que há evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula, pois o $t_{calculado} < t_{crítico}$, visto que *-24,78* < *-1,6883*. Em outras palavras, os dados estatísticos fornecem forte suporte para rejeitar a hipótese nula em favor da hipótese alternativa, indicando que há uma diferença significativa na média que está sendo testada.

Deste modo, podemos afirmar que a aplicação da Sequência Didática indica claramente uma melhoria no desempenho e na compreensão do tópico de trigonometria no triângulo. Além disso, sugere que os alunos assimilaram os conceitos ensinados e foram capazes de aplicar o conhecimento de forma mais eficaz no pós-teste em comparação com o que sabiam antes da sequência didática.

Portanto, essa melhoria no desempenho dos alunos é um indicador positivo da eficácia da sequência didática e do sucesso das estratégias de ensino empregadas. Isso sugere que os alunos conseguiram aprender e internalizar o conteúdo de maneira significativa, o que é o objetivo de qualquer processo de ensino.

6.7. CONFRONTO ENTRE AS ANÁLISES *A PRIORI* E *A POSTERIORI*

A análise da validação de uma sequência didática é um passo essencial no processo de ensino, garantindo que o conteúdo ministrado seja eficaz e atenda aos objetivos educacionais. No contexto específico do ensino de trigonometria no triângulo, essa validação se torna ainda mais relevante, pois a compreensão adequada desse tópico é fundamental para diversos campos da matemática e das ciências. Neste contexto, a validação ocorre através do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades, permitindo uma avaliação cuidadosa do planejamento e da eficácia das estratégias pedagógicas.

No quadro a seguir, apresentamos o confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori* como parte do processo de validação da sequência didática. Essa comparação entre nossas expectativas e os resultados reais obtidos após a implementação das atividades nos permite aprimorar continuamente a abordagem de ensino, a fim de garantir que os objetivos educacionais sejam alcançados.

Quadro 98 - Validação da Sequência Didática

Atividade	Análise a priori	Análise a posteriori	Validação
1	Os alunos deverão analisar os triângulos retângulos presentes no quadro de triângulo 1, e identificar os lados (catetos e hipotenusa) de cada triângulo e suas respectivas medidas. Ao final, espera-se que os estudantes compreendam que os lados de um triângulo retângulo que formam um ângulo de 90° são denominados de catetos, e que o lado oposto ao ângulo de 90° de um triângulo retângulo é denominado de hipotenusa.	Após a realização da atividade proposta, observamos que os alunos conseguiram analisar os triângulos retângulos e identificar os catetos e a hipotenusa de cada triângulo, bem como suas medidas. Isso indica que a tarefa foi compreendida e executada com sucesso. Além disso, durante a atividade, houve uma participação ativa dos alunos. Eles estavam envolvidos na análise dos triângulos e fazendo perguntas para esclarecer dúvidas. Isso demonstra um interesse genuíno em compreender os conceitos relacionados aos triângulos retângulos. O uso do quadro de triângulo 1 como recurso visual foi eficaz na explicação dos conceitos. Os alunos puderam visualizar os triângulos retângulos, o que facilitou a compreensão dos termos "catetos" e "hipotenusa" em um contexto prático. No final da atividade, durante a discussão em sala de aula, foi possível verificar que a maioria dos alunos compreendeu a definição dos lados de um triângulo retângulo e sua nomenclatura. Portanto, a atividade teve um bom desempenho global, com os alunos demonstrando compreensão dos conceitos-chave.	**Positiva**
2	Os alunos deverão realizar os procedimentos solicitados e preencher o quadro com os dados obtidos. Assim, espera-se que ao analisar os dados, os estudantes compreendam, internalizem e concluam que, independentemente dos valores dos lados, um triângulo é retângulo quando satisfaz ao teorema de Pitágoras, ou seja, o maior lado (hipotenusa) elevado ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos dois lados menores (catetos), isto é, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ Desta forma, acreditamos que os alunos classificarão de forma correta a classificação dos triângulos quanto aos ângulos (retângulo, obtusângulo ou acutângulo).	Após a realização da atividade em que os alunos seguiram os procedimentos solicitados e preencheram o quadro com os dados obtidos, observou-se que eles conseguiram compreender e internalizar o conceito fundamental da trigonometria relacionado ao teorema de Pitágoras. Este teorema estabelece que, independentemente dos valores dos lados, um triângulo é retângulo quando satisfaz à condição em que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. Essa compreensão é essencial para a classificação dos triângulos quanto aos ângulos, distinguindo-os em	**Positiva**

		retângulos (com um ângulo de 90°), obtusângulos (com um ângulo maior que 90°) ou acutângulos (com todos os ângulos menores que 90°). A atividade proporcionou aos alunos a oportunidade de explorar e aplicar o teorema de Pitágoras de forma prática, levando à conclusão de que esse teorema é um critério fundamental para identificar triângulos retângulos. Portanto, a atividade foi eficaz em auxiliar os alunos a compreenderem e aplicarem o teorema de Pitágoras para classificar corretamente os triângulos quanto aos ângulos. Essa compreensão é valiosa, pois permite que os alunos utilizem essa ferramenta matemática em diversos contextos para resolver problemas e analisar triângulos em suas características geométricas.	
3	Para iniciar a atividade 3, apresentamos uma questão motivadora aos estudantes, para que determinem a altura de uma rampa. Inicialmente, espera-se que os alunos não conseguirão respondê-lo, pois trabalhamos com a hipótese de que os estudantes desconhecem a relação da razão entre o cateto oposto ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo. Em seguida, os alunos receberão uma atividade, composta por um quadro a ser preenchido com os dados obtidos, acompanhado de outro quadro contendo 12 triângulos retângulos. Posteriormente deverão registrar os procedimentos conforme foram solicitados. Nesta etapa, espera-se que os estudantes não apresentem dificuldades quanto a compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento do quadro com os dados obtidos. Além disso, espera-se que os alunos compreendam que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, ambos para o ângulo de 30º, será o valor constante de 0,5; que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa para o ângulo de 45º, será sempre um valor constante igual a 0,707, e a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, do ângulo de 60º é igual a constante 0,866.	Após a conclusão da atividade 3, os alunos apresentaram diversas experiências e aprendizados. Inicialmente, ao serem apresentados à questão motivadora de determinar a altura de uma rampa, eles demonstraram dificuldades em encontrar uma resposta imediata. Isso estava de acordo com a hipótese de que os alunos desconheciam a relação entre o cateto oposto ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo retângulo. Esse desafio inicial despertou a curiosidade e o interesse dos alunos em compreender o conceito por trás da questão. Em seguida, ao receberem a atividade com os quadros para preencher e os 12 triângulos retângulos. A maioria deles não encontrou dificuldades significativas na compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento dos quadros com os dados obtidos. Isso proporcionou uma base sólida para o desenvolvimento dos conceitos subsequentes. A atividade levou os alunos a explorar as razões entre o cateto oposto e a hipotenusa para ângulos específicos, como 30º, 45º e 60º. Com o tempo, ficou claro para a maioria dos alunos que essas razões eram constantes, ou seja, 0,5 para 30º, 0,707 para 45º e 0,866 para 60º.	**Positiva**

	Portanto, após a observância dos padrões de regularidade, ao retornar ao problema introdutório, os alunos conseguirão apresentar a resposta esperada para a questão motivadora.	À medida que os alunos internalizaram esses conceitos, voltaram à questão motivadora inicial sobre a determinação da altura da rampa. Agora, com a compreensão das razões e da relação entre os catetos e a hipotenusa para os ângulos específicos, eles conseguiram apresentar a resposta esperada para o problema. Isso demonstrou como a atividade foi eficaz em auxiliar os alunos a adquirir um novo conhecimento matemático e aplicá-lo na resolução de problemas práticos.	
4	Acreditamos que os estudantes apresentarão dificuldades para solucionar o problema, uma vez que partimos da hipótese de que alunos desconhecem a relação da razão entre o cateto adjacente ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo. Posteriormente, apresentaremos aos estudantes uma atividade composta por um quadro a ser preenchido com os dados obtidos, acompanhada de um quadro de triângulos (12 triângulos retângulos). Em seguida deverão registrar os procedimentos conforme os procedimentos solicitados. Nesta fase, espera-se que os educandos não apresentem dificuldades quanto a compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento da tabela. Por conseguinte, ao final da atividade, esperamos que os alunos compreendam que a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, ambos para o ângulo 30º, será o valor constante de 0,866; que a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa para o ângulo de 45º, será sempre um valor constante igual a 0,707, e a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, do ângulo de 60º é igual a constante 0,5. Desta forma, ao retornar ao problema inicial, espera-se que os alunos apresentem corretamente o valor referente ao tamanho do cabo de aço.	Após a conclusão da atividade, foi observado que os estudantes enfrentaram desafios significativos no início do processo. Conforme previsto, eles apresentaram dificuldades em solucionar o problema inicial que envolvia a determinação do tamanho do cabo de aço, devido à hipótese inicial de que desconheciam a relação da razão entre o cateto adjacente ao ângulo indicado e a hipotenusa do triângulo. No entanto, quando foram apresentados à atividade composta por um quadro para preenchimento de dados e um conjunto de 12 triângulos retângulos, os estudantes se beneficiaram da estrutura organizada. Nessa etapa, eles não encontraram dificuldades significativas na compreensão dos elementos dos triângulos e no preenchimento da tabela. Isso demonstrou que a abordagem instrucional da atividade foi eficaz na criação de uma base sólida para o desenvolvimento dos conceitos subsequentes. A atividade levou os alunos a explorar as razões entre o cateto adjacente e a hipotenusa para ângulos específicos, como 30º, 45º e 60º. Com o tempo, ficou claro para a maioria dos estudantes que essas razões eram constantes, ou seja, 0,866 para 30º, 0,707 para 45º e 0,5 para 60º. Essa regularidade nas razões trigonométricas ajudou os alunos a compreender a relação entre esses ângulos e as razões correspondentes.	**Positiva**

		Ao final da atividade, a expectativa era que os alunos compreendessem as relações das razões trigonométricas e pudessem aplicá-las para resolver o problema inicial de determinar o tamanho do cabo de aço. Com a compreensão dessas relações, os alunos foram capazes de apresentar corretamente o valor referente ao tamanho do cabo de aço. Isso demonstrou como a atividade foi eficaz em auxiliar os estudantes a adquirir um novo conhecimento matemático e aplicá-lo na resolução de problemas práticos.	
5	Assim como nas atividades anteriores, iniciamos a atividade 5 com uma questão motivadora. Desta vez, com o objetivo de introduzir a relação trigonométrica tangente. Em virtude deste conteúdo ser algo novo para os estudantes, possivelmente apresentarão dificuldades para solucionar a questão, pois ainda desconhecem a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Após a execução, pelos estudantes, dos procedimentos solicitados na atividade, espera-se que os alunos compreendam que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, ambos para o ângulo 30º, será o valor constante 0,577; para o ângulo de 45º será o valor 1 e para o ângulo de 60º é igual a constante 1,732. Desta forma, ao retornar a questão inicial, acreditamos que os alunos apresentarão corretamente a solução do problema, conforme fora solicitado.	Após a realização da atividade 5, foi observado que os estudantes enfrentaram desafios iniciais devido à introdução de um novo conteúdo, a relação trigonométrica tangente, que era desconhecido para eles. Como previsto, os estudantes apresentaram dificuldades em solucionar a questão motivadora no início da atividade, principalmente porque ainda não estavam familiarizados com a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. No entanto, à medida que os estudantes seguiram os procedimentos solicitados na atividade, eles começaram a compreender a relação entre o cateto oposto e o cateto adjacente para ângulos específicos, como 30º, 45º e 60º. Ao longo do processo, ficou claro para a maioria dos estudantes que essas razões eram constantes: 0,577 para 30º, 1 para 45º e 1,732 para 60º. Essa regularidade nas razões trigonométricas ajudou os alunos a compreender a relação entre esses ângulos e as razões correspondentes. Ao retornarem à questão inicial após a exploração dessas relações trigonométricas, a expectativa era que os alunos pudessem apresentar corretamente a solução do problema. Com a compreensão dessas relações, os alunos foram capazes de resolver a questão motivadora de maneira adequada, demonstrando assim a assimilação do novo conteúdo e sua aplicação prática.	**Positiva**
6	Os alunos deverão calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos indicados em cada figura. Em seguida, calcular a razão entre os valores encontrados para o seno e cosseno. Ao	Após a conclusão da presente atividade, foi observado que os alunos seguiram os procedimentos solicitados, calculando o seno, cosseno e tangente dos ângulos	**Positiva**

	realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com dados obtidos. Espere-se que os estudantes, ao analisarem os dados e realizarem as comparações, concluirão que o valor da tangente de um ângulo será igual ao valor da razão (divisão) entre seno e cosseno deste mesmo ângulo. Desta forma, ao retornarem à resolução da questão motivadora os alunos encontrão a resposta correta para o problema.	indicados em cada figura e, em seguida, calculando a razão entre os valores encontrados para o seno e cosseno. Ao analisarem os dados e realizarem comparações, muitos deles chegaram à conclusão de que o valor da tangente de um ângulo é igual ao valor da razão (divisão) entre o seno e o cosseno deste mesmo ângulo. Essa compreensão foi alcançada por meio da exploração prática dos valores trigonométricos e da análise das relações entre eles. À medida que os alunos realizaram os cálculos e preencheram o quadro com os dados obtidos, começaram a perceber a regularidade de que a tangente de um ângulo era igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo. Isso reflete a eficácia da abordagem instrucional utilizada na atividade, que permitiu aos estudantes explorar conceitos trigonométricos de forma prática e visual, levando à compreensão da relação entre tangente, seno e cosseno. Essa compreensão é fundamental para a resolução de problemas trigonométricos e demonstra como a exploração e análise de dados podem levar a *insights* conceituais significativos. Portanto, ao retornarem à resolução da questão motivadora, os alunos estavam preparados para encontrar a resposta correta para o problema.	
7	Ao realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com os dados obtidos, espere-se que os estudantes ao analisarem estes resultados e realizarem as comparações, compreenderão o conceito do Teorema Fundamental da Trigonometria, que garante que a soma entre o quadrado do seno e o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo é igual a 1 (um).	Após a conclusão da presente atividade, observou-se que os estudantes, ao seguir os procedimentos solicitados e preencherem o quadro com os dados obtidos, começaram a analisar esses resultados e realizar comparações. Conforme progrediram nesse processo, muitos deles demonstraram compreender o conceito do Teorema Fundamental da Trigonometria, que estabelece que a soma entre o quadrado do seno e o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo é igual a 1 (um). Essa compreensão foi alcançada por meio da observação e análise dos dados coletados durante a atividade. À medida que os estudantes exploraram as relações	**Positiva**

		trigonométricas e compararam os valores do seno e do cosseno para diferentes ângulos, começaram a reconhecer a regularidade de que a soma dos quadrados dessas razões era sempre igual a 1. Isso reflete a eficácia da abordagem instrucional utilizada na atividade, que permitiu aos estudantes explorar conceitos trigonométricos de forma prática e visual, levando à compreensão do Teorema Fundamental da Trigonometria. Essa compreensão é fundamental para o domínio da trigonometria e sua aplicação em diversos contextos matemáticos.	
8	Iniciaremos a atividade com uma questão motivadora, onde os estudantes deverão calcular o valor referente ao tamanho de uma ponte que será construído sobre um rio. Acreditamos que os alunos não conseguirão resolver de forma correta tal problema, pois o conhecimento que eles têm ainda está muito limitado as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Após a realização da atividade proposta com todos os procedimentos solicitados, espera-se que os alunos compreendam que a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. Além disso, com base na análise dos dados, os alunos deverão concluir que em um mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante. No final, ao retornarem para questão motivadora, os estudantes conseguirão resolvê-la de forma correta sem apresentar dificuldades.	Após a conclusão da atividade proposta, foi observado que, inicialmente, os estudantes enfrentaram desafios significativos ao tentar resolver a questão motivadora, que envolvia o cálculo do tamanho de uma ponte a ser construída sobre um rio. Esses desafios eram esperados, uma vez que os alunos ainda tinham conhecimento limitado das relações trigonométricas em triângulos retângulos. No entanto, ao seguirem os procedimentos solicitados na atividade e realizarem os cálculos propostos, os estudantes começaram a compreender a relação do seno de um ângulo com a medida do lado oposto a esse ângulo. Por meio da análise dos dados e das relações trigonométricas exploradas durante a atividade, os alunos foram capazes de concluir que, em um mesmo triângulo, a razão entre o valor de um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é sempre constante. Essa compreensão foi essencial para a resolução adequada da questão motivadora inicial. Com a aplicação das relações trigonométricas aprendidas, os estudantes conseguiram resolver o problema de calcular o tamanho da ponte sobre o rio de forma correta e sem apresentar dificuldades.	**Positiva**

		Isso demonstra como a atividade foi eficaz em auxiliar os alunos a adquirir um novo conhecimento trigonométrico e aplicá-lo na resolução de problemas práticos. A exploração conceitual e a análise de dados desempenharam um papel fundamental na construção do entendimento dos alunos sobre as relações trigonométricas em triângulos quaisquer.	
9	A relação entre a medida dos lados de um triângulo e o cosseno de um dos seus ângulos, denominada lei dos cossenos, permite descobrir a medida de um dos lados de um triângulo qualquer quando é conhecida a medida de outros dois lados e o ângulo oposto ao lado que se quer descobrir. Assim, ao realizarem os procedimentos solicitados na presente atividade e preencherem o quadro com os dados obtidos, espere-se que os estudantes ao analisarem os dados, compreendam, sem dificuldades, a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer. Desta forma, os alunos deverão concluir que o quadrado da medida de um dos lados de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.	Após a conclusão da presente atividade, observou-se que os estudantes seguiram os procedimentos solicitados, preenchendo o quadro com os dados obtidos e explorando a relação entre as medidas dos lados de um triângulo e o cosseno de um dos seus ângulos, conhecida como lei dos cossenos. À medida que analisaram os dados coletados, muitos estudantes compreenderam a relação sem dificuldades. A atividade permitiu que os alunos explorassem de forma prática a lei dos cossenos, que estabelece que o quadrado da medida de um dos lados de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam. Essa relação tornou-se evidente à medida que os estudantes realizaram os cálculos e preencheram o quadro com os dados correspondentes. Essa compreensão é fundamental para a resolução de problemas que envolvem triângulos em situações onde as medidas dos lados e ângulos são parciais, permitindo que os alunos calculem as medidas ausentes com base na lei dos cossenos. A atividade proporcionou uma oportunidade prática para os alunos explorarem e internalizarem essa relação trigonométrica essencial, o que os preparou para futuras aplicações desse conceito matemático.	**Positiva**

Fonte: Experimentação (2023).

A análise comparativa entre as análises *a priori* e *a posteriori* revela uma conclusão positiva acerca da validação da Sequência Didática (SD) proposta para o ensino de trigonometria no contexto do triângulo. Os resultados obtidos após a implementação e experimentação da SD junto aos alunos do 2º ano do Ensino Médio apontam para um progresso notável em termos de aprendizado e desempenho.

No estágio inicial das análises prévias, identificamos desafios substanciais enfrentados pelos alunos em relação à compreensão e aplicação de conceitos trigonométricos. No entanto, ao aplicar a SD e realizar a análise *a posteriori*, observamos uma melhoria significativa no desempenho dos estudantes. O aumento médio nas pontuações dos alunos, que passou de 0% no pré-teste para 85% no pós-teste, é um indicativo sólido do impacto positivo da abordagem adotada.

Neste sentido, o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* reforça a validade da Sequência Didática para o ensino de trigonometria no triângulo. Os resultados indicam que essa abordagem pedagógica, baseada em atividades experimentais, resolução de problemas e jogos matemáticos, é eficaz na promoção do aprendizado dos alunos. Assim, a SD apresenta-se como uma valiosa alternativa à tradicional rotina de sala de aula, oferecendo aos educadores uma ferramenta pedagógica sólida para melhorar o ensino e a compreensão da trigonometria por parte dos alunos do 2º ano do Ensino Médio.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida com o escopo de verificar como uma sequência de atividades experimentais, para o ensino de matemática, pode favorecer a construção do conhecimento de alunos do 2° ano do ensino médio no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo. Para tal propósito, buscou-se responder a seguinte problemática:' Como a aplicação de uma Sequência Didática para o ensino de trigonometria no triângulo, pode favorecer a construção do conhecimento matemático dos alunos do 2º ano do Ensino Médio?

Dessa forma, para responder a problemática suscitada e validar os resultados da pesquisa, adotamos como Metodologia de Pesquisa os aspectos da Engenharia Didática, que perpassa por quatro fases, sendo elas: análises prévias, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.

Assim, as análises prévias desvelaram uma realidade educacional complexa e desafiadora no ensino da trigonometria. Ao revisar estudos diagnósticos, experimentais e teóricos/investigativos, evidenciou-se que os estudantes enfrentam obstáculos significativos na compreensão dos conceitos matemáticos, incluindo a trigonometria. A dificuldade estende-se além da compreensão, abrangendo também a execução de cálculos aritméticos e a resolução de problemas trigonométricos.

Neste sentido, as implicações desse panorama educacional são profundas. O ensino da matemática não deve ser visto apenas como uma transmissão de conhecimento, mas como um agente que molda as oportunidades futuras dos estudantes. A dificuldade de acesso a esse conhecimento, somada ao baixo desempenho nas avaliações em larga escala, perpetua uma dinâmica de exclusão e seleção na sociedade, onde alguns estudantes podem ser privados do acesso a oportunidades com base em suas habilidades matemáticas.

Além disso, uma análise atenta dos Livros Didáticos de Matemática revelou uma possível solução para enfrentar esses desafios. Ao relacionar atividades aos tipos de problemas encontrados em avaliações em larga escala, os Livros Didáticos podem preparar os alunos de maneira mais eficaz para as demandas do sistema educacional contemporâneo. Essa abordagem conecta o ensino à realidade vivenciada pelos estudantes e os capacita a lidar de maneira mais competente com os desafios que enfrentarão.

A construção desta pesquisa estabeleceu uma base sólida ao combinar fundamentos históricos e matemáticos da trigonometria com as mais atuais Tendências em Educação Matemática. Ao apresentar os princípios do Ensino por Atividades Experimentais, Resolução de Problemas e Jogos Matemáticos, a pesquisa não apenas enriqueceu a abordagem educacional proposta, mas também a ancorou em uma estrutura que se alinha às necessidades e dinâmicas da aprendizagem contemporânea. Destacou-se, também, a importância do alinhamento entre as práticas pedagógicas e os documentos oficiais que norteiam o currículo de matemática no ensino médio, como a LDB, PCN, BNCC e DCE-PA. Estes documentos reconhecem a relevância da trigonometria no contexto real e enfatizam sua aplicabilidade na resolução de problemas variados.

O embasamento obtido por meio das análises prévias desempenhou um papel fundamental na concepção e desenvolvimento do Produto Educacional, em forma de uma Sequência Didática abrangente e eficaz para o ensino da trigonometria no contexto do triângulo. Esse Produto Educacional não apenas sintetiza a abordagem pedagógica em um formato acessível e didático, mas também oferece um guia prático para educadores interessados em implementar essa abordagem em suas próprias salas de aula.

A Sequência Didática elaborada compreende um conjunto de 15 atividades criteriosamente planejadas, abrangendo desde os aspectos básicos de classificação e identificação dos triângulos até o aprofundamento nas leis dos senos e dos cossenos. O objetivo final é proporcionar uma compreensão completa e aplicável da trigonometria no contexto dos triângulos, capacitando os alunos a enfrentar os desafios matemáticos de forma confiante.

As fases subsequentes da pesquisa foram marcadas pela implementação prática das atividades em sala de aula, com o propósito de avaliar a eficácia da Sequência Didática. A experimentação no ambiente real de ensino possibilitou a observação direta das reações dos alunos, o entendimento de suas interações com as atividades e a validação das considerações feitas na fase de análise prévia.

A fase final desta pesquisa destacou-se pela análise *a posteriori* e validação dos resultados alcançados. O pré-teste realizado revelou um cenário desafiador, onde o desempenho médio dos alunos foi de 0%, demonstrando a existência de múltiplas dificuldades na compreensão do conteúdo de trigonometria no triângulo. Esse panorama inicial reforçou a importância da intervenção pedagógica proposta. No pós-teste subsequente, os alunos enfrentaram novamente o mesmo conjunto de questões. O desempenho médio subiu significativamente para 85%, indicando uma melhoria substancial no entendimento dos estudantes após a imersão na sequência didática. Essa evolução é uma clara evidência do impacto positivo da abordagem adotada.

Ao analisarmos os resultados do pós-teste de maneira mais profunda, pudemos discernir os principais tipos de erros cometidos pelos alunos. Esses erros foram categorizados em dois grupos distintos: Erro Conceitual e Erro Procedimental. Erro no uso inadequado da relação trigonométrica seno, cosseno ou tangente; erro de cálculo numérico; erro de interpretação dos dados fornecidos; e erro de correspondência de ângulos, emergiram como os erros mais recorrentes.

O teste exato de Fisher fornece um respaldo conclusivo de que a sequência didática não apenas influenciou positivamente o desempenho dos alunos, mas também minimizou a influência dos fatores socioeconômicos. Além disso, o Teste de Hipótese mostrou uma diferença significativa nas notas antes e depois da aplicação da sequência didática. Esses resultados validam a importância e o impacto positivo da abordagem adotada, proporcionando evidências sólidas de que a Sequência Didática contribuiu efetivamente para melhorar o desempenho dos estudantes no conteúdo de trigonometria no triângulo.

Portanto, nesse contexto de aprendizado em constante evolução, esta pesquisa trouxe à luz os impactos positivos do ensino por atividades no aprendizado da trigonometria no triângulo para estudantes do 2º ano do ensino médio. Contudo, este é apenas um ponto de partida e abre caminho para futuras pesquisas que possam aprofundar e expandir nossa compreensão sobre os benefícios do Ensino de Matemática por Atividades Experimentais. Nesse sentido, a pesquisa está longe de esgotar todas as possibilidades, convidando a um aprofundamento contínuo e a uma exploração dinâmica das múltiplas facetas que compõem o complexo campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

AGOSTINI, Tainara Duro. **Estrutura e interpretação de situações-problema em matemática**: uma análise baseada na semântica formal. São Carlos: UFSCar, 2019.

ALMEIDA, Adelaide M. J. M. de; *et al*. O uso de jogos como estratégia de ensino de matemática. **IV CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO.** – A Educação brasileira: desafios na atualidade. João Pessoa-PB: 15 a 18 de novembro de 2017.

ALMOLOUD, S. Ag.; COUTINHO, C.Q.S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT** – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 3.6, p. 62-77, UFSC: 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em 17 jul 2022.

ALMOULOUD, S. A., SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: Evolução e Diversidade. ***REVEMAT*** *- Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 26- 27, UFSC: 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22. Acesso em 20 jul 2022.

ARRUDA, Thaline Cabral; FREITAS, Glória Maria Miranda de. Contribuições do ensino de matemática através de jogos. Congresso Internacional de Educação e Inclusão: CINTEDI – Práticas Pedagógicas, Direitos Humanos e Interculturalidades. João Pessoa-PA: UEPB, 2015.

ARTIGUE**,** Michèle. Ingeniería Didáctica. *In*: ARTIGUE, M; DOUADY, R; MORENO, L. **Ingeniería didáctica en educación matemática**: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: Interações e Tecnologia – Volume 1. 2ª ed. – São Paulo: Leya, 2016.

BITTAR, Marilena. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. *In*: TELES, Rosinalda; BORBA, Rute; MONTEIRO, Carlos. **Investigações em Didática da Matemática***.* Editora Universitária UFPE, 100-131. 2017.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de linguagens Língua Portuguesa do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

BRASIL. **Lei n. 13.005/2014**, Plano Nacional de educação e dá outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br. Acesso em: 20 out. 2022.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996. Brasília, DF, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE- Plano de Desenvolvimento da Educação Básica: Prova Brasil**: ensino fundamental: Matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB, Inep, 2011

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BOERO, P. Les domaines d´expérience dans l´enseignement – Apprentissage des mathématiques: Lier le travail scolaire a l´experience des eleves, in Margolinas et all. (org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 111-148, 2009.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª edi.[Tradução de quem mesmo?] – São Paulo: Blucher, 2010.

BRAYNER JUNIOR, Carlos Alberto Martinho. **Ensino de equações trigonométricas por atividades experimentais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

CARLINI, Elisângela Miranda Pereira; CAVALARI, Mariana Feiteiro. As funções didáticas da história da matemática nos livros didáticos de matemática do ensino médio. **Hipátia – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**. v. 2, n. 2, p. 73-88, dez. 2017.

CARVALHO, Patrícia da Silva. **Os hábitos de estudos e sua influência no rendimento escolar**. Dissertação (Mestrado em Psicologia Clínica e da Saúde) – Universidade Fernando Pessoal, Porto, 2012.

CICUTO, Camila Aparecida Tolentino; TORRES, Bayardo Baptista. Influência da frequência e participação no desempenho em um ambiente de aprendizagem centrado no aluno. **Quim. Nova**, Vol. 43, nº. 2, 239-248, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 1º ano:** ensino médio. 1. ed. – São Paulo: Edições SM, 2016.

CHEVALLARD, Y. La notion de PER: problèmes et avancées, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf. Acesso em 20 nov. 2022.

CONTEXTO. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2022. Disponível em: < https://www.dicio.com.br/contexto/>. Acesso em: 15 out. 2022.

COUTINHO, Lázaro. **Trigonometria esférica**: a matemática de um espaço curvo. – 1ª ed. – Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. - 2. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2007.

DAMASCENO, A. A.; OLIVEIRA, G. S.; CARDOSO, M. R. G. O ensino de matemática na educação de jovens e adultos: a importância da contextualização. Monte Carmelo/MG: **Cadernos da Fucamp**, v.17 n. 29, p. 112-124, 2018. Disponível: em: https://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/download/1347/937. Acesso: 18 maio 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contextos & aplicações. 2ª ed. – São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contextos & aplicações. 3ª ed. – São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto**: trigonometria e sistemas lineares. 1ª ed. – São Paulo: Ática, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. (*Tradução Hygino H. Domingues)*. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. Brasília: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2018.

FERRAZ, A. P. C. M.; BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. **Gestão & Produção**, São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010. Disponível em: https://www.scielo.br/j/gp/a/bRkFgcJqbGCDp3HjQqFdqBm/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 17 jun 2022.

FERREIRA, Anderson Portal. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). UEPA, Belém, 2018.

GAYA, Daniele de Jesus; FREITAS, Edilene Aparecida Simão. Tendências Pedagógicas de Libâneo e Saviani: possíveis influências na educação contemporânea. Itapeva/SP, **Revista Científica Eletrônica de Ciências Aplicadas da FAIT**. n. 2. novembro, 2020. Disponível em: http://fait.revista.inf.br/imagens_arquivos/arquivos_destaque/V2OrY9Rk1SbEqSQ_2020-12-14-17-24-10.pdf. Acesso em: 5 jun. 2022.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. – 6. ed. – São Paulo: Atlas, 2008.

GIOLO, Suely Ruiz. **Introdução à análise de dados categóricos com aplicações**. São Paulo: Blucher, 2018.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática. **Práxis Educacionais**. Vitória da Conquista. v. 8, n. 13. p. 253 – 280. jul./dez. 2012.

GOMES, Rosana Pereira. **O Ensino das Relações Trigonométricas no triângulo por Atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação). – Belém: PPGED/UEPA, 2013.

IEZZI, Gelson [etal.]. **Matemática**: matemática ciência e aplicações. 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2014.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Censo Escolar, 2020. Brasília: MEC, 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Censo Escolar, 2022. Brasília: MEC, 2022.

JANUARIO, Gilberto. Análise de livro didático e a prática pedagógica do professor que ensina matemática. **Horizontes** – Revista de Educação, Dourados-MS, v. 6, n. 11, p. 31-46, jan./jun. 2018. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/horizontes/article/view/8353/4848. Acesso em: 16 jun 2022.

KILHIAN, Kleber. Hiparco, Ptolomeu e a trigonometria. **O baricentro da mente**, 2021. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2021/10/hiparco-ptolomeu-e-trigonometria.html. Acesso em: 12 out 2022.

LUCENA, Laecio Amaury da Silva. **Trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). – São Luís: UFMA, 2020.

MASTRONICOLA, Natália Ojeda. **Trigonometria por apps**. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra). – São Carlos: UFSCar, 2014.

MATOS FILHO, M. A. S, de. Engenharia Didática. **Revista Eletrônica Estácio Recife**. V. 1, n. 1. Recife: Estácio, 2015.

MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de. **O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – Belém: PPGEM/UEPA, 2018.

MELLO, Guiomar Namo de. **Currículo da Educação Básica no Brasil**: Concepções e políticas. São Paulo: USP, 2014.

MOREIRA, Maysa de F.; FONSECA, Tânia A. F.; NASCIMENTO, Rosalina M. L. L. do. Metodologias com o uso de jogos e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem em matemática. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. – Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP: 13 a 16 de julho de 2016.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. 34 ed. Petrópolis: Vozes, 2015.

NASCIMENTO, Maria José Almeida do. A contextualização na construção de conceitos matemáticos no ensino fundamental. In: **V CONEDU - CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO**: Recife, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD4_SA13_ID10005_10092018215016.pdf. Acesso em 12 out. 2022.

OLGIN, C. A.; GROENWALD, C. L. O. Critérios para seleção de temas de interesse para o Currículo de Matemática do Ensino Médio. **Perspectivas e a Educação Matemática** – UFMS. 2015, volume 8, número 17. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/988/952. Acesso em: 23 de abril de 2022.

OLGIN, Clarissa de Assis; GROENWALD. Claudia Lisete Oliveira. Temas contemporâneos integrados ao currículo de Matemática do Ensino Médio: projeto com o tema Arte. **Ensino em Re-Vista**. Uberlândia, MG, v.27, n.3, p.909-933, set. – dez. 2020. Disponível em: https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/54584/28895. Acesso em: 23 de abril de 2022.

ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?** IV Jornada Nacional de Educação Matemática. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo - UPF, 2012.

PAIS, Luís Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2ª Ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação do Pará. **Documento Curricular do Estado do Pará** (DCE) – Etapa Ensino Médio. Volume II. Belém: SEDUC-PA, 2021.

PEREIRA, F. de C.; CORRÊA, M. da C.; ZARDO, D. da S. A utilização de Resolução de Problemas como estratégia pedagógica no ensino da Matemática no Ensino Básico. **REMAT**, Caxias do Sul, RS, v. 2, n. 1, p. 6-17, 2016.

PIMENTA, Ligia Cristina; CARNEIRO, Reginaldo Fernando; LASARETTO, Lucilaine Nunes. O jogo no ensino de matemática: limites e potencialidades. **Cadernos da Pedagogia**. São Carlos: Ano 7 v.7 n.14, p. 126-144, jan-jun 2014.

POLYA, George (1987). **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019.

SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC** – Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 15, Número 35, p.143-162, 2020.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades da resolução de problemas em aulas de matemática**. Belém: IFPA, 2021.

SÁ, Pedro Franco de; MAFRA, José Ricardo Souza; FOSSA, John Andrew. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática**. Revista Cocar**. Edição Especial N.14/2022, p.1-20, Belém, 2022.

SÁ, Pedro Franco de; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; RIBEIRO, Andrea da Silva Marques. SAEB e PNLD: Dissonâncias e implicações das avaliações de larga escala no contexto educacional brasileiro. **Revista Prática Docente**. v. 5, n. 2, p. 673-699, mai/ago 2020.

SANTOS, Ivana Maria Nascimento dos. **Processos de ensino e aprendizagem de trigonometria em triângulos quaisquer a partir da engenharia didática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). – Lajeado/RS: UNIVATES, 2015.

SANTOS, Jamison Luiz Barros. **Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das inteligências múltiplas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). – São Cristóvão/SE: UFS, 2017.

SANTOS, Mateus Mota dos; MARIANO, Francisca Zilania; COSTA, Edward Martins. Efeitos da educação dos pais sobre o rendimento escolar dos filhos via mediação das condições socioeconômicas. **Economia Aplicada**, v. 23, n. 2, 2019.

SCHMIDT, Giovani Marcelo; PRETTO, Valdir; LEIVAS, José Carlos Pinto. História da matemática como recurso didático-pedagógico para conceitos geométricos. **Revista Caderno Pedagógico**, Lajeado-RS, v. 13, n. 1, 2016.

SILVA, Cláudio Lima da; SILVA, Ana Kely Martins da. As funções didáticas da história da matemática no ensino de trigonometria. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**. Ano. 08, Ed. 03, Vol. 02, pp. 81-95. Mar., 2023.

SILVA, Luiz Carlos Soares da. **O ensino de relações trigonométricas por atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – Belém/PA: UEPA, 2019.

SILVA, Raquel Silveira da; NOVELLO, Tanise Paula. Uso das tecnologias digitais no ensinar matemática: recursos, percepções e desafios. **RELACult** – Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade. V. 06, ed. especial, mar., 2020.

SOUSA, Miguel Angelo Moraes de. **Experimentos de trigonometria em sala de aula**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). – Santarém/PA: UFOPA, 2014.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática**: Sequências e trigonometria - Ensino Médio. – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#contato matemática**. 1. ed. – São Paulo: FTD, 2016.

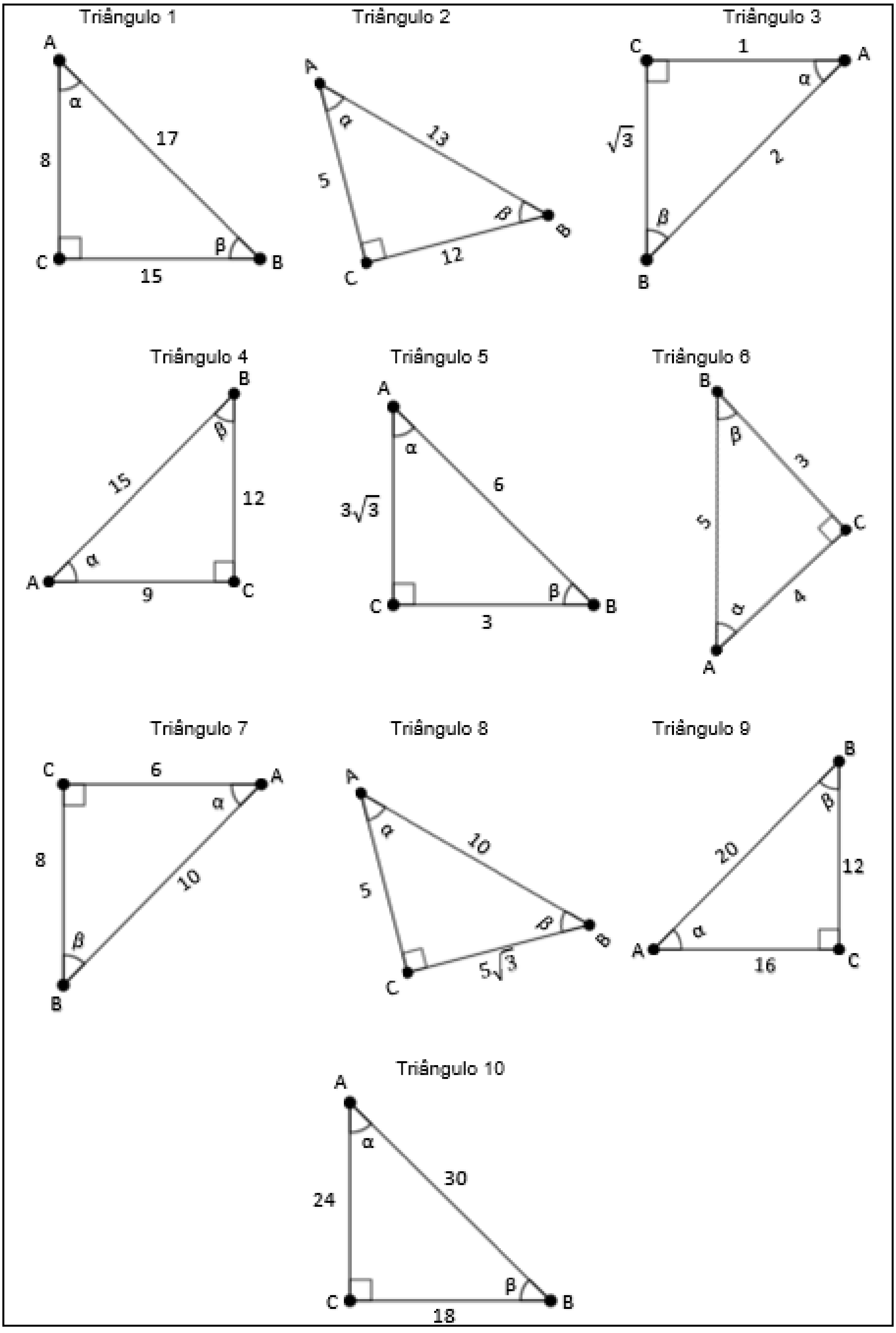
SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo**. 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

SPINILLO, Alina Galvão. *et a*l. Como Professores e Futuros Professores Interpretam Erros de Alunos ao Resolverem Problemas de Estrutura Multiplicativa? **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1188 - 1206, dez. 2016.

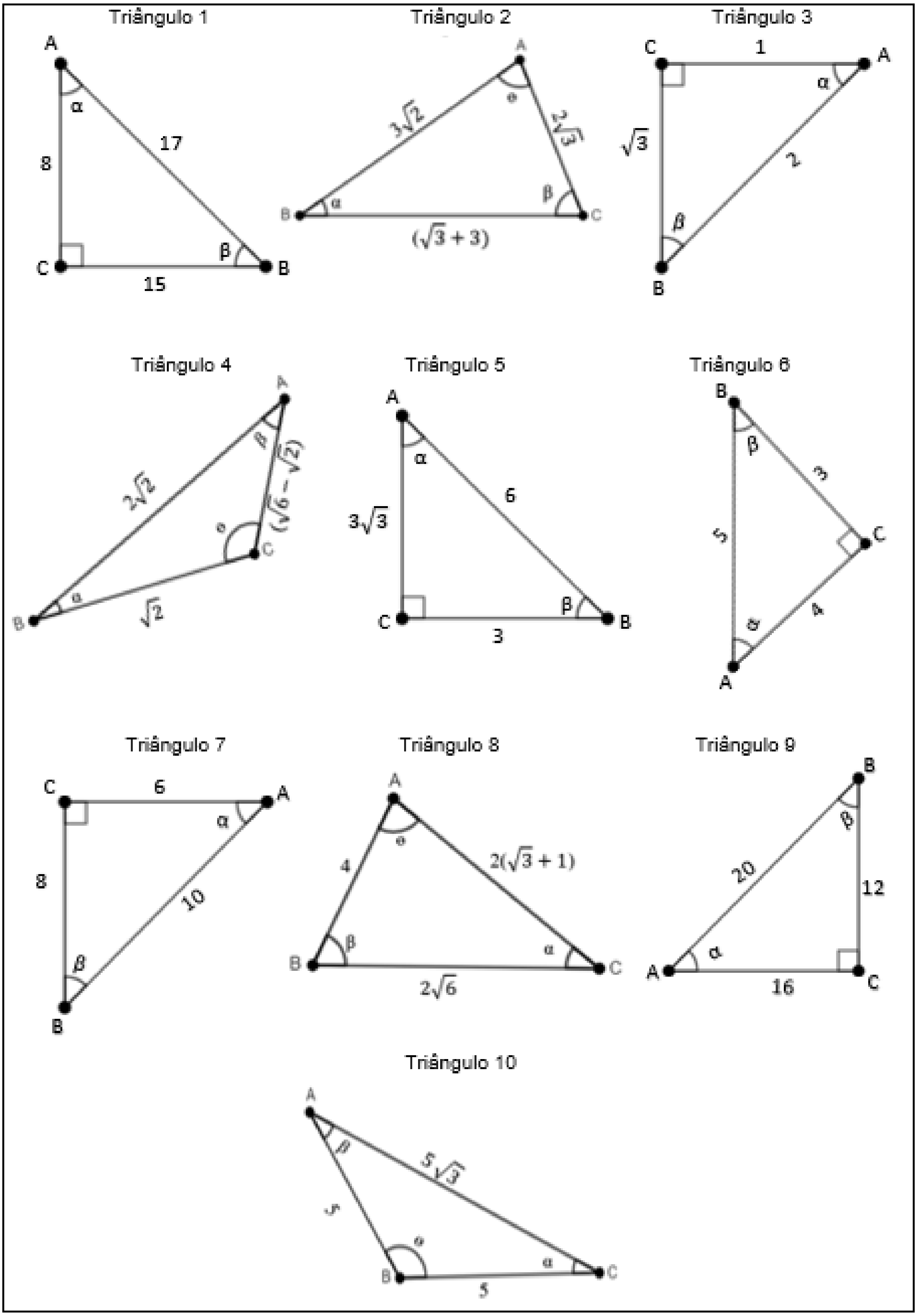
TOURÃO, Benedito Junior Corrêa. **O Ensino de Prismas por Atividade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A: QUADRO DE TRIÂNGULOS 1

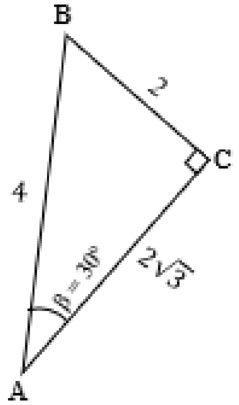


APÊNDICE B: QUADRO DE TRIÂNGULOS 2

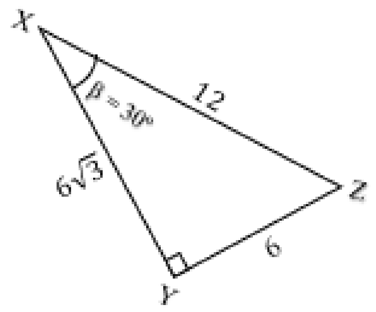


APÊNDICE C: QUADRO DE TRIÂNGULOS 3

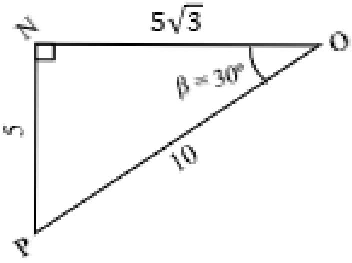
Triângulo 1



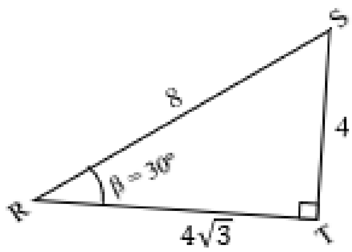
Triângulo 2



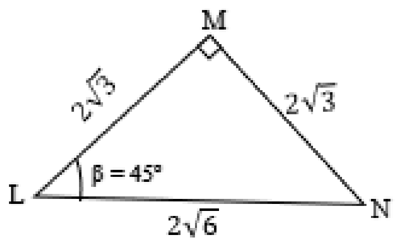
Triângulo 3



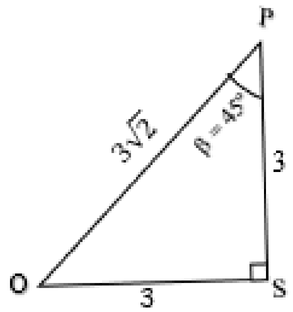
Triângulo 4



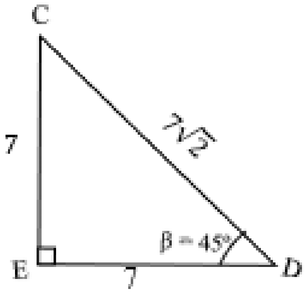
Triângulo 5



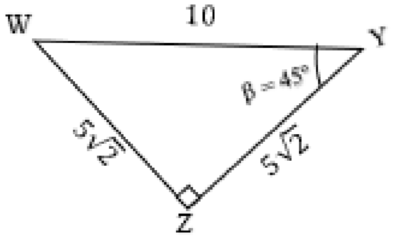
Triângulo 6



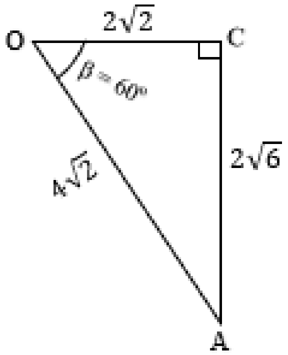
Triângulo 7



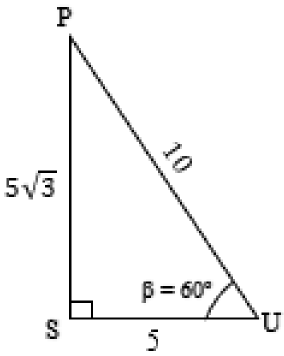
Triângulo 8



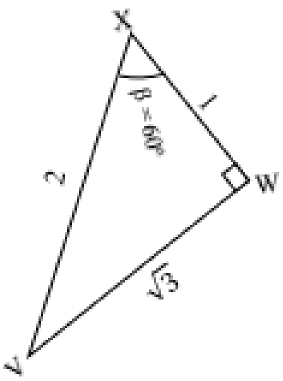
Triângulo 9



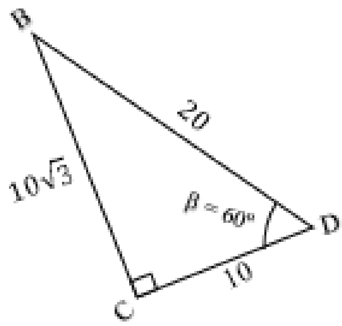
Triângulo 10



Triângulo 11

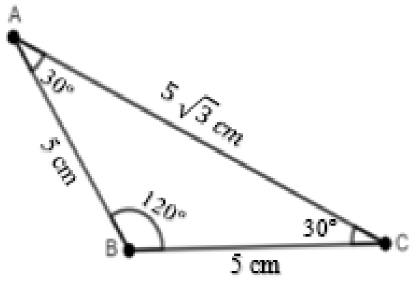


Triângulo 12

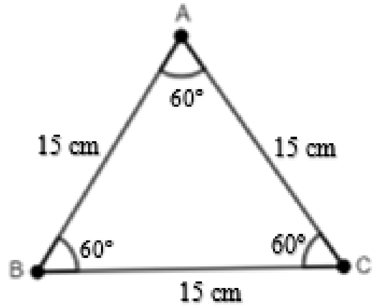


APÊNDICE D: QUADRO DE TRIÂNGULOS 4

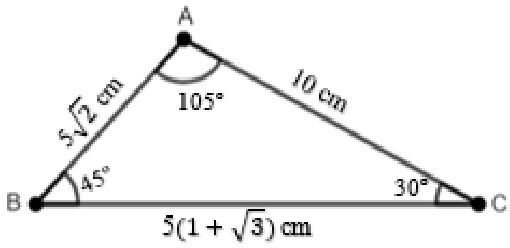
Triângulo 1



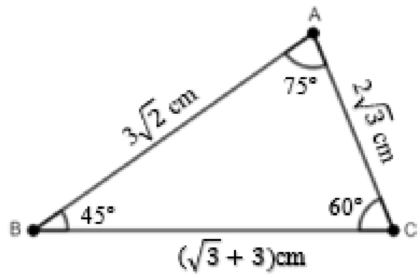
Triângulo 2



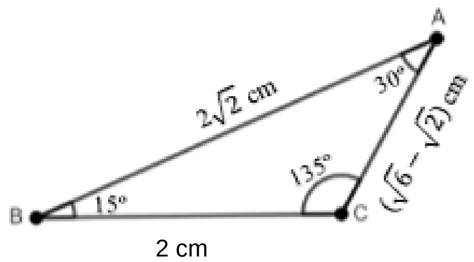
Triângulo 3



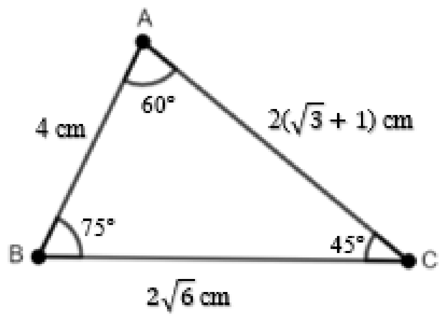
Triângulo 4



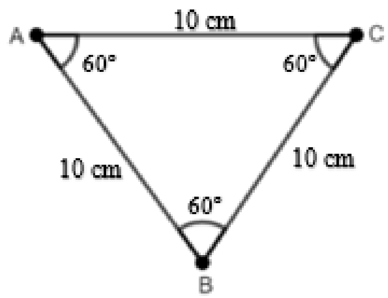
Triângulo 5



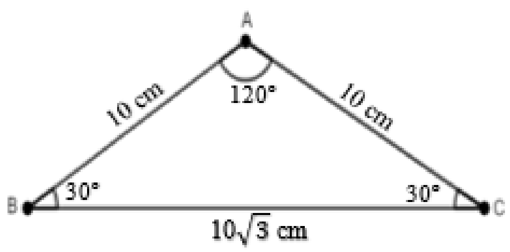
Triângulo 6



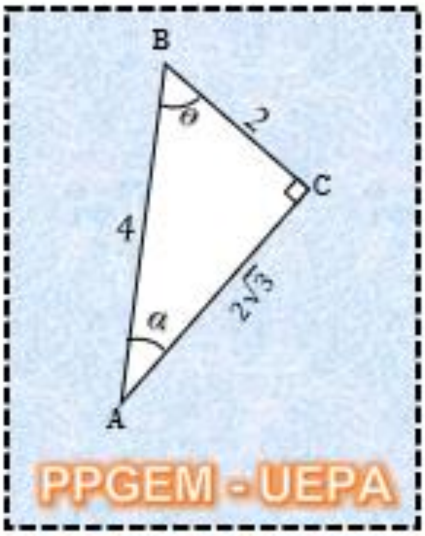
Triângulo 7

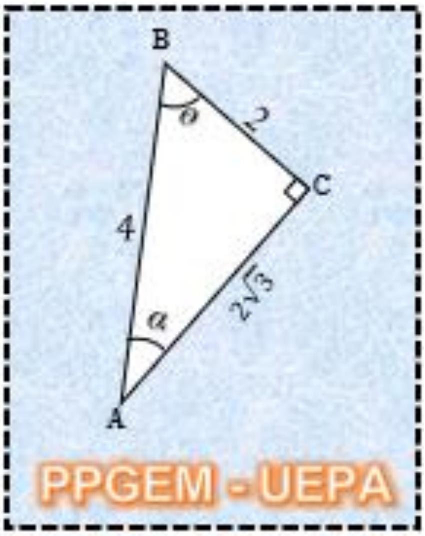


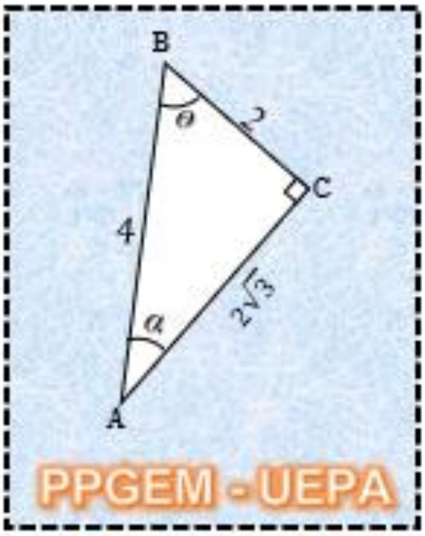
Triângulo 8

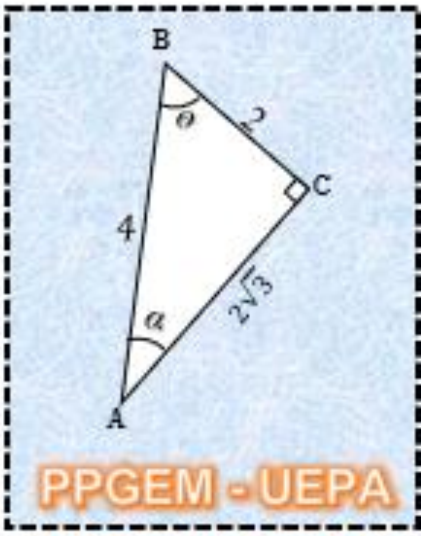


APÊNDICE E: BARALHO TRIGONOMÉTRICO









$$sen\,\alpha = \frac{2}{4}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\ \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\ \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

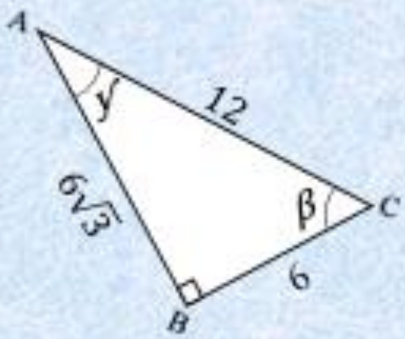
PPGEM - UEPA

$$cos\ \theta = \frac{2}{4}$$

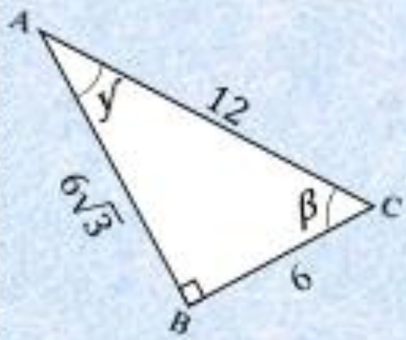
PPGEM - UEPA

$$tg\ \theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

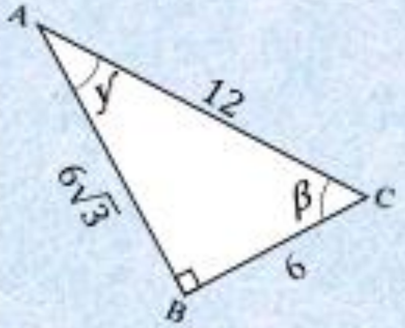
PPGEM - UEPA



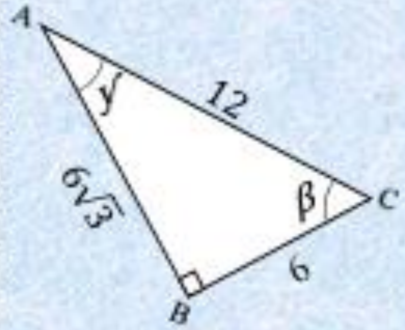
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{sen}\,\gamma = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{12}}$$

PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{cos}\,\gamma = \frac{\mathbf{6\sqrt{3}}}{\mathbf{12}}$$

PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{tg}\,\gamma = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{6\sqrt{3}}}$$

PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{sen}\,\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{6\sqrt{3}}}{\mathbf{12}}$$

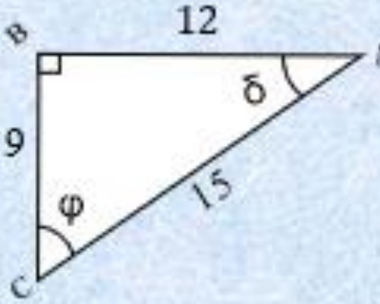
PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{cos\ \beta = \frac{6}{12}}$$

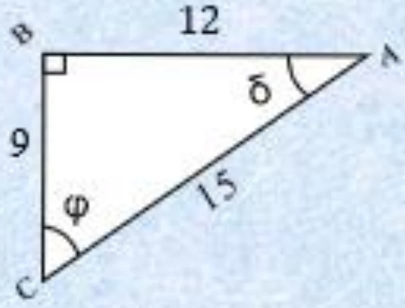
PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{tg\ \beta = \frac{6}{6\sqrt{3}}}$$

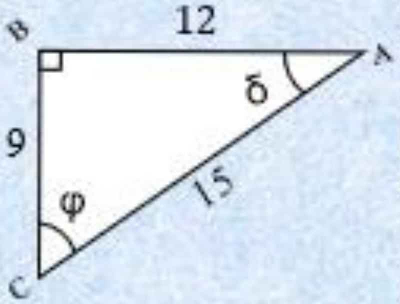
PPGEM - UEPA



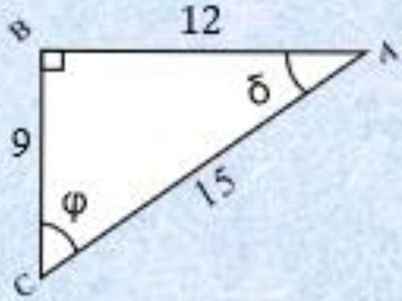
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\,\varphi = \frac{12}{15}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\ \varphi = \frac{9}{15}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\ \varphi = \frac{12}{9}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\,\delta = \frac{9}{15}$$

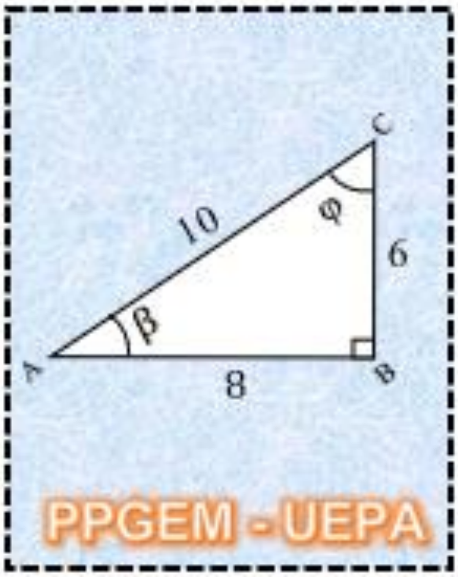
PPGEM - UEPA

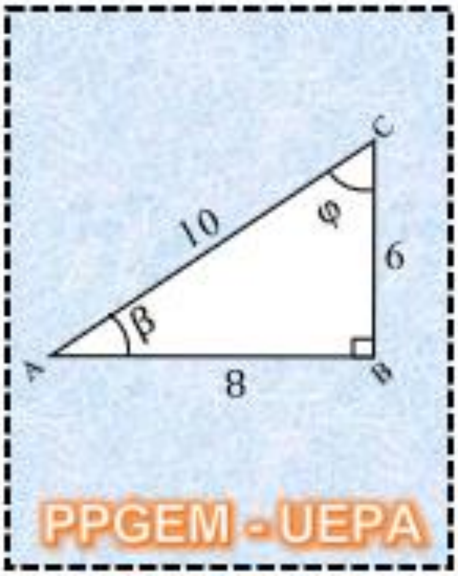
$$cos\ \delta = \frac{12}{15}$$

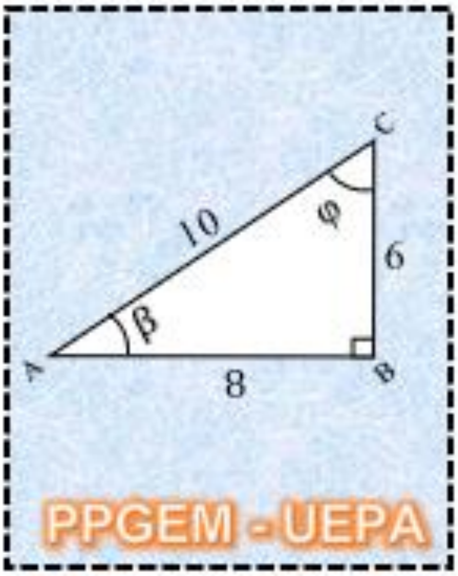
PPGEM - UEPA

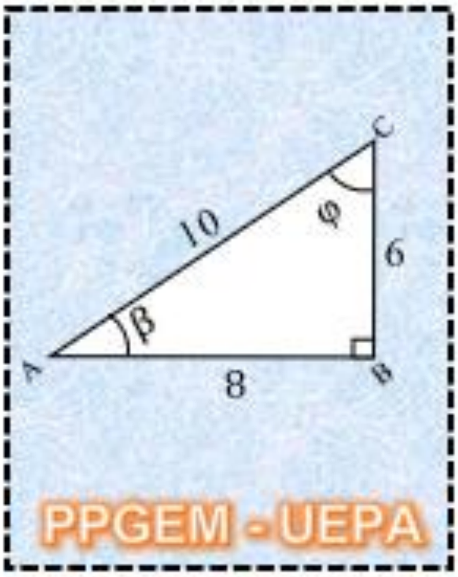
$$tg\ \delta = \frac{9}{12}$$

PPGEM - UEPA









$$\boldsymbol{sen\ \varphi = \frac{8}{10}}$$

PPGEM - UEPA

$$\boldsymbol{cos\ \varphi = \frac{6}{10}}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\,\varphi = \frac{12}{15}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\,\varphi = \frac{9}{15}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\,\varphi = \frac{12}{9}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\,\delta = \frac{9}{15}$$

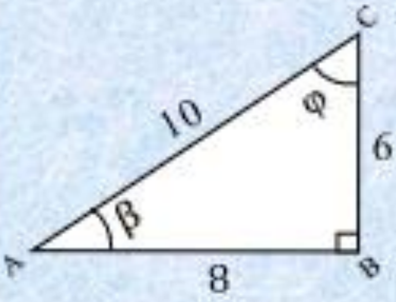
PPGEM - UEPA

$$cos\,\delta = \frac{12}{15}$$

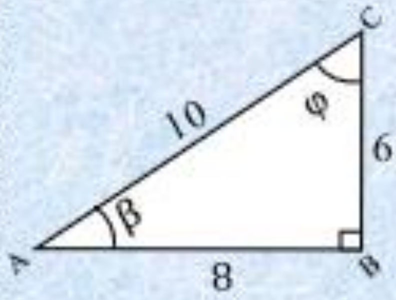
PPGEM - UEPA

$$tg\,\delta = \frac{9}{12}$$

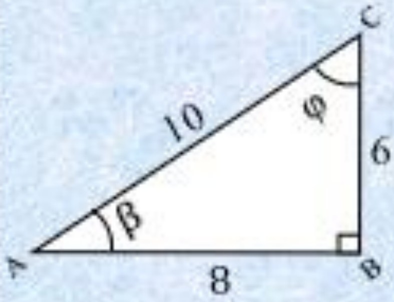
PPGEM - UEPA



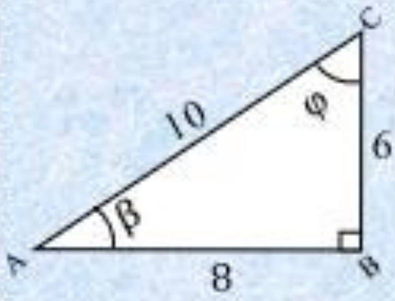
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\ \varphi = \frac{8}{10}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\ \varphi = \frac{6}{10}$$

PPGEM - UEPA

$tg\ \varphi = \frac{8}{6}$

PPGEM - UEPA

$sen\ \beta = \frac{6}{10}$

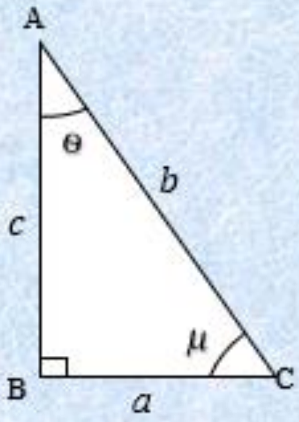
PPGEM - UEPA

$cos\ \beta = \frac{8}{10}$

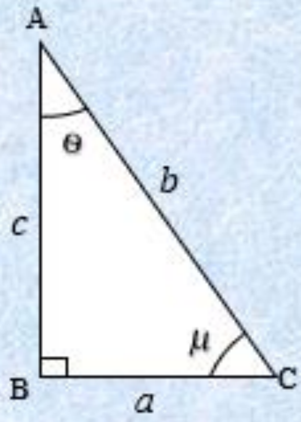
PPGEM - UEPA

$tg\ \beta = \frac{6}{8}$

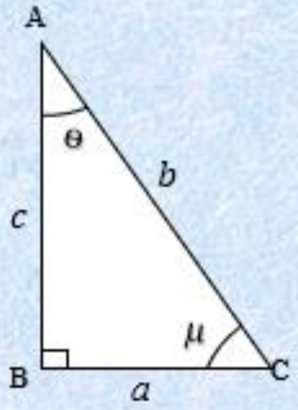
PPGEM - UEPA



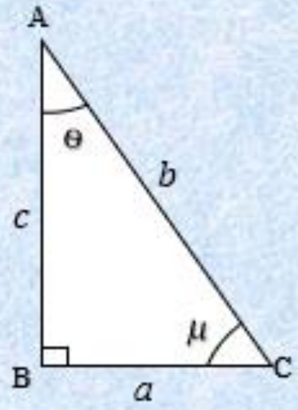
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\ \theta = \frac{a}{b}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\ \theta = \frac{c}{b}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\ \theta = \frac{a}{c}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\ \mu = \frac{c}{b}$$

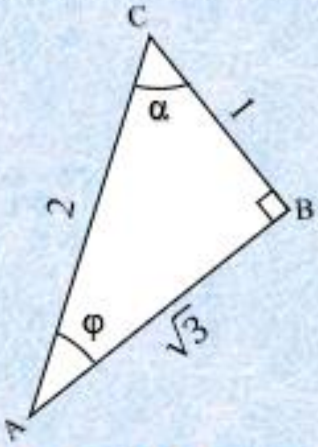
PPGEM - UEPA

$$cos\ \mu = \frac{a}{b}$$

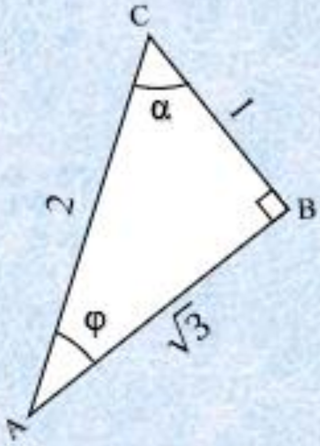
PPGEM - UEPA

$$tg\ \mu = \frac{c}{a}$$

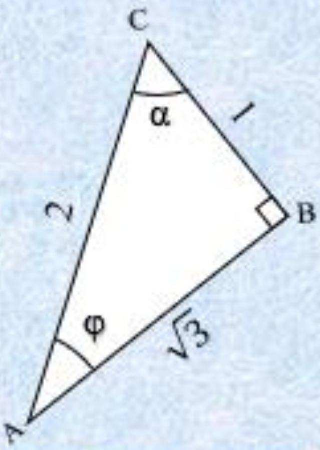
PPGEM - UEPA



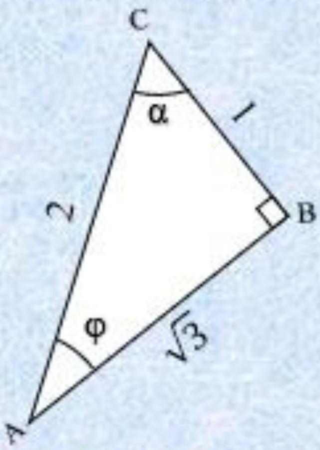
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\ \varphi = \frac{1}{2}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\ \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

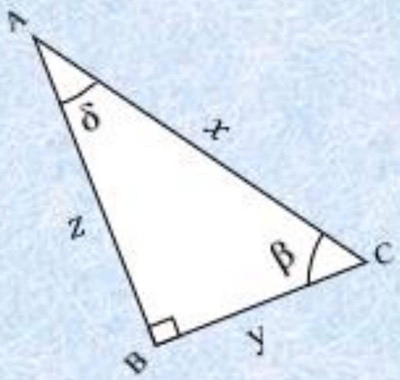
PPGEM - UEPA

$$cos\ \alpha = \frac{1}{2}$$

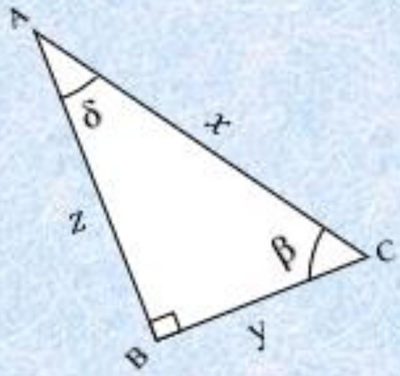
PPGEM - UEPA

$$tg\ \alpha = \sqrt{3}$$

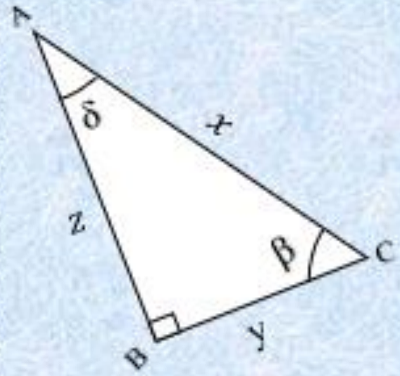
PPGEM - UEPA



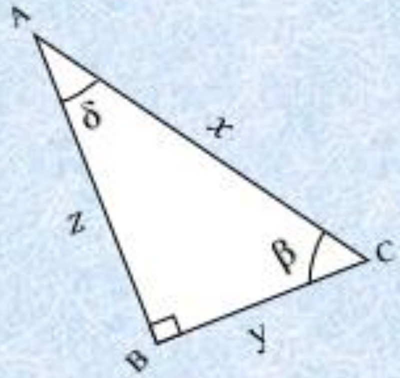
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\ \beta = \frac{z}{x}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\ \beta = \frac{y}{x}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\ \beta = \frac{z}{y}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\ \delta = \frac{y}{x}$$

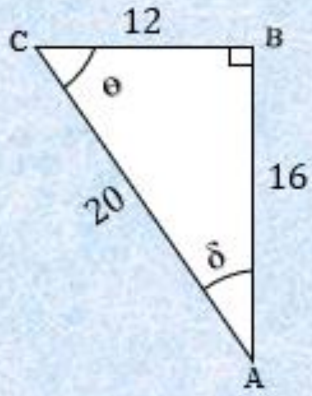
PPGEM - UEPA

$$cos\ \delta = \frac{z}{x}$$

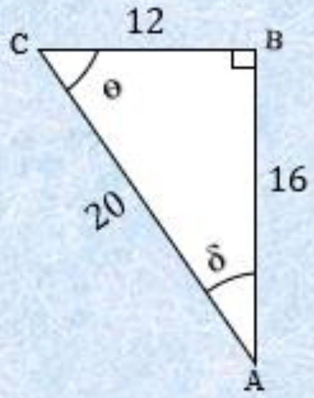
PPGEM - UEPA

$$tg\ \delta = \frac{y}{z}$$

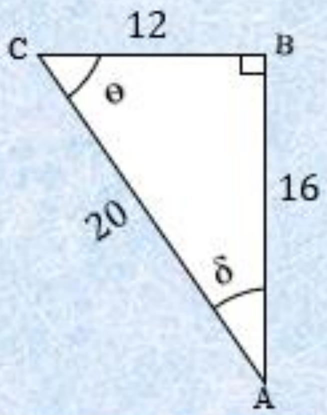
PPGEM - UEPA



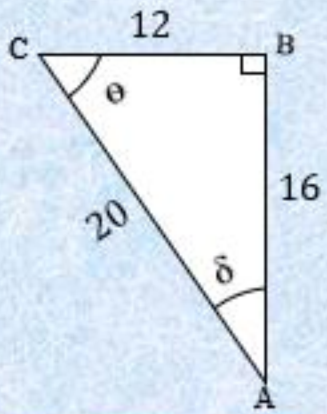
PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA



PPGEM - UEPA

$$sen\,\theta = \frac{16}{20}$$

PPGEM - UEPA

$$cos\,\theta = \frac{12}{20}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\,\theta = \frac{16}{12}$$

PPGEM - UEPA

$$sen\,\delta = \frac{12}{20}$$

PPGEM - UEPA

$$\cos \delta = \frac{16}{20}$$

PPGEM - UEPA

$$tg\, \delta = \frac{12}{16}$$

PPGEM - UEPA

APÊNDICE F: MODELO DE FICHA PARA AVALIAR A SATISFAÇÃO DOS ALUNOS

Encontro 1: Os catetos e a hipotenusa

- Qual a sua opinião sobre a aula de hoje?

Parauapebas – PA, ___/____/____ || Assinatura:________________________________

Encontro 1: Os catetos e a hipotenusa

- Qual a sua opinião sobre a aula de hoje?

Parauapebas – PA, ___/____/____ || Assinatura:________________________________

Encontro 1: Os catetos e a hipotenusa

- Qual a sua opinião sobre a aula de hoje?

Parauapebas – PA, ___/____/____ || Assinatura:________________________________

APÊNDICE G: FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA DE REDESCOBERTA

Nome do Professor:____
Nome do Observador:____
Título da Atividade:____
Objetivo da atividade: ____
Data___/___/____ Horário inicial:________ Horário do término:_________
Quantidade de alunos:________ Quantidade de grupos: ___________

<table>
<tr><th colspan="12">MOMENTO I: Organização</th></tr>
<tr><th>Docente</th><th colspan="11">Grupos</th></tr>
<tr><td>Dirigiu as ações?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>**Grupos**</td><td>**01**</td><td>**02**</td><td>**03**</td><td>**04**</td><td>**05**</td><td>**06**</td><td>**07**</td><td>**08**</td><td>**09**</td><td>**10**</td></tr>
<tr><td>Orientou a formação dos grupos?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Os componentes foram receptivos?</td></tr>
<tr><td>Demonstrou ter planejado a atividade?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>**SIM**
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td>Evitou que os alunos desperdiçassem o tempo com ações alheias à organização da turma?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Desperdiçou tempo com ações alheias à organização?</td></tr>
<tr><td>Foi objetivo?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>**SIM**
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td>Mostrou entusiasmo?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">O grupo foi formado espontaneamente?</td></tr>
<tr><td>**Observação:**</td><td>**SIM**
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="11">Observação:</td></tr>
<tr><td colspan="12">MOMENTO II: Apresentação</td></tr>
<tr><td>Docente</td><td colspan="11">Grupos</td></tr>
<tr><td>Distribuiu o material necessário?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>Grupos</td><td>01</td><td>02</td><td>03</td><td>04</td><td>05</td><td>06</td><td>07</td><td>08</td><td>09</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mostrou-se motivado?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Mostrou-se atento as orientações do professor?</td></tr>
<tr><td>Demonstrou segurança?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Observação:</td><td colspan="11">Mostrou-se motivado na realização da atividade?</td></tr>
<tr><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td colspan="11">Demostrou ter entendido a proposta da atividade?</td></tr>
<tr><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td colspan="11">Observação:</td></tr>
<tr><td colspan="12">MOMENTO III: Execução</td></tr>
</table>

Docente	Grupos										
Deu liberdade para a equipe trabalhar livremente? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**Grupos**	**01**	**02**	**0 3**	**0 4**	**0 5**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Supervisionou o desenvolvimento das ações? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	Mostrou dinamismo através da interação dos componentes?										
Tirou dúvidas quando solicitado ou ao perceber as dificuldades? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**SIM EM PARTE NÃO**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Orientou com clareza e precisão sem constrangimento? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	Conseguiu seguir as instruções previstas no roteiro com facilidade?										
Motivou os alunos? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**SIM EM PARTE NÃO**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Mostrou segurança? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	Solicitou orientação do professor?										
Demonstrou segurança? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**SIM EM PARTE NÃO**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Observação:	Sentiu-se motivado para a execução da atividade?										
	SIM EM PARTE	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )

	NÃO										
	Observação:										
MOMENTO IV: Sistematização											
Docente	**Grupos**										
Supervisionou e auxiliou o grupo quando solicitado ou quando percebeu necessidade? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**Grupos**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
Mostrou-se motivado? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	Conseguiu registrar as informações durante a execução com facilidade?										
Demonstrou segurança? **( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO**	**SIM** **EM PARTE** **NÃO**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
Observação:	Necessitou ou solicitou orientação para o registro das informações produzidas?										
	SIM **EM PARTE** **NÃO**	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )	( ) ( ) ( )
	Observação:										

<table>
<tr><td></td><td colspan="11"></td></tr>
<tr><td colspan="12">MOMENTO V: Análise</td></tr>
<tr><td>Docente</td><td colspan="11">Grupos</td></tr>
<tr><td>Supervisionou fazendo perguntas ao grupo?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>Grupos</td><td>01</td><td>02</td><td>03</td><td>04</td><td>05</td><td>06</td><td>07</td><td>08</td><td>09</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Orientou por meio de questionamentos para a descoberta da relação?

( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Descobriu uma relação válida a partir das análises das informações registradas?</td></tr>
<tr><td>Motivou os grupos?

( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td>Demonstrou segurança?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Sentiu-se à vontade para solicitar orientação?</td></tr>
<tr><td>Demonstrou motivação?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Observação:</td><td colspan="11">Apresentou motivação para a análise?</td></tr>
<tr><td>SIM
EM PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td colspan="11">Registrou sua conclusão na ficha?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>SIM
EM
PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td colspan="11">Observação:</td></tr>
<tr><td colspan="12">MOMENTO VI: Institucionalização</td></tr>
<tr><td>Docente</td><td colspan="11">Grupos</td></tr>
<tr><td>Disponibilizou o espaço no quadro à elaboração das considerações finais?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>Grupos</td><td>01</td><td>02</td><td>03</td><td>04</td><td>05</td><td>06</td><td>07</td><td>08</td><td>09</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mostrou estar motivado para os registros no quadro pelos alunos?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Registrou sua conclusão no quadro?</td></tr>
<tr><td>Mostrou segurança para o registro no quadro pelos alunos?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td>SIM
EM
PARTE
NÃO</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td><td>( )
( )
( )</td></tr>
<tr><td>Fez questionamentos que orientasse a elaboração de um texto adequado?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td><td colspan="11">Mostrou-se motivado para o registro no quadro?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Elaborou conjuntamente com a turma a conclusão da turma?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td>
<td>**SIM
EM PARTE
NÃO**</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
</tr>
<tr>
<td>Deixou claro que a atividade realizada não é uma demonstração do resultado obtido?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td>
<td colspan="11">Elaborou uma conclusão no formato adequado?</td>
</tr>
<tr>
<td>Apresentou uma fórmula para expressar a conclusão da atividade?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td>
<td>**SIM
EM PARTE
NÃO**</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
<td>( )
( )
( )</td>
</tr>
<tr>
<td>Propôs atividade de aprofundamento?
( ) SIM ( ) EM PARTE ( ) NÃO</td>
<td colspan="11" rowspan="2">**Observação:**</td>
</tr>
<tr>
<td>**Observação:**</td>
</tr>
</table>

APÊNDICE H: QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIASSOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

QUESTIONÁRIO

1- **Número da Chamada**:_______

2- **Idade**: _______anos   3- **Gênero**: ( ) Masculino ( ) Feminino   4-**Série**: ____Ano

5- **Tipo de escola que estuda**? ( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Conveniada

6- **Você já ficou em dependência**?
( ) Não   ( ) Sim.   Em quais disciplinas?________________________________

7- **Você já ficou REPROVADO**?
( ) Não   ( ) Sim.   Em quais disciplinas?________________________________

8- **Você gosta de Matemática**? ( ) Não gosto ( ) Suporto ( ) Gosto um pouco ( ) Adoro

9- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?
( ) Superior ( ) Médio ( ) Fundamental ( ) Fundamental incompleto ( ) Não estudou

10- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?
( ) Superior ( ) Médio ( ) Fundamental ( ) Fundamental incompleto ( ) Não estudou

11- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?
( ) Professor particular ( ) Família ( ) Ninguém ( ) Outros. Quem?__________________

12- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?
( ) Todo dia ( )Somente nos finais de semana ( ) No período de prova ( ) Só na véspera da prova ( ) Não estudo fora da escola.

13- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?
( ) Sempre ( ) Quase sempre ( ) Às vezes ( ) Poucas vezes ( ) Nunca

14- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

15- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

16-**Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática**?
( )Contente ( )Tranquilo ( )Com Medo ( )Preocupado ( )Com Raiva ( )Com Calafrios

17- **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**
( )Provas/simulado ( )Testes semanais ( )Seminários ( )Pesquisas ( )Projetos
( )Outros. Quais? _______________

18- **A maioria das aulas das suas aulas de matemática**:
( ) Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
( ) Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
( ) Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
( ) Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
( ) Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

19- **Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava**:
( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto;
( ) Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
( ) Não propunha questões de fixação;
( ) Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

20- **Você possui acesso à internet?**
( ) Não possuo;
( ) Sim, somente em casa;
( ) Sim, somente pelo celular;
( ) Sim, pelo celular e tenho WiFi em casa;

21- **Quanto ao uso de recursos tecnológicos, quais dos seguintes equipamentos você costuma utilizar?**

ASSUNTO	**FREQUÊNCIA**				
	Sempre	Quase sempre	Às vezes	Raramente	Nunca
Você utiliza o computador pessoal para fazer suas atividades escolares.					
Você faz pesquisas na internet através do computador.					
Você acessa internet no celular pessoal para fazer atividades escolares.					
Você utiliza redes sociais de relacionamento no celular.					
Você utiliza aplicativos de Mensagens instantâneas.					
Você tira dúvidas com o professor através de mensagens por celular.					
Você utiliza calculadora científica para estudar matemática.					

APÊNDICE I: TCLT

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu/sua filho(a), para participar da pesquisa intitulada: Um diagnóstico do **Ensino de Trigonometria no Triângulo,** sob a responsabilidade dos professores pesquisadores **Cláudio Lima da Silva**, **Ana Kely Martins da Silva** e **Pedro Franco de Sá**, vinculados a Universidade do Estado do Pará (UEPA).
Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Trigonometria no Triângulo a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do(a) aluno(a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.
Em nenhum momento o(a) aluno(a) será identificado(a). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.
Você e o aluno não terão gastos ou ganhos financeiros por participar da pesquisa.
Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de matemática no conteúdo de Trigonometria no Triângulo.
Você é livre para decidir se seu/sua filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.
Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.
Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com **Cláudio Lima da Silva**, **Ana Kely Martins da Silva** e **Pedro Franco de Sá** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n, Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Parauapebas-Pará, ______ de ______________ de 2023.

____
Assinatura do Pesquisador

Eu, ____ autorizo que meu/minha filho(a) ____a participar, voluntariamente, da pesquisa citada acima, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do Responsável

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem