UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
Campus Cornélio Procópio
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

MARIA CLÁUDIA SILVA JARDIM SELLETI

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OS INCIAIS MEDIANDO O ENSINO DE TÓPICOS DE GEOMETRIA

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2023

MARIA CLÁUDIA SILVA JARDIM SELLETI

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OS INCIAIS MEDIANDO O ENSINO DE TÓPICOS DE GEOMETRIA

MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES FOR EARLY YEARS MEDIATING THE TEACHING TOPICS OF GEOMETRY

Produção Técnica Educacional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Lourdes Maria Werle de Almeida
Coorientador(a): Prof(a). Dr(a). Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

Silva Jardim Selleti, Maria Cláudia
ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS MEDIANDO O ENSINO DE TÓPICOS DE GEOMETRIA / Maria Cláudia Silva Jardim Selleti; orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida; co-orientadora Bárbara Nivalda P. A. Sousa - Cornélio Procópio, 2023.
62 p. :il.

Produção Técnica Educacional (Mestrado Profissional em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2023.

1. Ensino Fundamental. 2. Modelagem Matemática. 3. Geometria. 4. Medidas. 5. Medições. I. Werle de Almeida, Lourdes Maria, orient. II. Nivalda P. A. Sousa, Bárbara, co-orient. III. Título.
CDU: S586a

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta Produção Técnica Educacional tem como objetivo apresentar um caderno de atividades que contempla uma sequência de atividades de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem de medidas e medições nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

São apresentadas cinco atividades que podem ser desenvolvidas com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, visando seu uso para o ensino de Geometria neste nível de escolaridade. Particularmente, as atividades estão focadas na unidade temática Medidas e Grandezas apontadas na BNCC (BRASIL, 2017).

Este material inclui uma breve base teórica relativamente à Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental bem como aspectos referentes à modelagem matemática importantes para o que se propõe este produto educacional.

Em seguida são apresentadas cinco atividades de modelagem cujo desenvolvimento inclui medidas e medições. Cada atividade inclui especificidades relativamente ao uso de instrumentos de medidas e a finalidade das medições para construir uma solução para um problema que tem origem na realidade.

Convidamos a uma leitura deste trabalho e esperamos que possa chamar a sua atenção para as sugestões de atividades e por fim despertar novas ideias que possam contribuir para a construção do processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Motivar e incentivar os alunos é um passo para começarmos a trilhar um caminho inverso, da realidade para a Matemática.

O Produto Técnico Educacional apresentado neste documento é parte integrante da Dissertação de Mestrado Intitulada: “Modelagem matemática nos anos iniciais: um *design* usando sequência de atividades”, disponível em http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino. Para maiores informações, entre em contato com a autora pelo e-mail: mariaclaudiaselleti@gmail.com.

De acordo com o Documento Orientador de APCN[1], emitido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o Produto Educacional proposto classifica-se pela CAPES como Categoria “[...] (i) desenvolvimento de

[1] Disponível em: https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/ensino.pdf. Acesso em: jun. 2022.

material didático e instrucional [...] sequências didáticas, [...]”, pois refere-se a uma sequência de atividades.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

1.1 SOBRE ENSINO DE GEOMETRIA

Considerando a importância de desenvolver o pensamento geométrico, a unidade temática Geometria na BNCC (BRASIL, 2017, p. 271) recomenda que “estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico”. Nesse documento, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, espera-se que os alunos,

> [...] identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartphones), croquis e outras representações [...] indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos (BRASIL, 2017, p. 272).

A Geometria, portanto, envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento e seu ensino na escola

> não pode ficar reduzido a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018, p. 272).

Na presente pesquisa, considerando que as medidas e as formas geométricas estão interligadas ao desenvolvimento de conceitos como perímetro, área e volume, por exemplo, e que compreender a proporcionalidade colabora para a compreensão do uso de medidas, dirigimos nossa atenção para o estudo de medidas e medições nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Conforme sugere WALLE (2009), as medidas não são um assunto fácil para a compreensão dos alunos. Estudos comprovam que os estudantes tendem a ser mais fracos na área de medidas do que em outros tópicos curriculares. O autor indica que, antes que qualquer objeto possa ser medido, é necessário compreender o atributo a ser medido, ou seja, comprimentos são comparados com unidades de comprimento, área às unidades de área, intervalo de tempo às unidades de tempo e assim, por diante.

Uma forma simples de falar sobre medidas com os alunos é dizer que, para a maioria dos atributos que são medidos na escola, medir significa "preencher", "cobrir" ou "emparelhar" com uma unidade de medida, o mesmo atributo. Assim, podemos dizer que a medida de um determinado atributo é uma contagem de quantas unidades são necessárias para "encher", "cobrir" ou "emparelhar " o objeto a ser medido. Portanto, instrumentos de medidas tais como, réguas, balanças, transferidores, relógios, são dispositivos que facilitam esse processo.

Segundo WALLE (2009), existem três componentes educacionais que podem auxiliar o aluno a desenvolver um conhecimento conceitual de medir: fazer comparações; usar modelos de unidades para que os alunos compreendam quais unidades de medidas podem ser utilizadas para um atributo particular em questão e como essas unidades são utilizadas para produzir medidas; e, construir e usar instrumentos de medidas. Se os alunos construírem instrumentos de medidas como por exemplo, uma régua, é mais provável que eles compreendam como o instrumento funciona, ou seja, como ele pode ser usado para medir.

Assim, medir é comparar uma grandeza com outra de mesma natureza, tomada como padrão. Medição é, portanto, o conjunto de operações que tem por objetivo determinar o valor de uma grandeza.

Lidar com medidas e realizar medições é, portanto, uma ação que precise ser estimulada na escola. Faz-se necessário oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades envolvendo conceitos geométricos relacionados com a sua realidade, e não trabalhar só com atividades que reforcem a aplicação de definições. Por meio da abordagem de situações-problema, do contato com práticas inspiradoras e da troca de experiências entre colegas, o ensino de medidas e medições pode favorecer a compreensão de grandezas e medidas.

Neste contexto, a presente pesquisa se dirige ao ensino de medidas e medições por meio de atividades de modelagem matemática.

1.2 SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

De modo geral a modelagem matemática institui-se como uma atividade investigativa a partir de problemas da realidade.

Consideramos o entendimento de Almeida, Silva e Vertuan (2012), que propõem a modelagem matemática como alternativa pedagógica de ensino em que se abordam problemas reais por meio de conhecimentos matemáticos e extra-matemáticos. Para os autores:

> [....] de modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita, em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação

> final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 12).

Ocorre, portanto, uma interação entre a realidade e a Matemática, visto que ocorre uma passagem da situação inicial para o uso de conceitos e procedimentos matemáticos até chegar à situação final, com a solução para o problema inicial proposto. Ainda, segundo os autores Almeida, Silva e Vertuan (2016), a partir dessa interação, é possível que os alunos processem, produzam e agreguem conhecimentos matemáticos com os não matemáticos, os quais serão utilizados para chegar a uma situação final, ou seja, uma solução para o problema.

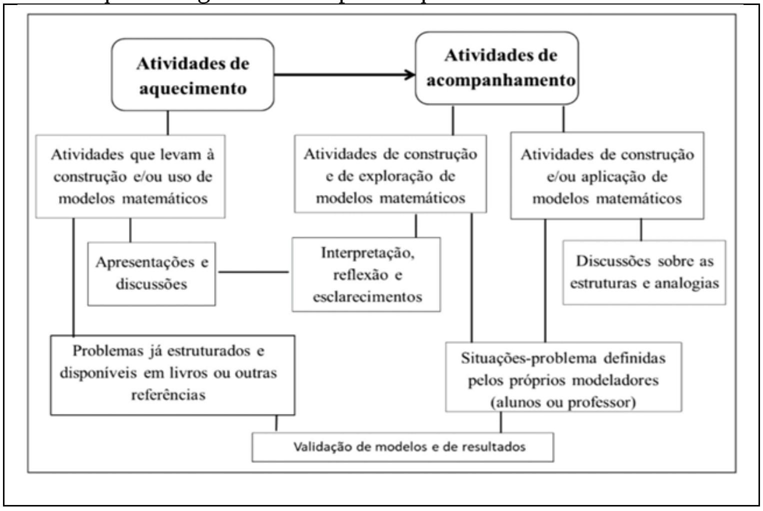
Portanto, para Maaβ (2005), propor atividades de modelagem matemática a partir dos anos iniciais faz com que os estudantes tenham uma outra visão da Matemática que é pregada nas escolas, ou seja, os alunos passam a modificar a crença de que a Matemática é apenas uma ciência objetiva e inquestionável.

Sendo assim a modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de Matemática pode proporcionar à criança, uma participação ativa no seu processo de aprendizagem, pois pode tornar o ensino mais dinâmico, problematizador, investigativo e significativo para o aluno como destaca Tortola (2012).

Mendes e Almeida (2020) ponderam que quando há o intuito de ensinar Matemática por meio de atividades de modelagem matemática, atividades isoladas raramente são suficientes para produzir os resultados esperados (relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos), o que justifica a importância de se desenvolver sequências de atividades estruturalmente relacionadas.

A fim de indicar como as atividades podem ser organizadas para caracterizar a estrutura de uma sequência de atividades de modelagem matemática, Mendes e Almeida (2020) apresentam um esquema organizacional apoiados em Lesh et al. (2003) conforme indica a Figura 1.

Figura 1 – Esquema organizacional para sequências de atividades de modelagem



Fonte: Adaptado de Mendes e Almeida (2020, p. 45).

As atividades de aquecimento visam propor aos alunos situações-problema que conduzem à construção ou ao uso de um modelo matemático e são as primeiras a serem desenvolvidas. Trata-se de situações já estruturadas em que um problema é resolvido mediante a construção, o uso e a análise de um modelo matemático. São situações que viabilizam ao professor responder algumas perguntas sobre pré-requisitos mínimos para os estudantes começarem a desenvolver atividades de modelagem matemática (MENDES; ALMEIDA, 2020).

Essas atividades incentivam os alunos a trabalhar em equipes e, muitas vezes, são utilizadas pelos professores no início de uma unidade do curso. Um de seus objetivos é que o estudante revele ao professor possíveis fragilidades conceituais para que elas possam ser exploradas no decorrer das aulas (MENDES; ALMEIDA, 2020).

Após as atividades de aquecimento, é importante realizar dinâmicas de apresentações e discussões com toda a turma a fim de possibilitar que os estudantes tenham contato com outras formas de pensar, discutam os pontos fortes e fracos das abordagens alternativas e identifiquem as direções para a melhoria em seu próprio trabalho ou no trabalho dos demais.

As atividades de acompanhamento**,** por sua vez, consistem em atividades que devem ajudar os alunos a reconhecer conexões entre os seus conhecimentos teóricos e situações cotidianas.

Assim, o trabalho com sequências de atividades de modelagem matemática pode permitir ao aluno adquirir habilidade para resolver problemas, formular hipóteses, buscar e organizar dados, tomar decisões, pesquisar, propor questões para si mesmo e para os colegas, defender seus pontos de vista e trabalhar em grupo de forma colaborativa, bem como atuar na exploração e comunicação de modelos matemáticos.

2 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

O caderno pedagógico inclui cinco atividades de modelagem matemática cujas temáticas requerem que os alunos realizem medições e trabalhem com medidas. Diferentes instrumentos de medida são usados nas atividades e essa diversidade proporciona uma boa familiaridade para os alunos.

As atividades são caracterizadas como atividades de aquecimento e atividades de acompanhamento em função da familiaridade dos alunos com elementos relativos a medidas e medições bem como com relação às suas experiências com modelagem matemática. (Quadro 1)

Quadro 1 – Estrutura do caderno pedagógico

TEMÁTICA DA ATIVIDADE	Nº DE AULAS	TIPO DE ATIVIDADE
Como determinar alturas?	4	Aquecimento
É possível medir a beleza de uma pessoa?	5	Aquecimento
A reforma do estádio	8	Acompanhamento
Descobrindo o número do calçado	6	Acompanhamento
O estacionamento da escola	6	Acompanhamento

Fonte: as autoras (2022).

As atividades foram desenvolvidas por alunos de um quarto ano do Ensino Fundamental e o Caderno apresenta as resoluções como realizadas por estes grupos de alunos.

O desenvolvimento da sequência de atividades, pôde oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades diferenciadas envolvendo conceitos geométricos relacionados com a sua realidade bem como estabeleceu interdisciplinaridade com outras disciplinas como Geografia e Arte, bem como proporcionou a pesquisa meios como *sites* da internet e o uso de recursos tecnológicos como a calculadora e o telefone celular com fins específicos na sala de aula.

Em termos gerais, o uso de instrumentos de medidas, e a realização de medições com finalidades específicas se deu como ilustrado na Tabela 1. Além disso, também elencamos os conteúdos matemáticos que, em cada atividade, se associaram ao ato de medir e a sua finalidade em cada atividade de modelagem matemática.

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas pelos alunos

ATIVIDADES	ESTÁGIO DA SEQUÊNCIA	INSTRUMENTOS DE MEDIDA	O QUE MEDIRAM?	PAPEL DA MEDIÇÃO	CONCEITOS MATEMÁTICOS USADOS
Como determinar alturas?	Aquecimento	Réguas, moldes de cartolina	Altura da professora	Fornecer informações e possibilidade de lidar com proporções[2].	Unidades de medida convencionais: metro, centímetro,proporção, razão e operação com números decimais
É possível medir a beleza de uma pessoa?	Aquecimento	Réguas e fitas métrica	Partes do corpo e altura dos alunos	Entender como a razão entre medidas pode se aproximar de um valor constante: o número de ouro.	Razão e operação com números decimais
A reforma do estádio	Acompanha-mento	Trenas	A região gramada do estádio	Fornecer informações para lidar com medidas lineares (metro e centímetro) e com medidas de superfície (metro quadrado)	Medida de área
Descobrindo o número do calçado	Acompanha-mento	Grãos	Os pés dos alunos	Associar sistema de medição antigos com os atualmente disponíveis para conhecer o número do calçado.	Unidades de medida não-convencionais; divisão de decimais
O estacionamento da escola	Acompanha-mento	Trenas	A região em que se localiza um estacio-namento	Organizar a distribuição do espaço necessário para um estacionamento.	Medida de área; comparação de áreas

Fonte: elaborado pelas autoras (2022).

[2] Também pode-se pensar na questão de algo que não pode ser medido diretamente com o auxílio de um instrumento de medida.

Atividade 1

Como determinar alturas?

Esta foi a primeira atividade desenvolvida pelos alunos. Para tanto, a turma se organizou em 5 grupos (G1; G2; G3; G4 e G5) contendo 5 alunos em cada grupo, havendo necessidade de 2 encontros, totalizando 4 aulas. Considerando a qualidade dos registros e dos áudios gerados, apresenta-se os encaminhamentos de 4 grupos. Dentro da sequência, caracteriza-se como atividade de aquecimento.

Para o desenvolvimento da atividade, inicialmente, a turma foi visitar a escola que está passando por reformas e aproveitou para fotografar a professora embaixo do pé de araucária. A árvore foi apreciada por todos, inclusive, na ocasião, um dos alunos da turma relatou que seu pai havia acompado o plantio da árvore durante a comemoração de um dos aniversários da escola. Foram disponibilizados para os alunos diversos materiais como fitas métricas, calculadoras, réguas, cartolinas, trenas e folhas para anotações. Nessa atividade os alunos tiveram que descobrir a altura da árvore tomando como base a altura da professora na foto.

Na sala a professora iniciou a aula apresentando a folha com a imagem conforme indica o Quadro 3. Nesse momento houve várias argumentações dos alunos relativamente à árvore símbolo do estado do Paraná, referindo-se à história do seu plantio na escola e do cultivo e da importância da gralha azul para o replantio. Em seguida a professora desafiou os alunos com a questão: “Algum de vocês sabe a altura dessa araucária”? “É possível determinar a altura usando a imagem da foto?”

Quadro 3 – Atividade 1 – Como determinar alturas?

Temos aqui a imagem da araucária na frente da Escola Municipal Ana Nery. Ao lado da árvore está a professora Maria Cláudia. Qual é a altura da árvore?

Fonte: as autoras (2022).

Com a imagem do Quadro 2 em mãos, após realizada a leitura em conjunto, a aluna A1 do grupo G1 interviu e perguntou:

A1: Professora, quanto você mede de altura?
Prof: A minha medida é de 1,65 m de altura. Vamos confirmar?

Nesse momento os alunos pediram para a professora se posicionar em pé no armário da sala de aula e como dispunham de vários instrumentos de medição, avaliaram no grande grupo que o uso da fita métrica seria o instrumento de medição ideal. O diálogo entre A1 do G1 e A4 do G3, indica a ação dos alunos.

A4: Olha, a régua pode ser usada para medirmos a professora.
A1: Não, pelo tamanho da professora, a régua vai demorar muito e a gente pode errar porque ela é dura.
A4: Ah, então vamos usar a fita métrica!

Em outra discussão relativa à altura da professora a aluna A2 do G5, sugeriu que a professora tirasse os sapatos para encontrar a altura correta, ao passo que outro aluno do mesmo grupo, A4, disse que bastava medir a altura do calçado e descontar da altura total da professora. Usando então uma fita métrica, cada grupo aferiu a altura da professora como sendo 1,65, ou seja, 1 metro e 65 centímetros.

Em seguida, considerando conhecida a altura da professora, o desafio foi determinar a altura da árvore usando a altura da professora.

Os alunos, nos cinco grupos, indicaram dificuldade em usar a régua ou a fita métrica para medir a altura da árvore usando a altura da professora.

Percebida esta dificuldade em manusear os instrumentos, a professora propôs que realizassem a construção, em papel cartolina, de uma régua, para constatarem a diferença entre usar o instrumento de medida e compreender como ele funciona, como "mede". O instrumento foi escolhido porque os alunos estavam mais familiarizados com ele em sala de aula. Durante a construção do instrumento, puderam observar que são os espaços da régua que são importantes, e não os "risquinhos". Após a confecção que durou uma aula, os alunos alinharam as réguas nas fitas métricas e puderam confirmar suas medições bem como brincar de medir vários objetos da sala de aula.

Foi entendido, também, pela professora, que os alunos usavam os dedos como instrumento de medida para estimar a altura da professora na foto, ou até mesmo a régua como forma de tentar encontrar uma resposta para o problema. Nesse momento foi sugerido o molde representtivo da altura da professora, feito de papel cartolina e que os alunos passaram, então a utilizar conforme indica a Figura 2.

Figura 2 – Molde representativo da altura da professora

Fonte: registro escrito dos alunos (2022).

Usando o molde relativo à altura da professora, não demorou para que os alunos realizassem as medições estabelecendo estratégias para chegar à altura da os araucária.

Neste ponto do desenvolvimento da atividade, identificamos a fase da matematização que é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e do uso de símbolos para realizar descrições matemáticas que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações com relação ao problema definido na fase da inteiração [...] proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A maioria dos alunos nos grupos foi chegando a um consenso mas não sabiam o que fazer com os milímetros que sobravam na altura da árvore quando a mediam observando quantas vezes o instrumento “cartolina” cabia na altura da árvore. Foi percebida a dificuldade em alguns para lidar com as medidas na régua ao que a professora indagou:

> *Prof: Pode se falar em aproximação na altura ou as medidas devem ser exatas?*

Como os alunos apresentaram dificuldades com a representação decimal dos numerais, a professora explicou que ao invés de escrever por extenso havia uma forma decimal de escrever. Mediante o Material Dourado foi explicado que nosso sistema possui base 10 e os risquinhos dos milímetros são menores que o centímetro, ou seja correspondem a uma unidade dividida em 10 partes (1/10) que é um número decimal, o “0,1”. Os alunos dominavam o entendimento da parte inteira mas apresentaram dificuldades na parte fracionada.

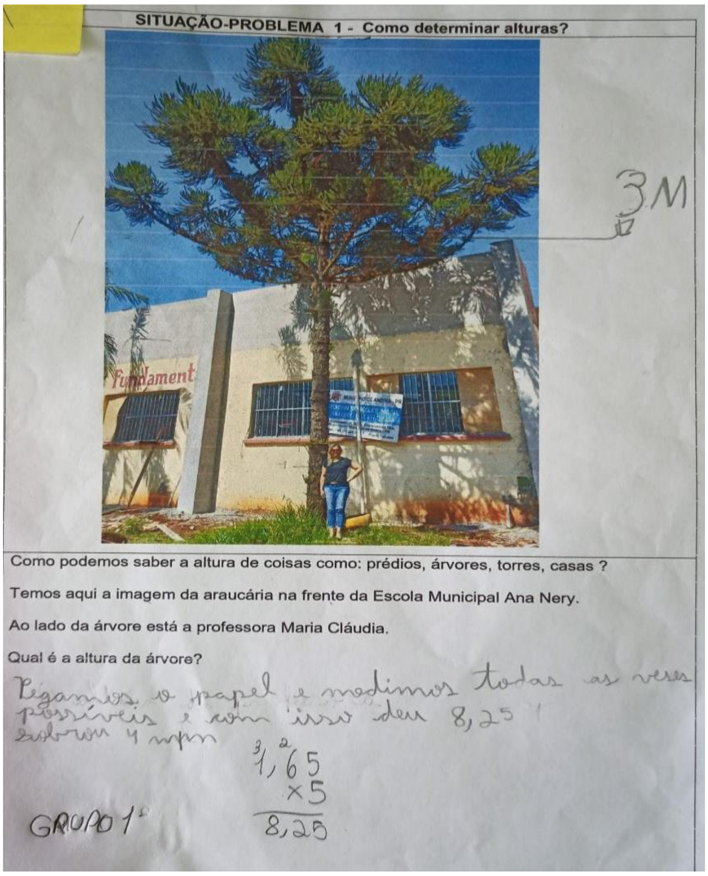
Constatamos que ao alunos apresentaram dificuldades em raciocinar visando resolver o problema proposto.

> *Alunos: Tia[3], é de mais ou de menos? É de dividir ou de multiplicar?*

Na Figura 3, consta o registro escrito das alunas do grupo G1, que descreveu o procedimento adotado pelo grupo:

> *Alunas: Pegamos o papel e medimos toda as vezes que coube na altura da árvore e deu 8,25 mas sobrou 4 mm.*

Figura 3 – Resolução das alunas do grupo G1



Fonte: Registro escrito das alunas do grupo G1 (2022).

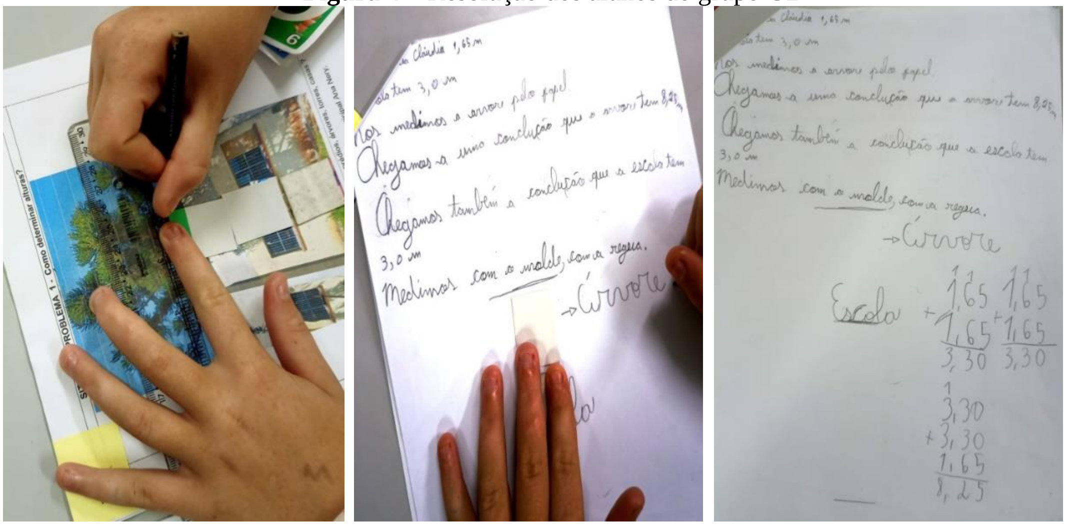
As alunas do grupo G1, após várias tentativas, chegaram à medida que vemos na imagem, ou seja, 8,25m. Constataram a sobra de 4mm, mas não chegaram ao consenso do

3 "No Brasil, é frequente o uso do termo “tia” na educação infantil para se referir à profissional da educação. Essa terminologia tira da professora sua identidade, tanto de sujeito como de profissional. Além disso, o termo “tia” gera uma confusão quando é considerado como símbolo de afetividade."

que realizar com essa sobra.

Os alunos do grupo G2, usaram procedimento distinto do Grupo G1 para determinar a altura da árvore usando o instrumento construído (Figura 4).

Figura 4 – Resolução dos alunos do grupo G2



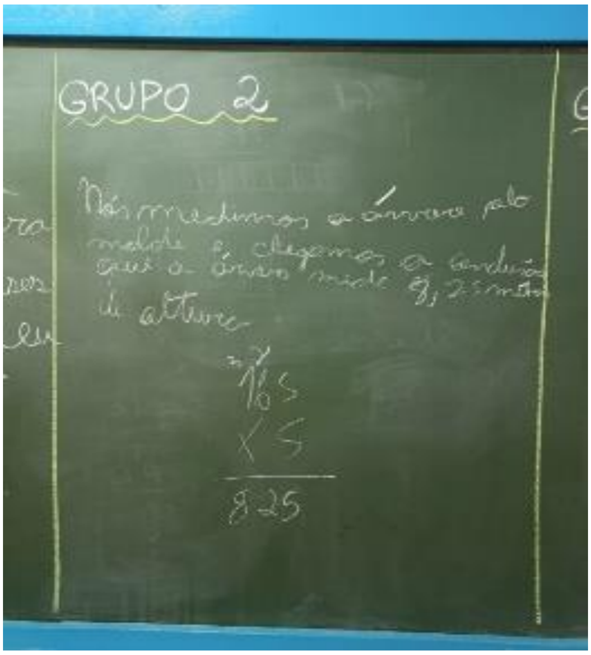
Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

Esse grupo colocou o molde confeccionado sobre a imagem da árvore e realizando adições relativas à altura da professora que culminou em 8,25m a altura da árvore. Realizavam as medições e confirmavam com a régua. Também calcularam a altura da escola utilizando o mesmo procedimento. Constatamos, a tentativa de validação realizada através do diálogo entre eles.

> *A2: Nossa! Acho que está certo, sim!*
> *A3: Verdade! A escola é mais baixa mesmo que a árvore e 3 é menor que 8!*

Os alunos construíram, inicialmente, o modelo matemático, neste caso expresso pelas somas das medidas parciais conforme constam na Figura 4. Em seguida, entretanto, perceberam que poderiam também usar multiplicação, escrevendo o modelo matemático como um produto da quantidade de vezes que o instrumento de medida cabia na altura da árvore (Figura 5).

Figura 5 – Modelo matemático do grupo G2

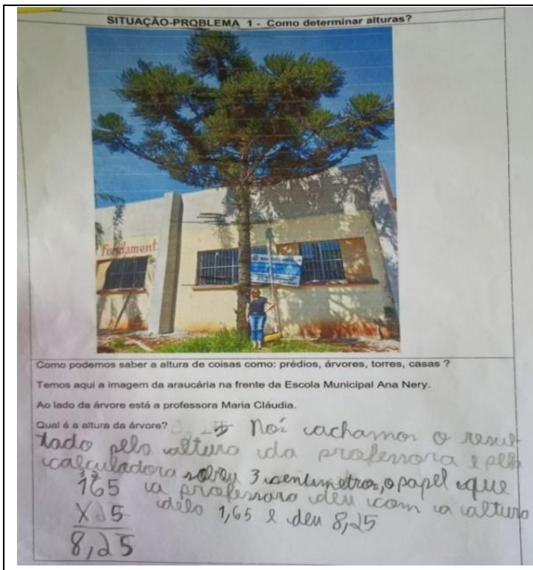


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

A resposta para o problema apresentada pelos alunos do grupo G2, realizada no quadro, é o modelo matemático, com uso da operação de multiplicação.

Os alunos do Grupo 3 também chegaram à conclusão, com a ajuda da calculadora, que a altura da araucária é 8,25m, sem resolução para os milímetros que sobraram na medida da árvore. A medida da altura da professora feita com o molde, coube 5 vezes na árvore e sobraram 5 mm (Figura 6).

Figura 6 – Resolução dos alunos do grupo G3

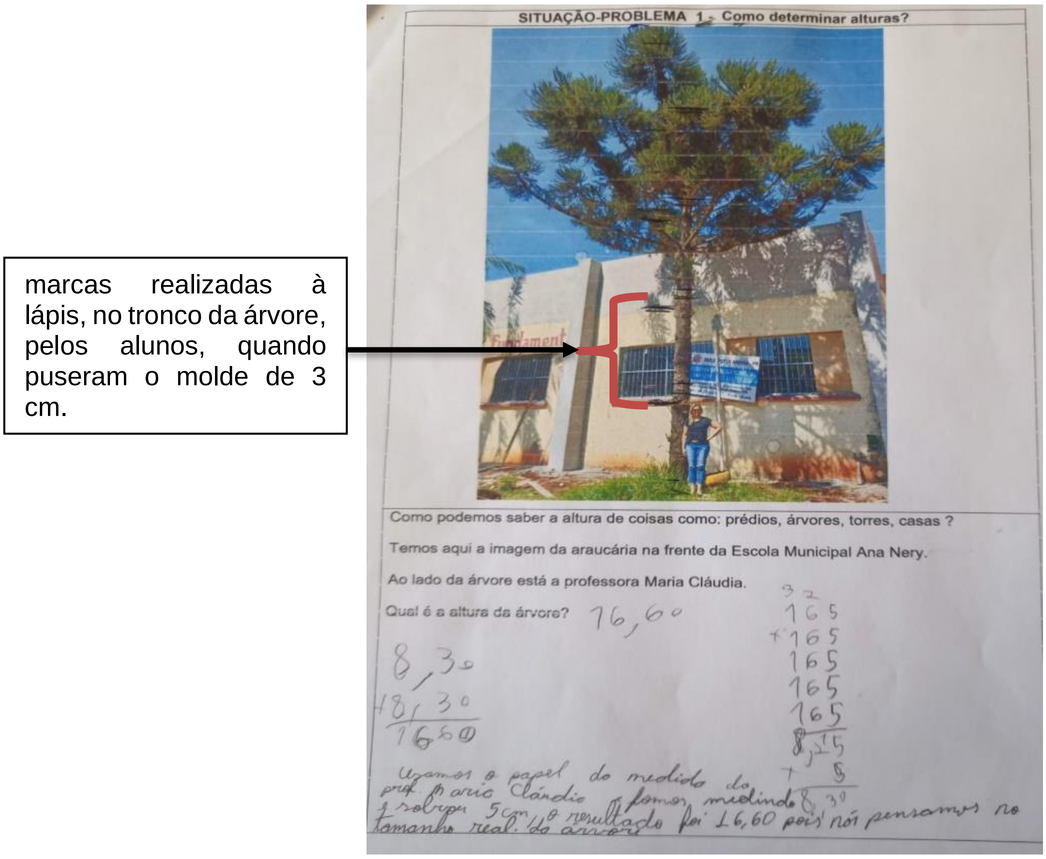


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

Na Figura 6, podemos verificar que, na resolução do grupo G3, os alunos construíram como modelo matemático, um algorítimo da multiplicação. Nesta idade (9 anos) os alunos realizam estimativas.

Os alunos do grupo G4, com o intuito de confirmar as medições realizadas, demarcam com lápis na árvore a medida do molde relativo à altura da professora para visualizar quantas vezes cabe na altura da árvore (Figura 7).

Figura 7 – Resolução dos alunos do grupo G4



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Na figura 7, com riquezas de informações, o aluno A3 do grupo G4, revela na folha de atividade de resolução oferecida, essa liberdade que a modelagem matemática proporciona para o aluno expressar suas ideias.

Atividade 2

É possível medir a beleza de uma pessoa?

É Possível Medir a Beleza de Uma Pessoa?

Esta foi a segunda atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos e na sequência, caracteriza-se também como uma atividade de aquecimento. Para seu desenvolvimento em grupos houve a necessidade de dois encontros totalizando quatro aulas.

Com a finalidade de informar os alunos sobre o tema da atividade, a professora inicialmente os levou até a sala de televisão onde assistiram, todos juntos, ao filme de 1959, "Donald no país da matemágica". Após assistirem ao filme, ocorreu uma roda de conversa a respeito do que eles consideravam como padrão de beleza. Eles reconheceram, por meio do filme, que a regra de ouro é uma proporção que pode ser calculada na cultura, como na Catedral de Notre Dame, na obra 'Monalisa' de Leonardo da Vinci, entre outros.

Foi discutido com os alunos que a regra de ouro, ou também denominado número de ouro, é a razão entre um segmento todo e uma parte maior deste segmento. Trata-se do número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que corresponde a, aproximadamente, 1,618.

Na roda de conversa foi evidenciado que os espirais da regra de ouro podem ser vistos na natureza: tudo está organizado e podemos ver Matemática na música, na arte, entre outros. Nesta atividade os alunos tiveram oportunidade de desconstruir um padrão de beleza imposto pela sociedade e puderam lançar um novo olhar sobre a beleza por meio de relações harmoniosas na natureza, e até no próprio corpo como mostrado no filme. Saber que os gregos e outros povos na antiguidade consideravam a regra do número de ouro perfeita e descobrir essa regra no corpo humano por meio de medidas e medições foi motivador para os alunos. Vejamos uma foto que registrou este momento de inteiração (Figura 8).

Figura 8 – Exibição de vídeo

Fonte: acervo das autoras (2022).

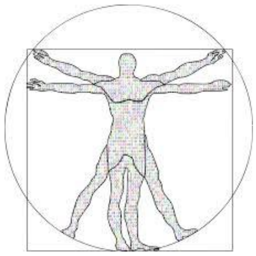
Após a exibição do filme, a professora propôs a situação-problema: "Será que é possível medir a beleza de uma pessoa?" Então, os alunos pediram para a professora pesquisar fotos de personagens famosos que iam citando, como Gisele Bundchen, Gustavo Lima, Lucas

Netto, Bless, Titi e Zyan (filhos do ator Bruno Cagliasso). Enquanto a professora ia exibindo fotos dos famosos, viam e opinavam sobre a beleza. Começaram, então, a perceber que beleza é algo subjetivo pois enquanto uns achavam lindo determinado famoso, outros nem tanto.

Depois da roda de conversa, os alunos foram com a professora para a sala de aula, onde foram organizados em 5 grupos de 5 alunos, G1, G2, G3, G4 e G5. Foram distribuídas as folhas das atividades (Quadro 4) com explicação, bem como materiais para medição como fitas métricas, réguas, trenas, etc. A intenção era chegar o mais próximo possível do "número de ouro", ou seja, do valor aproximado de 1,618...

Quadro 4 – Atividade 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa?

É POSSÍVEL MEDIR A BELEZA DE UMA PESSOA?



Então vamos realizar medições para falarmos sobre a beleza?

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
____________________	Da altura do aluno: ____________ Do umbigo até o chão: _________	
	Do queixo até início do cabelo: ________ Do queixo até as sobrancelhas: _______	

Fonte: adaptado de Tortola (2016).

Os alunos deveriam medir partes de seu corpo e dos colegas e encontrar o quociente de cada medida. Com a liberdade de escolher o instrumento de medição que melhor os ajudasse nas medições, se dispersaram pela sala de aula e iniciaram, ora encostados no quadro, ora deitados no chão, ora recostados no armário, as medições dos colegas.

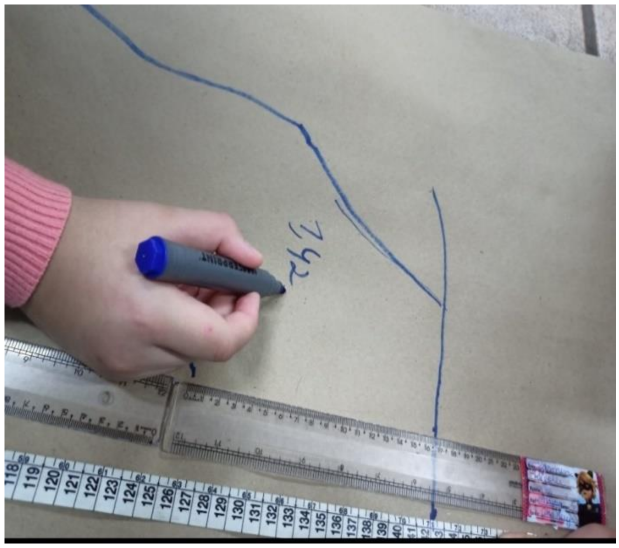
Conforme os alunos coletavam os dados, começaram a questionar a professora "Tia é de vezes ou de dividir", a qual, por sua vez, retomava os conceitos matemáticos necessários, por exemplo, as quatro operações e a noção de quociente como resultado da divisão entre dois números; soma, para contas de adição e diferença para as contas de subtração.

Em cada grupo, diferentes procedimentos foram utilizados para o cálculo das medidas e a realização do quociente que era solicitado no Quadro 4.

As alunas do Grupo 1 realizaram o contorno de uma das integrantes no papel kraft e foram confirmando a medição com auxílio da régua e fita métrica, concomitante (Figura 9). A maioria das alunas não sabiam suas alturas e durante as medições, ora utilizavam a fita métrica do lado correto, ora mudavam o lado da fita até pegarem a régua para conferir. Observe o relato da fala de uma delas enquanto mediam:

A2: Vamos pegar a régua que a gente tá acostumada, que vai dar certo.

Figura 9 – Medição das alunas do grupo G1



Fonte: registro escrito das alunas do grupo G1 (2022).

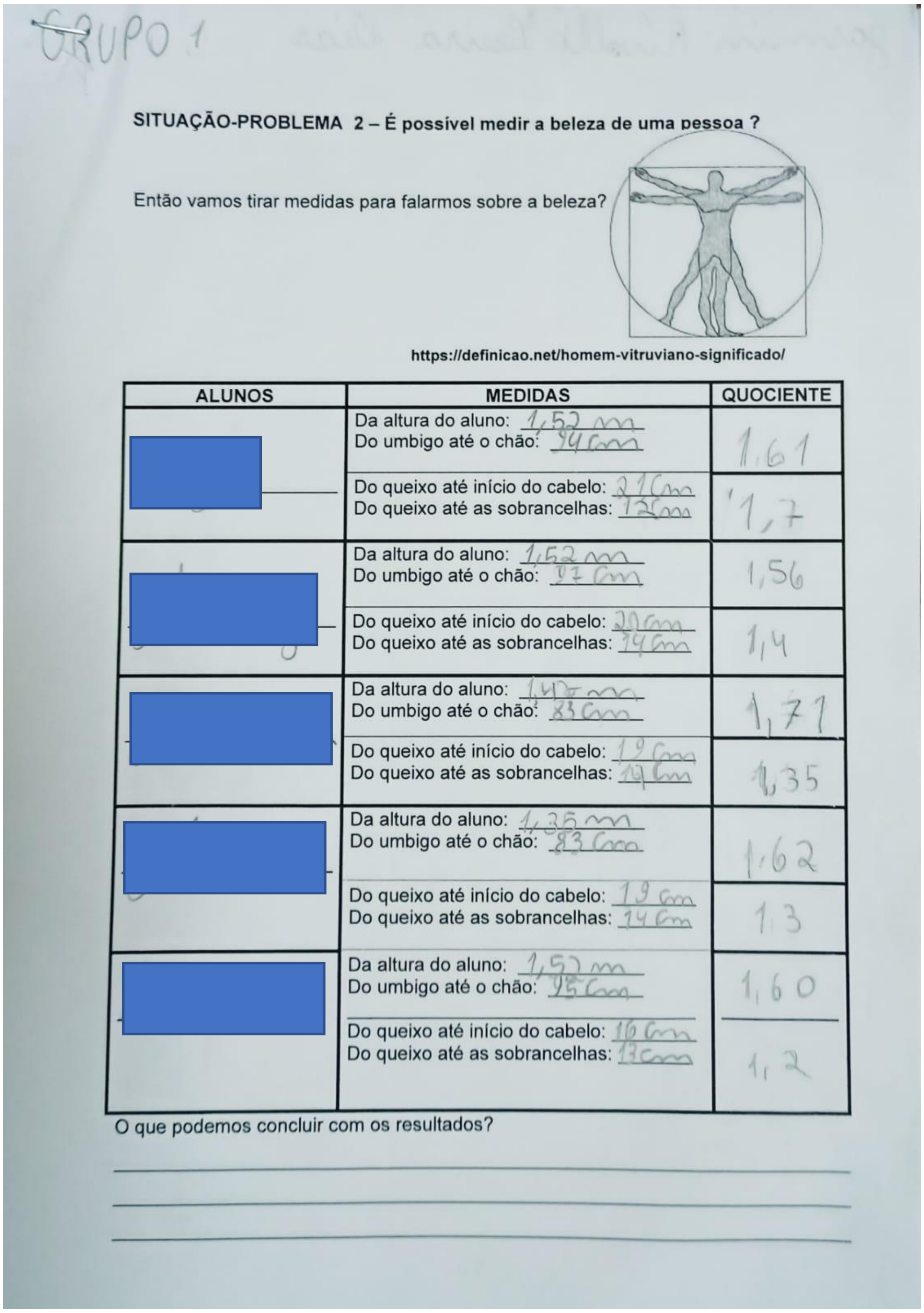
Diante da imagem da aluna utilizando a régua (Figura10), podemos perceber que, mesmo em posse de outros instrumentos de medição, as alunas sempre recorriam às réguas de 30 cm, até mesmo por ser o único instrumento com o qual já haviam tido maior contato.

Apesar de ainda não saberem realizar a operação de divisão com numerais racionais, as alunas o fizeram com a ajuda da calculadora e a mediação da professora. Foi necessário neste ponto da atividade a explicação da professora sobre o uso da calculadora, a funcionalidade de algumas teclas, em particular para o cálculo das 4 operações. As alunas localizaram, na calculadora, as teclas que representam as quatro operações básicas e realizaram os cálculos, utilizando-a como uma ferramenta de aprendizagem que promove autonomia.

Quando as alunas utilizavam a fita métrica que mede 1,50m eles realizavam adições relacionadas aos centímetros que passavam, mediante orientação da professora. Por exemplo, 1,50m mais 0,12m que resulta em 1metro e 65 centímetros. Assim que mediam e realizavam a divisão na calculadora, eram orientados a utilizar duas casas decimais após a vírgula e constatavam por exemplo que 1,66 significava 1 metro e 66 centímetros. Neste contexto, o sentido do conceito de medida ia sendo constituído a partir dos diferentes instrumentos utilizados para a coleta de dados, bem como por meio dos cálculos necessários para resolução das atividades de modelagem matemática.

As alunas do grupo G1 se esforçaram para chegar o mais próximo possível do número de ouro. Elas faziam e refaziam contas na calculadora para se certificarem do quociente, conferindo os resultados com as colegas. Podemos verificar o registro desses cálculos realizados pelas alunas (Figura 10).

Figura 10 – Resolução das alunas do grupo G1


GRUPO 1

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?

https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[redacted]	Da altura do aluno: 1,52 m Do umbigo até o chão: 94 cm	1,61
	Do queixo até início do cabelo: 21 cm Do queixo até as sobrancelhas: 12 cm	1,7
[redacted]	Da altura do aluno: 1,52 m Do umbigo até o chão: 97 cm	1,56
	Do queixo até início do cabelo: 20 cm Do queixo até as sobrancelhas: 14 cm	1,4
[redacted]	Da altura do aluno: 1,4[illegible] m Do umbigo até o chão: 83 cm	1,71
	Do queixo até início do cabelo: 19 cm Do queixo até as sobrancelhas: 14 cm	1,35
[redacted]	Da altura do aluno: 1,35 m Do umbigo até o chão: 83 cm	1,62
	Do queixo até início do cabelo: 19 cm Do queixo até as sobrancelhas: 14 cm	1,3
[redacted]	Da altura do aluno: 1,52 m Do umbigo até o chão: 95 cm	1,60
	Do queixo até início do cabelo: 16 cm Do queixo até as sobrancelhas: 13 cm	1,2

O que podemos concluir com os resultados?

Fonte: Registro escrito das alunas do grupo G1 (2022).

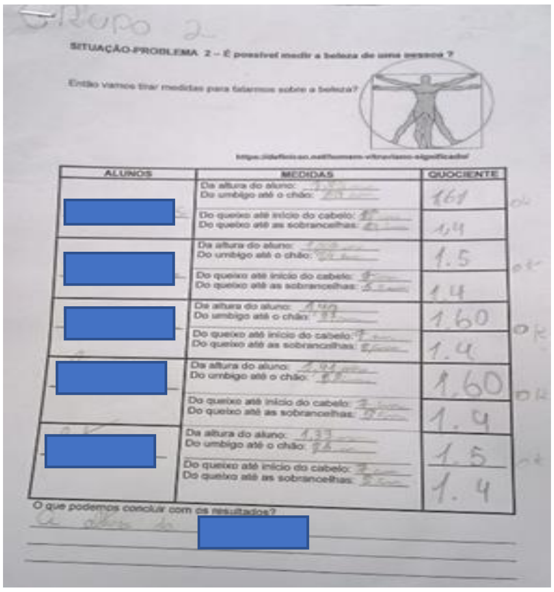
Já as alunas do Grupo G2, coletaram as medidas recostadas no quadro (Figura 11). Elas iniciaram a realização das medições de tênis, no entanto, quando elas perceberam que outros grupos tiravam os tênis e encontravam o quociente mais próximo do número de ouro, decidiram refazer suas medições.

Figura 11 – Medições das alunas do grupo G2

Fonte: acervo da autora (2022).

As alunas do grupo G2, em procedimentos semelhantes aos das alunas do grupo G1, sistematizaram seus resultados na imagem da Figura 12.

Figura 12 – Resolução das alunas do grupo G2



Grupo 2

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,61
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,4
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1.5
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1.4
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1.60
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1.4
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1.60
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1.4
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1.5
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1.4

O que podemos concluir com os resultados?

[illegible] [redacted]

Fonte: Registro escrito das alunas do grupo G2 (2022).

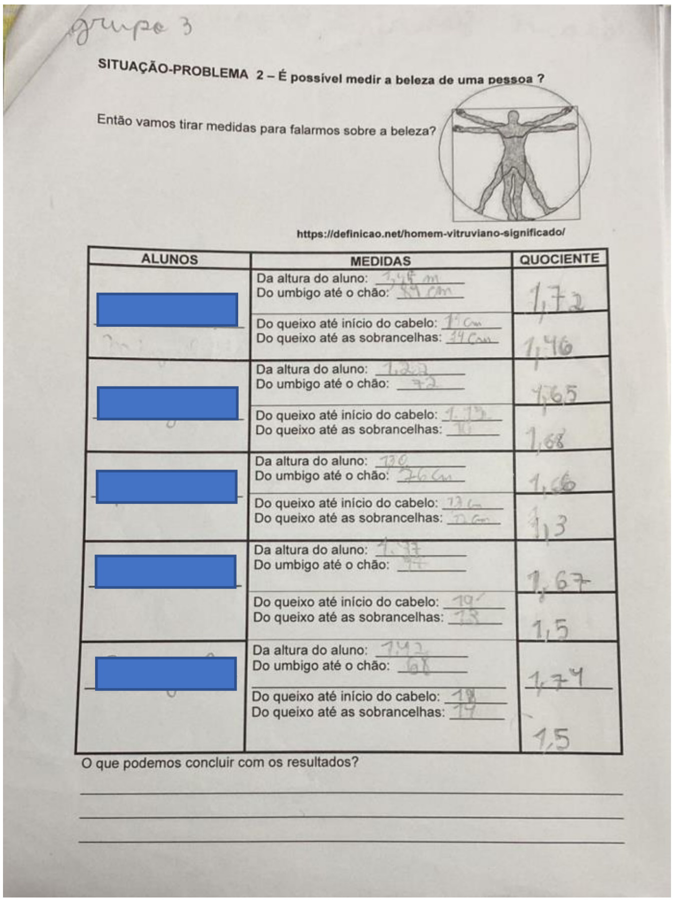
O manejo dos instrumentos de medida não era comum a nenhum desses alunos, por exemplo, vários deles tinham dificuldades em posicionar a fita métrica para realizar a medida das alturas, mas em trabalho colaborativo, colegas e professora auxiliavam na realização das medidas.

À medida que iam realizando as medições encostados na lousa, parede, armários, os alunos iam preenchendo o Quadro 4, a fim de encontrar o quociente. Também ocorreram dificuldades na leitura dos numerais racionais bem como no uso da calculadora, e foram sendo auxiliados pela professora bem como pelos colegas.

Neste momento, houve a necessidade de introduzir o conteúdo de divisão e a professora os questionou se sabiam onde estava o resto da divisão que estavam realizando, se teria uma forma de encontrá-lo utilizando a calculadora. Também foi abordado o assunto referente à vírgula nas casas decimais.

A partir das explicações e realização do cálculo, os alunos do Grupo 3 também realizaram as medições e encontraram o quociente próximo ao número de ouro (Figura 13).

Figura 13 – Resolução dos alunos do grupo G3


grupo 3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?

https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,72
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,46
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,65
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,68
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,66
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,3
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,67
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,5
[redacted]	Da altura do aluno: [illegible] Do umbigo até o chão: [illegible]	1,74
	Do queixo até início do cabelo: [illegible] Do queixo até as sobrancelhas: [illegible]	1,5

O que podemos concluir com os resultados?

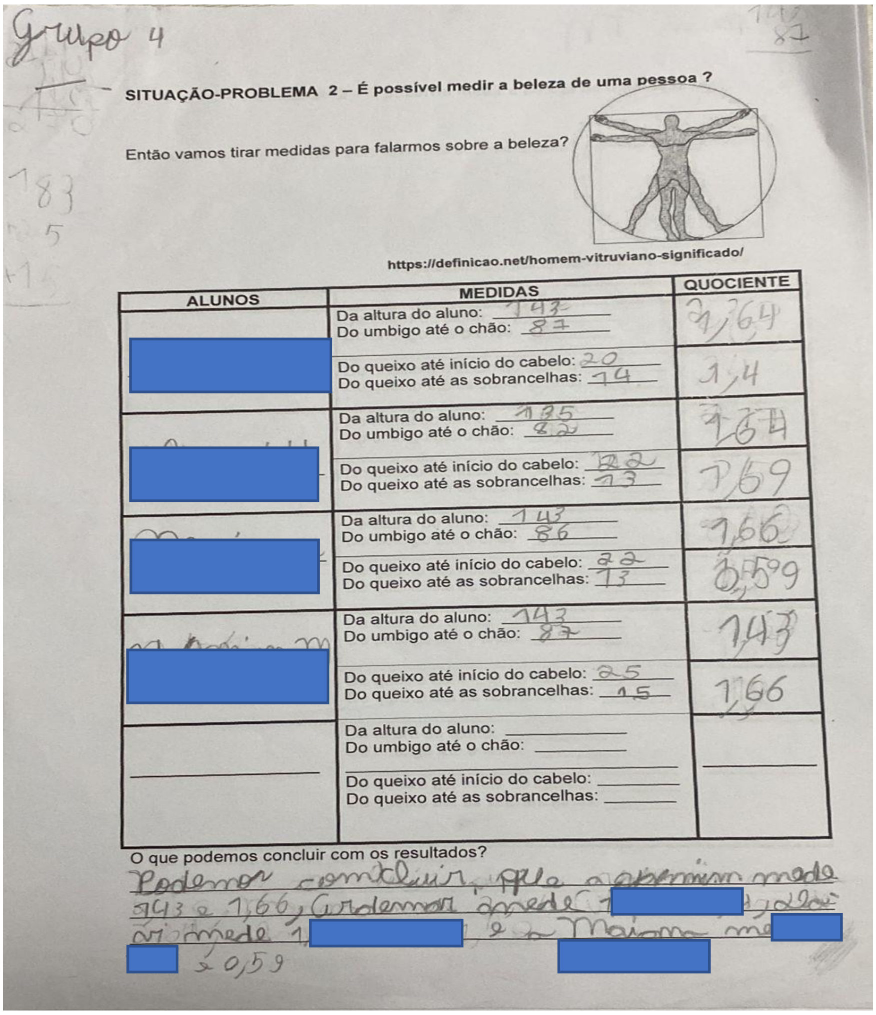
Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G3.

No desenvolvimento da atividade pelos alunos do grupo G4, um dos alunos, A20, tinha uma estatura baixa e ao mesmo tempo apresentava certo desconforto devido à sua altura. Quando da realização das medições dentro do grupo, os alunos lidaram com a situação ao calcularem o quociente solicitado em relação ao número de ouro, conforme sinaliza o diálogo:

> *A2: Tá vendo? Você não é baixinho!*
> *A1: Eu não sabia que eu ia chegar perto desse número de beleza!*

No grupo G4, os alunos também realizaram as medições e com a calculadora, chegaram ao quociente desejado, ou seja, o mais próximo possível ao número de ouro. Os modelos matemáticos foram apresentados com verificação dos cálculos no grupo. Quando alguma medida era discrepante, a professora intervinha, incentivando os alunos a refazerem os cálculos e registrar os resultados na folha (Figura 14).

Figura 14 – Resolução dos alunos do grupo G4


Grupo 4

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?

https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE
[redacted]	Da altura do aluno: 143 Do umbigo até o chão: 87	1,64
	Do queixo até início do cabelo: 20 Do queixo até as sobrancelhas: 14	1,4
[redacted]	Da altura do aluno: 135 Do umbigo até o chão: 82	1,64
	Do queixo até início do cabelo: 22 Do queixo até as sobrancelhas: 13	1,69
[redacted]	Da altura do aluno: 143 Do umbigo até o chão: 86	1,66
	Do queixo até início do cabelo: 22 Do queixo até as sobrancelhas: 13	0,59
[redacted]	Da altura do aluno: 143 Do umbigo até o chão: 87	1,43
	Do queixo até início do cabelo: 25 Do queixo até as sobrancelhas: 15	1,66
	Da altura do aluno: Do umbigo até o chão:	
	Do queixo até início do cabelo: Do queixo até as sobrancelhas:	

O que podemos concluir com os resultados?

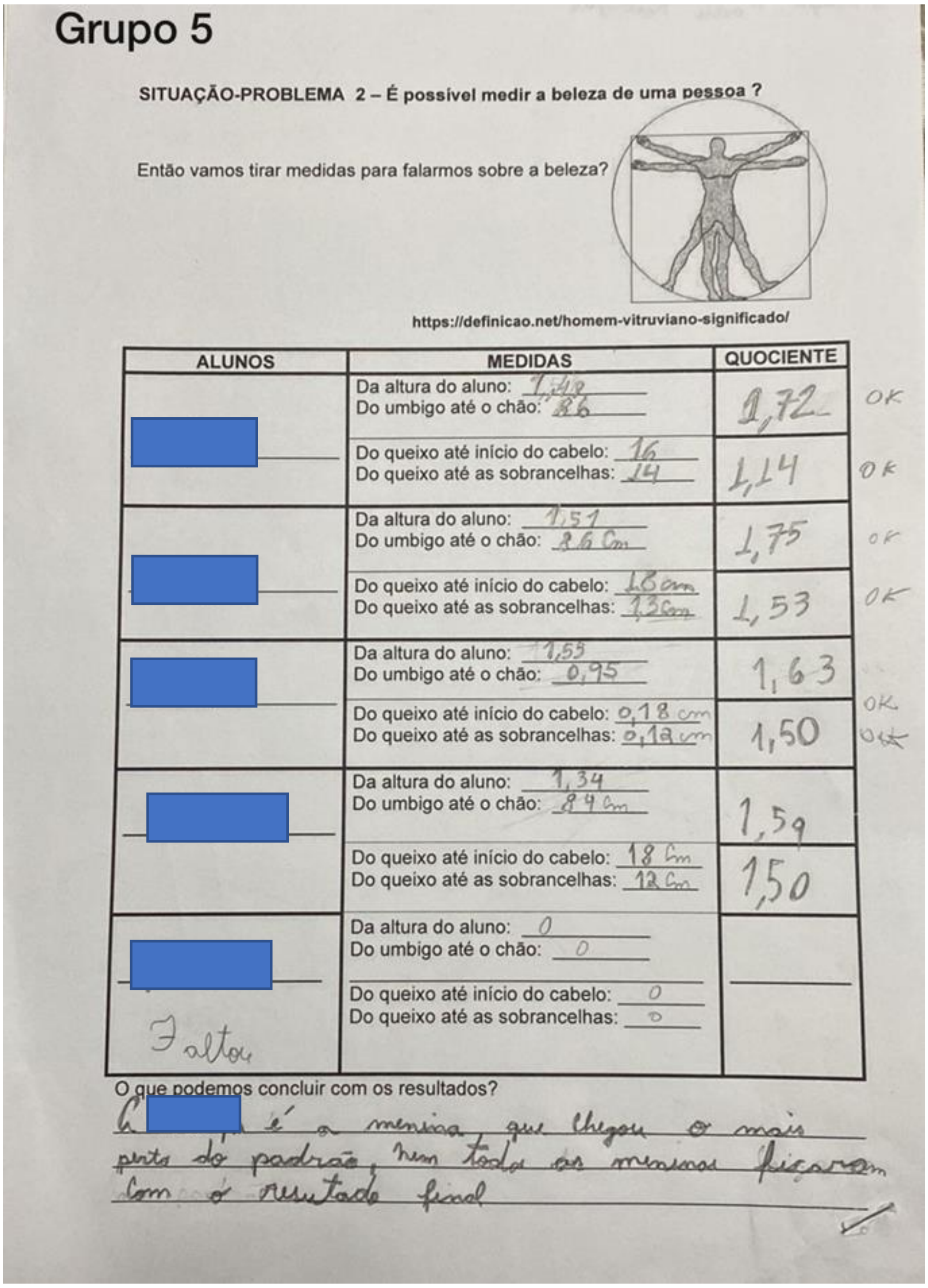
Podemos concluir que a maioria mede 1,43 e 1,66, [illegible] mede 1[redacted] [illegible] mede 1[redacted] e a [illegible] me[redacted] [redacted] e 0,59

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Finalmente o Grupo 5 apresentou sua conclusão para os demais alunos (Figura 15). Na perspectiva desse grupo, teve uma aluna que chegou mais próxima ao número de ouro. Questionados sobre a conclusão encontrada, o aluno A4 respondeu:

A4: Tia, eu acho que é porque a A3 é linda mesmo!

Figura 15 – Resolução dos alunos do grupo G5



Grupo 5

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 – É possível medir a beleza de uma pessoa ?

Então vamos tirar medidas para falarmos sobre a beleza?

https://definicao.net/homem-vitruviano-significado/

ALUNOS	MEDIDAS	QUOCIENTE	
[redacted]	Da altura do aluno: 1,48 Do umbigo até o chão: 86	1,72	OK
	Do queixo até início do cabelo: 16 Do queixo até as sobrancelhas: 14	1,14	OK
[redacted]	Da altura do aluno: 1,51 Do umbigo até o chão: 86 Cm	1,75	ok
	Do queixo até início do cabelo: 18 cm Do queixo até as sobrancelhas: 13 Cm	1,53	OK
[redacted]	Da altura do aluno: 1,55 Do umbigo até o chão: 0,95	1,63	OK
	Do queixo até início do cabelo: 0,18 cm Do queixo até as sobrancelhas: 0,12 cm	1,50	OK
[redacted]	Da altura do aluno: 1,34 Do umbigo até o chão: 84 Cm	1,59	
	Do queixo até início do cabelo: 18 Cm Do queixo até as sobrancelhas: 12 Cm	1,50	
[redacted] Faltou	Da altura do aluno: 0 Do umbigo até o chão: 0		
	Do queixo até início do cabelo: 0 Do queixo até as sobrancelhas: 0		

O que podemos concluir com os resultados?

A [redacted] é a menina que chegou o mais perto do padrão, nem todos os meninos ficaram com o resultado final

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Atividade 3

A reforma do estádio.

REFORMA DO ESTÁDIO

Para iniciar esta atividade os alunos foram levados até o estádio João Hermógenes de Andrade na cidade de Andirá que fica próximo à escola e estava passando por uma reforma.

Ao observar as reformas em andamento no estádio, os alunos mostraram interesse em saber se a grama poderia ser trocada e o quanto seria gasto nessa substituição. Emerge então, a necessidade de realizar medições!

De posse de vários instrumentos de medição, escolheram a trena para dar início aos trabalhos. Realizaram as medições da área a ser estudada e retornaram entusiasmados à escola. As medições aferidas indicam que a parte gramada do estádio tem 90 m de comprimento e 60 m de largura. Durante as medições, o jardineiro que lá se encontrava, informou que a última notícia sobre o valor da grama, teria sido 6 reais o metro quadrado.

Considerando a sequência de atividades de modelagem matemática, esta atividade se configura como uma atividade de acompanhamento pois os alunos já haviam estudado o cálculo de área em sala de aula, no livro didático com a professora como também já haviam desenvolvidas duas atividades anteriormente.

Chegando na sala de aula, os alunos foram organizados em 5 grupos, formados por 5 alunos cada, e munidos de calculadoras, lápis, papel e as medidas realizadas em loco no estádio. Foi entregue aos alunos uma folha com a imageem conforme Quadro 5.

Quadro 5 – Atividade 3 – A reforma do Estádio

A reforma do Estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma. Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é: **Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?**

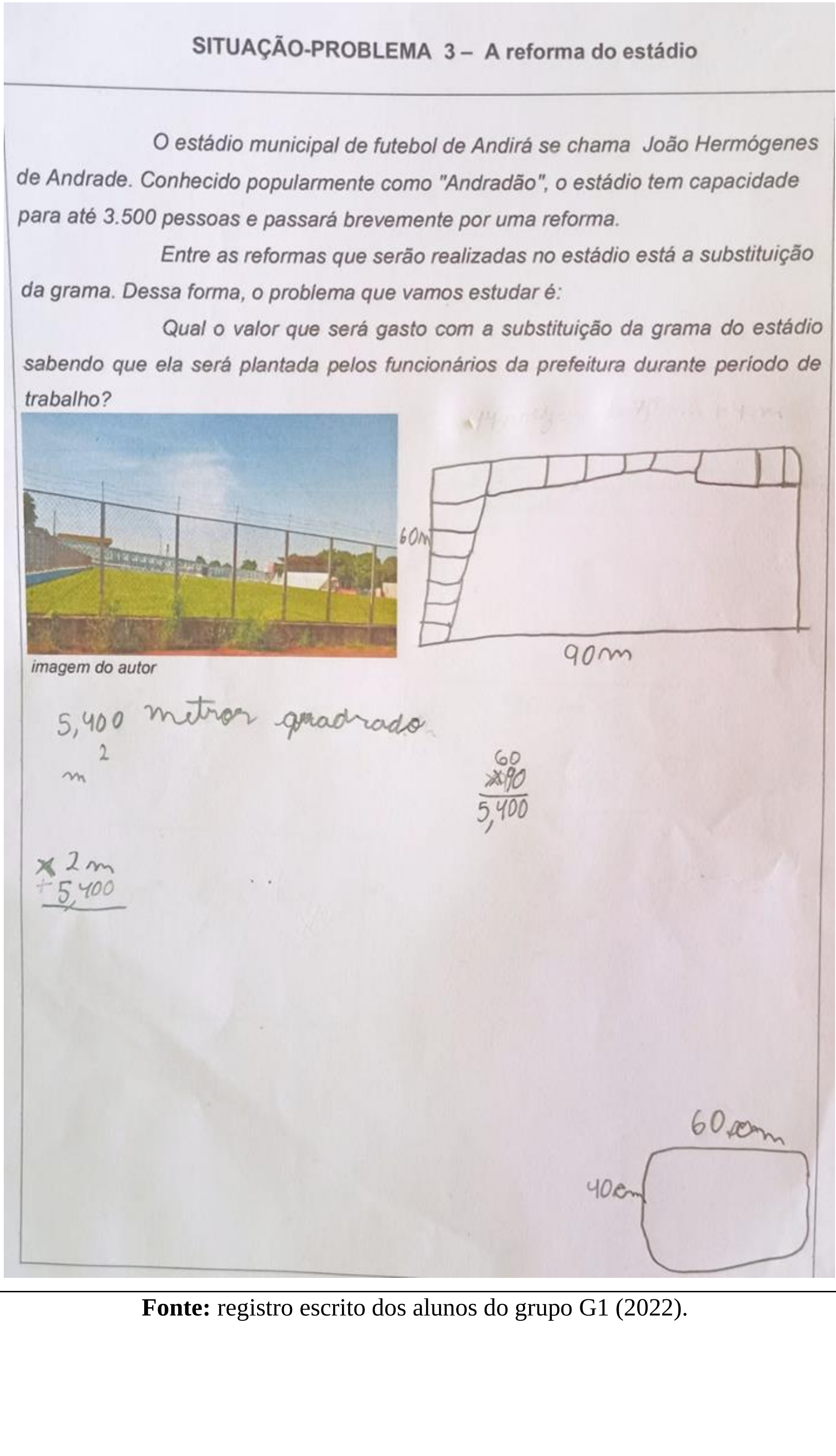
Fonte: Imagem do autor

Fonte: acervo da autora (2022).

Para determinar o valor a ser gasto, os alunos estavam cientes de que deveriam calcular a área do campo a ser gramada e usar o valor a ser pago por metro quadrado da grama informado pelo jardineiro do estádio que é 6 reais.

Os alunos do grupo G1 iniciaram sua resolução, conforme indicado a seguir (Figura 16).

Figura 16 – Resolução dos alunos do grupo G1



SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?

imagem do autor

60m

90m

5,400 metros quadrado

m^2

$60 \times 90 = 5{,}400$

$\times$ 2 m

$+$ 5,400

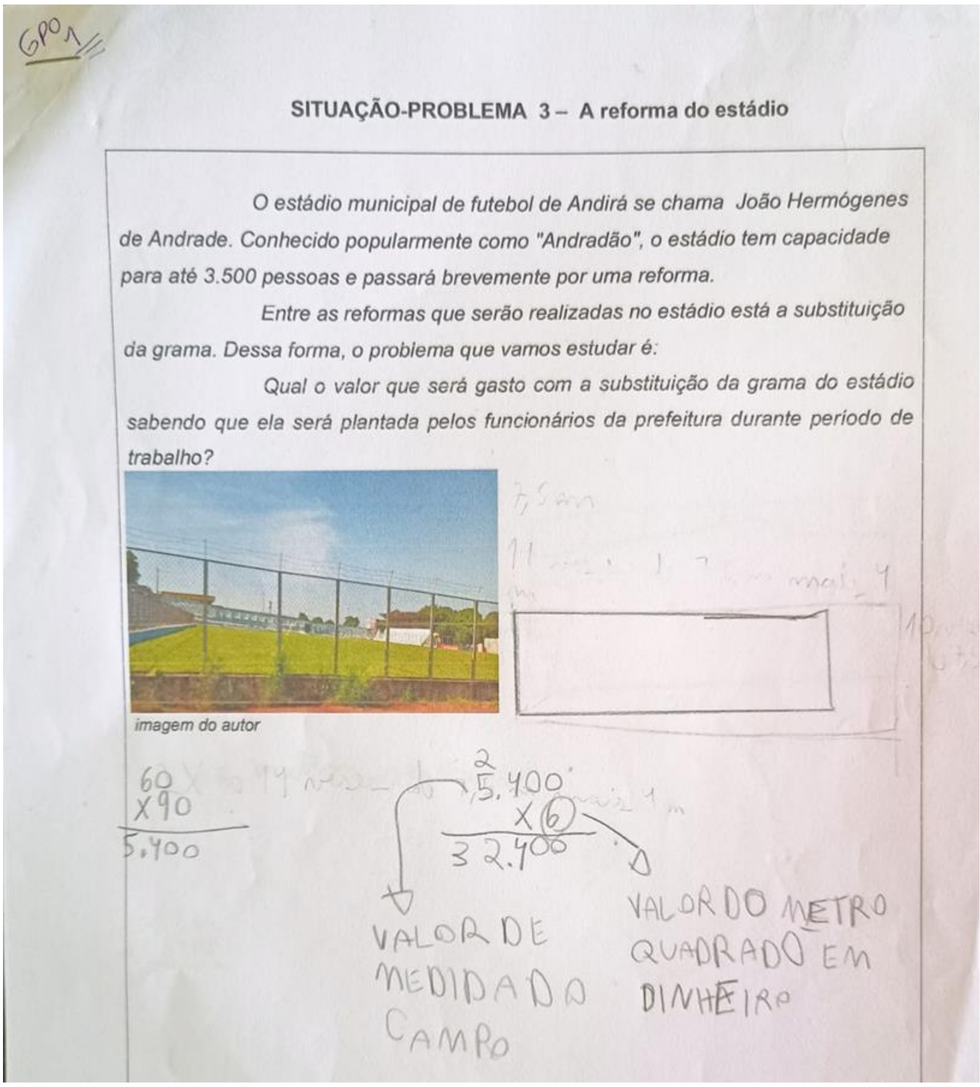
60,00m

40cm

Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

Conforme sinaliza o desenho, na parte inferior da Figura 16, o grupo fez uma tentativa de sobrepor a região com placas de grama de 60 cm de comprimento e 40 cm de largura, em consonância com a ideia de que a área pode ser determinada por “cobertura” ou “sobreposição” como sugere Walle (2009). Entretanto o grupo não consolidou essa resolução e acabou decidindo que o valor gasto corresponde ao total da área gramada multiplicado pelo valor da grama por metro quadrado (Figura 17).

Figura 17 – Resolução dos alunos do grupo G1


GPO 1

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?

imagem do autor

60 × 90 = 5.400

5.400 × 6 = 32.400

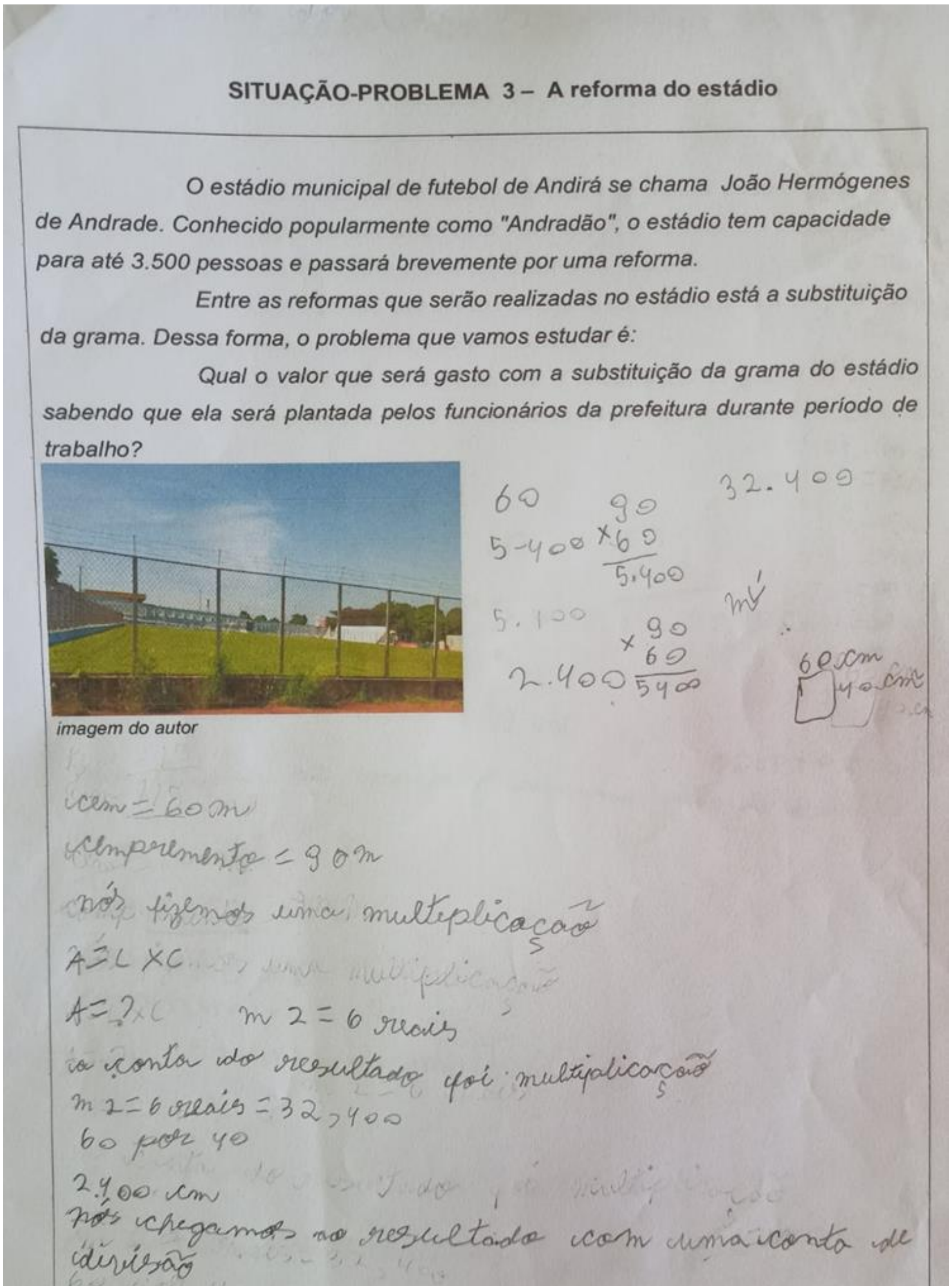
VALOR DE MEDIDA DO CAMPO

VALOR DO METRO QUADRADO EM DINHEIRO

Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G1.

Os alunos do grupo G2, embora tenham apresentado algum detalhamento para a resolução do problema, também reduziram a modelagem ao cálculo da área da região gramada e o produto pelo preço do metro quadrado de grama (Figura 18).

Figura 18 – Resolução das alunas do grupo G2



SITUAÇÃO-PROBLEMA 3 – A reforma do estádio

O estádio municipal de futebol de Andirá se chama João Hermógenes de Andrade. Conhecido popularmente como "Andradão", o estádio tem capacidade para até 3.500 pessoas e passará brevemente por uma reforma.

Entre as reformas que serão realizadas no estádio está a substituição da grama. Dessa forma, o problema que vamos estudar é:

Qual o valor que será gasto com a substituição da grama do estádio sabendo que ela será plantada pelos funcionários da prefeitura durante período de trabalho?

imagem do autor

60 90 32.400
5.400 x 60
5.400
m²
5.400 x 90
60
2.400 5400
60 cm
40 cm

1cm = 60m
comprimento = 90m
nós fizemos uma multiplicação
A = L x C
A = ? x C m 2 = 6 reais
a conta do resultado foi multiplicação
m 2 = 6 reais = 32,400
60 por 40
2.400 cm
nós chegamos no resultado com uma conta de divisão

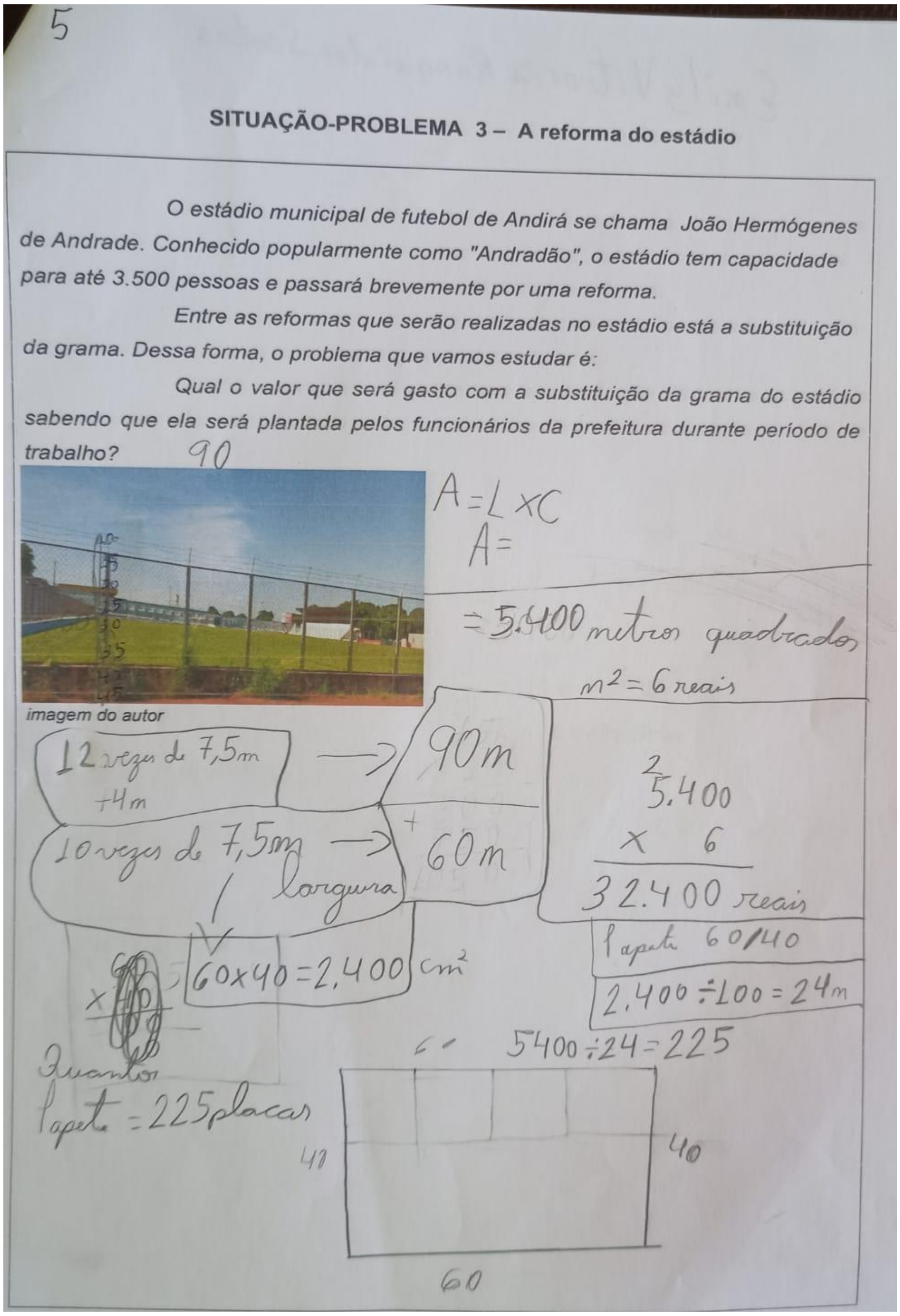
Fonte: Registro escrito das alunas do grupo G2 (2022).

Analogamente os grupos G3 e G4 também apresentaram resoluções que se limitam ao cálculo de área e o produto pelo preço da grama. De fato, o grupo considerou que a grama é vendida em placas que medem 60 cm x 40 cm.

Os alunos do grupo G5, embora também tenham determinado o valor da substituição da grama calculando a área da região e multiplicando pelo valor do metro quadrado de grama, avançaram em sua abordagem matemática da situação.

Determinando a área de cada placa, concluíram que seriam necessárias 225 placas. Entretanto, como não conheciam o valor de uma placa de grama, apresentaram como resposta que o gasto com a troca do gramado é de R$ 32.400,00 (Figura 19).

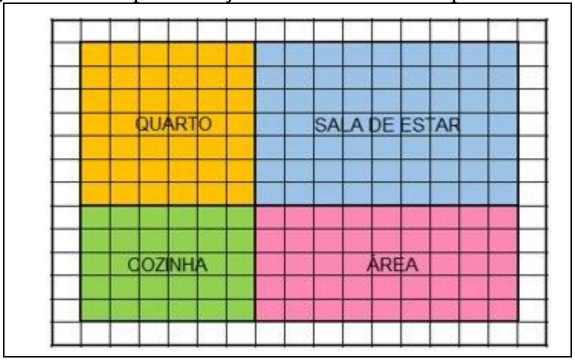
Figura 19 – Resolução dos alunos do grupo G5



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Um aspecto relevante durante a realização da atividade diz respeito à identificação do metro quadrado como unidade de medida de uma superfície. Para favorecer o entendimento desse conceito, a professora entregou folhas de papel quadriculado e esclareceu que o metro quadrado, corresponde a uma medida de área. Assim, saber o tamanho quadro ou da capa do caderno, por exemplo, corresponde a saber quantos metros quadrados tem esses objetos. Cada metro quadrado corresponde a um *quadradrinho* como na Figura 20.

Figura 20 – Representação de m² em malha quadriculada



Fonte: construído pela autora (2022).

Atividade 4

Descobrindo o número do calçado.

DESCOBRINDO O NÚMERO DO CALÇADO

Esta atividade se configura, relativamente à sequência de atividades de modelagem matemática, como atividade de acompanhamento. Os alunos já haviam realizado três atividades anteriores e já tinham certa autonomia para lidar com os instrumentos de medida e realizar as medições necessárias em cada atividade.

Para introduzir a situação a ser estudada, a professora propôs uma roda de conversa na sala de aula envolvendo todos os alunos que teve origem com a leitura do texto do Quadro 6 e de outras ideias dos alunos relativamente à obra de arte Abaporu.

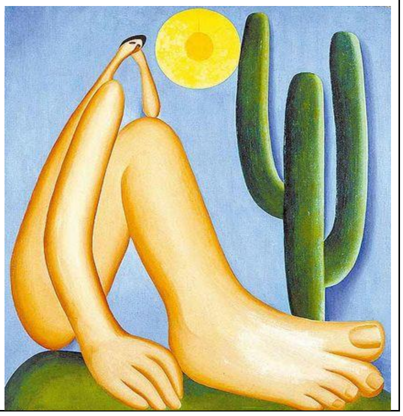
Quadro 6 – Descobrindo o número do calçado

DESCOBRINDO O NÚMERO DO CALÇADO

Essa obra chama-se *Abaporu* e foi pintada pela artista brasileira Tarsila do Amaral.

Na imagem, vemos que a artista tenta chamar nossa atenção para o tamanho do pé. Vocês sabem como podemos determinar o número de um calçado a partir da medida do pé?

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Abaporu.



Fonte: a autora (2022).

Para iniciar a atividade foi entregue uma folha contendo as informações conforme o Quadro 6 e os alunos formaram os grupos, mantendo os integrantes como nas atividades anteriores. Além disso, sementes como feijão, arroz e milho também foram distribuídas aos grupos.

Inicialmente, a atenção dos alunos se voltou à falta de proporção entre o tamanho do pé e o tamanho da cabeça que pode ser observada na figura relativa à obra Abaporu. Havia nos alunos, uma intenção de *explicar* porque essa desproporção era evidenciada pela autora da obra.

Entretanto, a professora acenou que trabalhos de arte podem não ter uma associação com a realidade e obras *abstratas* são recorrentes. A imagem seria apenas uma motivação para produzir as possibilidades de associação entre o tamanho do pé e o número do calçado. Assim, inicialmente aspectos históricos, conforme sugere o Quadro 7, foram abordados relativamente à numeração de calçados e ao número do pé.

Quadro 7 – Informações históricas sobre a numeração do calçado

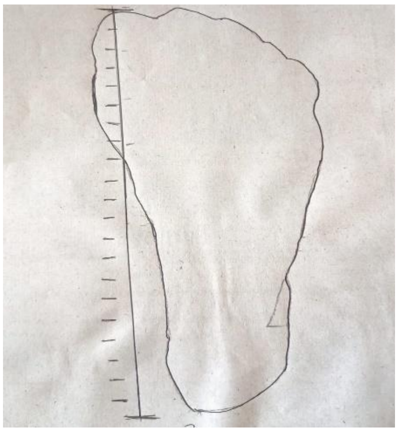
Segundo reportagem da revista Superinteressante de 31 de julho de 2004, a história da numeração do sapato se iniciou com um decreto do rei Eduardo I, da Inglaterrra, no ano de 1305. O decreto estabelecia que uma polegada fosse considerada a medida de 3 grãos secos de cevada alinhados. Hoje sabe-se que uma polegada equivale a 2,54 centímetros. Os sapateiros ingleses se entusiasmaram com a ideia e passaram a fabricar, pela primeira vez na Europa, sapatos com *tamanho padrão*, baseando-se nos tais grãos de cevada. Um calçado que medisse, por exemplo, 37 grãos de cevada era identificado como sendo de tamanho 37. Isso facilitou a vida dos fabricantes e dos fregueses que, antes da padronização, precisavam provar várias vezes o sapato até que ele ficasse pronto. Mas não basta enfileirar grãos de cevada para conferir o número do calçado para seus pés! Durante a revolução industrial, os países europeus decidiram padronizar o tamanho do grão e o transformaram em uma unidade métrica chamada *ponto*, mantendo-se até hoje essa padronização. No entanto, o tamanho desse ponto varia de um lugar para outro e é por isso que a numeração muda de acordo com o local. O ponto francês, que é adotado pelo Brasil e na Europa em geral, tem dois terços de um centímetro (0,666 centímetro). Os Estados Unidos utilizam o ponto inglês. Por isso, o formato dos sapatos norte-americanos é mais comprido.

Fonte: adaptado de https://super.abril.com.br/comportamento/como-se-mede-o-numero-de-sapato/.

A partir da apresentação desses aspectos aos alunos, a professora definiu juntamente com os cinco grupos o problema: Como podemos saber o número do calçado a partir do tamanho do pé?

Inicialmente, em cada grupo um dos alunos traçou um *molde* do pé conforme ilustra a Figura 21.

Figura 21– Molde do pé traçado pelos alunos



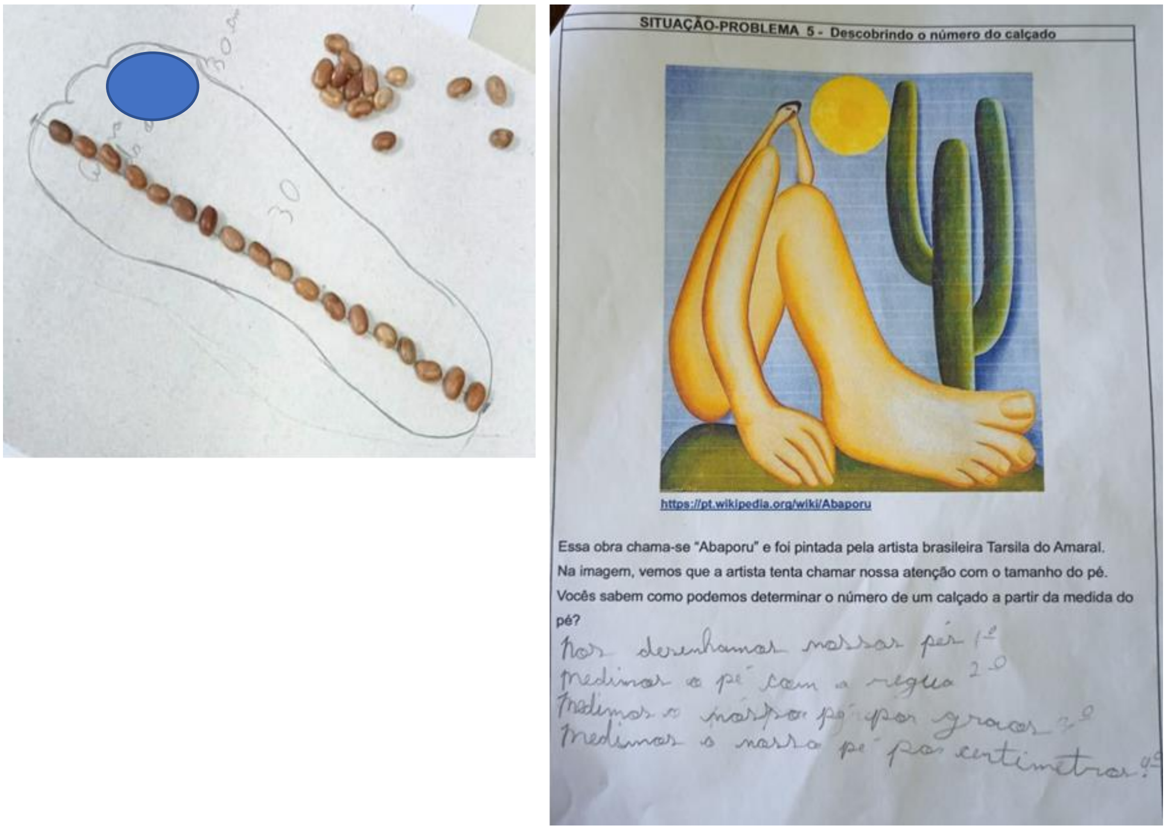
Fonte: Registro dos alunos (2022).

Embora em pesquisas na internet, usando seus telefones celulares, os alunos tenham encontrado relações do tamanho de um grão de cevada com outras unidades de medida como centímetros e metros, por exemplo, já sabiam que um grão de cevada corresponde a, aproximadamente, 0,84cm a partir dos dados apresentados pela professora conforme consta no Quadro 7. Não encontraram, entretanto, relações com as sementes que possuíam como o feijão, o milho e o milho de pipoca.

A partir da orientação da professora, os alunos mediram o comprimento do pé (com a régua). A partir disso, nos grupos, diferentes estratégias foram realizadas usando as sementes disponíveis.

Os alunos do grupo G2 iniciaram sua atividade, preenchendo a linha central da imagem do pé com grãos de feijão (Figura 21).

Figura 21 – Resolução dos alunos do grupo G2



Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

Inicialmente a tentativa (hipótese) foi obter o tamanho do calçado usando grãos de feijão. No entanto, considerando o tamanho do grão, o grupo discutiu sobre a disposição dos mesmos:

> *A3: Acho que tem que colocar os grãos todos em pé, porque se não fizer isso, vai dar errado, porque os feijões são muito grandes.*

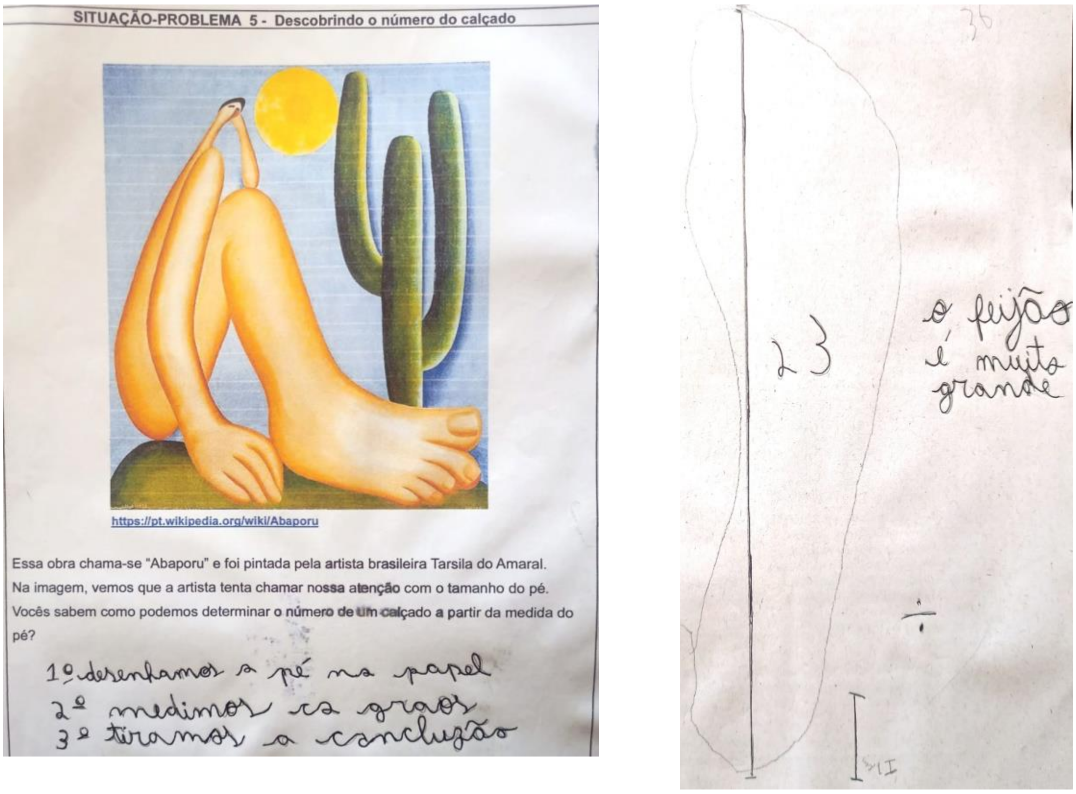
Decidiram então, usar outro grão, o arroz uma vez que o tamanho dos grãos seria mais próximo do tamanho dos grãos de cevada.

> *A1: Gente, já vamos colocar o arroz porque para ver se dá certo!*

Considerando, então, que o tamanho de um grão de feijão corresponde ao tamanho de dois grãos de arroz, e que colocaram 18 grãos de feijão, colocaram 36 grãos de arroz. Assim, o número do calçado, usando a regra definida pelo rei, seria 36.

Os alunos do grupo G3, usando o contorno do pé de um aluno e medindo-o com a régua, também constatou que os grãos de feijão seriam muito grandes se comparados aos grãos de cevada. Tentaram várias hipóteses, mas acabaram optando em usar o comprimento do pé medido em centímetros (23cm) e dividiram por 0,66, o ponto francês, usado no Brasil, conforme sugerem as informações do Quadro 7. Assim, concluíram que o tamanho do calçado seria 35, porque aproximaram o valor decimal obtido na divisão (Figura 22).

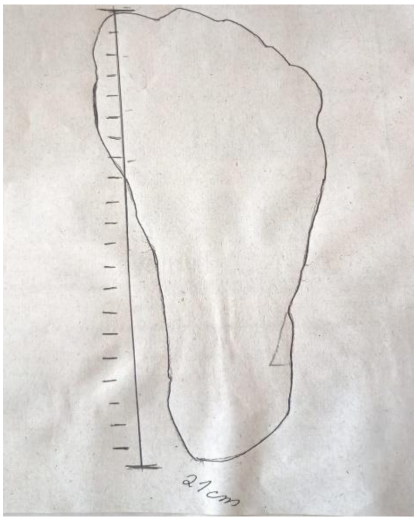
Figura 22 – Resolução dos alunos do grupo G3



Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

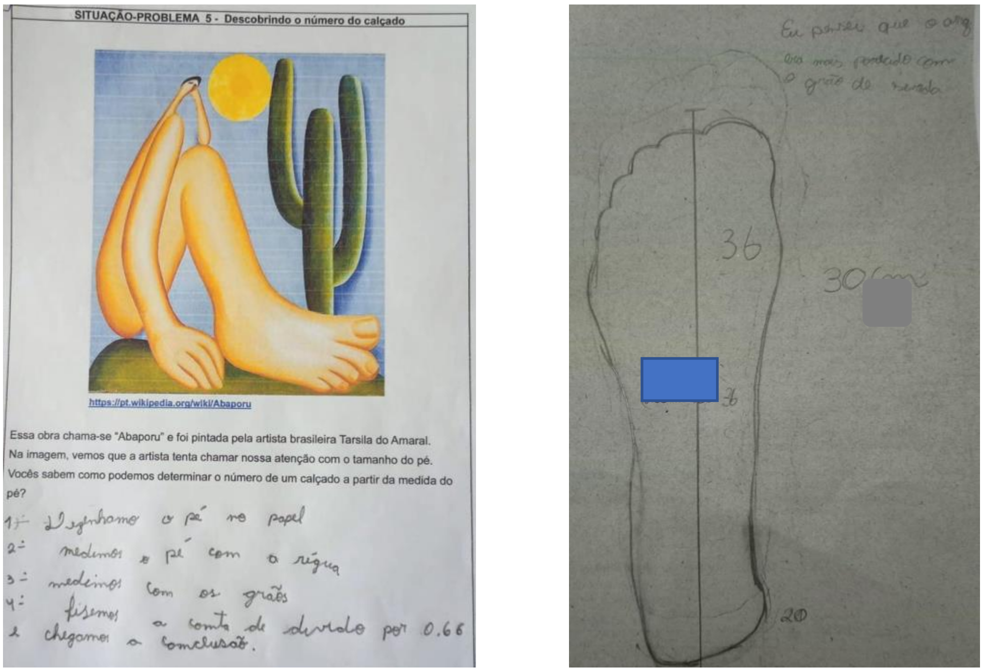
No grupo G4 e no G5 não houveram tentativas de usar grãos. Em cada grupo usaram o contorno do pé de um dos alunos do grupo, mediram esse comprimento com a régua e fizeram a divisão por 0,66 considerando a informação do Quadro 7 apresentada pela professora. Na figura 23 está o contorno do pé de G4, que com a medida de 21cm no comprimento do pé conclui que a numeração do calçado é 32, fazendo aproximações decimais. Na Figura 25 está a representação de G5, que usando um pé de comprimento de 20cm chegou a conclusão que o número do calçado da aluna seria 30.

Figura 23 – Resolução dos alunos do grupo G4



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Figura 24 – Resolução dos alunos do grupo G5



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Diferentemente dos alunos do grupo G4, que abandonaram a tentativa de dispor os grãos e contar para chegar à solução do problema, os alunos do grupo G5, dispuseram os grãos de arroz no contorno e também, concomitante, usaram a régua para medir o comprimento do pé, efetuando assim, o método padronizado: dividir o comprimento do pé por 0,66. Obtiveram sucesso em seus resultados durante a validação.

Atividade 5

O estacionamento da escola

ESTACIONAMENTO DA ESCOLA

Na quinta atividade da sequência, uma atividade de acompanhamento, a professora em conjunto com os alunos definiram pelo estudo de uma situação-problema da realidade vivenciada na escola e o desenvolvimento da sequência de atividades pôde oferecer oportunidades para os alunos vivenciarem atividades diferenciadas envolvendo conceitos geométricos relacionados a sua realidade bem como estabeleceu vínculo real por meio de um problema real vivenciado pelos alunos diariamente bem como proporcionou a pesquisa em sites da internet e o uso de recurso tecnológico como a calculadora e o telefone celular com fins específicos na sala de aula.

Para o desenvolvimento da atividade, inicialmente a situação problema foi discutida com todos os alunos, e na sequência com a finalidade de organizar a coleta de dados e informações sobre o estacionamento, os alunos divididos em cinco grupos, G1, G2, G3, G4 e G5, foram junto com a professora visitar o local (Figura 25).

Já pensando em como coletar dados, os alunos definiram a trena como instrumento de medida mais adequado para coleta de medidas maiores, pois já haviam utilizado na atividade do estádio.

Figura 25 – Foto do Estacionamento da escola

Fonte: acervo da autora (2022).

No desenvolvimento da aula, a introdução da notação científica e o significado associado ao quadrado de um número foi explorado com os alunos. Neste contexto, a atividade proporcionou a introdução de novos conceitos matemáticos, bem como seu uso a partir de uma situação-problema.

Na realização da atividade os alunos deveriam realizar suposições para resolver três problemas pertinentes ao estacionamento: como organizar as marcações no espaço do terreno de modo a abrigar carros e moto; quantos carros o estacionamento pode comportar e, se é possível vagas para motos.

Para a descrição da atividade em cada grupo, trazemos o modo como os alunos formularam essas suposições, falas dos alunos que sinalizam a atividade de cada grupo e o modo como usaram as medidas realizadas para resolver o problema.

No desenvolvimento da atividade pelos alunos do grupo G1, eles iniciaram elegendo a trena como instrumento viável para realizar a medição, as medidas do terreno encontradas pelos alunos foram de 12m de largura por 25m de comprimento.

A professora os lembrou do espaço para a manobra e decidiram medindo a largura de um dos carros, que 5m seria ideal para realizar a manobra, espaço que ocuparia o centro do estacionamento.

Também foi medido um carro popular com uma abertura suficiente da porta que culminou em uma medida de 3,25m de largura por 2,50m de comprimento.

Com as medidas em mãos, em sala de aula foi realizado uma roda de conversas sobre leis de trânsito existentes no Brasil que destinam 5% de vagas para idosos e 2% para pessoas com deficiência. Foi discutida a importância em desenvolver empatia e obedecer a lei que penaliza quem não as respeita.

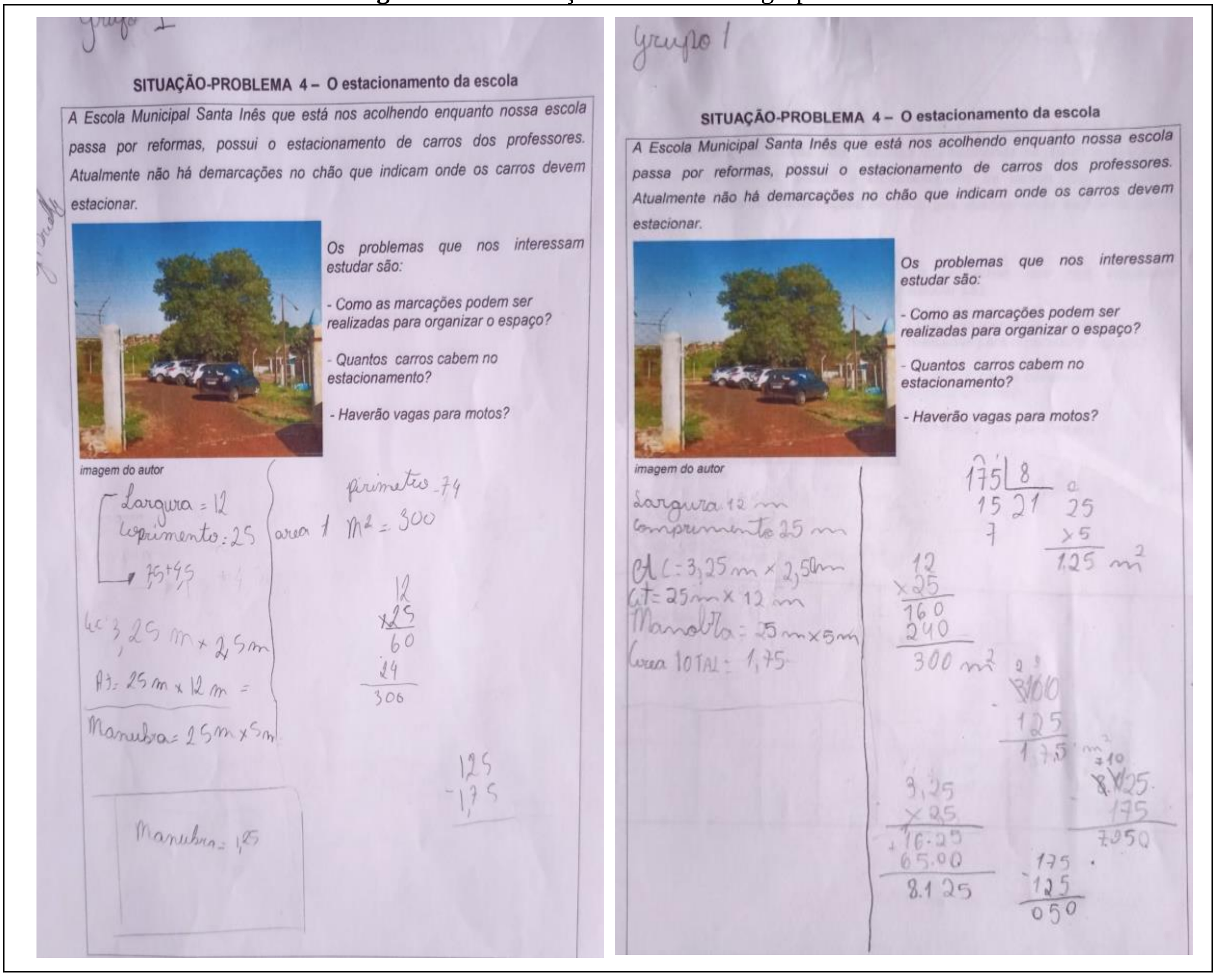
Assim, deram continuidade ao desenvolvimento da atividade e após a inteiração em sala, em posse das medidas, a professora distribuiu as folhas das atividades com a seguinte problematização: Quantos carros cabem no estacionamento? Nesse instante deu-se início à matematização, segunda fase proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2016).

Os alunos do grupo G1 compreenderam que deveriam encontrar a área total do estacionamento e a área de corredor para as manobras. Também pontuaram a necessidade em medir um carro popular. Para isso, propuseram:

> *A3: Professora, podemos voltar ao estacionamento para medirmos um carro?*

Novamente os alunos se dirigiram até o estacionamento e mediram um carro popular, cujas medidas foram de 3,25m de comprimento por 2,50m de largura, totalizando, por meio de uma multiplicação, o valor de 8m^2. Os alunos em seguida por meio da multiplicação calcularam a medida do terreno equivalente a 300m^2 . Ainda, como vemos na foto (Figura 26), calcularam o espaço do corredor que deveria ser deixado p manobra por meio de uma multiplicação, cujo produto foi de 125m^2.

Figura 26 – Resolução dos alunos do grupo G1



Fonte: regisgtro escrito dos alunos do grupo G1 (2022).

De posse de todas as medidas, diante de uma subtração, encontraram a área restante de 175 m^2 e dividiram pela área do carro, 8m^2 encontrando o quociente 21, ou seja, 21 carros.

No grupo G1, os alunos conseguiram validar e chegar a solução para o problema, que foi o total de 21 carros. Podemos constatar com a fala dos alunos:

A1: Nossa! Vou colocar 10 de cada lado!
A2: Deu 21. Mas, e as motos?
A1: A gente deixa uma vaga que vai sobrar, para colocar as motos.

Entre os alunos do grupo G1, pudemos constatar também, que na tentativa de resolver o problema proposto, organizar o estacionamento da escola, os alunos ainda confundiam área com perímetro: *" Tia, é igual do estádio que fizemos ou igual perímetro que a professora ensinou no livro?"*. Algo que ainda não havia ficado claro para eles, visto que o perímetro é a medida dos lados de uma figura e a área mede toda a sua superfície (sobreposição). Neste momento a professora interviu explicando-lhes e os alunos puderam dar continuidade ao desenvolvimento da atividade. Ficou combinado que ao término da sequência das cinco atividades, iriam até o estacionamento para concretizar as medições do perímetro, bem como medições de outros espaços da escola já que os alunos disseram que haviam estudado somente no livro didático.

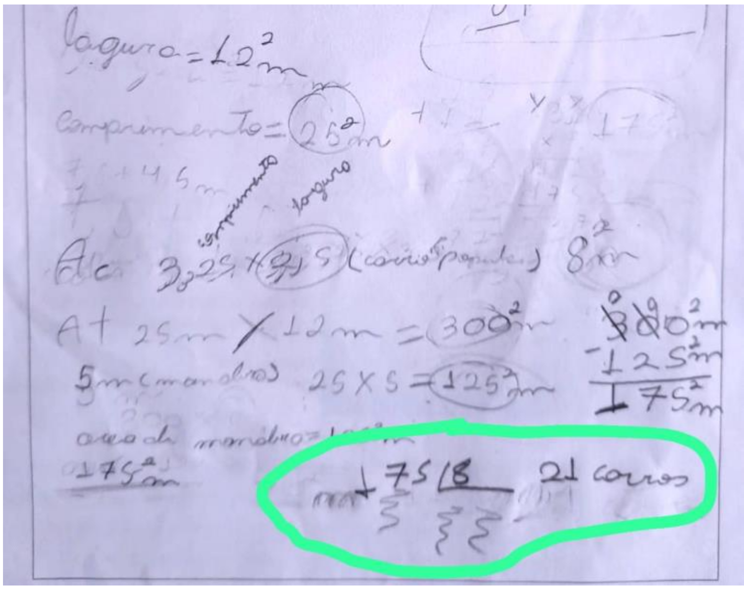
> *A1 do G1: Tia, do jeito que você tá fazendo é mais fácil pra entender porque a gente vai lá e vê.*

A fala sinaliza a atribuição de sentidos ao conceito de medidas e medições para além do uso corriqueiro em sala de aula com malhas quadriculadas e caderno, bem como do uso dos conceitos em uma situação-problema real.

Os alunos do grupo G2 realizaram o procedimento parecido com o G1, encontraram a área do estacionamento, a área do corredor para manobras e o espaço necessário destinado a cada carro, como sinalizado no diálogo da aluna A7 com a professora:

> *A2: Tia, eu não sei fazer essa continha, mas minha colega fez e sobraram 7 de resto. O que dá prá fazer?*
> *Prof.: O carro é um objeto inteiro? Então vamos considerar o número inteiro. O que acham?*
> *A2: Eu acho que deve aproximar para 20 e não ficar muito apertado. Colocamos 10 de cada lado e quem quiser usa uma vaga do carro para pôr moto.*

Figura 27 – Resolução das alunas do grupo G2

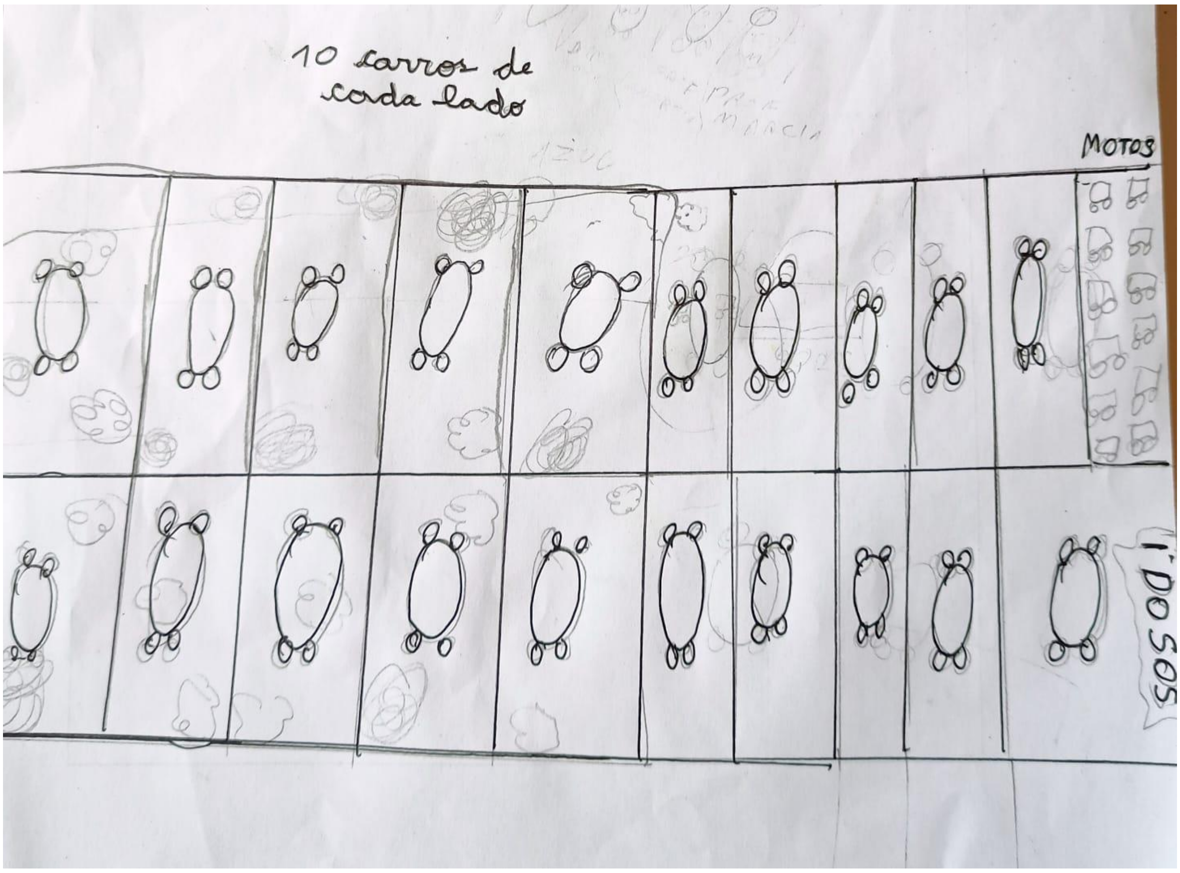


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2; grifo nosso, o colorido (2022).

A mesma aluna A2, apesar de não saber realizar a divisão, sugere em sua fala, uma forma de resolver o problema relacionado às vagas para motos, que surgiu durante o desenvolvimento da atividade.

A Figura 28 apresenta os registros dos alunos deste grupo, por meio de um desenho na tentativa de interpretação de resultados e validação de sua resposta.

Figura 28 – Resolução das alunas do grupo G2



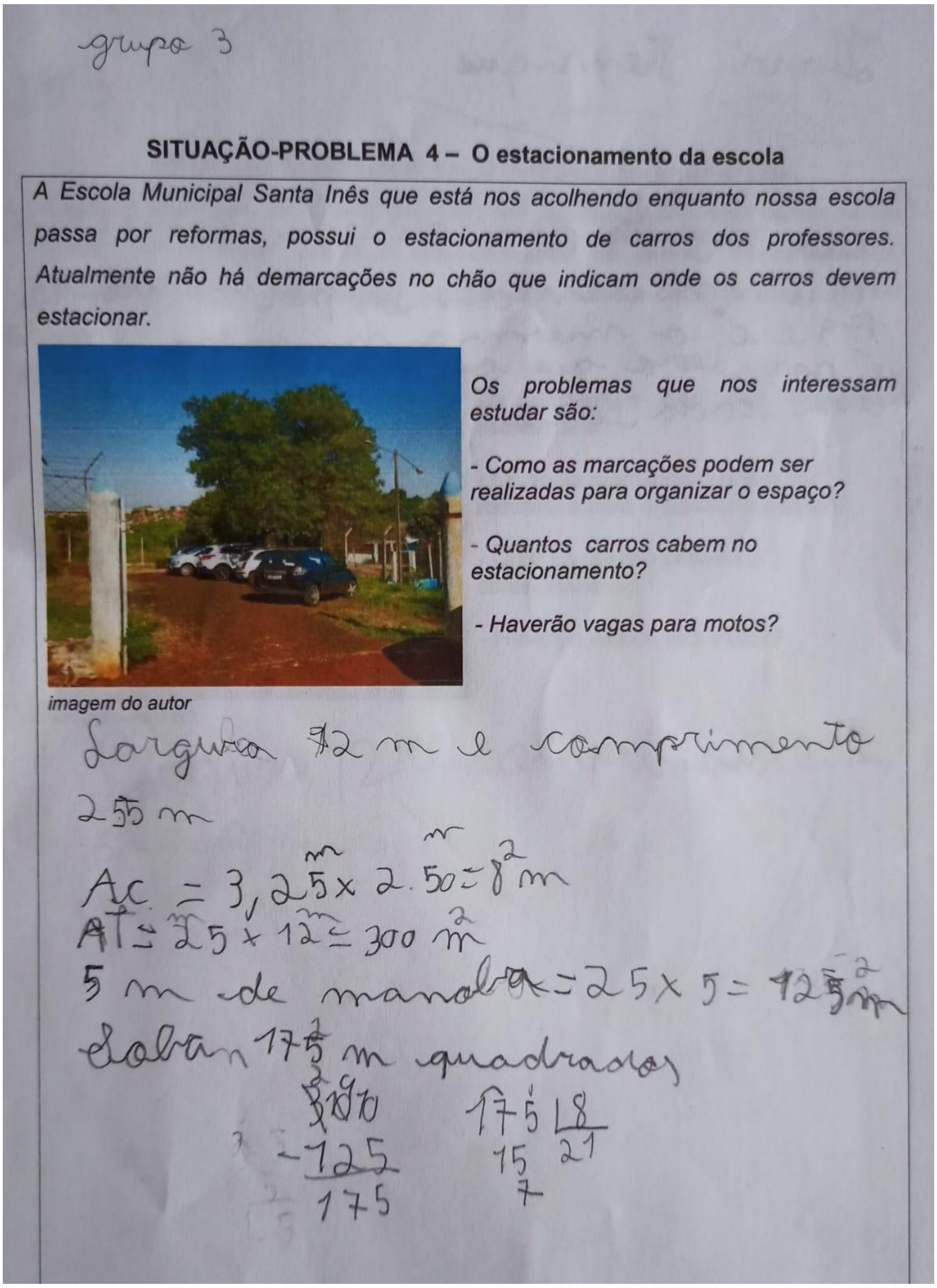
Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G2 (2022).

O cuidado em compartilhar uma vaga de carros com as motos, também foi apresentada pelos alunos do grupo G2, bem como uma vaga para idosos. Houveram tratativas no grupo do tipo:

> *A2: "Gente, nem precisa de vagas para idosos, aqui só tem professora e professora não é idosa. E moto, só tem duas professoras que têm moto, pouco espaço dá certo!"*

Com relação aos procedimentos utilizados pelos alunos do grupo G3, para passar da situação inicial para a situação final durante o desenvolvimento da atividade, constatamos que o grupo desenvolveu procedimentos parecidos aos grupos anteriores citados. Encontraram as medidas do estacionamento, as medidas do corredor para manobras, bem como o tamanho do carro. Mediante a área que havia sobrado, por meio de uma divisão, chegaram a quantidade de vagas, ou seja, 21 vagas (Figura 29).

Figura 29 – Resolução dos alunos do grupo G3



grupo 3

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4 – O estacionamento da escola

A Escola Municipal Santa Inês que está nos acolhendo enquanto nossa escola passa por reformas, possui o estacionamento de carros dos professores. Atualmente não há demarcações no chão que indicam onde os carros devem estacionar.

Os problemas que nos interessam estudar são:

- Como as marcações podem ser realizadas para organizar o espaço?

- Quantos carros cabem no estacionamento?

- Haverão vagas para motos?

imagem do autor

Largura 12 m e comprimento 25 m

$Ac = 3{,}25\,m \times 2{,}50\,m = 8\,m^2$

$AT = 25\,m \times 12\,m = 300\,m^2$

5 m de manobra $= 25 \times 5 = 125\,m^2$

Sobra $175\,m^2$ quadrados

$300 - 125 = 175$

$175 \div 8 = 21$, resto 7

Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G3 (2022).

Neste grupo, os alunos a partir das medidas obtidas do estacionamento e do carro popular utilizam das operações de divisão e multiplicação para obter o número de vagas. Não há em seus registros, diferente dos demais grupos, menção a reserva de espaços para motos.

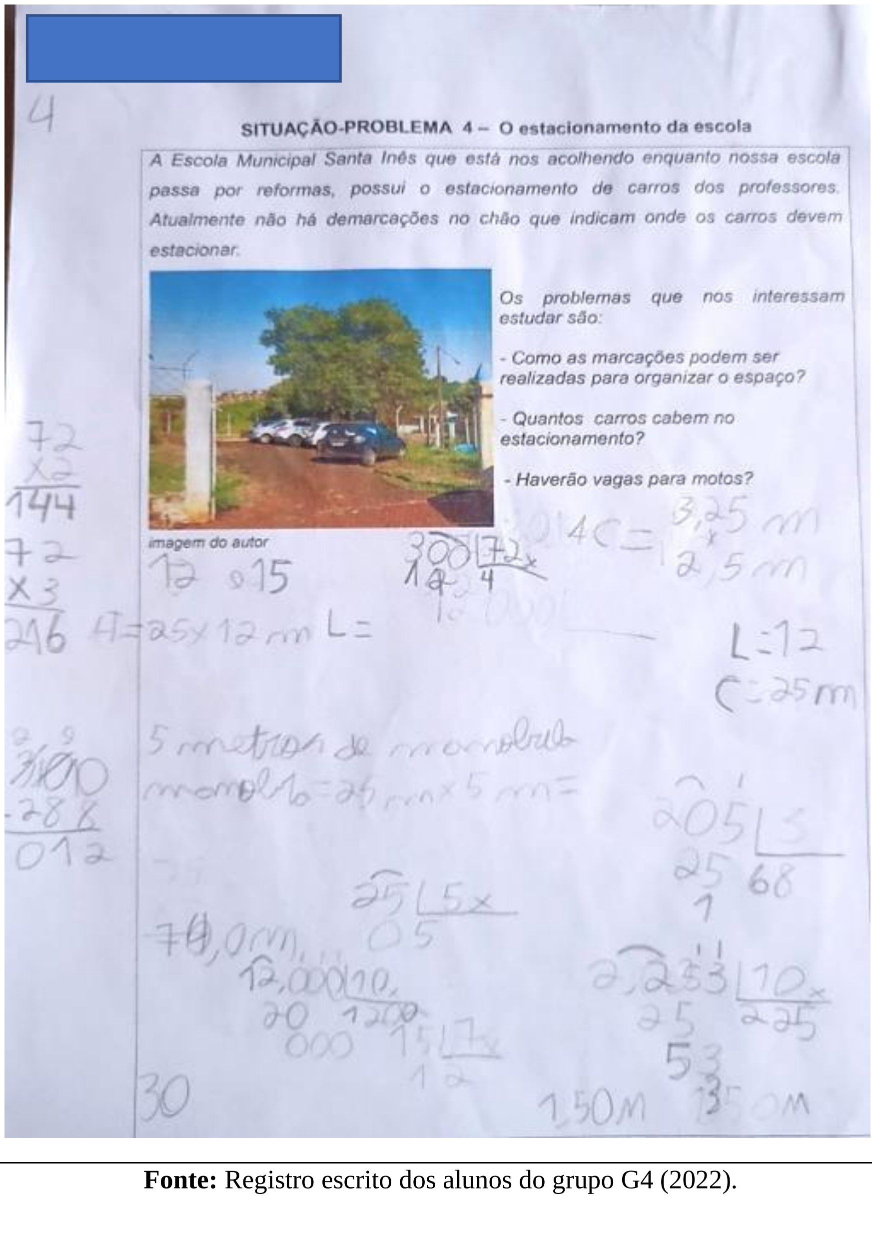
Os alunos do grupo também não registraram respostas para as perguntas colocadas na situação-problema (veja na Figura 29).

Um aspecto relevante neste grupo G3, foi perceber como os alunos lidaram com as nomenclaturas e abreviações, metro e metro quadrado como vemos na tentativa de resolução realizada. Ora o expoente está sobre a letra m, ora sobre o numeral. Talvez o fato ocorra por ainda não estarem familiarizados com a notação.

No desenvolvimento da aula, a introdução da notação científica e o significado associado ao quadrado de um número foi explorado com os alunos. Neste contexto, a atividade proporcionou a introdução de novos conceitos matemáticos, bem como seu uso a partir de uma situação-problema.

No desenvolvimento dos alunos do grupo G4, os alunos tentaram de diversas maneiras encontrar as medidas necessárias para chegar à resposta para o problema, porém não obtiveram sucesso como indica a Figura 30.

Figura 30 – Resolução dos alunos do grupo G4

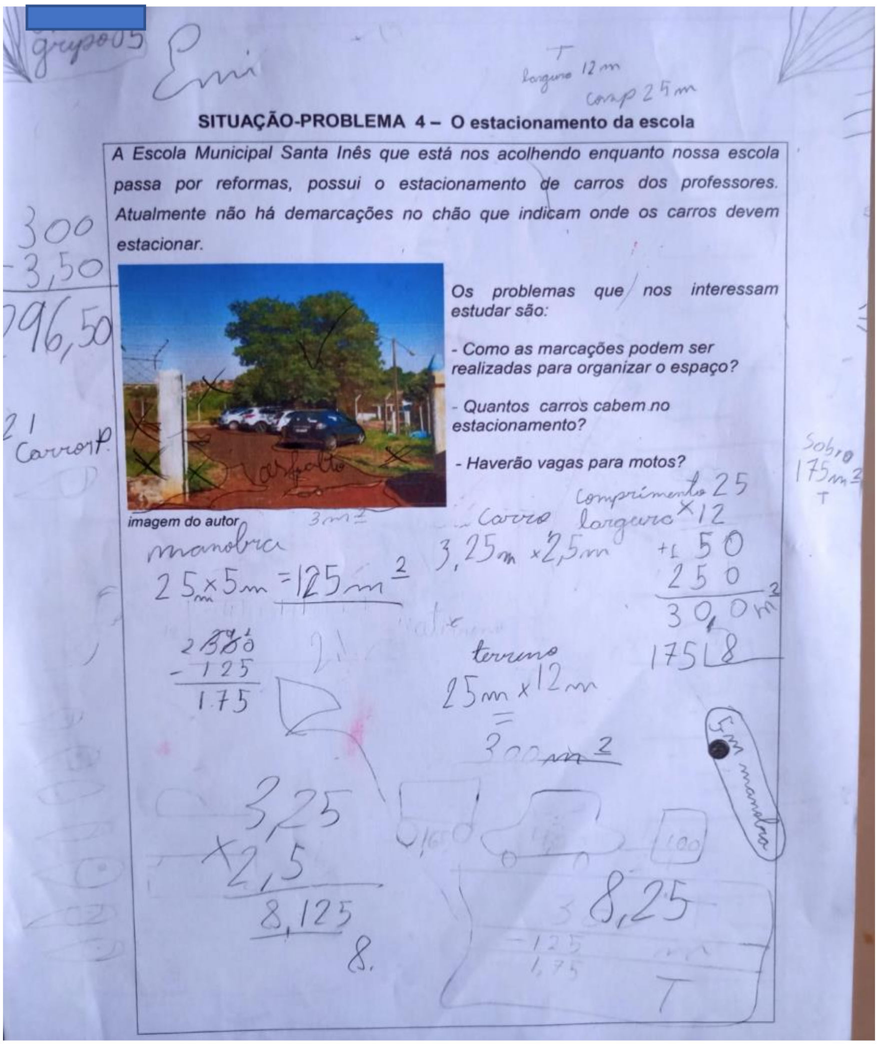


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G4 (2022).

Nota-se que mesmo usando as medidas obtidas no estacionamento, os alunos tiveram dificuldades em selecionar ferramentas e operações matemáticas adequadas para resolução.

Já, os alunos do grupo G5, no desenvolvimento da atividade, conseguiram chegar com êxito a uma resposta para o problema. Multiplicaram a largura do terreno pelo comprimento e obtiveram 300 m^2. Vemos no registro que apresentam dúvidas e colocam vírgula no produto encontrado que passa de 300 para 30,0m^2. Após, abandonam a vírgula quando realizam uma subtração pela área do corredor (125m^2) de manobras (Figura 31).

Figura 31 – Resolução dos alunos do grupo G5

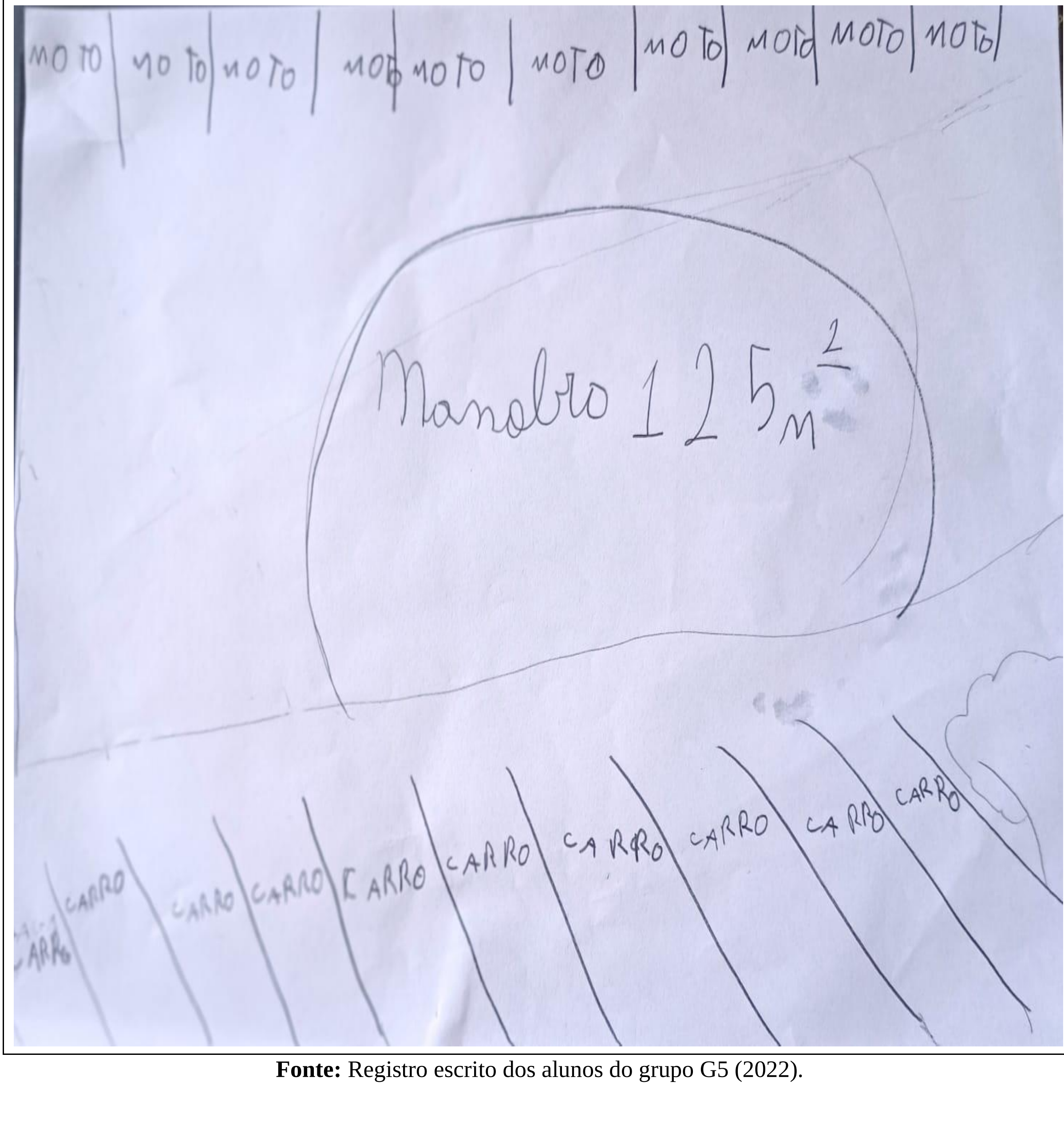


Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

A aluna A2 do grupo G5, propôs que deixassem um lado somente para carros e o outro lado somente para estacionar motos. Temos no desenho, a ideia de modelo apresentada, ou seja, a solução encontrada para o problema, associado a uma representação, nesse caso, o desenho utilizado pelos alunos nessa etapa dos anos iniciais do Ensino Fundamental (Figura 32). No entanto, em discussão, a ideia foi refutada pelo grupo pois, nas falas, argumentam:

> *A2: Pessoal, vamos deixar o lado de lá só pra motos e o lado de cá para os carros! O que acham?*
> *A4: Não vai dar. Aqui na nossa escola tem mais professoras que dirigem carros do que motos, tem que deixar mais vagas pra carro!*

Figura 32 – Resolução dos alunos do grupo G5



Fonte: Registro escrito dos alunos do grupo G5 (2022).

Os alunos do grupo G5 não realizaram a divisão da área que sobrou com relação ao espaço ocupado pelo carro, no papel, porém utilizaram a calculadora. Quando questionados responderam que a calculadora "deixa mais fácil" para pensar na resposta mas quase nunca podem utilizar na sala de aula.

A professora interviu e explicou que a calculadora é uma ferramenta necessária que precisam ter liberdade em manusear mas, também precisariam compreender o procedimento realizado da forma convencional, no papel como estão habituados. Após insistência do grupo, a professora prometeu que viria mais vezes realizar outras atividades com eles para que tivessem a liberdade de utilizar a calculadora. Sobre o uso da calculadora e a realização de atividades dessa natureza os alunos comentaram:

> *A2: Eu gostei de usar calculadora nesses trabalhinhos com você, tia! Contei na minha casa que a calculadora era pra fazer tarefinha legal e que você levava a gente para ver primeiro e não fazia no caderno nem no livro!*
> *A5: Tia, fala pra nossa professora dar esses trabalhinhos de medir as coisas prá gente!*

Houve após a discussão, a socialização da atividade na frente da sala de todos os grupos para a turma e uma fala relevante de um dos alunos do grupo G4:

> *A3: Tia, a gente pode falar com a diretora dessa escola e mostrar pra ela que dá para arrumar o estacionamento para caber mais carros?*

A professora, pesquisadora, prometeu marcar um horário para falarem com a diretora futuramente, bem como agendar um dia e voltar na sala desta turma para sairem medir área e perímetro com a trena em diferentes ambientes da escola.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As cinco atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas no contexto de uma sala de aula e sinalizam como configurações contextualizadas podem promover interação entre conteúdo e *práxis*, proporcionando ao aluno a possibilidade de aventurar-se em suas hipóteses até encontrar uma resposta para um problema real.

O uso da modelagem matemática teve como ponto de partida a convicção de que o professor, pode se utilizar de estratégias que permitam atenuar as barreiras estabelecidas ao longo da história, transpor as barreiras que a sua prática lhe impõe e passar a transitar por situações desafiadoras, embora saibamos o quanto essa mudança de atitude requer tempo para preparação e aplicação.

O Produto Técnico Educacional é parte integrante da Dissertação de Mestrado Instituladada: "Modelagem matemática nos anos iniciais: um design usando sequência de atividades", disponível em <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Para maiores informações, entre em contato com a autora pelo e-mail mariaclaudiaselleti@gmail.com.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA L. M. W., A. S. E. R. V. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciências & Educação**, Bauru, n. 22, p. 19-35, 2005.

ALMEIDA, M. L. W; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**. Canoas, RS: ULBRA, v.14, n.2, p. 200-214, maio/ago. 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230. Acesso em: 20 jul. 2020.

ALMEIDA, L. M. W., & SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. (The mathematization in mathematical modelling activities.). **Alexandria**, 8(3), 207–227, 2015.

ALMEIDA, L. W. da; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. P. da S.; RAMOS, D. C. (2018). Sobre ensinar e aprender "o fazer" modelagem matemática. In **Anais** VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.Foz do Iguaçu: Brasil.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Moving beyond a single modelling activity. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Springer International Publishing, p. 293-303, 2015.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 187-200, 2018.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: editora contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, v. 2º, 2010.

BASTOS, J. F. **Modelagem Matemática na Educação Básica: uma proposta para a formação inicial dos professores do magistério**. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2018.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4ª ed. São Paulo: Contexto, 2005.

______. **Modelagem no Ensino Fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

BLUM, W. **Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?** In Sung Je Cho , (Ed.) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 73-96). New York: Springer., 2015.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigações qualitativas em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, Marta Maia de Assis. Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental: novas perspectivas. In: **XXV CONADE** - UFG, Goiás, Brasil, 2009

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: arte/ Ministério da Educação**. Secretária da Educação Fundamental. 3.ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Diretoria de Apoio à Gestão Educacional Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional**. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília, 2017. Disponivel em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: jun. 2019.

BRITO, D. D. S., ALMEIDA, L. M. W. D. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Actualidades Investigativas en Educación**, 21(1), 169-198.

BURAK, D. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. **Zetetiké**. v.2, n. 2, p. 10-27, 1994.

______. A modelagem matemática e a sala de aula. In: **I EPMEM – I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 2004. Anais ...Londrina, 2004.

BURAK, D. Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino: uma perspectiva. In: **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 12, 2014. Anais... Campo Mourão, 2014.

CARREIRA, S., BAIOA, A. M., ALMEIDA, L. M. W. (2020). Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. **AIEM - Avances de Investigación em Education Matemática**, (17), 67-83.

D'AMBRÓSI0, U. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação Matemática**, Campinas -S. P: Editora da UNICAMP, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Transdisciplinaridade**. 2 ed. São Paulo: Palas Athena, 2001

EVES, H., Geometria: **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática: representação e construção em geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERRI, R. B. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, p. 13-39, 2018.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as na educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. 1973.

GARBI, G. G.. **A rainha das Ciências**. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006

LESH, R.; CRAMER, K.; DOERR, H.; POST, T.; ZAWOJEWSKI, J. Model Development Sequences. In: Richard Lesh & Helen Doerr, (Eds.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Erlbaum, 2003.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 2, p.16 - 48, 2010.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e percepção Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2008.

MAAβ, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. **Teaching Mathematics and Its Application**, v 24, n. 2-3, p. 61-74, 2005.

MENDES, T. F.; ALMEIDA, L. M. W. de. Signos interpretantes em atividades de Modelagem Matemática . **Revista Eletrônica de Educação**, *[S. l.]*, v. 14, p. e3504064, 2020. DOI: 10.14244/198271993504. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/3504. Acesso em: 6 out. 2022.

MUNIZ, C. A. **Explorando a Geometria da orientação e do deslocamento** – In: MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO TP6 GESTAR II Matemática Brasília TP6 – GESTAR. 2007b.

NUNES, T.; *et al*. **Educação Matemática: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Educação Básica. Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná: Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. Vol. 1, No.6, 3-21, 2012.

SANT'ANA, A. A.; MOREIRA, A. L. L.; BEM, B. C.; FIGINI, D. C. C.; KOFENDER, M.. Pista de skate e modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2011, Belém. **Anais**... . Belém: UFPA, 2011. p. 1 - 13.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, 2012. 228-249.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, *[S. l.]*, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n2a12. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2937. Acesso em: 6 out. 2022.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Londrina: Universidade Estadual de Londrina - UEL, v. 168 f., 2012.